F I S I C A: Para Ciencias e Ingeniería

INTERACCION ELECTRICA

Ley de Coulomb / Campo Eléctrico / Ley de Gauss / Potencial Eléctrico / Condensadores y Dieléctricos / Corriente y Resistencia / Circuitos de Corriente Directa

CONTENIDO

1

LA CARGA ELECTRICA Y LA LEY DE COULOMB

La fuerza electromagnética entre partículas cargadas es una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Iniciaremos aquí nuestro estudio del electromagnetismo analizando la interacción entre cuerpos electrificados y limitándonos al caso en que uno de ellos está en reposo respecto del observador, el otro puede estar en reposo o en movimiento. En tales casos la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro tiene una forma que denominaremos fuerza eléctrica. En una unidad posterior nos ocuparemos de la fuerza magnética que aparece cuando ambos cuerpos están en movimiento respecto del observador. En este capítulo, presentaremos la carga eléctrica y sus propiedades básicas. A continuación analizaremos la ley de Coulomb que es la ley fundamental que rige la fuerza eléctrica entre cualesquiera dos partículas cargadas.

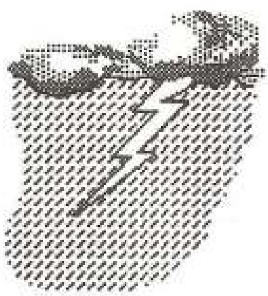
En este capítulo Ud. encontrará aspectos vinculados con:

- La carga eléctrica.
- La ley de Coulomb.
- La cuantización de la carga.
- La conservación de la carga.
- Conductores y aisladores.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

LA INTERACCION ELECTRICA

La interacción eléctrica está en todas partes; es la responsable de la estructura de los átomos, del enlace de los mismos en las moléculas y del comportamiento de los materiales, como la elasticidad de los sólidos, la tensión superficial de los líquidos y la presión de los gases.

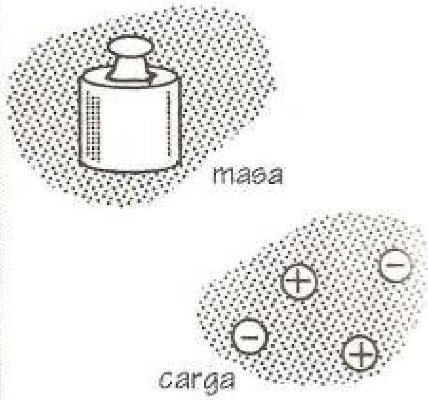


Es la que gobierna las reacciones químicas y todos los procesos biológicos: ver, sentir, moverse, pensar y vivir.

De hecho, la única fuerza de orígen no eléctrico que experimentamos en la vida cotidiana es la fuerza de gravedad.

LA CARGA ELECTRICA

Así como la *masa* es aquella propiedad responsable de la interacción gravitacional entre dos cuerpos, la *carga eléctrica* es otro atributo fundamental de la materia que permite a los cuerpos tener la capacidad específica de interactuar eléctricamente.



La intensidad de la interacción eléctrica de una partícula está determinada por su carga eléctrica.

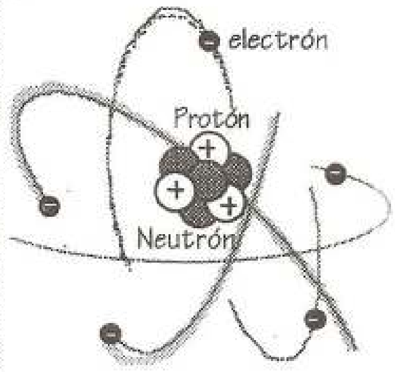
Existen dos tipos de carga eléctrica, que se denominan arbitrariamente *positiva* y *negativa.*

EL ATOMO

La carga eléctrica reside en el atomo, el cual está formado por un núcleo diminuto y masivo, rodeado de uno o varios *electrones* orbitando, los cuales son mucho más ligeros.

El núcleo contiene cierto número de *protones* con carga positiva y además, partículas neutras o *neutrones*. El número de electrones es el necesario para compensar exactamente la carga nuclear .

En esta situación el átomo es eléctricamente neutro ya que no posee carga eléctrica neta.



El átomo

UNIDAD SI DE CARGA

La unidad SI de carga es el *Coulomb* (C). Se define en términos de la unidad de corriente eléctrica, el **ampere** (A), como la carga que pasa por un punto particular en un segundo cuando la corriente es de 1 ampere.

$$1\,\text{Ampere} = \frac{1\ \text{Coulomb}}{\text{segundo}}$$

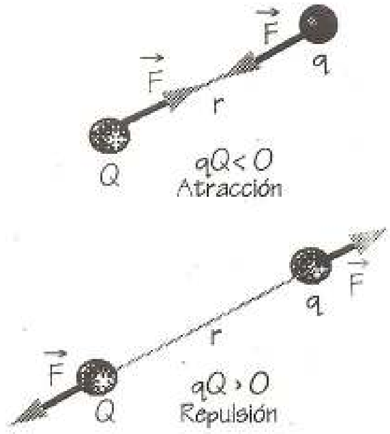
LA LEY DE COULOMB

A partir de observaciones experimentales, Coulomb estableció que la ley que rige la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo, tiene las propiedades siguientes:

1 . Es proporcional al cuadrado de la separación r, entre las dos partículas y actúa a lo largo de la recta que las une (fuerza central).

2 .Es proporcional al producto de las cargas q y Q de las dos partículas.

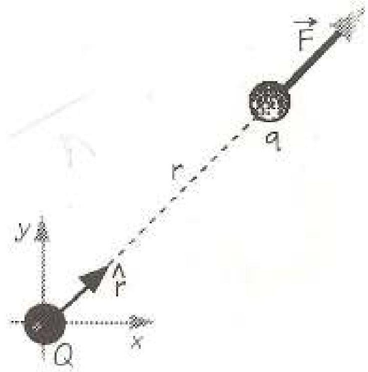
3 .Es de atracción si las cargas tienen signos opuestos y de repulsión, si las cargas tienen el mismo signo.



Si escogemos el origen de coordenadas en la posición de la partícula con carga Q y $\vec{r}$ representa el vector que describe la posición de la partícula q, la fuerza que actúa sobre la partícula de carga q está dada por la expresión vectorial:

$$\vec{F} = k\,(\frac{qQ}{r^2})\hat{r}$$

Donde $\hat{r} = \vec{r}\,/\,r$ es el vector unitario en dirección del vector posición, $\vec{r}$.



Observe que esta expresión incluye el hecho de que:

1 . Si las cargas son del mismo signo ($qQ > 0$), las partículas *se repelen* y $\vec{F}$ apunta en la dirección de $\hat{r}$.

2 . Si las cargas son de signo opuesto ($qQ < 0$), las partículas *se atraen* y $\vec{F}$ apunta en la dirección opuesta a $\hat{r}$.

$$\boxed{\vec{F} = k\frac{qQ}{r^2}\,\hat{r}}$$

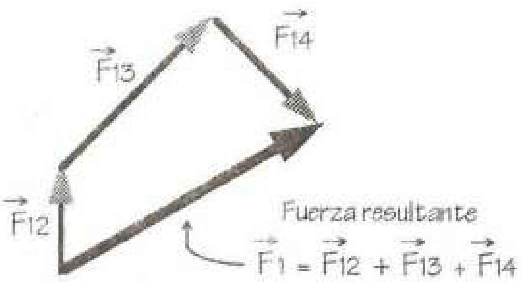
Ley de Coulomb

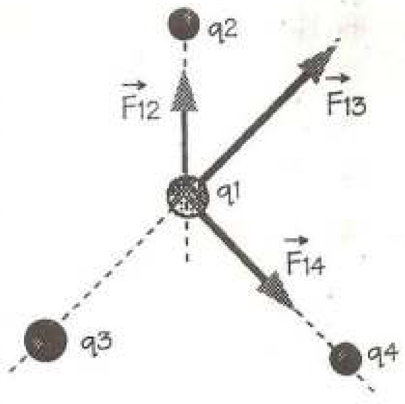
El valor de la *constante de proporcionalidad* k depende de la selección de unidades. En las unidades SI, k tiene el valor :

$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\times10^9\ \text{N.m}^2/\text{C}^2}$$

FUERZA DEBIDA A CARGAS MULTIPLES

Las cargas interactúan independientemente en pares y de acuerdo al *principio de superposición* la fuerza resultante sobre cualquier carga (q_1) es la *suma vectorial* de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por todas las demás.





Superposición de Fuerzas

LA CARGA ESTA CUANTIZADA

Cualquier objeto que esté eléctricamente cargado tiene algún exceso o déficit de cierto número de electrones. Siendo **e** la carga del electrón, una cantidad fundamental indivisible:

$$|e| = 1.603\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Por lo tanto, toda cantidad de carga puede escribirse como un múltiplo entero positivo o negativo de **e**:

$$Q_{neta} = 0,\ \pm e,\ \pm 2e,\ \pm 3e, \ldots, \pm Ne$$

Partícula	carga
Electrón (e)	-e
Protón (p)	+e
Neutrón (n)	0

Cuantización de la carga

$\boxed{Q_{neta} = \pm Ne}$

Hasta tiempos recientes se pensó que los neutrones y protones eran partículas elementales. Ahora se sabe que son una mezcla de entidades llamadas *quarks*, las cuales tienen cargas fraccionales $\pm e/3$ y $\pm 2e/3$.

Los quarks poseen la notable propiedad de estar pemanentemente confinados dentro de las partículas, ligados entre sí por fuerzas mucho más poderosas que las electromagnéticas y aparentemente no son susceptibles de ser detectados como entidades separadas.

Un neutrón (carga total = 0)
= 1 quark u (+2e/3)
+ 2 quarks d (-e/3)

Un protón (carga total = +e)
= 2 quarks u (+2e/3)
+1 quark d (-e/3)

LA CARGA SE CONSERVA

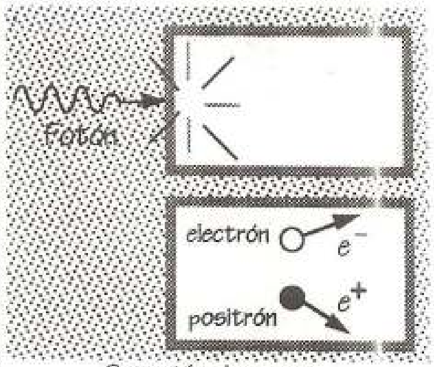
En un sistema aislado, la suma algebraica de las cargas positivas y negativas (la carga neta), es constante, cualesquiera sean las interacciones que ocurran dentro del sistema.

Ley de conservación de la carga.

Pueden ocurrir algunos procesos en los cuales se producen o destruyen iguales cantidades de carga positiva y de carga negativa, sin que la carga neta varíe.

Por ejemplo, un rayo γ (carga = 0) que pasa cerca de un núcleo atómico puede dar origen a dos partículas de cargas iguales y opuestas (*creación de pares*): un electrón (carga $-e$) y un positrón (carga $+e$). La carga total sigue siendo nula.

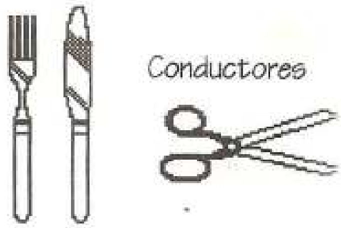
A su vez, puede ocurrir el proceso inverso de *aniquilación de pares*: mediante el cual un electrón y un positrón pueden aniquilarse para dar origen a rayos γ.



Creación de pares

CONDUCTORES Y AISLADORES

Los *conductores* son materiales en los cuales las cargas pueden moverse con relativa facilidad. Ejemplos: los metales, el agua impura, el cuerpo humano. En un metal los átomos contienen uno o más electrones exteriores que están débilmente ligados al núcleo y pueden moverse con libertad, de manera semejante a como lo hacen las moléculas en un gas.


Conductores

Al contrario, en los *aisladores* o dieléctricos, los electrones están firmemente unidos a sus respectivos átomos y no permiten el transporte de carga con facilidad. Algunos ejemplos son el vidrio, el caucho, la porcelana y el agua químicamente pura.

Aisladores


Los *semiconductores* como el germanio y el silicio, son intermedios entre los conductores y los aisladores en cuanto a la habilidad para conducir corriente eléctrica.

Finalmente, los *superconductores* son materiales que, en un cierto dominio de temperaturas, no ofrecen resistencia alguna al movimiento de cargas a través de ellos.

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-1.01. ***De acuerdo con el principio de la conservación de la carga....***

a) En un sistema no puede crearse o destruirse carga eléctrica.

b) La suma de las cargas positivas y la suma de las cargas negativas deben permanecer constantes por separado.

c) Nunca se ha presenciado caso alguno en que aparezcan o desaparezcan cargas eléctricas.

d) La suma algebraica de todas las cargas eléctricas en cualquier sistema cerrado siempre permanece constante.

e) Toda cantidad de carga eléctrica observable es siempre un número entero de veces la carga del electrón.

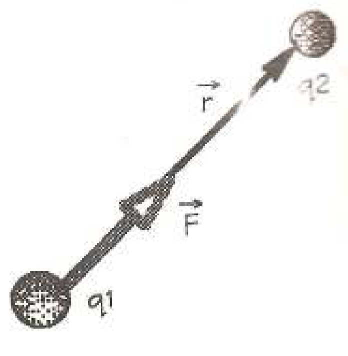
PE-1.02. ***Una expresión incorrecta.***

Un investigador no está de acuerdo con la ley de Coulomb y propone que debe ser sustituida por la expresión mostrada en la figura.

$\vec{F} = k\cancel{\left(\frac{q_1^2 q_2}{r}\right)}$

Si tomamos en cuenta las tres siguientes propiedades de la fuerza eléctrica, observadas experimentalmente:

(i) $\vec{F}$ depende del inverso del cuadrado de la distancia.
(ii) $\vec{F}$ no cambia al intercambiar las partículas.
(iii) $\vec{F}$ es atractiva si las cargas son de signo opuesto.



La expresión propuesta es ***incorrecta*** debido a que no cumple:

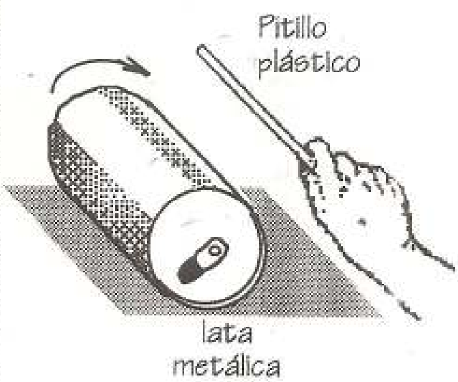
a) la propiedad (i) únicamente.
b) la propiedad (ii) únicamente.
c) la propiedad (iii) únicamente.
d) las tres propiedades (i), (ii) y (iii).
e) las dos propiedades (ii) y (iii).

PE-1.03. *¿Qué tipo de carga tiene el pitillo plástico?*

Una demostración de electrostática consiste en frotar un pitillo plástico con papel sanitario y colocar el pitillo enfrente de una lata metálica de refresco vacía, que reposa sobre una superficie horizontal. Se observa que la lata rueda atraída por el pitillo.

De acuerdo a esta observación podemos concluir que la carga neta del pitillo es:

a) positiva.
b) negativa.
c) puede ser positiva o negativa.

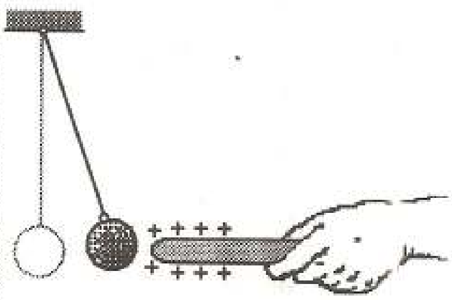


PE-1.04. *¿Qué carga neta tiene la esferita metálica?*

Un objeto que tiene carga positiva "atrae" una esferita metálica que está suspendida por un hilo ligero.

¿Cómo es la carga neta de la esferita ?

a) positiva.
b) negativa.
c) puede ser positiva o cero.
d) puede ser negativa o cero.
e) puede ser positiva o negativa.

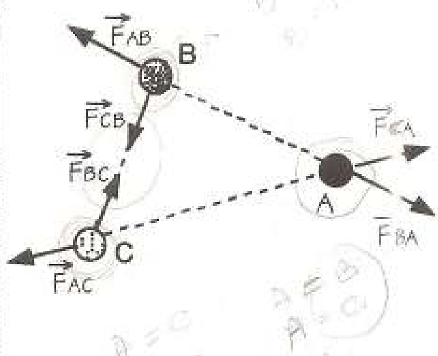


PE-1.05. *¿Cuál será este arreglo de cargas ?*

Un estudiante dibuja el diagrama de las fuerzas de interacción mútuas correspondiente a una posible distribución de cargas.

Se puede concluir que:

a) Dos de las cargas son positivas y la tercera es negativa.
b) Dos de las cargas son negativas y la tercera es positiva.
c) Las tres cargas son positivas.
d) Las tres cargas son negativas.
e) No existe combinación de cargas que corresponda al diagrama.



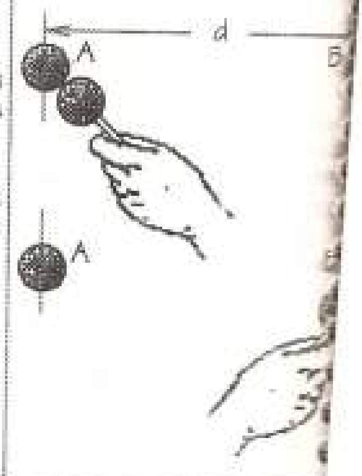
PE-1.06. *¿ Cuál será la nueva fuerza ?*

Dos esferitas conductoras idénticas tienen cantidades de cargas iguales. Cuando las esferitas están separadas por una distancia fija d, la magnitud de la fuerza de repulsión es F.

Suponga que con una tercera esferita metálica idéntica, provista de un mango aislante, e inicialmente neutra, se toca primero la esferita A, luego se toca la esferita B y finalmente se le retira.

¿ Cuál será la nueva fuerza entre las esferitas A y B ?

a) $3/8F$, b) $\frac{1}{4}F$, c) $\frac{2}{3}F$, d) $\frac{3}{4}F$, e) cero.

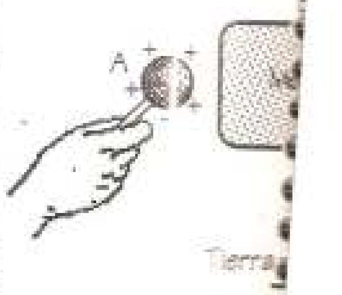


PE-1.07. *Aterrizado y carga por inducción*

Un objeto A electrizado positivamente se aproxima sin tocar a un objeto metálico B, aislado y sin carga. Mientras el objeto cargado se mantiene cerca, el metal se conecta por un alambre a tierra* mediante el interruptor S.

¿ Con cuál de las operaciones siguientes el metal B quedará cargado negativamente ?

a) Primero se retira A y luego se desconecta la tierra.
b) Primero se desconecta la tierra y luego se retira A.
c) Con cualquiera de las operaciones (a) o (b).
d) Con ninguna de las dos operaciones (a) o (b).

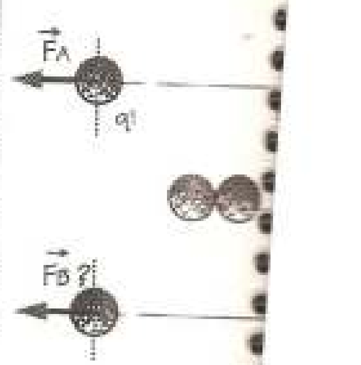


(*) La tierra (símbolo ⏚) conductor suficientemente pueda actuar como fuente infinito de electrones.

PE-1.08. *¿ Aumenta , disminuye o queda igual ?*

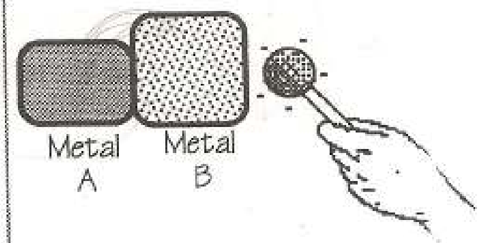
Dos esferitas metálicas idénticas tienen cargas de igual signo y diferentes magnitudes q_1 y q_2. Inicialmente las esferitas están a una cierta distancia y se repelen con una fuerza de magnitud F_A. Luego se ponen en contacto y se separan hasta la distancia inicial.
Si comparamos la nueva fuerza de repulsión F_B con la inicial, entonces:

a) $F_B = F_A$
b) $F_B > F_A$
c) $F_B < F_A$
d) No se puede predecir.



PE-1.09. *¿Con qué carga quedan los dos objetos?*

Dos objetos metálicos sin carga neta, A y B están en contacto. Se acerca del lado de B y sin tocarlo, un objeto con carga negativa. A continuación los objetos A y B se separan ligeramente y luego se retira el objeto cargado.

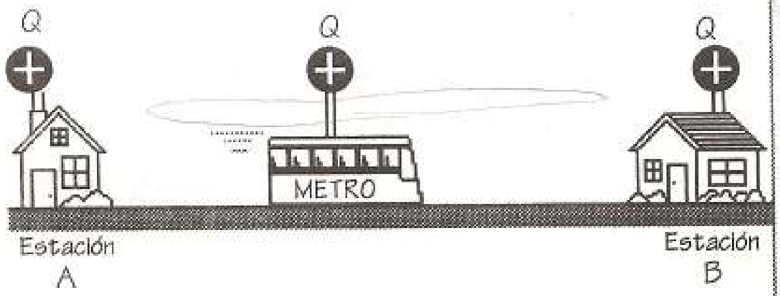


Como resultado los metales quedan:

a) ambos neutros.
b) ambos cargados positivamente.
c) ambos cargados negativamente.
d) A con carga positiva y B con carga negativa
e) A con carga negativa y B con carga positiva.

PE-1.10. *Un tren electrostático.*

Un inventor propone un sistema de transporte en el cual los trenes tienen una carga eléctrica sobre el techo y viajan en línea recta sobre rieles sin fricción.
Los trenes son impulsados por las fuerzas electrostáticas ejercidas por cargas iguales que están fijas en los techos de las estaciones.



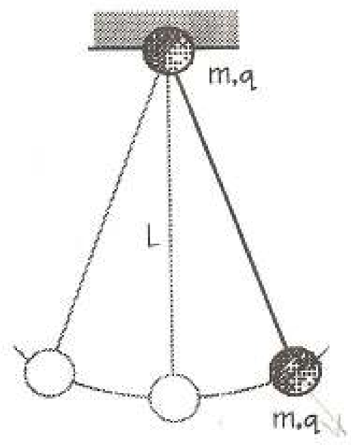
En la situación mostrada podemos afirmar que en un viaje desde la estación A hasta la estación B, la rapidez del tren:

a) primero aumenta y luego disminuye.
b) es constante.
c) primero disminuye y luego aumenta.
d) aumenta constantemente.
e) disminuye constantemente.

PE-1.11. *Un péndulo con dos cargas*

Una esferita de masa m y carga q está suspendida de un hilo ligero de longitud L. En el punto de suspensión del hilo se encuentra fija otra esferita con carga idéntica q.
Si apartamos la esferita suspendida de su posición vertical y la soltamos, el *período* de las oscilaciones del péndulo será:

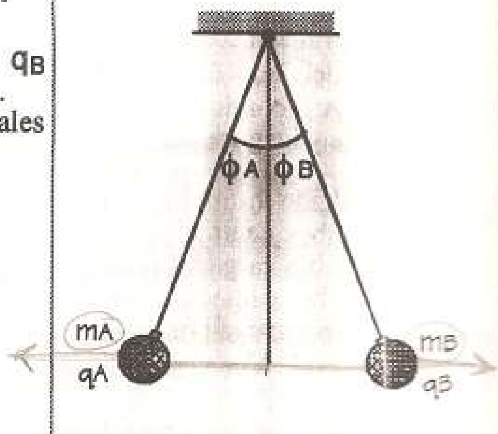
a) igual a $2\pi\sqrt{L/g}$.
b) mayor que $2\pi\sqrt{L/g}$.
c) menor que $2\pi\sqrt{L/g}$.
d) cero.



PE-1.12. ***Dos esferitas suspendidas a igual ángulo.***

Dos esferitas de masas m_A y m_B y carga q_A y q_B respectivamente, están suspendida de hilos de igual longitud. Si los ángulos que forman los hilos con la vertical son iguales ($\phi_A = \phi_B$), podemos afirmar que:.

a) $q_A = q_B$
* b) $m_A = m_B$
c) $m_A = m_B$ y $q_A = q_B$
d) $m_A > m_B$ y $q_A < q_B$
e) $m_A < m_B$ y $q_A > q_B$



Cap. 1: Respuestas

Pregunta	a	b	c	d	e
PE-1.01				✓	
PE-1.02					✓
PE-1.03			✓		
PE-1.04				✓	
PE-1.05					✓
PE-1.06	✓				
PE-1.07		✓			
PE-1.08		✓			
PE-1.09					✓
PE-1.10	✓				
PE-1.11	✓				
PE-1.12		✓			

PROBLEMAS RESUELTOS

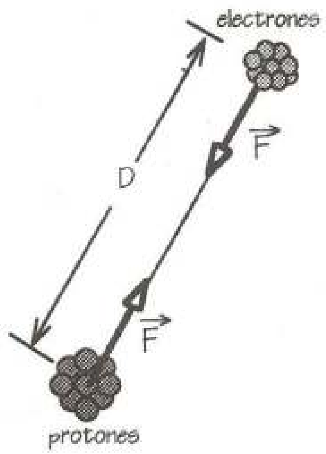
PR 1.01. ***¿ Cuántos Coulombs hay en un vaso de agua ?***

Suponga una situación hipotética en que se pudiesen separar todos los electrones de los núcleos de hidrógeno y de oxígeno que contiene un vaso de agua de 250 cc.

a) ¿Cuál es la carga total de los electrones ?
b) Si se pudiesen colocar todos los electrones en una pequeña esfera y todos los protones en otra pequeña esfera a 2 m de distancia, cuál sería la fuerza de atracción entre las esferas ?

Solución: **a)** El agua tiene una masa molecular de 18g/mol, por lo tanto en 250g de agua habrá: (250g/18g/mol) = 13,89moles.
El número de moléculas de agua en el vaso es:

$$(13{,}89 \text{ moles})(6{,}02\text{x}10^{23} \text{ moléculas/mol*}) = 8{,}36\text{x}10^{24} \text{ moléculas.}$$



A su vez cada molécula H_2O contiene (2 + 8 = 10) electrones. Por lo tanto, el número total de electrones es:

$$N_e = 10\text{x } 8{,}36\text{x}10^{24} = 8{,}36\text{x}10^{25}$$

y la carga de todos los electrones es:

$$Q_e = eN_e = (-1{,}6\text{x}10^{-19}\text{C})(8{,}36\text{x}10^{25}) = \underline{-1{,}34\text{x}10^7 \text{ C.}}$$

De manera similar, como el número de protones es igual al de electrones, la carga de todos los protones es:

$$Q_p = eN_p = (+1{,}6\text{x}10^{-19}\text{C})(8{,}36\text{x}10^{25}) = \underline{+1{,}34\text{x}10^7 \text{ C.}}$$

b) La magnitud de la fuerza de atracción entre las esferas constituidas por protones y electrones es:

$$F = k\frac{Q_eQ_p}{D^2} = (9{,}0\text{x}10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)\frac{(1{,}34\text{x}10^7\text{C})^2}{(2\text{m})^2} = 4{,}04\text{x}10^{23}\text{N}$$

* Número de Avogadro = $6{,}02\text{x}10^{23}$ moléculas/mol.

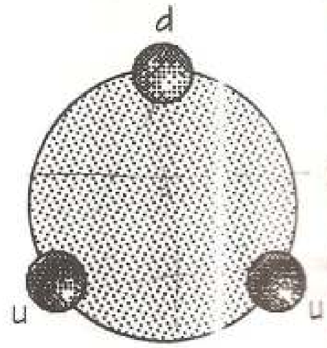
Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_e = -1{,}34\text{x}10^7 \text{ C.} \\ F = 4{,}04\text{x}10^{23} \text{ N.} \end{array}}$$

PR 1.02. *Un protón = tres quarks*

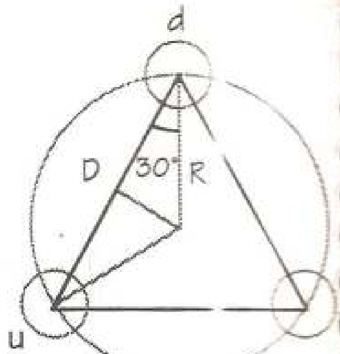
En el modelo de quark de las partículas elementales un protón consiste de dos quarks (u) "up", cada uno con carga $+2e/3$, y un quark (d) "down" con carga $-e/3$. Suponga que estas partículas estarían igualmente separadas en un círculo de radio $1{,}2\times10^{-15}$ m.

¿Cuál sería la magnitud de la fuerza electrostática sobre cada quark ?



Solución: Los quarks quedan en los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio R. Según la Fig. a, la distancia entre quarks es:

$$D = 2R\cos 30^\circ = 2R(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}R$$



(Fig. a

La magnitud de la fuerza entre los dos quarks **u** es:

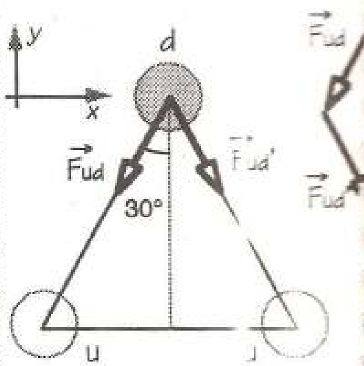
$$F_{uu} = k\frac{Q_u Q_u}{D^2} = k\frac{(\frac{2}{3}e)(\frac{2}{3}e)}{(\sqrt{3}R)^2} = \frac{4}{27}\left(\frac{ke^2}{R^2}\right)$$

$$F_{uu} = \left(\frac{4}{27}\right)\frac{(9{,}0\times10^9\ Nm^2/C^2)(1{,}6\times10^{-19}C)^2}{(1{,}2\times10^{-15}m)^2} = 23{,}7\ N$$

La magnitud de la fuerza entre quarks **u** y quarks **d** es:

$$F_{ud} = k\frac{Q_u Q_d}{D^2} = k\frac{(\frac{1}{3}e)(\frac{2}{3}e)}{(\sqrt{3}R)^2} = \frac{2}{27}\left(\frac{ke^2}{R^2}\right)$$

$$F_{ud} = \left(\frac{2}{27}\right)\frac{(9{,}0\times10^9\ Nm^2/C^2)(1{,}6\times10^{-19}C)^2}{(1{,}2\times10^{-15}m)^2} = 11{,}85\ N$$



(Fig. b)

La fuerza sobre el quark **d** es la suma vectorial de las fuerzas atractivas de cada uno de los quarks **u**. Por simetría las componentes x se cancelan (Fig. b) y la componente y resultante apunta hacia abajo y tiene magnitud:

$$F_d = 2F_{ud}\cos 30^\circ = 2F_{ud}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}F_{ud} = 20{,}5\ N$$

La fuerza sobre cada quark **u** es la suma vectorial de la fuerza repulsiva del otro quark **u** y la atractiva del quark **d** (Fig. c).
La componente x es:

$$\Sigma F_{ux} = F_{uu} - F_{ud}\cos 60^\circ$$

$$= 23{,}7 - 11{,}85\cos 60^\circ = 17{,}8\ \text{N}$$

La componente y es:

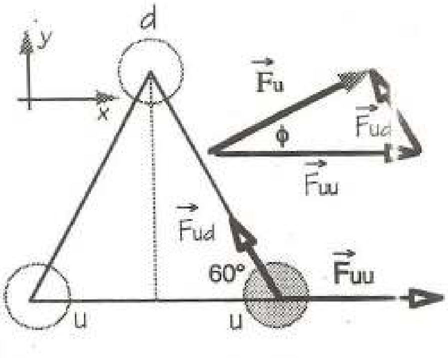
$$\Sigma F_{uy} = F_{ud}\,\text{sen}60^\circ = 11{,}85\,\text{sen}60^\circ = 10{,}25\ \text{N}.$$

Por lo tanto:

$$F_u = \sqrt{F_{ux}^2 + F_{uy}^2} = \sqrt{(17{,}8\text{N})^2 + (10{,}25\text{N})^2} = 20{,}5\ \text{N}$$

y el ángulo que forma con el eje x es:

$$\text{tg}\phi = \frac{F_{uy}}{F_{ux}} = \frac{10{,}25\ \text{N}}{17{,}8\ \text{N}} \rightarrow \phi = 30^\circ$$



(Fig. c)

Respuesta:

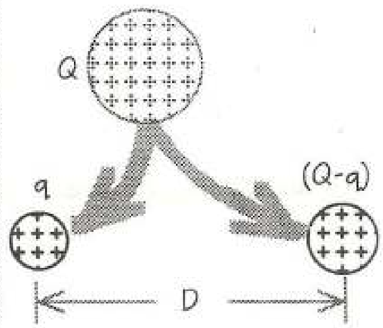
$|\vec{F}_d| = 20{,}5$ N hacia el centro del círculo.
$|\vec{F}_u| = 20{,}5$ N a 30° de la línea que une los quarks u.

PR 1.03 ¿Cómo se obtendrá la máxima repulsión ?

Una carga positiva Q ha de ser distribuida en dos pedazos con cargas positivas q y (Q - q), de forma tal que para una separación dada D la fuerza ejercida por una carga sobre la otra sea máxima.
¿ Cuál es el valor de q y de (Q-q) ?.

Solución: La magnitud de la fuerza de repulsión entre los dos pedazos de carga q y (Q - q) separadas por una distancia D es:

$$F = k\frac{q(Q-q)}{D^2}$$



Cuando la fuerza tiene un valor extremo (máximo o mínimo) se cumple:

$$dF/dq = 0$$

$$\frac{dF}{dq} = \frac{k}{D^2}(Q - 2q) = 0$$

Por lo tanto:

$$Q - 2q = 0$$

$$q = \tfrac{1}{2}Q = (Q - q)$$

Para este valor de la carga $q = \tfrac{1}{2}Q$ corresponde a un valor máximo de F ya que el mínima valor ($F = 0$) es para $q = 0$.

Respue

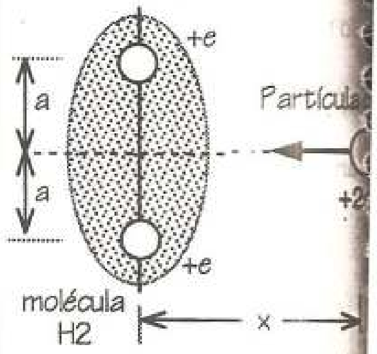
$\boxed{q = (Q - q) = \tfrac{1}{}}$

PR 1.04. Bombardeando con partículas α

Se lanza una partícula α (carga +2e) a lo largo de una línea perpendicular al eje internuclear de una molécula de hidrógeno como se ilustra en la figura.

Los dos núcleos atómicos (carga +e cada uno) están separados por una distancia $2a$. La molécula permanece fija.

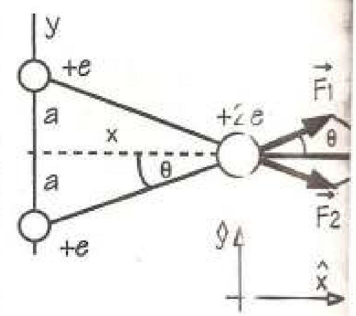
¿ A qué distancia x de la molécula será máxima la fuerza electrostática de los núcleos atómico sobre la partícula α ?



Solución: La fuerza total $\vec{F}$ ejercida sobre partícula α será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Por simetría, las componentes de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en el eje y se cancelan y la fuerza resultante apunta en la dirección del eje x, es decir:



$$\vec{F} = 2|\vec{F}_1| \cos\theta\,\hat{x}$$

$$\vec{F} = 2[k\frac{(2e)e}{r^2}](\frac{x}{r})\hat{x} = 4ke^2[\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}]\hat{x}$$

El máximo de $|\vec{F}|$ se determina de la condición:

$$d|\vec{F}|/dx = 0$$

$$\frac{d|\vec{F}|}{dx} = 4ke^2[\frac{(x^2+a^2)^{3/2} - x(3/2)(x^2+a^2)^{1/2}(2x)}{(x^2+a^2)^3}] = 0$$

Obteniéndose:

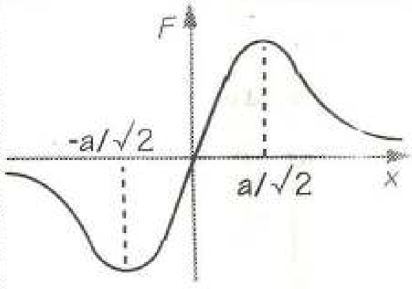
$$(x^2+a^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+a^2)^{1/2} = 0$$

Simplificando:

$$(x^2+a^2) - 3x^2 = 0$$

y despejando tenemos finalmente

$$\Rightarrow\ x = \pm\, a/\sqrt{2}$$



Respuesta:

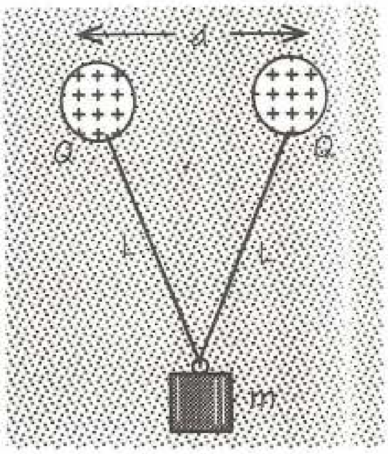
$$\boxed{x = \pm\, a/\sqrt{2}}$$

PR 1.05. Levantando un objeto con globos cargados

Dos globos llenos de Helio flotan en el aire y pueden sostener una masa $m = 0.68$ kg. mediante cuerdas aislantes de longitud $L = 0.5$ m, como se ilustra en la figura.

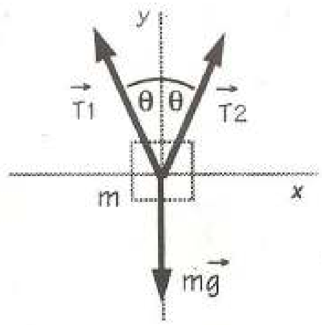
Cuando cada globo tiene una cierta carga Q, el sistema flota en equilibrio en la posición indicada, quedando separados los globos por una distancia $d = 0.6$ m.

Determine el valor de la carga Q.



Solución: Dibujemos el diagrama de cuerpo libre de la masa m que cuelga.

Para hallar la magnitud de la tensión de la cuerda $T=|\vec{T}_1|=|\vec{T}_2|$, escribimos la ecuación de equilibrio en la dirección vertical:



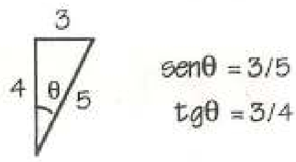
$$\sum F_{y)} = 2T\cos\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow\quad T = \tfrac{1}{2}(mg/\cos\theta) \qquad \text{(i)}$$

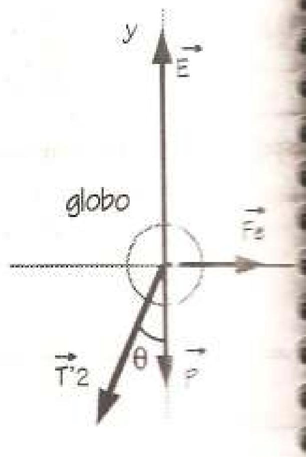
El ángulo θ viene determinado según el triángulo mostrado por:

$$\text{sen}\theta = \tfrac{1}{2}d/L = 3/5$$

$$\Rightarrow\quad \theta = 36.9°$$



Por otra parte, considerando el globo las fuerzas que intervienen son: la tensión $\vec{T}_2'$, la fuerza de empuje hacia arriba $\vec{E}$, su peso $\vec{P}$ y la fuerza de repulsión eléctrica $\vec{F}_e$.



La ecuación de equilibrio del globo en la dirección horizontal es:

$$\sum F_{xi)} = F_e - T\text{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_e = T\text{sen}\theta \qquad \text{(ii)}$$

Sustituyendo T de la ecuación (i) en la ecuación (ii), tenemos:

$$F_e = \tfrac{1}{2}mg(\text{sen}\theta / \cos\theta) = \tfrac{1}{2}\, mg\, \text{tg}\theta$$

Usando la ley de Coulomb para F_e:

$$k\frac{Q^2}{d^2} = \frac{1}{2}(mg\ \text{tg}\theta)$$

Finalmente, despejando Q y sustituyendo los valores numéricos:

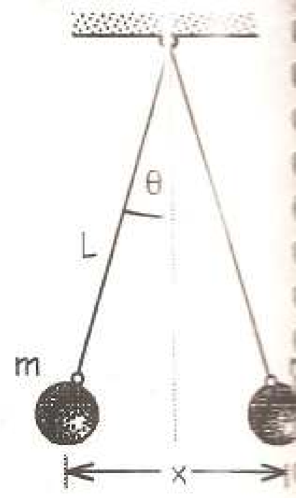
$$Q = \sqrt{\frac{mgd^2\text{tg}\theta}{2k}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{(0.68\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)(0.6\text{m})^2(3/4)}{2(9\text{x}10^9\text{N.m}^2/\text{C}^2)}} = 10^{-5}\text{C}$$

Resp

$Q = 10^{-5}$

PR 1.06. Dos bolitas de corcho suspendidas.



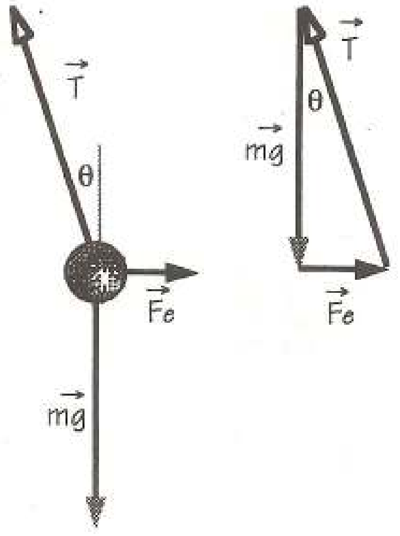
Dos bolitas de corcho, de igual masa $m = 10$ g, se cuelgan de un punto común mediante hilos aislantes de igual longitud L = 120cm de longitud.

Se les comunican ciertas cargas de manera que las bolitas se repelen y se desvían, quedando separadas por una distancia x =5,0 cm.

a) *¿ Si las cargas son iguales, cuál será su valor ?.*

b) *¿ Habrán otros valores de cargas que produzcan esta situación ?*

Solución: Primero dibujamos el diagrama de las fuerzas que actúan sobre una de las bolitas. Estas son: la fuerza gravitacional, $m\vec{g}$, la fuerza eléctrica, $\vec{F}_e$ y la tensión de la cuerda, $\vec{T}$.



Como la esfera esta en equilibrio, la fuerza neta es cero y las tres fuerzas se suman para formar un triángulo. Dicho triángulo es rectángulo, como ilustra la figura. Por lo tanto:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{F_e}{mg} = \frac{(k\frac{q_1q_2}{x^2})}{mg}$$

Donde hemos usado la expresión de Coulomb para $\vec{F}_e$. Sustituyendo tgθ por su valor $\frac{1}{2}x/L$ y despejando el producto de las cargas, tenemos:

$$q_1q_2 = \frac{mgx^2\mathrm{tg}\theta}{k} = \frac{mgx^3}{2kL}$$

a) Si las cargas son iguales, $q_1 = q_2 = q$, y viene dada por:

$$q = \sqrt{\frac{mgx^3}{2kL}} = \sqrt{\frac{(10^{-2}\mathrm{kg})(9{,}8\mathrm{m/s^2})(0{,}05\mathrm{m})^3}{2(9\mathrm{x}10^9\mathrm{Nm^2/C^2})(1{,}2\mathrm{m})}} = \underline{\pm 2{,}4\mathrm{x}10^{-8}\mathrm{C}}$$

b) Las cargas pueden tener diferentes valores con tal de que el producto $q_1\,q_2$ sea igual a $(2{,}4\mathrm{x}10^{-8}\mathrm{C})^2 = 5{,}7\mathrm{x}10^{-16}\,\mathrm{C}^2$.

Respuesta:

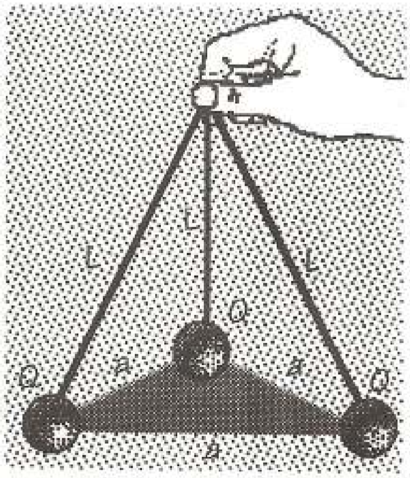
a) $q = \pm 2{,}4\mathrm{x}10^{-8}\mathrm{C}$.
b) Cualquier combinación de cargas del mismo signo cuyo producto sea $5{,}7\mathrm{x}10^{-16}\,\mathrm{C}^2$.

PR 1.07. Tres esferas suspendidas

Tres esferitas idénticas, de masa m reciben cada una, una carga Q y están suspendidas de un punto común mediante hilos aislantes y ligeros de longitud L.

Las esferitas se repelen entre sí hasta que en equilibrio se localizan formando un triángulo equilátero de lado a y el punto de suspensión es el vértice de un tetraedro regular, como se muestra en la figura.

¿ Cuál es la magnitud de las cargas ?



Solución: La fuerza eléctrica resultante sobre la esferita que llamaremos Q_1, es la suma de las fuerzas eléctricas ejercidas por las otras dos esferitas y queda en la línea de simetría del triángulo de lado a, o eje x en la figura a:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2|\vec{F}_3|\cos 30° \,\hat{x} = 2k\frac{Q^2}{a^2}(\sqrt{3}/2)\hat{x} \qquad \text{(i)}$$

Sobre Q_1 actúan tres fuerzas: la tensión de la cuerda $\vec{T}$, el peso $m\vec{g}$ y la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$.

El diagrama de cuerpo libre de Q_1 se ilustra en la Fig. b. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_{zi} = T\cos\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow T = mg/\cos\theta \qquad \text{(ii)}$$

$$\sum F_{xi} = F_e - T\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow F_e = T\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(iii)}$$

Reemplazando T de la Ec. (ii) en la Ec (iii) tenemos:

$$F_e = mg\,\operatorname{tg}\theta \qquad \text{(iv)}$$

Si observamos el triángulo sombreado del plano x-z,(Fig.b), el ángulo θ está determinado por:

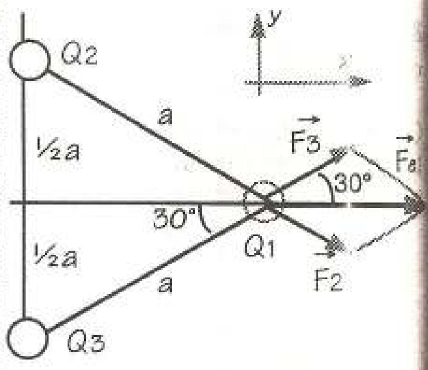
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a/\sqrt{3}}{\sqrt{L^2 - (a/\sqrt{3})^2}} = \frac{a}{\sqrt{3L^2 - a^2}} \qquad \text{(v)}$$

Igualando las expresiones (i) y (iv) para F_e y sustituyendo la expresión (v) para $\operatorname{tg}\theta$, tenemos:

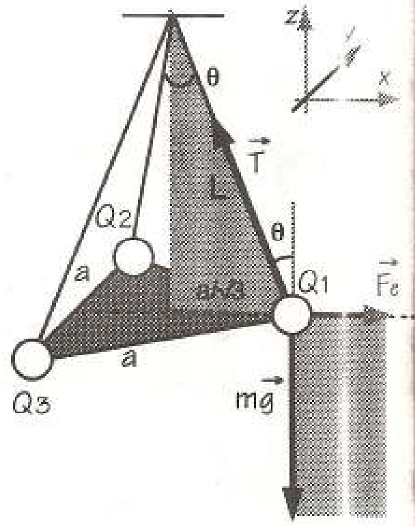
$$\frac{\sqrt{3}kQ^2}{a^2} = \frac{mga}{\sqrt{3L^2 - a^2}}$$

Finalmente, de esta expresión despejamos la carga Q:

$$Q = \sqrt{\frac{mga^3}{k\sqrt{9L^2 - 3a^2}}}$$



(Fig. a)



(Fig. b)

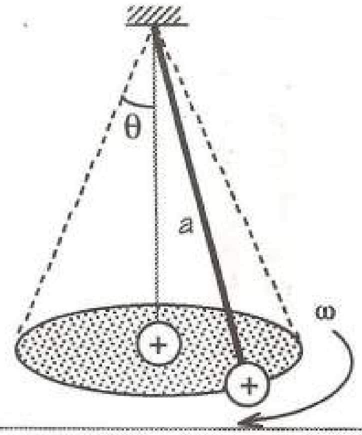
Respuesta:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{mga^3}{k\sqrt{9L^2 - 3a^2}}}}$$

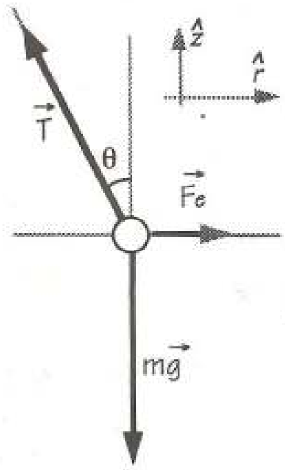
PR 1.08. Péndulo eléctrico cónico

Una esferita de carga Q *y masa* m *que está suspendida por un hilo de longitud* a*, gira alrededor de otra esferita de idéntica carga, la cual está inmóvil. La dirección del hilo forma un ángulo* θ *con la vertical.*

Determine la velocidad angular ω *con la cual la esferita gira uniformemente.*



Solución: Sobre la esferita en movimiento actúan tres fuerzas: el peso $m\vec{g}$, la tensión de la cuerda $\vec{T}$ y la fuerza de repulsión eléctrica $\vec{F}_e$ ejercida por la esferita fija. Podemos descomponer las fuerzas en dos componentes: vertical (eje z) y radial en el plano horizontal.



En la dirección vertical la esferita está en equilibrio:

$$\sum F_{zi} = T\cos\theta - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = mg/\cos\theta \qquad \text{(i)}$$

La componente radial (que apunta hacia la esferita fija) provee la aceleración centrípeta que la mantiene moviéndose en un círculo de radio r. Aplicando la 2ª ley de Newton:

$$T\operatorname{sen}\theta - F_e = ma_c = m(\omega^2 r)$$

Despejando ω^2

$$\omega^2 = \frac{T\operatorname{sen}\theta - F_e}{mr}$$

Sustituyendo T y F_e tenemos:

$$\omega^2 = \frac{(mg/\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - (kQ^2/r^2)}{mr} = \frac{g\operatorname{tg}\theta}{r} - \frac{kQ^2}{r^3 m}$$

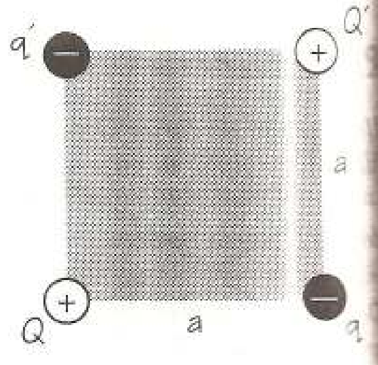
Finalmente, después de sustituir $r = a\operatorname{sen}\theta$ y extraer la raíz cuadrada obtenemos ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a\cos\theta} - \frac{kQ^2}{ma^3\operatorname{sen}^3\theta}}$$

Respuesta

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{a\cos\theta} - \frac{kQ^2}{ma^3\operatorname{sen}^3\theta}}}$$

PR 1.09. ***¿ Con cuál valor de q hay equilibrio ?***



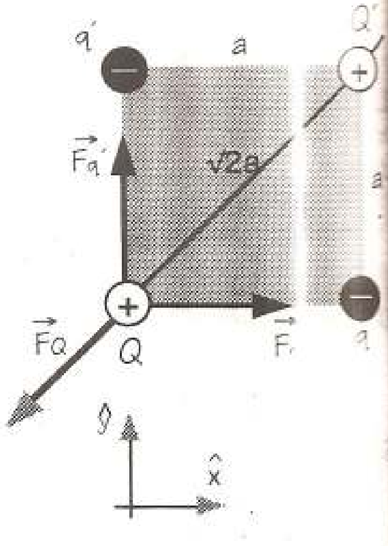
Dos cargas positivas Q y Q' de igual magnitud (Q) están fijas en los vértices opuestos de un cuadrado de lado a.
Se colocan dos cargas negativas de igual magnitud q y q' en los otros dos vértices del cuadrado.

a) ¿Cuál debe ser el valor de q para que la fuerza sobre cualquiera de las cargas Q y Q' sea cero ?

b) En tal situación, ¿ cuál es la fuerza resultante sobre las cargas q y q' ?

Solución. a) Según se ha representado en la figura, sobre la carga Q actúan tres fuerzas: La fuerza $\vec{F}_{Q'}$ ejercida por la carga similar Q' en la dirección de la diagonal y apuntando hacia afuera del cuadrado:

$$\vec{F}_{Q'} = k\frac{Q^2}{r^2}\hat{r} = k\frac{Q^2}{(\sqrt{2}a)^2}\left(\frac{-\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)$$



Las fuerzas $\vec{F}_q$ y $\vec{F}_{q'}$ ejercidas por las otras cargas q y q' que apuntan a lo largo de los lados del cuadrado son:

$$\vec{F}_q = k\frac{qQ}{a^2}(+\hat{x}) \quad \text{y} \quad \vec{F}_{q'} = k\frac{qQ}{a^2}(+\hat{y})$$

La fuerza total sobre la carga Q es la suma vectorial:

$$\vec{F}_{\text{sobre } Q} = \vec{F}_{Q'} + \vec{F}_q + \vec{F}_{q'}$$

$$\vec{F}_{\text{sobre } Q} = k\frac{Q}{a^2}\left[\left(q - \frac{Q}{2\sqrt{2}}\right)\hat{x} + \left(q - \frac{Q}{2\sqrt{2}}\right)\hat{y}\right]$$

Para que esta fuerza sea cero se deben anular cada una de sus componentes, por lo tanto la magnitud de q viene dada por :

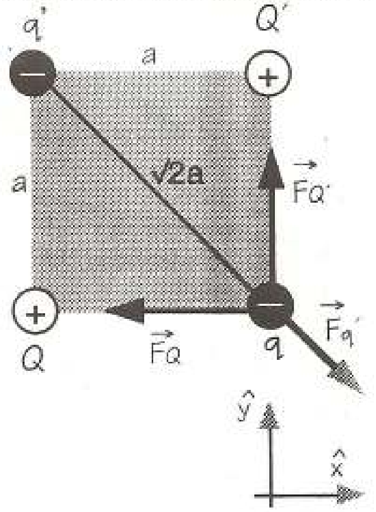
$$\left(q - \frac{Q}{2\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{Q}{2\sqrt{2}}$$

b) La fuerza total sobre la carga q es:

$$\vec{F}_{\text{sobre } q} = \vec{F}_Q + \vec{F}_{Q'} + \vec{F}_{q}$$

$$\vec{F}_{\text{sobre } q} = k\frac{qQ}{a^2}(-\hat{x}) + k\frac{qQ}{a^2}(+\hat{y}) + k\frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^2}\left(\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{F}_{\text{sobre } q} = k\frac{q}{a^2}\left[-\left(Q - \frac{q}{2\sqrt{2}}\right)\hat{x} + \left(Q - \frac{q}{2\sqrt{2}}\right)\hat{y}\right]$$



Reemplazando el valor de q (= $Q/2\sqrt{2}$) hallado anteriormente:

$$\vec{F}_{\text{sobre } q} = k\frac{Q^2}{a^2}\left(\frac{7}{16}\right)\left(\frac{-\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)$$

Concluimos que la fuerza resultante sobre las cargas q y q´ no son nulas. Tienen magnitud $(7/16)kQ^2/a^2$ y quedan a lo largo de la diagonal, apuntando hacia el centro del cuadrado.

Respuesta

a) $|q| = \frac{Q}{2\sqrt{2}}$

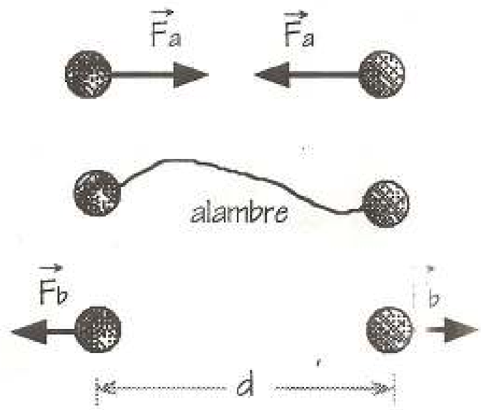
b) $|\vec{F}_q| = |\vec{F}_{q'}| = \left(\frac{7}{16}\right)k\frac{Q^2}{a^2}$

PR 1.10. *Primero se atraen y luego se repelen*

Dos esferitas conductoras idénticas cuando se encuentran fijas a una distancia de 0.5 m se atraen con una fuerza electrostática de 10.8 N.

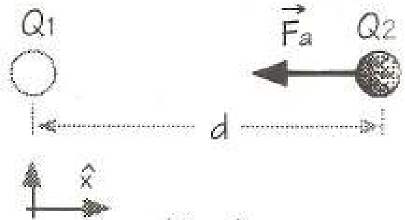
A continuación se les conecta mediante un alambre conductor delgado. Después de remover el alambre, las esferas se repelen con una fuerza de 3.6 N.

¿ Cuáles eran las cargas iniciales de las dos esferitas ?



Solución: Sean Q_1 y Q_2 las cargas originales. Inicialmente, la fuerza sobre Q_2 es atractiva y apunta hacia la izquierda (negativa) según se ilustra en la figura (a):

$$F_a = -k\frac{Q_1 Q_2}{d^2}$$



(Fig. a)

Despejando el producto Q_1Q_2 y sustituyendo los valores:

$$Q_1Q_2 = -\frac{F_a d^2}{k} = -\frac{(10.8\text{N})(0.5\text{m})^2}{9\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}} = -3\times10^{-10}\text{C}^2 \qquad \text{(i)}$$

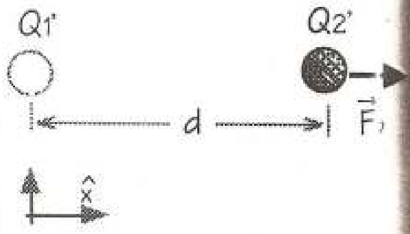
Después de conectar el alambre, por ser las esferitas conductoras e idénticas, la totalidad de la carga se reparte en cantidades iguales.

Como la carga se conserva, la carga final en cada esferita será:

$$Q_1' = Q_2' = \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$$

Al retirar el alambre, la fuerza es repulsiva (ver figura b) y viene dada por

$$F_b = +\,k\frac{(Q_1+Q_2)^2}{4d^2}$$



(Fig. b)

Despejando la suma (Q_1+Q_2) y sustituyendo los valores numéricos, tenemos una segunda relación entre las cargas:

$$Q_1+Q_2 = d\sqrt{\frac{4F_b}{k}}$$

$$Q_1+Q_2 = (0.5\text{m})\sqrt{\frac{4(3.6\text{N})}{9\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}}} = 2\times10^{-5}\text{C} \quad \text{(ii)}$$

Podemos ahora, despejar Q_2 de la ecuación (i) y sustituirla en la ecuación (ii), para obtener la siguiente ecuación para Q_1 (en Coulombs):

$$Q_1^2 - 2\times10^{-5}Q_1 - 3\times10^{-10} = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[2\times10^{-5} \pm \sqrt{(2\times10^{-5})^2+4(3\times10^{-10})}\,\right]$$

Luego las dos posibles combinaciones de cargas que se obtienen son:

(signo+) $Q_1 = +1\times10^{-5}\text{C}$ $\quad Q_2 = -3\times10^{-10}/Q_1 = -3\times10^{-5}\text{C}$

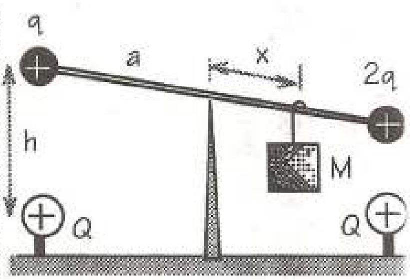
(signo -) $Q_1 = -3\times10^{-5}\text{C}$ $\quad Q_2 = -3\times10^{-10}/Q_1 = +1\times10^{-5}\text{C}$

Respuesta:

Carga de una esfera:	+1x10- C
Carga de la otra:	- 3x10- C

PR 1.11. *Una balanza electrostática*

Una barra no conductora de masa despreciable y longitud $2a$ está apoyada en su centro sobre un pivote. En sus extremos están fijas dos pequeñas esferas conductoras de cargas positivas q y $2q$ respectivamente, debajo de las cuales hay cargas positivas Q que están fijas



a) *Determine la distancia x desde el centro donde se puede colocar un peso P de modo que la barra quede balanceada en posición horizontal, y las cargas q y $2q$ queden a igual distancia h por encima de las cargas Q, (ver la figura).*

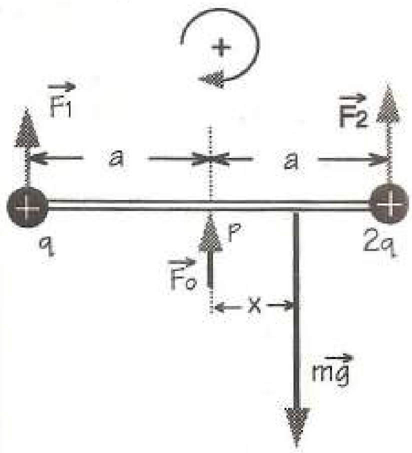
b) *¿Cuál debe ser el valor de h para que la barra no ejerza fuerza vertical sobre el pivote cuando está horizontal y balanceada?*

Solución: **a)** En el diagrama de cuerpo libre se han indicado las fuerzas que actúan sobre la barra en la posición horizontal.

Estas son: las fuerzas eléctricas repulsivas en los extremos $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, el peso $m\vec{g}$ y la fuerza $\vec{F}_0$ de contacto con el pivote.

Para que la barra esté en equilibrio, el torque neto alrededor de cualquier punto debe ser cero. Tomando torques respecto del pivote P tenemos:

$$F_1 a + mgx - F_2 a = 0$$



Reemplazando las magnitudes de las fuerzas eléctricas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$:

$$\left(k\frac{qQ}{h^2}\right)a + mgx - \left(k\frac{2qQ}{h^2}\right)a = 0$$

Despejando x tenemos:

$$x = \left(\frac{kqQ}{h^2 mg}\right)a$$

b) Como la barra está en equilibrio la fuerza neta debe ser cero:

$$\vec{F}_1 - m\vec{g} + \vec{F}_2 + \vec{F}_0 = 0$$

Si la fuerza $\vec{F}_0$ de apoyo del pivote se anula, entonces:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{g}$$

Sustituyendo las expresiones de las fuerzas eléctricas y despejando h tenemos:

$$(k\frac{qQ}{h^2}) + (k\frac{2qQ}{h^2}) = mg \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3kqQ}{mg}}$$

Respuesta

a) $x = (\frac{kqQ}{h^2mg})a$

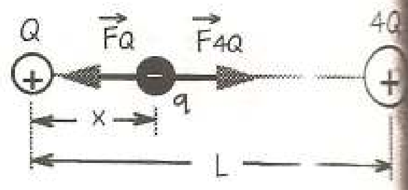
b) $h = \sqrt{\frac{3kqQ}{mg}}$

PR 1.12. *El equilibrio puramente electrostático es inestable*

Dos cargas +Q y +4Q son libres de moverse y se desea mantenerlas a una distancia L, colocando una tercera carga q de manera que el sistema completo quede en equilibrio.

a) Halle la ubicación, magnitud y signo de la carga q.
b) Demuestre que el equilibrio logrado es inestable.

Solución: a) La única manera de que la fuerza neta sobre ambas cargas +Q y +4Q, sea cero, es colocar entre ellas la tercera carga q, la cual debe ser negativa (Fig. a).



(Fig. a)

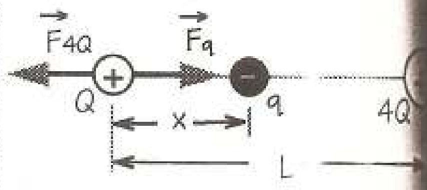
Para hallar la distancia x, imponemos la condición de que la fuerza neta sobre q debe ser nula:

$$\vec{F}_{\text{sobre } q} = \vec{F}_{4Q} + \vec{F}_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad k\frac{q4Q}{(L-x)^2} - k\frac{qQ}{x^2} = 0$$

Simplificando y despejando x, resulta:

$$4x^2 = (L-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}L$$

Por otra parte, como la fuerza sobre Q debe anularse (Fig. b):



(Fig. b)

$$\vec{F}_{\text{sobre } Q} = \vec{F}_q + \vec{F}_{4Q} = 0$$

$$k(\frac{qQ}{x^2}) - k(\frac{4Q^2}{L^2}) = 0$$

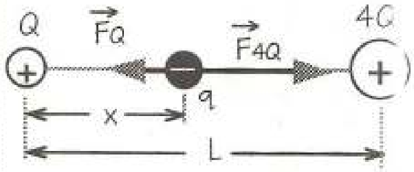
Simplificando y reemplazando el valor de x, podemos hallar la magnitud de la carga q:

$$q = 4Q(\frac{x}{L})^2 = \frac{4}{9}Q$$

Con los valores hallados de x y q, ¿ será nula la fuerza sobre la carga $4Q$?. Verifiquemos:

$$F_{\text{sobre } 4Q} = k\frac{4Q^2}{L^2} - k\frac{4qQ}{(L-x)^2} = k\frac{4Q^2}{L^2} - k\frac{4(\frac{4}{9}Q)Q}{(\frac{2}{3}L)^2} = 0$$

Por lo tanto las tres cargas están en equilibrio.



(Fig. c)

b) Para determinar el tipo de equilibrio, basta con desplazar la carga q ligeramente hacia la derecha (Fig. c). La atracción que ejerce $4Q$ es ahora mayor que la ejercida por Q, por lo tanto la carga q tiende a alejarse de la posición de equilibrio .¡ El equilibrio es inestable !

Este es un resultado general ya que de acuerdo al <u>*Teorema de Earnshaw:*</u>
Ninguna partícula puede estar en equilibrio estable bajo la acción de fuerzas electrostáticas únicamente.

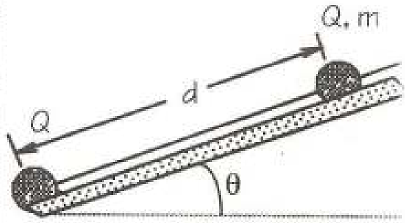
Respuest

a) $x = \frac{1}{3}L$ $q = -(4/9)($
b) el equilibrio es inestabl

PR 1.13. *Dónde estará la esferita en equilibrio*

Una esferita con carga, Q está fija en la base de un plano que forma un ángulo θ con la dirección horizontal. En una ranura lisa y sin fricción del plano se puede colocar una segunda esferita de masa m e igual carga ,Q.

¿Cuál es la distancia d para que quede en equilibrio?.



Solución: Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la esferita. En equilibrio, la fuerza neta debe ser cero.
En la dirección del plano (eje x) la condición de equilibrio es:

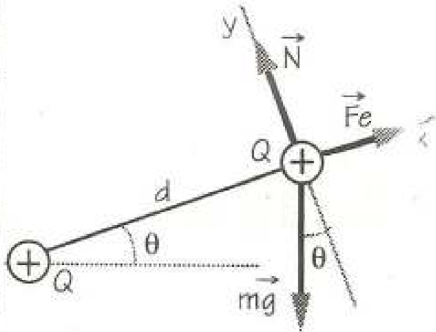
$$\sum F_x = F_e - mg\,\text{sen}\theta = 0$$

Reemplazando la expresión para la fuerza eléctrica F_e, tenemos:

$$kQ^2/d^2 = mg\,\text{sen}\theta$$

Despejando la distancia:

$$d = \sqrt{\frac{kQ^2}{mg\,\text{sen}\theta}}$$

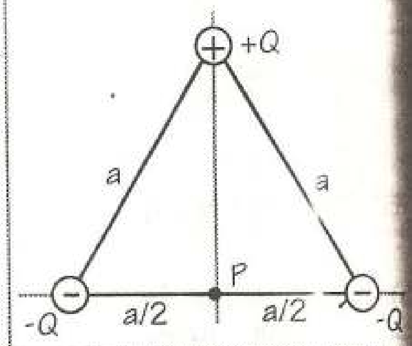


Respuesta

$$d = \sqrt{\frac{kQ^2}{mg\,\text{sen}\theta}}$$

<u>PR 1.14.</u> *Dónde colocar la cuarta carga ?*

Tres cargas de igual magnitud Q están en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a. Dos de las cargas son negativas y la otra es positiva. ¿ Dónde debe ser colocada una cuarta carga -4Q para que cualquier carga que se ponga en el punto P quede en equilibrio ?



<u>Solución:</u> Debido a la simetría la fuerzas ejercidas por las cargas negativas sobre la carga Q_P en el punto P, son iguales y opuestas y se cancelan.

La carga -4Q debe estar ubicada arriba de la carga +Q en el eje y para que neutralice a la fuerza ejercida por +Q. Luego:

$$\sum F_y = -\frac{kQQ_0}{(\sqrt{3}a/2)^2} + \frac{k4QQ_0}{(\sqrt{3}a/2 + d)^2} = 0$$

Simplificando:

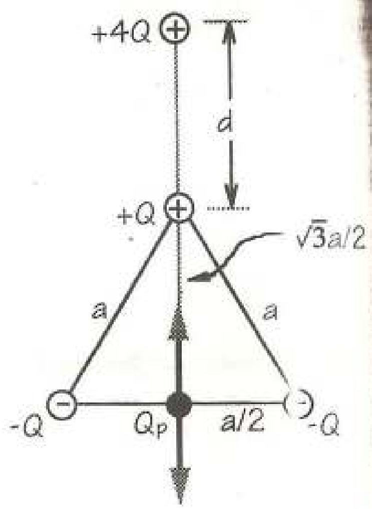
$$\frac{1}{(\sqrt{3}a/2)^2} = \frac{4}{(\sqrt{3}a/2 + d)^2}$$

Por lo tanto:

$$(\sqrt{3}a/2 + d) = \pm 2(\sqrt{3}a/2)$$

De las dos soluciones, sólo el valor positivo de la distancia d es aceptable:

$$d = +\sqrt{3}a/2$$



Respuesta:

A distancia: $d = \sqrt{3}a/2$ por encima de la carga +Q

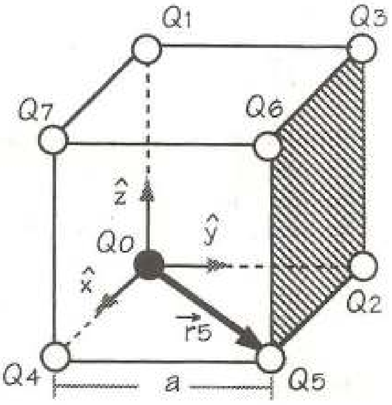
<u>PR 1.15.</u> *Un cubo de cargas*

Ocho cargas de igual magnitud, Q están localizadas en las esquinas de un cubo de lado a.

Determine la fuerza neta (magnitud y dirección) sobre cada carga .

Solución: Todas las cargas son de igual magnitud y signo. Considerando la carga Q_0 ubicada en el orígen de coordenadas, las fuerzas repulsivas de las otras cargas totalizan una fuerza neta:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(-k\frac{Q^2}{r_i^2}\hat{r}_i\right) = -kQ^2\sum_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$



Donde $\vec{F}_i$ es la fuerza sobre Q_0 ejercida por la carga Q_i.
Los vectores posición $\vec{r}_i$ de cada carga son:

$$\begin{array}{llll}
\vec{r}_1 = a\,\hat{z}, & r_1 = a & \vec{r}_3 = a\,\hat{z} + a\,\hat{y}, & r_3 = \sqrt{2}a \\
\vec{r}_2 = a\,\hat{y}, & r_2 = a & \vec{r}_5 = a\,\hat{x} + a\,\hat{y}, & r_5 = \sqrt{2}a \\
\vec{r}_4 = a\,\hat{x}, & r_4 = a & \vec{r}_7 = a\,\hat{z} + a\,\hat{x}, & r_7 = \sqrt{2}a \\
 & & \vec{r}_6 = a\,\hat{x} + a\,\hat{y} + a\,\hat{z}, & r_6 = \sqrt{3}a
\end{array}$$

La fuerza neta sobre la carga es entonces:

$$\vec{F} = -kQ^2\sum_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = -\frac{kQ^2}{a^3}\Big[a\hat{z} + a\hat{y} + \frac{a}{2\sqrt{2}}(\hat{z}+\hat{y})$$
$$+ a\hat{x} + \frac{a}{2\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y}) + \frac{a}{3\sqrt{3}}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}) + \frac{a}{2\sqrt{2}}(\hat{z}+\hat{x})\Big]$$

Agrupando términos:

$$\vec{F} = -K\frac{Q^2}{a^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}) = -1.9\left(K\frac{Q^2}{a^2}\right)(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$$

Como: $|\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}| = \sqrt{3}$ podemos concluir que la fuerza neta sobre cada carga tiene magnitud:

$$F = 3.29\,K\frac{Q^2}{a^2}$$

y su dirección es a lo largo de la diagonal del cuerpo del cubo y apuntando hacia afuera del mismo. El vector forma igual ángulo de inclinación respecto de cada uno de los ejes:

$$\theta_x = \theta_y = \theta_z = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.7°$$

Respuesta:

Magnitud: $F = 3.29\,K\dfrac{Q^2}{a^2}$

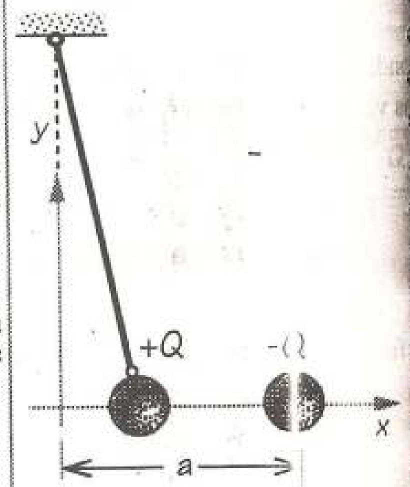
Dirección: En la diagonal del cuerpo del cubo y hacia afuera.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

PP-1.01. ¿ Dónde debe colocarse la tercera carga ?

Una esferita con carga positiva +Q cuelga mediante un hilo ligero y aislante. Cuando se coloca otra esferita con carga -Q a la derecha y a distancia horizontal a, el hilo de soporte se desvía de la vertical.

Si se dispone de una tercera esferita con carga positiva +2Q, determine por lo menos tres posiciones distintas donde habría que colocar esta tercera esferita para que la primera cuelgue verticalmente.



Respuesta:

En cualquier punto P(x,y) que cumpla la condición:

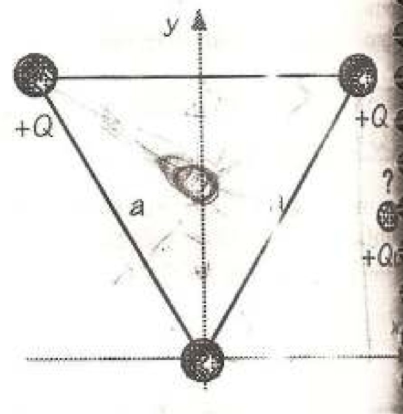
$$(x^2+y^2)^3 = 4x^2a^4$$

Ayuda: La componente horizontal de la fuerza repulsiva que ejerce +2Q debe equilibrar la fuerza atractiva debida a -Q.

PP-1.02. ¿ Dónde estará Q_0 en equilibrio ?

Tres cargas de igual magnitud, Q, están fijas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a. Se desea colocar una cuarta carga Q_0 en un punto de manera que quede en equilibrio bajo la influencia de las fuerzas repulsivas de las otras tres cargas.

¿ Cuál es el punto de equilibrio ?



Respuesta:

El punto $P(0, a/\sqrt{3})$.

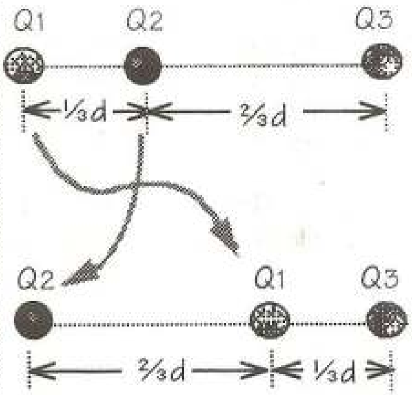
Ayuda: Para que se anule la componente x de la fuerza, Q_0 debe estar en el eje y de simetría.

PP-1.03. ¿ Cuál relación guardan las cargas ?

Dos cargas puntuales Q_1 y Q_3 están inicialmente fijas a una distancia d y podemos desplazar otra carga, Q_2, hasta ubicarla en una posición de equilibrio que está entre las dos a una distancia ⅓d de Q_1 (ver la figura a).

A continuación las cargas Q_2 y Q_3 se mantienen fijas a distancia d y Q_1 queda en libertad de ser desplazada hasta la posición de equilibrio la cual está a una distancia ⅔d a la derecha de Q_2 (ver la figura b)

¿ Cómo están relacionadas las cargas sabiendo que todas son positivas ?



Respuesta:

$$Q_2 = 4Q_3 = 16Q_1$$

Ayuda: Las relaciones se deducen directamente aplicando la ley de Coulomb en ambos casos.

PP-1.04. Tres cargas, tres experimentos.

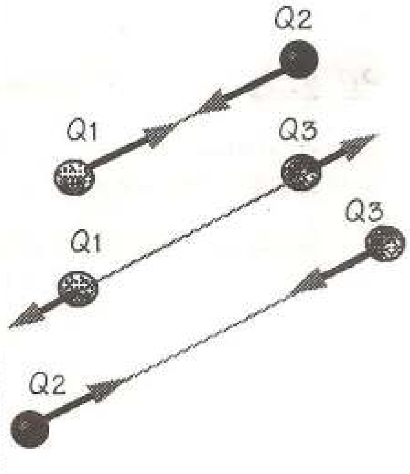
Experimentando con tres cargas desconocidas Q_1, Q_2 y Q_3 se obtienen los siguientes resultados:

i) Cuando Q_1 y Q_2 están a distancia de 12 cm se atraen con una fuerza de $9{,}1\times10^{-3}$ N.

ii) Cuando Q_1 y Q_3 están a distancia de 12 cm se repelen con una fuerza de $5{,}6\times10^{-3}$ N.

iii) Cuando Q_2 y Q_3 están a distancia de 25 cm se atraen con una fuerza de $7{,}2\times10^{-3}$ N.

¿Cuáles son la magnitud y signo de cada carga ?



Respuesta:

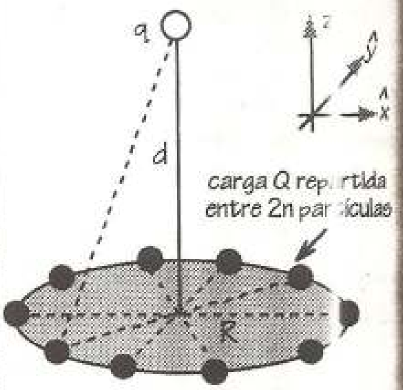
$$Q_1 = +5{,}12\times10^{-8}\text{C},$$
$$Q_2 = -2{,}86\times10^{-7}\text{C},$$
$$Q_3 = +1{,}75\times10^{-7}\text{C}.$$

Ayuda: Para cada caso sustituya los valores numéricos en la ley de Coulomb y resuelva las tres ecuaciones con las tres incógnitas.

PP-1.05. No importa el número de partículas

Una carga total Q ha de dividirse en 2n partículas y colocadas a igual separación en una circunferencia de radio R. Una carga puntual q se coloca a una distancia d del plano del círculo y en el eje perpendicular de simetría (ver la figura).

Determine la fuerza ejercida sobre la carga q y demuestre que el resultado es el mismo para cualquier valor de n (= 1,2,3,...).



Respuesta:

$$\vec{F} = \frac{kqQd}{(R^2+d^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$

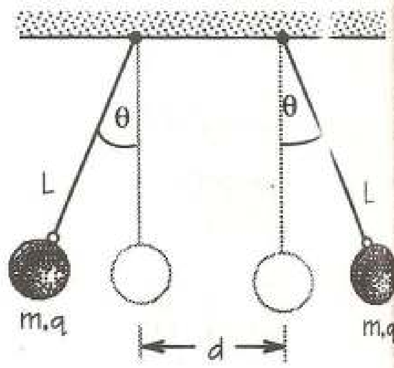
Ayuda: La resultante es la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje Z y es proporcional al número de cargas, pero cada carga individual es inversamente proporcional al número de ellas. El resultado es independiente de si la carga se distribuye en forma discreta (n= 1,2,3,..) o en forma continua (n→∞).

PP-1.06. Dos esferitas repulsivas.

Dos esferitas idénticas de masa m, están suspendidas mediante hilos aislantes cuya longitud es L.

Inicialmente la distancia entre las esferitas es d y después de recibir cada esferita una carga q se repelen entre sí hasta que quedan en equilibrio formando un ángulo θ con la vertical.

¿ Cuál es la magnitud de la carga q ?

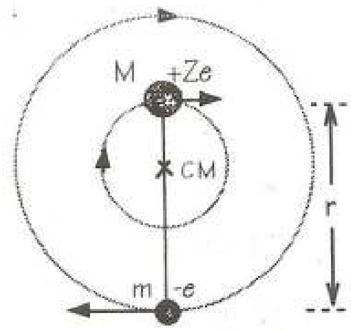


Respuesta:

$$q = (d + 2L\,\text{sen}\theta)\sqrt{\frac{mg\,\text{tg}\theta}{K}}$$

Ayuda: Haga un diagrama de cuerpo libre de una de las esferitas. Las fuerzas que actúan para garantizar el equilibrio forman un triángulo equilátero.

PP-1.07 Atomo de un electrón



Un cierto átomo ionizado consiste de un electrón de masa m y carga e que gira alrededor de un núcleo de masa M y carga Ze (Z= n° atómico). Ambas partículas se mueven a distancia r en órbitas circulares alrededor del centro de masas común.

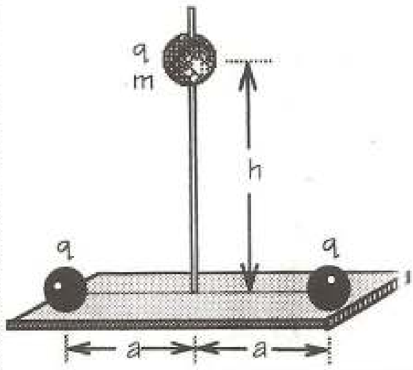
Determine la velocidad angular del electrón y del núcleo.

Respuesta:

$$\omega = \sqrt{\frac{KZe^2(m+M)}{r^3mM}}$$

Ayuda: Usando la definición de CM, escriba el radio de la órbita del electrón en términos de r. Aplique la 2ª ley de Newton para relacionar la fuerza eléctrica con la aceleración centrípeta.

PP-1.08. Levitación eléctrica



Dos cargas idénticas, q, están fijas sobre una mesa horizontal a una distancia 2a. Una esferita de masa m puede deslizar sin fricción sobre una barra aislante colocada rígidamente en forma vertical sobre una mesa en el punto medio entre las dos cargas.

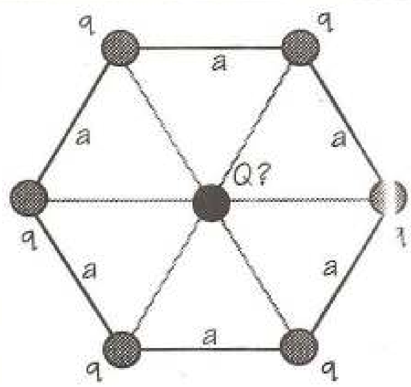
Si se le comunica a la esferita móvil una carga q igual a las anteriores, ¿ a qué altura h estará en equilibrio ?

Respuesta:

$$h = \sqrt{\left[\frac{2Kq^2a}{mg}\right]^{2/3} - a^2}$$

Ayuda: La fuerza eléctrica resultante sobre la esferita móvil es vertical y debe tener igual magnitud que su peso.

PP-1.09. Distribución hexagonal de cargas



En los vértices de un hexágono regular se colocan cargas eléctricas de igual valor, q, como se ilustra en la figura.

¿ Qué carga Q habrá que colocar en el centro del hexágono para que "todo" el sistema de cargas permanezca en equilibrio ?

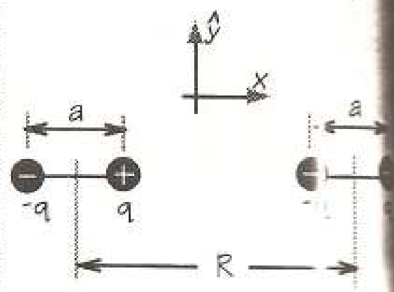
Respuesta:

$$Q = -1.83q$$

<u>Ayuda</u> Q siempre está en equili[illegible] sin importar su valor. Escoja una ca[illegible] del hexágono y halle las distancias a [illegible] otras cargas en términos de "a". Esc[illegible] la suma vectorial de todas las fuerza[illegible] imponga la condición de equilibrio.

PP-1.10. Interacción dipolar

Un dipolo eléctrico consiste de un par de cargas de igual magnitud y signo opuesto (+q y -q) a cierta distancia a. Considere dos de tales dipolos que están separados por una distancia R y orientados como se ilustra en la figura.



a) ¿ Cuál es la fuerza ejercida sobre el dipolo de la izquierda ?
b) Halle la fuerza ejercida sobre el dipolo de la izquierda para distancias grandes R » a, en términos del momento dipolar p = qa

Respuesta:

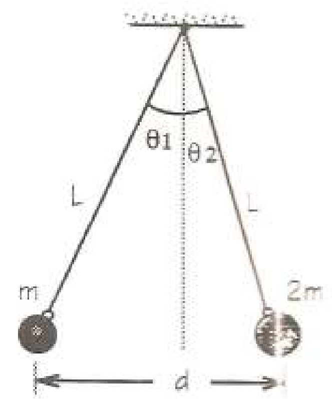
a) $$F = 2kq^2\left[\frac{R^2+a^2}{(R^2-a^2)^2} - \frac{1}{R^2}\right]$$

b) $$\vec{F} = \frac{6kp^2}{R^4}\hat{x}$$

<u>Ayuda</u> : Determine la fuerza ne[illegible] sobre cada carga del dipolo [illegible] aplique superposición.

PP-1.11. Dos esferitas desiguales suspendidas

Dos esferitas de igual carga Q, se suspenden de un punto común mediante hilos de seda de longitud L. Una de las esferitas tiene una masa m y la otra tiene una masa 2m.



a) ¿ Cuál es la relación entre los ángulos θ_1 y θ_2 que forman los hilos con la vertical ?

b) ¿ Cuál es la separación, d, entre las esferitas suponiendo que los ángulos son pequeños ?

Respuesta:

a) $\mathrm{tg}\theta_1 = 2\mathrm{tg}\theta_2$

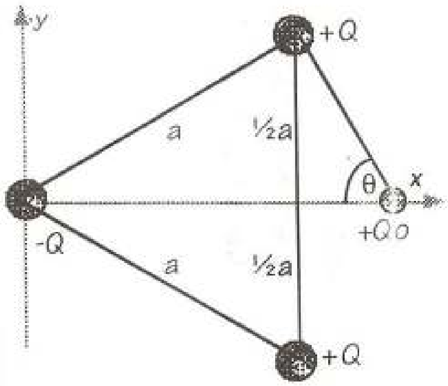
b) $d = \left[\frac{3kQ^2L}{2mg}\right]^{1/3}$

<u>Ayuda</u> : Haga el diagrama de cuerpo libre correspondiente a cada esfera. Las fuerzas forman triángulos rectángulos, los cuales tienen un lado igual (el de la fuerza eléctrica). Use la aproximación de ángulo pequeño sen θ = tgθ.

PP-1.12. ¿ Dónde estará Q_0 en equilibrio ?

Tres cargas de igual magnitud, Q, están fijas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a. Dos de las cargas son positivas y la tercera es negativa y está ubicada en el origen de coordenadas (ver figura).

Una cuarta carga Q_0 está libre de moverse en el eje x. Determine su posición de equilibrio.



Respuesta:

$$x = \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + \cot 81{,}7^\circ) = 0{,}939a$$

Ayuda : Aplicando la condición de equilibrio según la dirección x se obtiene la ecuación para θ:

$$2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta(\sqrt{3}+\cot\theta)^2=1$$

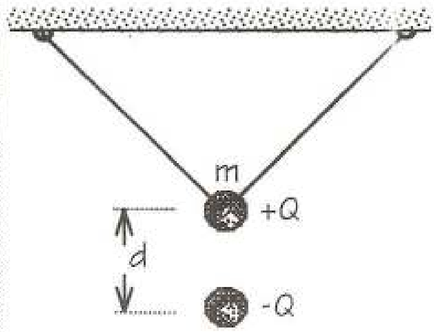
Usando la calculadora se determina numéricamente el valor de θ para el cual el lado izquierdo de esta ecuación resulte igual a 1. El ángulo es $\theta = 81{,}7°$.

PP-1.13. El hilo se rompe con la fuerza eléctrica

Una esferita de masa m y carga positiva Q, se encuentra suspendida mediante dos hilos de seda inextensibles. Los hilos forman un ángulo de 90° y están sometidos a una tensión T.

Se sabe que la máxima tensión que pueden resistir los hilos sin romperse es tres veces este valor. Cuando aproximamos una esfera con carga -Q a una distancia d. por debajo, el hilo se rompe.

a) ¿Cuál es la distancia d.?
b) ¿Cuál es la tensión de ruptura?



Respuesta:

a) $d = \sqrt{\dfrac{kQ^2}{2mg}}$

b) $T_{máx} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}mg$

Ayuda : Dibuje los diagramas de cuerpo libre en las dos situaciones. Relacione la tensión de la cuerda con el peso de la esferita y con la fuerza eléctrica.

PP-1.14. ***¿ Después de tocarse se repelen más ?***

Dos esferitas metálicas idénticas tienen cargas diferentes Q_1 y Q_2, de igual signo y se encuentran a una distancia d. Las esferitas se ponen en contacto y se colocan de nuevo a la misma separación original.

Demuestre que la nueva fuerza de repulsión después de tocarse siempre será mayor.

Respuesta:

$$F_{\text{después}} / F_{\text{antes}} > 1$$

Ayuda : Por ser las esferitas conductoras e idénticas las cargas originales se reparten en partes iguales. Usando la desigualdad: $(Q_1-Q_2)^2 > 0$, se demuestra que:

$$(Q_1+Q_2)^2/4 > Q_1Q_2$$

2

EL CAMPO ELECTRICO

La ley de Coulomb permite calcular la fuerza electrostática ejercida sobre una partícula cargada debido a la presencia de una o varias partículas cargadas Pero, ¿cómo se transmite esta fuerza en el espacio vacío ?, ¿se propaga instantáneamente?. La ley de Coulomb no provee explicación al mecanismo mediante el cual las partículas interactúan. Para resolver la dificultad conceptual de una acción a distancia, se introduce el concepto de campo eléctrico. En este enfoque, la presencia de una partícula cargada modifica el espacio a su alrededor estableciendo (no instantáneamente) un campo eléctrico. Si colocamos una segunda partícula, ésta no interactúa directamente con la primera, sino que responde al campo que allí encuentre. El campo eléctrico actúa entonces como un agente intermedio entre las partículas cargadas. El concepto de campo eléctrico va mas allá de un simple artificio de cálculo. Si movemos repentinamente la carga fuente, la variación de su campo eléctrico se propaga a la velocidad de la luz y cualquier carga distante reaccionará a esta perturbación después de un cierto tiempo. En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de los campo eléctricos y calcularemos el campo generado por distribuciones sencillas de cargas. Además, examinaremos el comportamiento de cargas puntuales en presencia de campos eléctricos.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos vinculados con:

- Campo eléctrico
- Campo eléctrico de una carga puntual
- Campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales
- Campo eléctrico de una distribución continua de carga
- Representación de campos eléctricos
- Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico
- Dipolos eléctricos en campos eléctricos

EL CAMPO ELECTRICO

El campo eléctrico que existe en la vecindad de un objeto cargado (fuente) se detecta colocando una pequeña carga de prueba (o testigo) y midiendo la fuerza electrostática que actúa sobre dicha carga.

El campo eléctrico en un punto del espacio se define como la fuerza que se ejerce sobre una carga testigo positiva, dividida por la magnitud, q_0, de dicha carga.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

La carga testigo, q_0, debe ser lo suficientemente pequeña para no perturbar el campo que allí existe.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

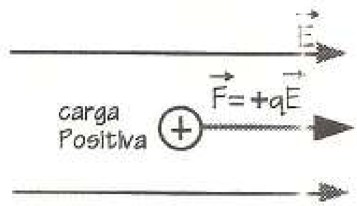
UNIDAD SI del campo eléctrico: 1 N/C

1 newton / coulomb

El campo eléctrico, $\vec{E}$, es una **magnitud vectorial**, que existe en un punto del espacio y depende de la distribución de cargas que lo generan. No depende de la carga testigo.

La fuerza eléctrica sobre un cuerpo es ejercida por el campo eléctrico creado por otros cuerpos. Una vez que $\vec{E}$ es conocido, podemos determinar la fuerza sobre *cualquier* partícula con carga Q mediante la expresión:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

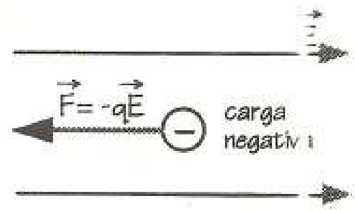


Observe que:

si q es *positiva*, $\vec{F}$ tiene la *misma dirección* de $\vec{E}$.

en tanto que:

si q es *negativa*, $\vec{F}$ tiene *dirección opuesta* a $\vec{E}$.



CAMPO DE UNA CARGA PUNTUAL

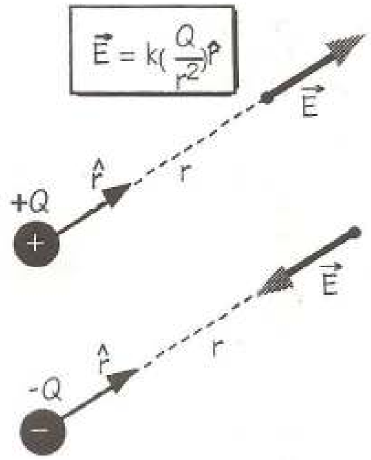
Para determinar el campo creado por una carga puntual Q, colocamos una carga testigo q a distancia r de Q. Dividiendo la fuerza de Coulomb por el valor de la carga testigo, tenemos:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Donde $\hat{r}$ es el vector unitario en dirección radial alejándose de la carga Q. El sentido de $\vec{E}$ respecto de $\hat{r}$ está dado por el signo de Q.

Si Q es positiva, $\vec{E}$ está dirigido hacia afuera de Q.

Si Q es negativa, $\vec{E}$ está dirigido hacia Q.



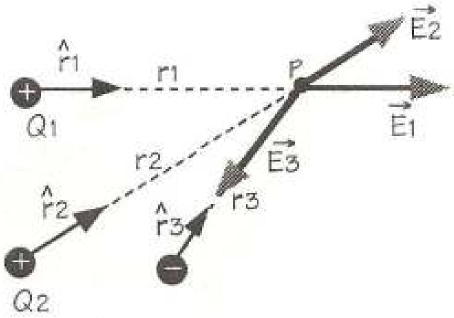
CAMPO DE VARIAS CARGAS PUNTUALES

Los campos eléctricos se combinan vectorialmente de la misma forma que las fuerzas eléctricas.

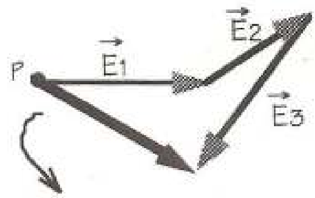
El campo eléctrico en un punto P debido a un sistema de N cargas puntuales Q_1, Q_2, Q_3, ..es el resultante de los campos $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$,..., producido por cada carga individual:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

$$\boxed{\vec{E} = k\sum_{i=1} (\frac{Q_i}{r_i^2})\hat{r}_i}$$



Un grupo de cargas discretas



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

Campo resultante

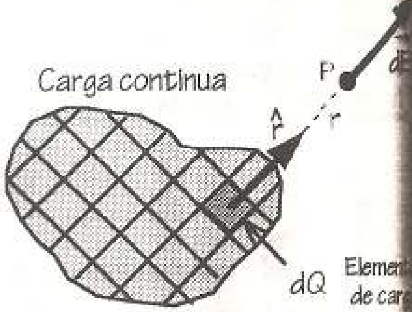
CAMPO DE UNA DISTRIBUCION CONTINUA

Para calcular el campo de una distribución continua de cargas, la estrategia es dividirla en elementos infinitesimales de carga dQ, los cuales pueden ser considerados como cargas puntuales.

Usando el principio de superposición, el campo total en un punto P es la suma vectorial (integral) de las contribuciones individuales de todos los elementos de carga en la distribución:

$$\vec{E} = k\int \frac{dQ}{r^2}\hat{r}$$

En donde r es la distancia del elemento de carga dQ al punto P. El vector unitario $\hat{r}$ tiene origen en el elemento de carga.



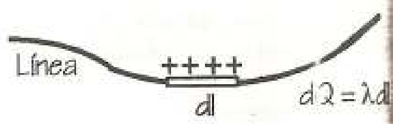
$$\boxed{\vec{E} = k\int \frac{dQ}{r^2}\hat{r}}$$

Para evaluar esta integral debemos expresar dQ en términos de r. Una distribución continua se describe por su densidad de carga en cada punto.

En una ***distribución lineal,*** un elemento arbitrario de longitud dl abarca una carga dQ dada por:

$$dQ = \lambda\, dl$$

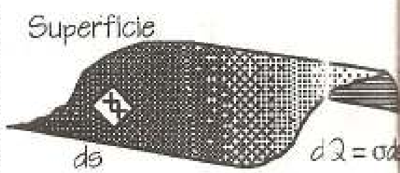
donde λ es la densidad lineal de carga (C/m).



En una ***distribución superficial,*** la carga dQ sobre cualquier elemento de área dS es:

$$dQ = \sigma\, dS$$

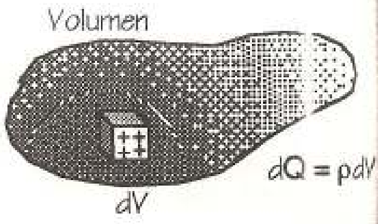
donde σ es la densidad de carga superficial (C/m^2).



En una ***distribución volumétrica,*** la carga dQ en cualquier elemento de volumen dV es:

$$dQ = \rho\, dV$$

donde ρ es la densidad de carga volumétrica (C/m^3).



En el caso de que la distribución de carga sea *uniforme* las densidades de carga λ, σ o ρ son *constantes.*

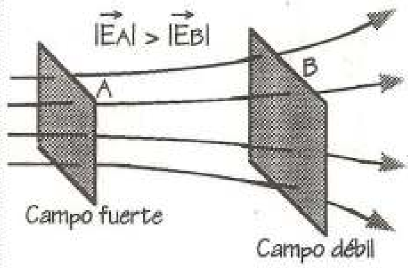
LINEAS DE CAMPO ELECTRICO

Las líneas de campo eléctrico son una ayuda visual para representar la configuración de un campo eléctrico.

La representación consiste en dibujar líneas imaginarias tales que:

a) Se dirigen de modo que en cada punto, la tangente a una línea quede en la ***dirección*** del vector $\vec{E}$ en ese punto.

b) La densidad de líneas (número por unidad de área perpendicular) es proporcional a la ***magnitud*** de $\vec{E}$.

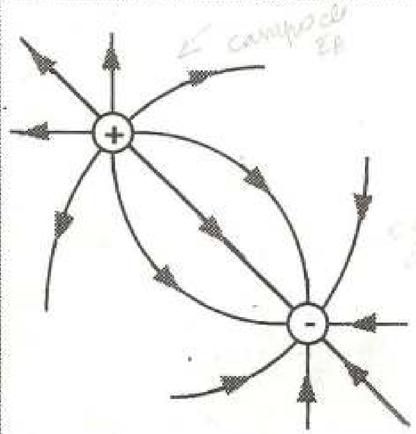


Para trazar líneas de campo se siguen las siguientes ***reglas***:

1) Las líneas comienzan en cargas positivas (+) y terminan en cargas negativas(-).

2) Las líneas son continuas en toda región libre de cargas.

3) Las líneas nunca se interceptan (a menos que haya carga en ese punto)



MOVIMIENTO DE CARGAS EN CAMPOS $\vec{E}$

Una partícula de masa m y carga q en un campo eléctrico experimenta una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. En ausencia de otros tipos de fuerza (como la de gravedad), de acuerdo a la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, la aceleración es:

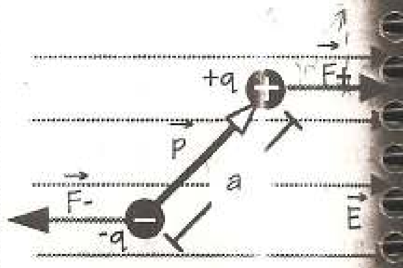
$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Si el campo es uniforme, la aceleración es constante en magnitud y dirección, y se pueden usar las expresiones conocidas de cinemática para aceleración constante.

DIPOLOS EN UN CAMPO $\vec{E}$ UNIFORME

Un dipolo eléctrico está constituido por dos cargas iguales y opuestas $\pm$ q desplazadas por una distancia **a**. El **momento dipolar** del dipolo es un vector que se define como:

$$\vec{p} = q\,\vec{a}$$



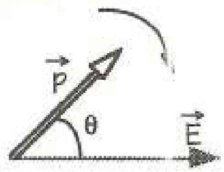
Dipolo en campo uniforme

$\boxed{\vec{F}_{neto} = 0}$

En un campo eléctrico uniforme, las fuerzas individuales sobre +q y -q son iguales y opuestas y sobre el dipolo no se ejerce ninguna fuerza neta.

Por otra parte, las magnitudes de los torques individuales respecto del centro del dipolo son:

$$\tau^{+} = \tau^{-} = r_{\perp}\,F = (\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\theta)(F)$$



Torque sobre el dipolo

$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$

Estos torques actúan en el mismo sentido, de modo que la magnitud del torque neto sobre el dipolo es:

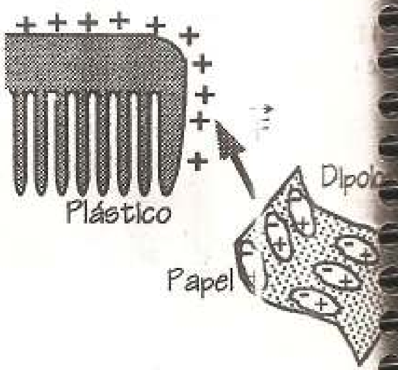
$$\tau_{neto} = \tau^{+} + \tau^{-} = 2(\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\theta)(qE) = pE\,\mathrm{sen}\theta$$

El torque tiende a alinear el dipolo a lo largo de las líneas del campo eléctrico.

DIPOLOS EN CAMPOS NO-UNIFORMES

Si el campo no es uniforme, la fuerza sobre la carga +Q tiene diferente magnitud que la fuerza sobre la carga -Q, de modo que la fuerza neta sobre el dipolo no es nula.

Debido a esto, un objeto eléctricamente neutro puede interactuar eléctricamente con un objeto cargado, bien debido a que sus moléculas poseen momentos dipolares intrínsecos o que el campo eléctrico externo le induzca dipolos al provocar una separación local de cargas.



Dipolos en campo no-uniforme

$\vec{F}_{neto} \neq 0$

En el problema **PR 2.18** se demostrará que la fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme es proporcional al momento dipolar **p** y a la derivada espacial del campo eléctrico. La fuerza está dirigida hacia la región donde el campo es mas intenso.

VERIFICA TU COMPRENSION

PE-2.01. ***Una de estas afirmaciones es falsa ......***

a) Toda carga modifica las propiedades del espacio que la rodea, creando en dicho espacio un campo eléctrico.

b) El concepto de campo eléctrico permite dividir un sistema de cargas en dos partes: las cargas que actúan como fuentes del campo y la carga que es afectada por dicho campo.

c) Los campos eléctricos no existen, y son solo un mero artificio de cálculo matemático.

d) El concepto de campo eléctrico es conveniente y necesario ya que una acción a distancia no ocurre instantáneamente.

e) Un campo eléctrico puede existir en un punto (incluso en el espacio vacío) sin importar si en ese punto está localizada o no, una carga de prueba.

PE-2.02. ***Una de estas afirmaciones es correcta.....***

a) Las líneas de campo eléctrico pueden cruzarse.

b) Si se suelta en reposo una carga puntual donde hay un campo eléctrico, esta carga seguirá una trayectoria a lo largo de una línea de $\vec{E}$.

c) Los dipolos eléctricos pueden trasladarse bajo la acción de campos eléctricos.

d) Sobre un dipolo eléctrico en un campo uniforme no puede haber una fuerza eléctrica neta.

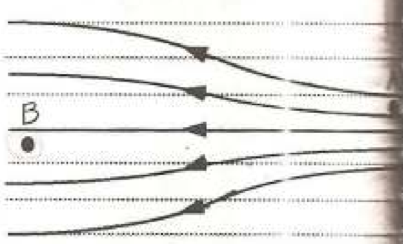
e) La magnitud del campo eléctrico es constante a lo largo de una línea de campo eléctrico.

PE-2.03. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

La figura muestra las líneas de campo de un campo eléctrico en una cierta región del espacio.

Si la magnitud del campo eléctrico en el punto A es 6 N/C, la magnitud del campo eléctrico en el punto B es:

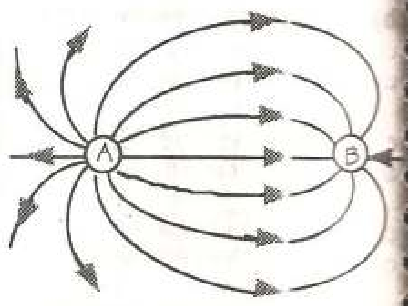
a) 0 N/C; b) 2 N/C; c) 3 N/C; d) 6 N/C; e) 18N/C



PE-2.04. ¿ Cuáles cargas generan este campo ?

Las líneas de campo eléctrico que se ven en la figura corresponden a una configuración del campo de dos partículas cargadas tales que:

a) $|Q_B| = \frac{3}{4}|Q_A|$
b) $|Q_A| = \frac{2}{3}|Q_B|$
c) $|Q_B| = \frac{1}{2}|Q_A|$
d) $|Q_B| = \frac{2}{3}|Q_A|$
e) $|Q_A| = \frac{3}{4}|Q_B|$

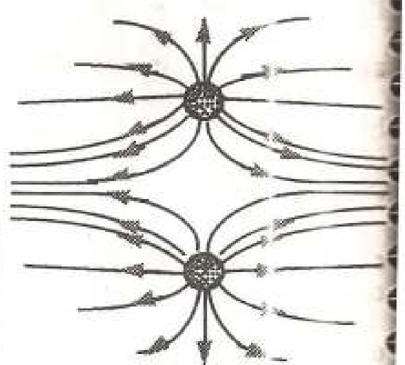


PE-2.05. ¿ Por qué este diagrama es incorrecto ?

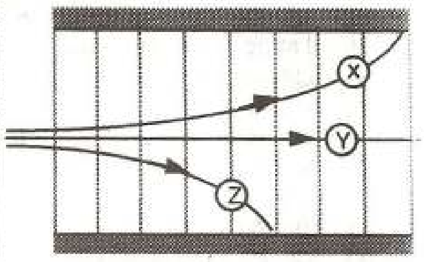
Un estudiante dibuja las líneas de campo eléctrico en la cercanía de dos cargas puntuales idénticas.

El diagrama es incorrecto debido a que:

a) No hay ninguna línea de fuerza en el centro del diagrama.
b) Las líneas deben salir de una carga y entrar en la otra.
c) No tiene simetría respecto del eje que une las dos cargas.
d) Hay regiones donde la densidad de líneas aumenta con la distancia a las cargas.
e) Las líneas no deben extenderse hacia el infinito.



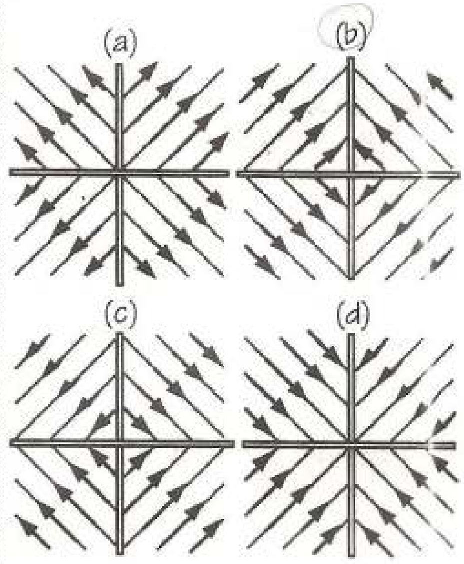
PE-2.06. *Identifica la partículas por sus trayectorias*



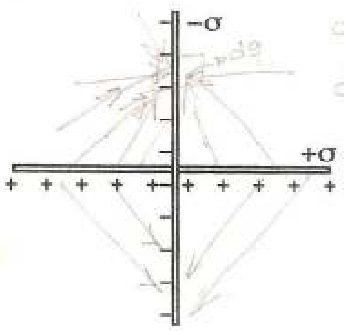
Un haz de partículas, constituido por protones, neutrones y electrones, todos con igual velocidad, penetra en el campo uniforme formado entre dos placas electrizadas y se observa que el haz se divide en otros tres X, Y y Z como indica la figura. Si se desprecia el efecto de la gravedad, se puede decir que:

a) X son protones, Y son neutrones, Z son electrones.
b) X son electrones, Y son neutrones, Z son protones.
c) X son protones, Y son electrones, Z son neutrones.
d) X son electrones, Y son protones, Z son neutrones.
e) Falta información.

PE-2.07. *¿ Cuáles son las líneas de campo correctas?*



Dos hojas infinitas con cargas opuestas y repartidas uniformemente con igual densidad $\pm\sigma$, se colocan ortogonalmente, como se ilustra a continuación:

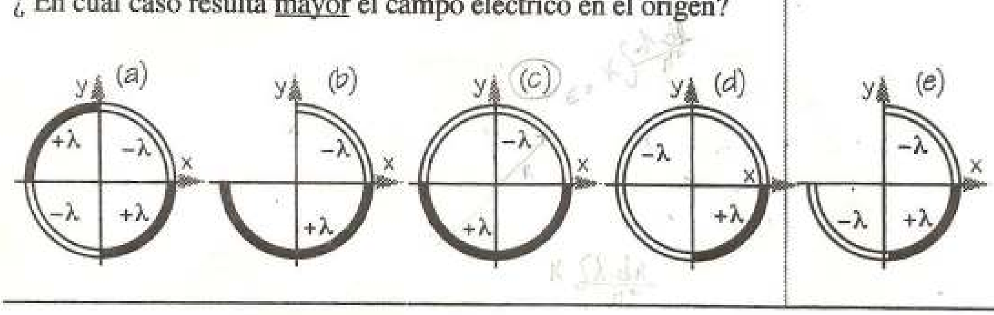


dq = -δdl
dq = δdl

¿Cual es el diagrama correcto para las líneas de campo eléctrico?

PE-2.08. *Campo de barras circulares*

Se construyen varios arreglos con barras circulares de carga uniforme, que tienen una sección negativa y la otra positiva. ¿ En cuál caso resulta mayor el campo eléctrico en el origen?



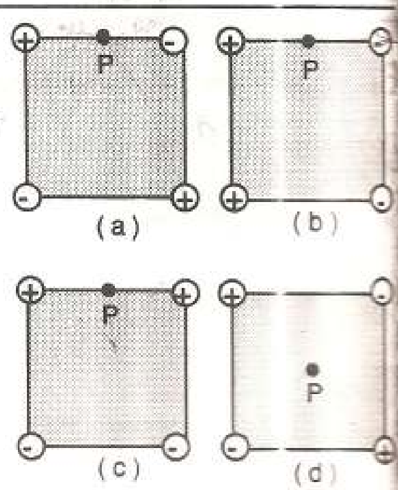
PE-2.09. *¿ Hacia dónde se mueve la esferita ?*

Dos placas metálicas grandes verticales y paralelas tienen igual densidad superficial de carga, de signos opuestos y se establece entre ellas un campo eléctrico en dirección horizontal. Se suspende una esferita metálica de un hilo no-conductor, de modo que quede más próxima a una de las placas.
¿ Cómo se comportará la esferita ?

a) Permanece en la misma posición inicial.
b) Es atraída por la placa positiva y queda unida a ésta.
c) Es atraída por la placa negativa y queda unida a ésta.
d) Busca la posición de equilibrio equidistante de las placas.
e) Oscila de una placa a la otra.

PE-2.10. *¿ Dónde es mayor el campo eléctrico?*

Cuatro cargas puntuales de igual magnitud, dos positivas y dos negativas se colocan en las esquinas de un cuadrado.
¿ En cuál de los arreglos mostrados será máxima la magnitud del campo eléctrico en los puntos P señalados ?



a) en (a).
b) en (b).
c) en (c).
d) en (d).
e) en mas de un arreglo.

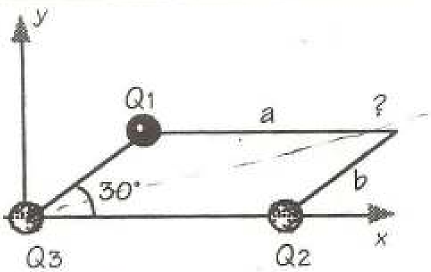
Cap.2: Respuestas

Pregunta	a	b	c	d	e
PE-2.01			✓		
PE-2.02				✓	
PE-2.03		✓			
PE-2.04				✓	
PE-2.05				✓	
PE-2.06	✓				
PE-2.07		✓			
PE-2.08			✓		
PE-2.09					✓
PE-2.10		✓			

PR 2.01. ***Tres cargas en un paralelogramo.***

Tres cargas puntuales $Q_1 = -3x10^{-6}C$, $Q_2 = 2x10^{-6}C$ y $Q_3 = 10^{-6}C$ están en las esquinas de un paralelogramo, cuyos lados son $a = 3$ m y $b = 2$ m, como se muestra en la figura.

¿Cuál es el campo eléctrico resultante en la esquina vacante ?

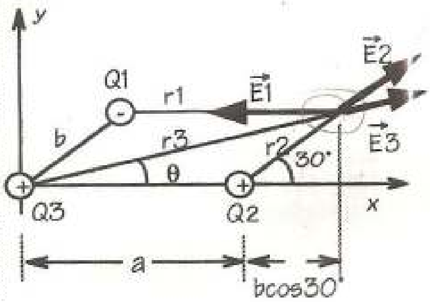


Solución: Determinaremos primero las distancias desde cada carga a la esquina vacante. Según se muestra en la figura:

$$r_1 = a = 3\text{m}, \quad r_2 = b = 2\text{m}.$$

$$r_3 = \sqrt{(a + b\cos 30°)^2 + (b\,\text{sen}30°)^2} = \sqrt{(3 + 2\cos 30°)^2 + 1^2} = 4{,}83 \text{ m}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{b\ \text{sen}30°}{a + b\ \cos 30°} = \frac{1}{4{,}73} \rightarrow \theta = 11{,}9°$$



Sustituyendo las respectivas distancias r_1, r_2 y r_3, los campos individuales debido a cada carga son:

$$|\vec{E}_1| = \frac{kQ_1}{r_1^2} = \frac{(9{,}0x10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2)(3x10^{-6}\text{C})}{(3\text{m})^2} = 3000 \text{ N/C}.$$

$$\vec{E}_1 = -3000\hat{x} \text{ N/C}$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{kQ_2}{r_2^2} = \frac{(9{,}0x10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2)(2x10^{-6}\text{C})}{(2\text{m})^2} = 4500 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = 4500\text{N/C}\ (\cos 30°\hat{x} + \text{sen}30°\hat{y})$$

$$|\vec{E}_3| = \frac{kQ_3}{r_3^2} = \frac{(9{,}0x10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2)(1x10^{-6}\text{C})}{(4{,}83\text{m})^2} = 385{,}8 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_3 = 385{,}8 \text{ N/C}\ (\cos 11{,}9°\hat{x} + \text{sen}11{,}9°\hat{y})$$

El campo total en la esquina desocupada es la suma vectorial:

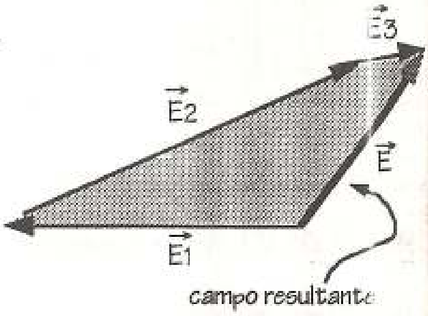
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Reemplazando las expresiones de los campos individuales:

$$\vec{E} = (-3000 + 4500\cos 30^\circ + 385{,}8\cos 11{,}9^\circ)\ \text{N/C}\ \hat{x}$$
$$(4500\,\text{sen}\,30^\circ + 385{,}8\,\text{sen}\,11{,}9^\circ)\ \text{N/C}\ \hat{y}$$

simplificando:

$$\vec{E} = (1276\,\hat{x} + 2330\hat{y})\ \text{N/C}$$



Respuesta

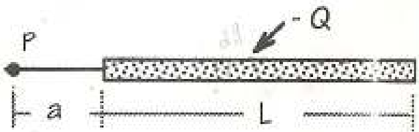
$$\boxed{\vec{E} = (1276\,\hat{x} + 2330\hat{y})\ \text{N/C}}$$

PR 2.02. *Campo de una barra con carga uniforme.*

Una barra aislante de longitud L tiene una carga negativa Q distribuida uniformemente a lo largo de ella. (lo no es puntual ¡integro!!)

a) Calcule el campo eléctrico en el punto P a una distancia a del extremo de la barra.

b) Si P estuviese muy lejos de la barra (a » L), demuestre que la expresión anterior se reduce a la del campo de una carga puntual.

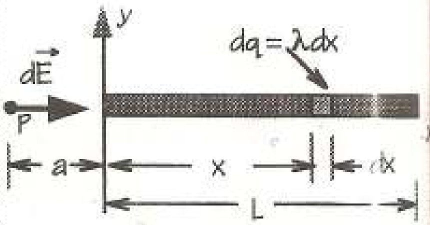


Solución: La carga Q está uniformemente repartida sobre la longitud L de la barra, por lo tanto la densidad de carga es constante:

$$\lambda = Q/L.$$

Escogemos como origen de coordenadas el extremo de la barra adyacente al punto P y subdividimos la barra en elementos de longitud dx. Cada elemento tiene una carga $dq = \lambda dx$ y produce un campo $d\vec{E}$ en el punto P y viene dado por:

$$d\vec{E} = k\frac{dQ}{r^2}\hat{r} = k\frac{\lambda dx}{(x+a)^2}\hat{x}$$



Observe que por ser la carga negativa, el campo tiene dirección $+\hat{x}$, (apunta hacia la barra).

Cuando consideramos los aportes de los diferentes elementos de carga todos apuntan en la misma dirección y al sumarlos tenemos el vector campo eléctrico total:

$$\vec{E} = \hat{x}\int_{x=0}^{L} k\frac{\lambda dx}{(a+x)^2} = \hat{x}k\lambda\left(\frac{-1}{(a+x)}\right)\Big|_0^L$$

$$\vec{E} = k\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{(a+L)}\right)\hat{x} = k\lambda\left(\frac{L}{a(a+L)}\right)\hat{x} = \frac{kQ}{a(a+L)}\hat{x}$$

b) Si la longitud L es despreciable frente a la distancia a, se obtiene la expresión familiar para el campo eléctrico producido por una carga puntual.

$$L \ll a \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = k\frac{Q}{a^2}\hat{x}$$

Respuesta

a) $\vec{E} = \dfrac{kQ}{a(a+L)}\hat{x}$

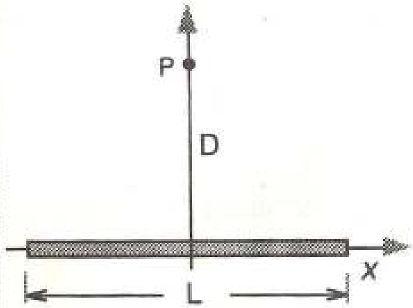
b) $\vec{E} = k\dfrac{Q}{a^2}\hat{x}$

PR 2.03. ***Campo en la mediatriz de una barra uniforme y campo de una barra infinita.***

Una barra delgada no conductora de longitud finita L, contiene una carga positiva Q distribuida uniformemente.

a) Determine el campo eléctrico en un punto ubicado a una distancia D sobre la mediatriz perpendicular a la barra.

b) Determine el campo producido por una barra delgada e infinitamente larga.



Solución: a) Conviene escoger un sistema de coordenadas con origen en el centro de la barra. La magnitud del campo eléctrico debido a un elemento de carga de longitud dx es:

$$dE = k\frac{\lambda dx}{r^2}$$

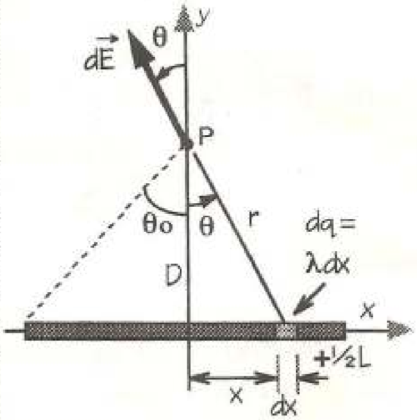
La componente de $d\vec{E}$ en la dirección y tiene una magnitud:

$$dE_y = dE\cos\theta = \left(k\frac{\lambda dx}{r^2}\right)\cos\theta$$

Usualmente, en este tipo de situación la integración se simplifica cambiando de la variable lineal x a la variable angular θ:

$$x = D\,\mathrm{tg}\theta$$

$$dx = D\sec^2\theta\, d\theta = D\left(\frac{r}{D}\right)^2 d\theta$$



La componente E_y del campo total se obtiene integrando esta expresión:

$$E_y = \int dE_y = \left(\frac{k\lambda}{D}\right)\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos\theta \, d\theta = 2\left(\frac{k\lambda}{D}\right)\operatorname{sen}\theta_0$$

Donde el ángulo θ_0 viene dado por:

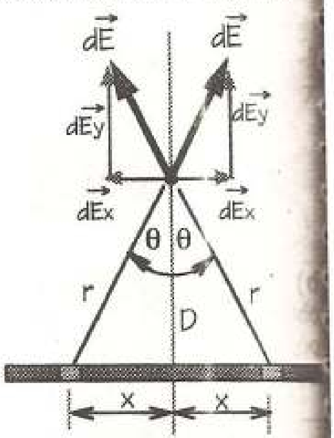
$$\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + D^2}}$$

El campo total no tiene componente x (paralela a la linea de carga), ya que los aportes dE_x de elementos ubicados simétricamente tienden a cancelarse.
Por lo tanto, el campo total queda en la dirección y:

$$\vec{E} = \left(\frac{2k\lambda}{D}\right)\frac{L}{\sqrt{L^2+4D^2}}\hat{y}$$

b) El campo producido por una línea de carga de longitud infinita se obtiene a partir de este resultado haciendo $\theta_0 = 90°$ o bien $D \ll L$.

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{D}\hat{y}$$



Respuesta:

a) Línea de longitud L

$$\vec{E} = \left(\frac{2k\lambda}{D}\right)\frac{L}{\sqrt{L^2+4D^2}}\hat{y}$$

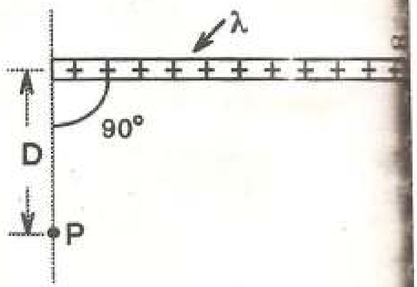
b) Línea infinita

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{D}\hat{y}$$

PR 2.04. ¡ A cualquier distancia, el campo eléctrico siempre forma un ángulo de 45° !

Una barra aislante semi-infinita tiene una carga constante por unidad de longitud igual a λ.

Demuestre que el campo eléctrico en el punto P de la figura forma un ángulo de 45° con la barra y que este resultado es independiente de la distancia D.



Solución: Consideremos un elemento infinitesimal de longitud dx, a distancia x del extremo izquierdo de la barra. Este elemento contiene una carga λdx y está a una distancia r del punto P. La magnitud del campo eléctrico que produce en P es:.

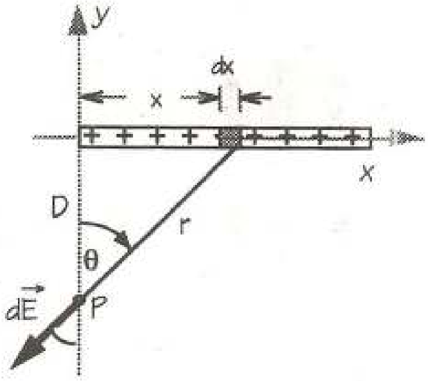
$$dE = k\frac{\lambda dx}{r^2}$$

La componente del vector $d\vec{E}$ en la dirección x es:

$$dE_x = -dE\ \text{sen}\theta = -\left(k\frac{\lambda dx}{r^2}\right)\text{sen}\theta$$

En tanto que la componente en la dirección y es:

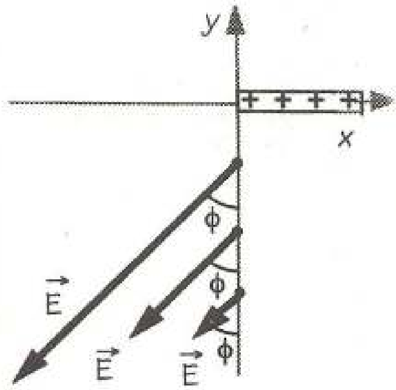
$$dE_y = -dE\cos\theta = -\left(k\frac{\lambda dx}{r^2}\right)\cos\theta$$



Podemos escoger como variable de integración el ángulo θ. Expresando x y r en términos de θ, tenemos:

$$x = D\,\text{tg}\theta \quad \Rightarrow \quad dx = D\sec^2\theta\, d\theta$$
$$r = D/\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r^2 = D^2\sec^2\theta$$

Reemplazando dx y r^2 en las expresiones de las componentes del campo eléctrico y tomando en cuenta que cuando x varía entre los límites "0" e "∞", el ángulo θ varía entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ tenemos:



$$E_x = \int dE_x = -\frac{k\lambda}{D}\int_0^{\pi/2}\text{sen}\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{D}\cos\theta\,\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{k\lambda}{D}$$

similarmente:

$$E_y = \int dE_y = -\frac{k\lambda}{D}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = -\frac{k\lambda}{D}\text{sen}\theta\,\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{k\lambda}{D}$$

La magnitud del campo resultante es:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \sqrt{2}\frac{k\lambda}{D}$$

y la dirección:

$$\text{tg}\phi = \frac{E_x}{E_y} = \frac{-k\lambda/D}{-k\lambda/D} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 45°$$

Vemos que independientemente de la distancia D, el vector $\vec{E}$ forma un ángulo de 45° respecto del eje negativo de las y.

Respuesta:

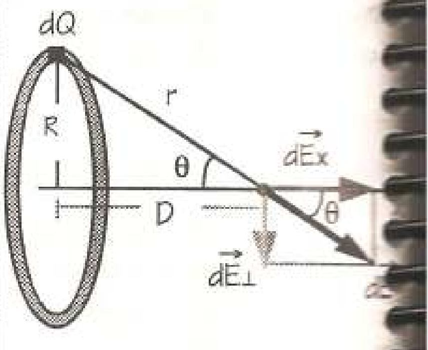
$$\boxed{\phi = \text{arctg}\left(\frac{E_x}{E_y}\right) = 45°}$$

PR 2.05. *Campo de un anillo uniforme de carga*

Un anillo de radio R tiene una carga positiva Q repartida uniformemente.

Calcule el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo, en un punto P que esté a una distancia D del centro.

Solución: Considerando en el anillo un segmento de carga dQ, la magnitud del campo eléctrico en P es:

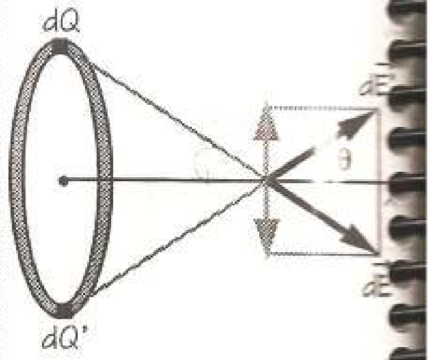


$$dE = k\frac{dQ}{r^2}$$

Podemos descomponer este campo infinitesimal en dos componentes: dE_x a lo largo del eje del anillo y $dE_\perp$ que es perpendicular a dicho eje.

Ahora bien, para cada elemento de carga dQ existe un elemento correspondiente dQ' ubicado en el lado opuesto del anillo. Las componentes $dE_\perp$ de estos elementos simétricos son iguales y opuestas y se "cancelan".

Por lo tanto, el campo resultante en P debe estar a lo largo del eje del anillo.



$$dE_x = dE\cos\theta = k\frac{dQ}{r^2}\left(\frac{D}{r}\right) = \frac{kD}{r^3}dQ$$

Como todos los puntos del anillo están a igual distancia del punto P, la suma de todas las contribuciones es:

$$E_x = \int dE_x = \frac{kD}{r^3}\int dQ = \frac{kD}{r^3}Q = \frac{kDQ}{(D^2+R^2)^{3/2}}$$

Donde hemos hecho la sustitución: $r = (D^2 + R^2)^{1/2}$

Observe una vez más que para puntos ubicados a grandes distancias del anillo (D» R), el resultado se reduce al de una carga puntual.

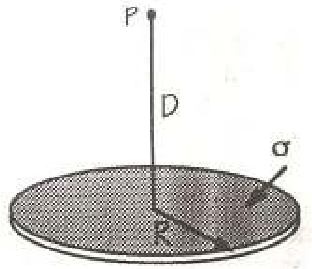
Respues

$$\vec{E} = \frac{kQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

PR 2.06. *Un disco uniformemente cargado y un plano infinito.*

Considere un disco de radio R que tiene una densidad de carga superficial uniforme σ.

a) Determine el campo eléctrico a lo largo del eje del disco a una distancia D de su centro.
b) Use el resultado anterior para determinar el campo eléctrico de una lámina infinita cargada uniformemente.

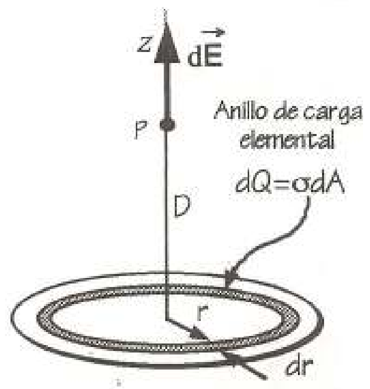


Solución: a) Podemos considerar que el disco está constituido por anillos concéntricos y sumar las contribuciones de todos los anillos. Un anillo de radio r y espesor dr tiene un área diferencial $dA = 2\pi r dr$. La carga de este anillo es:

$$dQ = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr)$$

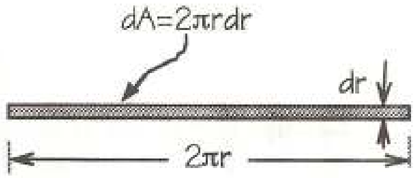
Usando el resultado del problema anterior para el campo de un anillo de radio r y carga dQ:

$$dE_z = \frac{kD\,dQ}{(D^2+r^2)^{3/2}} = \frac{kD(\sigma 2\pi r dr)}{(D^2+r^2)^{3/2}}$$



Podemos hallar E_z integrando entre los límites r=0 y r=R, observando que D es constante, entonces:

$$E_z = \int dE_z = \sigma\pi kD \int_0^R \frac{2r\,dr}{(D^2+r^2)^{3/2}}$$



Esta integral es del tipo:

$$\int U^p dU = U^{p+1}/(p+1)$$

En donde:

$$U=(D^2+r^2);\ p = -3/2;\ y\ dU = 2rdr.$$

Integrando tenemos:

$$E_z = \sigma\pi kD\left[\frac{(D^2+r^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R = 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{D}{(D^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

b) Para puntos cercanos ($D \ll R$) el disco cargado se comporta como si fuese de extensión infinita ($D \to 0$ o $R \to \infty$), el segundo término dentro del corchete tiende a cero y la ecuación se reduce a:

$$E_z = 2\pi k\sigma$$

Vemos que el campo próximo a la superficie el campo es uniforme, ya que no depende de la distancia D.

Respuesta:

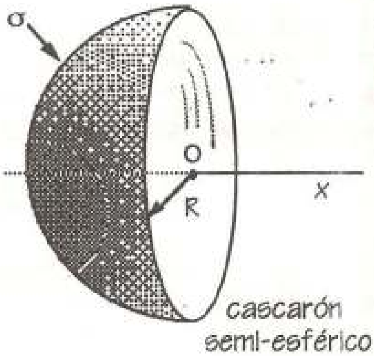
a) En cualquier punto del eje: $\vec{E} = 2\pi k\sigma[1 - \dfrac{D}{(D^2+R^2)^{1/2}}]\hat{z}$

b) Puntos cercanos: $\vec{E} = 2\pi k\sigma\hat{z}$

PR 2.07. *Campo de un cascarón semi-esférico*

Un cascarón hemisférico no conductor de radio R tiene una carga, Q, distribuida uniformemente sobre su superficie.

Determine el campo eléctrico en su centro de curvatura O.



Solución: En el cascarón consideremos un elemento diferencial que consiste de un anillo circular de radio r que está alineado perpendicularmente a su eje.
El área de este anillo es:

$$dA = 2\pi r(Rd\theta) = 2\pi(R\text{sen}\theta)(Rd\theta) = 2\pi R^2 \text{sen}\theta d\theta$$

La carga que abarca el anillo es: $dQ = \sigma dA$, donde la densidad superficial de carga es uniforme:

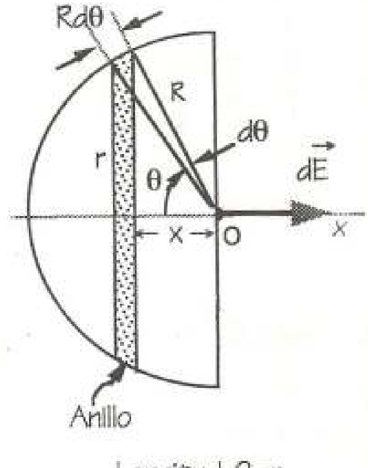
$$\sigma = Q/A = Q/2\pi R^2.$$

Usando el resultado del campo de un anillo, tenemos que el campo del anillo elemental en el punto O tiene una magnitud:

$$dE = k\frac{x\,dQ}{(x^2+r^2)^{3/2}} = k\frac{x\,\sigma dA}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

y queda a lo largo del eje x. Sustituyendo las distancias:

$$x = R\cos\theta \text{ y } (x^2+r^2) = R^2$$



y el área dA, obtenemos para dE:

$$dE = k\sigma \frac{(R\cos\theta)\,(2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta)}{R^3}$$

El campo total es la integral sobre todos los anillos hasta cubrir el hemisferio:

$$E = 2\pi k\sigma \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta = 2\pi k\sigma \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d(\operatorname{sen}\theta)$$

Integrando tenemos finalmente:

$$E_x = 2\pi k\sigma\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi k\sigma = \frac{kQ}{2R^2}$$

Respuesta:

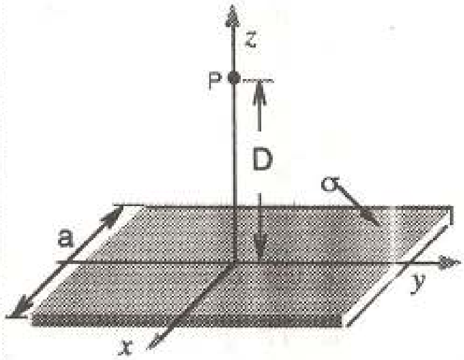
$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{2R^2}\hat{x}}$$

PR 2.08. *Una tira plana y larga con carga uniforme*

Una lámina aislante delgada, de ancho a y de largo infinito tiene una densidad superficial de carga uniforme σ.

a) Determine el campo eléctrico en un punto P ubicado a distancia D en el eje z de simetría, perpendicular el plano.

b) Compruebe que en el límite 2a » D, el resultado anterior se reduce al campo debido a un plano de carga infinito.

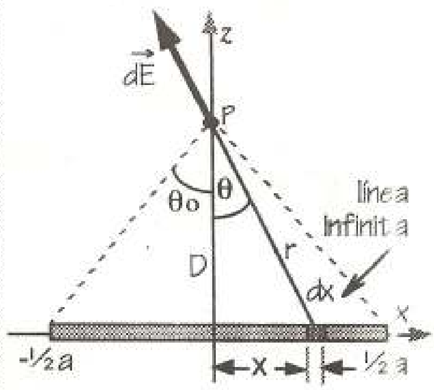


Solución: a) Podemos dividir la lámina en tiras delgadas e infinitamente largas. Una tira de ancho dx ubicada a distancia x del eje, tendrá una *carga por unidad de longitud*:

$$\lambda = \sigma dx.$$

Usando el resultado obtenido para el campo eléctrico de una barra delgada e infinita (PR-2.03), tenemos:

$$d\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$$



Se observa que las componentes del campo en dirección paralela al plano de la lámina provenientes de elementos simétricos, se cancelan. Por lo tanto, sólo nos interesa la componente perpendicular:

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{2k\lambda}{r}\cos\theta = \frac{2k\sigma dx}{r}\cos\theta$$

Sustituyendo r y dx en términos del ángulo θ:

$$r = D/\cos\theta, \qquad x = D\,\mathrm{tg}\theta, \quad dx = D\sec^2\theta\, d\theta$$

El campo debido a toda la lámina es entonces:

$$E = E_y = 2k\sigma\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{dx}{r}\cos\theta = 2k\sigma\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{D\sec^2\theta d\theta}{D/\cos\theta}\cos\theta$$

$$E = 2k\sigma\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta = 2k\sigma\theta\Big|_{-\theta_0}^{+\theta_0} = 2k\sigma(2\theta_o) = 4k\sigma\,\mathrm{arctg}(\frac{a}{2D})$$

$\mathrm{tg}\theta_o = \frac{1}{2}a/D$

b) En el límite $(a/2D \to \infty)$ entonces $\mathrm{arctg}(a/2D) \to \pi/2$ la ecuación anterior se reduce a:

$$E = 2\pi k\sigma$$

que coincide con el campo de una hoja de carga infinita (PR-2.06).

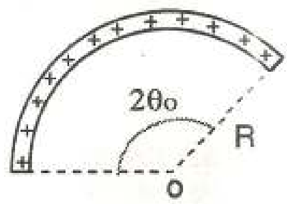
Respuesta:

a) tira infinita de ancho a
$\vec{E} = 4k\sigma\,\mathrm{arctg}(\frac{a}{2D})\hat{z}$
b) hoja de carga infinita:
$\vec{E} = 2\pi k\sigma\,\hat{z}$

PR 2.09. *Campo eléctrico de una barra en arco.*

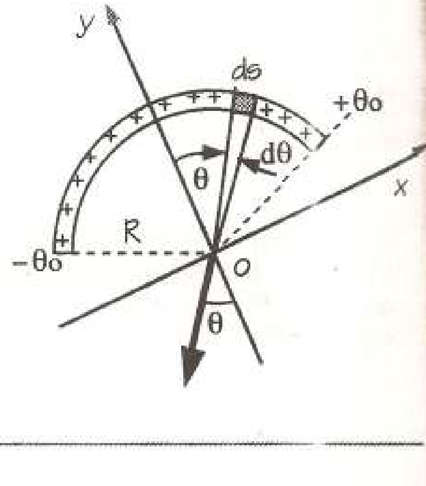
Una barra delgada de material aislante con carga por unidad de longitud λ, está doblada formando un arco circular de radio R. El arco sustenta un ángulo $2\theta_o$ respecto del centro de la circunferencia.

Determine el campo eléctrico en el centro de la circunferencia.



Solución: Para simplificar los cálculos escogemos los ejes de forma tal que el eje y divide al ángulo en dos partes iguales. La contribución al campo en el punto O debida a un elemento de arco $ds = Rd\theta$ es:

$$dE = k\frac{dq}{R^2} = k\frac{\lambda ds}{R^2} = k\frac{\lambda(Rd\theta)}{R^2} = k\frac{\lambda d\theta}{R}$$



En virtud de la simetría respecto del eje y, cuando sumamos todos los aportes al campo eléctrico de elementos simétricos y la componente x del campo se anula :

$$E_x = 0$$

Por otra parte, la componente y es:

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{k\lambda d\theta}{R}\cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos\theta d\theta$$

Esta integral es del tipo $\int \cos\theta\, d\theta = +\operatorname{sen}\theta$ y tomando en cuenta que $\operatorname{sen}(-\theta_o) = -\operatorname{sen}\theta_o$, se tiene finalmente:

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\operatorname{sen}\theta_o(-\hat{y})$$

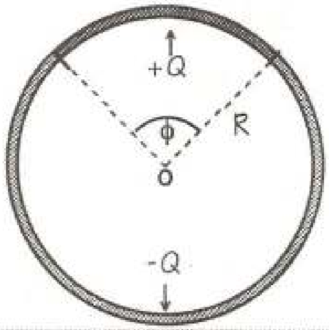
Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\operatorname{sen}\theta_o(-\hat{y})}$$
(en la dirección de la bisectriz)

PR 2.10. *Campo en el centro de un anillo compuesto.*

Un anillo delgado de material aislante de radio R, tiene una carga positiva $+Q$ distribuida uniformemente en el segmento de arco subtendido por un ángulo ϕ. El resto del anillo tiene una carga negativa $-Q$ distribuida uniformemente.

Determine el vector campo eléctrico en el centro del anillo.

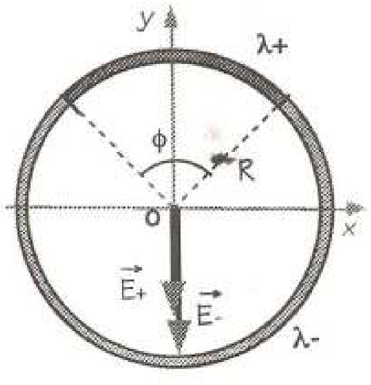


Solución: Podemos aprovechar el resultado del problema anterior y superponer los campos debidos a las dos secciones diferentes del anillo.

Para la sección superior, la carga positiva $+Q$ está distribuida sobre un arco de longitud $R\phi$ y su densidad lineal de carga es: $\lambda_+ = +Q/R\phi$.

El campo producido en el centro es:

$$\vec{E}_+ = \frac{2k\lambda_+}{R}\operatorname{sen}\theta_o(-\hat{y}) = \frac{2kQ}{R^2\phi}\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})(-\hat{y})$$



Para la sección inferior la carga negativa $-Q$ está distribuida sobre un arco de longitud $R(2\pi-\phi)$ y su densidad lineal de carga es: $\lambda_- = -Q/R(2\pi-\phi)$.

El campo en el centro es:

$$\vec{E}_- = \frac{2k\lambda_-}{R}\operatorname{sen}\theta_o(+\hat{y}) = \frac{2kQ}{R^2(2\pi-\phi)}\operatorname{sen}(\pi - \frac{\phi}{2})(-\hat{y})$$

Tomando en cuenta que sen$(\pi - \frac{1}{2}\phi) = +sen(\frac{1}{2}\phi)$ y sumando las contribuciones $\vec{E}_+$ y $\vec{E}_-$ tenemos:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \left(\frac{2kQ}{R^2}\right)\left[\frac{1}{\phi} + \frac{1}{(2\pi-\phi)}\right] \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)(-\hat{y})$$

De modo que el campo resultante es:

$$\vec{E} = \frac{4\pi kQ}{R^2\phi(2\pi-\phi)} \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)(-\hat{y})$$

Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{4\pi kQ}{R^2\phi(2\pi-\phi)} \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)(-\hat{y})}$$

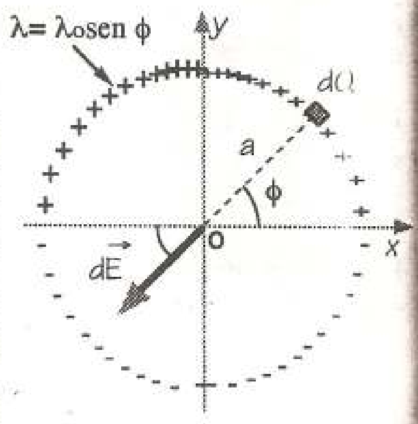
PR 2.11. *Anillo de carga no uniforme.*

Una barra aislante delgada se dobla para formar una circunferencia de radio a*. La barra tiene una densidad de carga:*

$$\lambda = \lambda_o \, sen \, \phi$$

Donde λ_o *es una constante positiva y* ϕ *es el ángulo medido desde el eje x positivo. Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico en el centro de la circunferencia.*

Solución: El aporte al campo de un elemento de carga dq es:



$$d\vec{E} = k\frac{dQ}{a^2}\hat{r} = k\frac{\lambda(ad\theta)}{a^2}\hat{r} = k\frac{\lambda_o \text{sen}\theta d\theta}{a}\hat{r}$$

Según el sistema de coordenadas mostrado en la figura, la componente x del campo total es:

$$E_x = -\int dE\cos\theta = -\frac{k\lambda_o}{a}\int_0^{2\pi} \text{sen}\theta\cos\theta d\theta = -\frac{k\lambda_o}{a}\left[\frac{\text{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Observe que sin necesidad de realizar ningún cálculo se podía anticipar que $E_x = 0$ ya que la distribución de carga es simétrica respecto del eje y.
Por otra parte, la componente y del campo total es:

$$E_y = -\int dE\text{sen}\theta = -\frac{k\lambda_o}{a}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta d\theta$$

Por lo tanto, el campo en el centro del anillo es:

$$E_y = -\frac{k\lambda_o}{a}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{k\pi\lambda_o}{a}$$

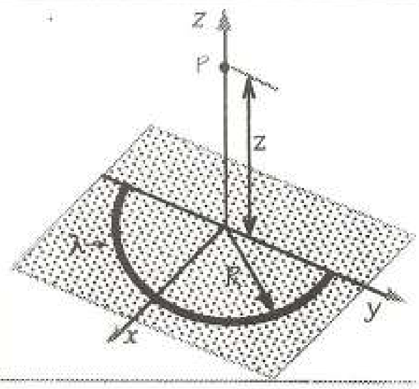
Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k\pi\lambda_o}{a}(-\hat{y})}$$

PR 2.12. *Campo de un semi-aro con carga uniforme.*

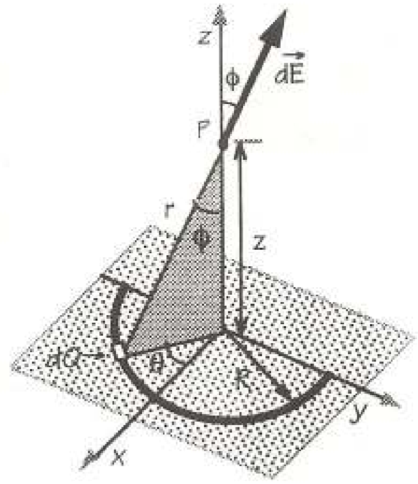
Una distribución de carga con densidad lineal λ y radio R es una semi-circunferencia orientada en el plano xy, con su bisectriz coincidiendo con el eje x, y con su centro en el origen del sistema de coordenadas.

Determine el vector campo eléctrico a una distancia **z** *del origen a lo largo del eje z.*



Solución: Consideremos un elemento diferencial de carga dQ en el semi-aro, con posición angular θ respecto del eje x. El aporte al campo en el punto P es:

$$d\vec{E} = k\frac{dQ}{r^2}\hat{r} = k\frac{\lambda R d\theta}{r^2}\hat{r}$$



Podemos descomponer el vector en dos componentes:

$dE_{\perp} = dE\cos\phi$, perpendicular al plano del semi-aro.

$dE_{//} = dE\,\text{sen}\phi$, paralela al plano del semi-aro.

Como todos los aportes $d\vec{E}_{\perp}$ quedan a lo largo del eje z, podemos integrar para hallar la componente z del campo total :

$$E_z = \int dE_{\perp} = \int dE\cos\phi = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{k\lambda R d\theta}{r^2}\cos\phi$$

Dado que tanto r como ϕ son constantes y además $r^2 = z^2 + R^2$ y $\cos\phi = z/r$, tenemos:

$$E_z = \frac{k\lambda R\cos\phi}{r^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{k\lambda R(z/r)}{r^2}(\pi) = \frac{k\pi\lambda Rz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Por otra parte $d\vec{E}_{//}$ tiene componentes x e y. Cuando integramos la componente $d\vec{E}_y$, debido a la simetría, resulta nulo $\vec{E}_y$. La componente $\vec{E}_x$ del campo total viene dada por:

$$E_x = -\int dE_{//}\cos\theta = -\int dE\,\text{sen}\phi\cos\theta = -\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{k\lambda R d\theta}{r^2}\text{sen}\phi\cos\theta$$

Tomando en cuenta que sen $\phi = R/r$ e integrando tenemos:

$$E_x = -\frac{k\lambda R \operatorname{sen}\phi}{r^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta = -\frac{k\lambda R(R/r)}{r^2}(\operatorname{sen}\theta|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -\frac{2k\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

El vector campo eléctrico total en el punto P resulta entonces:

$$\vec{E} = \frac{k\lambda R}{(z^2+R^2)^{3/2}}[-2R\hat{x} + \pi z\hat{z}]$$

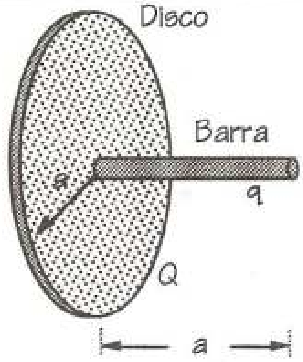
Respuesta:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k\lambda R}{(z^2+R^2)^{3/2}}[-2R\hat{x} + \pi z\hat{z}]}$$

PR 2.13. *Repulsión entre disco y barra*

Sea una barra de longitud a, *con carga total* q *uniformemente repartida. La barra se coloca en el eje de un disco circular aislante de radio* a *y también uniformemente cargado con carga* Q, *tal que un extremo de la barra queda en el centro del disco.*

Determine la fuerza de repulsión entre la barra y el disco.



Solución: Consideremos en la barra, un trozo infinitesimal dx ubicado a distancia x del centro del disco. La carga contenida en este elemento es:

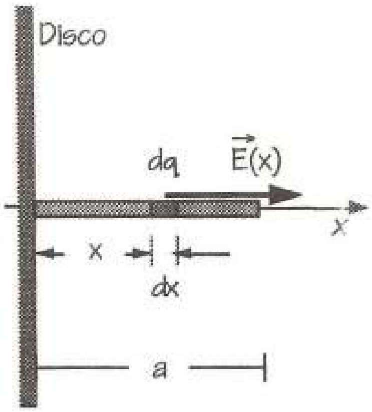
$$dq = \lambda dx = (\frac{q}{a})dx$$

Por otra parte, de acuerdo al problema PR-2.06, el campo eléctrico producido por un disco de radio a en un punto de su eje, a distancia x de su centro es:

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma[1 - \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}]\hat{x}$$

Siendo σ la densidad superficial de carga del disco (en este caso $\sigma = Q/\pi a^2$). De modo que el elemento de carga dq de la barra será repelido a lo largo del eje del disco por una fuerza:

$$dF = E\,dq = 2\pi k\sigma[1 - \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}][\frac{q}{a}dx]$$



Para obtener la fuerza total sobre la barra, se integra esta expresión con respecto a x, desde x = 0 hasta x = a.

$$F = 2\pi k(\frac{Q}{\pi a^2})(\frac{q}{a})\int_0^a [1 - \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}]\,dx$$

$$F = (\frac{kqQ}{a^3})[2\int_0^a dx - \int_0^a \frac{2xdx}{(x^2+a^2)^{1/2}}]$$

La primera integral es inmediata: $\int dx = x$. La segunda integral es del tipo: $\int z^p\,dz = z^{p+1}/(p+1)$ en donde $z=(x^2+a^2)$; $p = -\frac{1}{2}$; y $dz = 2xdx$.

Después de integrar, se obtiene:

$$F = (\frac{2kqQ}{a^3})[x - \sqrt{x^2+a^2}]_0^a$$

$$F = (\frac{2kqQ}{a^3})[(a - \sqrt{2}a) + a] = \frac{2kqQ}{a^2}(2 - \sqrt{2})$$

Respuesta:

$$\boxed{F = \frac{2kqQ}{a^2}(2 - \sqrt{2})}$$

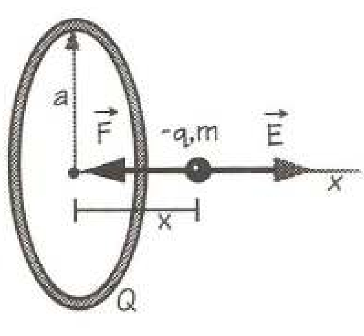
PR 2.14. Partícula oscilante.

Una partícula de masa m con carga negativa $-q$ se coloca en el centro de un anillo de radio a y carga positiva uniforme Q. La partícula que está confinada a moverse en el eje x, se desplaza una pequeña distancia ($x \ll a$) y se suelta.
Demuestre que la partícula oscilará con un movimiento armónico simple con una frecuencia dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kqQ}{ma^3}}$$

Solución: El campo eléctrico en el eje del anillo viene dado:

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$



La fuerza ejercida sobre la carga en el eje del anillo es:

$$F_x = -qE_x = -\frac{kqQx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

En el límite ($x \ll a$) el valor de la fuerza tiende a:

$$F_x = -(\frac{kqQ}{a^3})x$$

Vemos que la fuerza es atractiva y proporcional a x.

Es del tipo característico de un oscilador armónico simple, dado por la ley de Hooke: $F = -Kx$, con una constante elástica $K = kqQ/a^3$. Como la frecuencia angular en un M.A.S. es:

$$\omega^2 = (2\pi f)^2 = (K/m)$$

Reemplazando el valor de K y despejando la frecuencia f, tenemos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kqQ}{ma^3}}$$

Respuesta:

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kqQ}{ma^3}}}$$

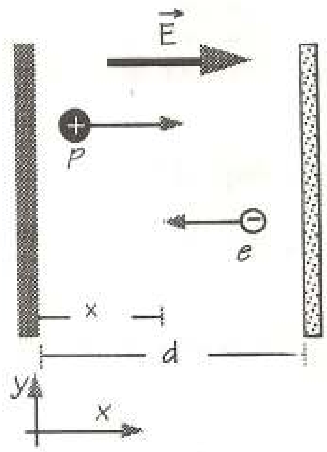
PR 2.15. *Un electrón se cruza con un protón.*

Entre dos grandes placas metálicas paralelas separadas por una distancia d = 10 cm existe un campo eléctrico uniforme. De la placa negativa se suelta un electrón y simultáneamente de la placa positiva se suelta un protón. Se desprecia la fuerza de interacción entre las dos partículas y la fuerza de gravedad..

¿ En qué lugar se cruzan las dos partículas ?

Solución: Escogemos las coordenadas con origen en la placa positiva. El protón de masa m_p y carga $+e$ tendrá una aceleración hacia la derecha:

$$a_p = + eE/m_p$$



El electrón de masa m_e y carga $-e$ tendrá una aceleración hacia la izquierda:

$$a_e = -eE/m_e$$

Al cabo de un tiempo t, las posiciones del protón y el electrón son respectivamente:

$$x_p = \tfrac{1}{2}a_p t^2$$

$$x_e = d + \tfrac{1}{2}a_e t^2$$

Las dos partículas se cruzan cuando sus coordenadas coinciden:

$$\tfrac{1}{2}a_p t^2 = d + \tfrac{1}{2}a_e t^2$$

Esto significa que el tiempo transcurrido para que se encuentren está dado por:

$$t^2 = 2d/(a_p - a_e)$$

Sustituyendo t^2 en la expresión de x_p y luego las aceleraciones a_p y a_e, tenemos:

$$x = \left(\frac{a_p}{a_p - a_e}\right)d = \frac{(eE/m_p)}{(eE/m_p)+(eE/m_e)}d = \left(\frac{m_e}{m_e+m_p}\right)d$$

Se observa que el resultado es independiente de la magnitud del campo eléctrico. Reemplazando los valores numéricos tenemos:

$$x = \frac{9.11x10^{-31}kg}{9.11x10^{-31}kg+1.67x10^{-27}kg}(0.1m) = 5.45x10^{-5}m$$

Respuesta:

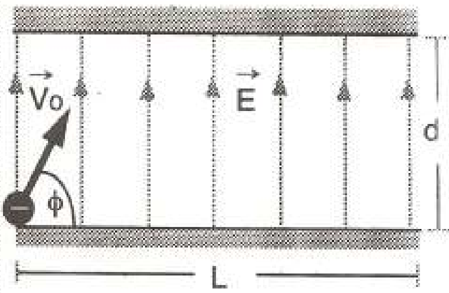
$x = 5.45x10^{-5}m$
desde la placa positiva)

PR 2.16. ¿Qué hacer para que el electrón no choque?

En la región entre dos placas metálicas paralelas de longitud L *y separación* d *se establece un campo eléctrico uniforme* $\vec{E}$. *Un electrón entra por el borde de la placa inferior con una velocidad inicial* $\vec{V}_o$ *formando un ángulo* ϕ *con la placa.*

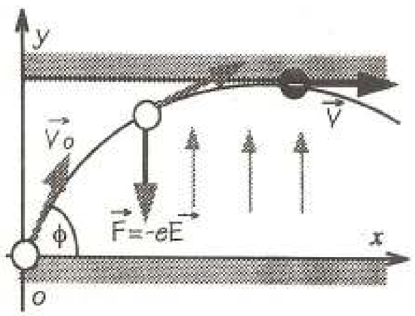
¿ Para cuáles valores de E *el electrón no chocará con ninguna de las dos placas.?*

(Se desprecia la acción de la fuerza de gravedad)



Solución: El electrón se mueve en el eje x con velocidad constante ($V_o\cos\phi$). En la dirección y la velocidad inicial es $V_{oy} = V_o \operatorname{sen}\phi$ y la fuerza eléctrica $F_y = -eE$ le imparte al electrón una aceleración negativa constante:

$$a_y = -eE/m.$$



La velocidad vertical V_y debe anularse justo al llegar a la máxima altura vertical permitida $y_{máx}$.

$$V_y^2 = V_{oy}^2 + 2a_y y_{máx} = 0$$

Despejando:

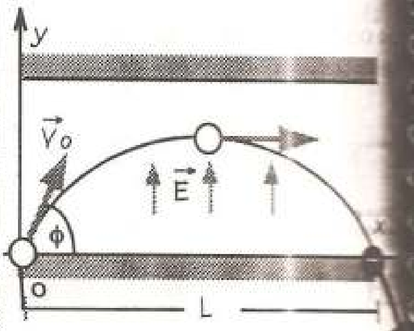
$$|a_y| = \frac{V_{0y}^2}{2y_{máx}} > \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\phi}{2d}$$

Por lo tanto, para que el electrón no choque con la placa superior, el campo $\vec{E}$ debe cumplir la condición:

$$\frac{eE}{m} > \frac{V_0^2 sen^2\phi}{2d} \quad \Rightarrow \quad E > \frac{mV_0^2 sen^2\phi}{2ed}$$

Analicemos la segunda condición de que el electrón no choque con la placa inferior. El tiempo en que alcanzaría de nuevo la placa horizontal inferior se obtiene de la ecuación cuadrática:

$$y = y_0 + V_{oy}\,t + \tfrac{1}{2}a_y\,t^2$$



Poniendo $y(t) = y_0 = 0$, y despejando t se tiene (además del tiempo inicial $t = 0$), la solución:

$$t_f = -\frac{2V_{0y}}{a_y} = \frac{2mV_0 sen\phi}{eE}$$

Para evitar que el electrón choque con la placa inferior, en este tiempo debe recorrer una distancia horizontal superior a L:

$$x = V_x\,t_o = (V_o\cos\phi)\,t_o > L$$

Reemplazando el valor de t_f tenemos:

$$\frac{2mV_0^2 sen\phi\cos\phi}{eE} = \frac{mV_0^2 sen2\phi}{eE} > L$$

Por lo tanto, la condición que debe cumplir el campo $\vec{E}$ para que el electrón no choque con la placa inferior es:

$$E < \frac{mV_0^2 sen2\phi}{eL}$$

Respuesta

$$\boxed{\frac{mV_0^2 sen^2\phi}{2ed} < E < \frac{mV_0^2 sen2\phi}{eL}}$$

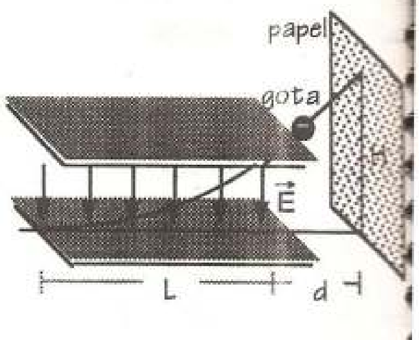
PR 2.17. La impresora de inyección de tinta.

En el cabezal de una impresora de inyección de tinta se le suministran diferentes cantidades de carga eléctrica a diminutas gotas de tinta, las cuales se proyectan perpendicularmente a un campo eléctrico entre dos plaquitas paralelas.

Las gotas son desviadas por el campo constante para que golpeen el papel en una posición que depende de la cantidad de carga que poseen,.

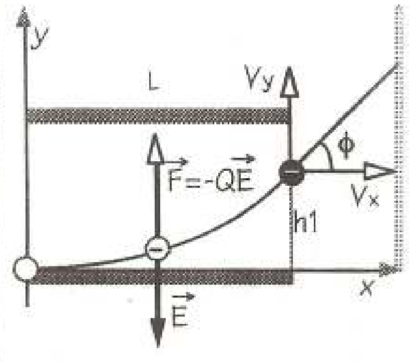
Supongamos que una gota de tinta de masa $m=6x10^{-10}kg$ y carga negativa $Q=-3x10^{-13}C$, entra con rapidez $V_o=20m/s$ en el campo eléctrico de magnitud $E=2x10^6N/C$.

La longitud de las placas es $L=2cm$ y la distancia del extremo de las placas al papel es $d=6mm$.



¿ Cuál será la desviación H de la gota en el papel ?

Solución: Como no hay fuerzas en la dirección del eje x, la proyección de la velocidad de la gota en esta dirección no cambia, $V_x = V_o$ = constante. El tiempo que emplea en recorrer la región entre las placas es $t = L/V_o$.



(Se desprecia el peso de la gota y la fricción del aire)

En la dirección del eje y , sobre la gota actúa la fuerza $F_y = -eE$ y resulta un movimiento parabólico. Mientras la gota está en la región del campo sufre un desplazamiento neto en esa dirección:

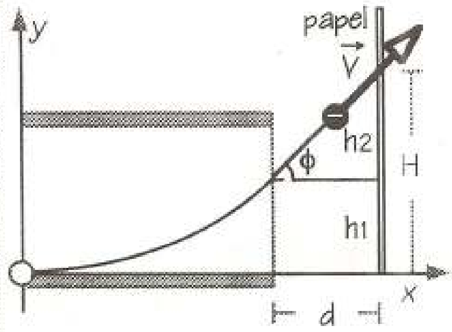
$$y = h_1 = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m}\right)\left(\frac{L}{V_0}\right)^2 = \frac{eEL^2}{2mV_0^2}$$

En el momento que abandona esa región la componente de la velocidad en dirección y es:

$$V_y = a_y t = \left(\frac{eE}{m}\right)\left(\frac{L}{V_o}\right) = \frac{eEL}{mV_o}$$

La gota abandona la región del campo bajo un ángulo ϕ determinado por la condición:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{V_y}{V_x} = \frac{eEL}{mV_0^2}$$



El movimiento subsecuente de la gota está libre de fuerzas y la trayectoria es una línea recta.

La distancia recorrida según el eje y desde que abandona las placas hasta que golpea el papel es:

$$h_2 = d\,\operatorname{tg}\phi = \frac{eELd}{mV_0^2}$$

Por lo tanto, el desplazamiento neto de la gota en el papel es:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{eEL^2}{2mV_0^2} + \frac{eELd}{mV_0^2} = \left(\frac{eEL}{mV_0^2}\right)\left(\frac{1}{2}L + d\right)$$

Reemplazando los valores numéricos tenemos finalmente:

$$H = \frac{(3\text{x}10^{-13}\text{C})(2\text{x}10^{6}\text{N/C})(2\text{x}10^{-2}\text{m})}{(6\text{x}10^{-10}\text{kg})(18\text{m/s})^2}\left[\frac{1}{2}(2\text{x}10^{-2}\text{m}) + 6\text{x}10^{-3}\text{m}\right]$$

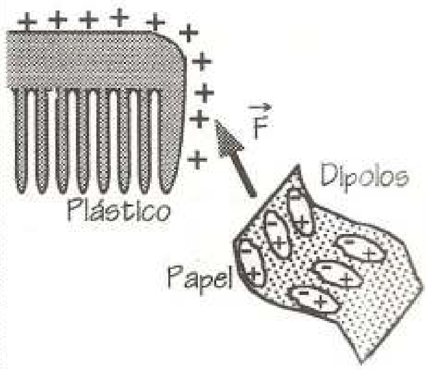
$$H = 8\text{x}10^{-4}\text{m} = 0.8 \text{ mm}$$

Respuesta:

$\boxed{H = 0.8 \text{ mm}}$

PR 2.18. *Fuerza sobre dipolo en campo no-uniforme.*

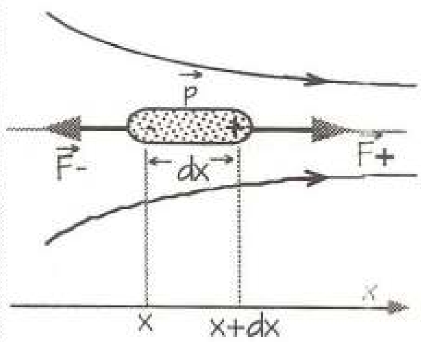
Un objeto aislador neutral que contenga dipolos (o susceptible de que sean inducidos) puede experimentar una fuerza neta en un campo eléctrico no uniforme.



a) Considere un dipolo $\vec{p}$ en un campo eléctrico no uniforme $\vec{E} = E\hat{x}$ que apunta a lo largo del eje x. Si $\vec{E}$ depende sólo de x, ¿ cuál es la fuerza neta sobre el dipolo ?

b) Use la expresión anterior para determinar la fuerza que ejerce una carga puntual Q sobre un dipolo $\vec{p}$ que está a una distancia r teniendo una dirección radial respecto de la carga puntual.

Solución: a) Considerando que la carga negativa del dipolo está en un punto con coordenada x y la positiva está desplazada respecto de ésta en una cantidad infinitesimal dx, la fuerza sobre cada una de las dos cargas son respectivamente es:



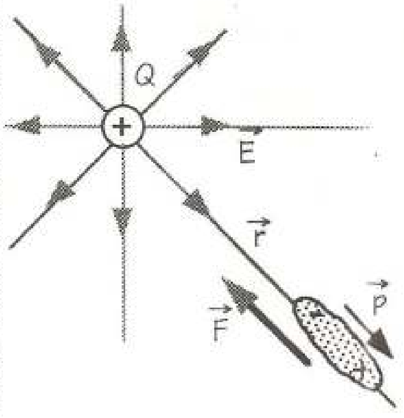
$$\vec{F}_- = -qE(x)\hat{x}$$
$$\vec{F}_+ = +qE(x+dx)\hat{x} = +q(E_x + \frac{dE}{dx}dx)\,\hat{x}$$

La fuerza neta sobre el dipolo es:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = [q(E_x + \frac{dE}{dx}dx) - qE_x]\hat{x}$$
$$\vec{F} = q dx(\frac{dE}{dx})\hat{x} = p(\frac{dE}{dx})\,\hat{x}$$

b) El campo eléctrico de una carga puntual Q es radial:

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$



Aplicando la expresión anterior, encontramos la fuerza que ejerce la carga puntual sobre el dipolo:

$$\vec{F}_{dip} = (\frac{dE}{dr})p\,\hat{r} = -(\frac{2kQ}{r^3})p\,\hat{r}$$

La fuerza está dirigida hacia la carga puntual (atractiva).

Respuesta:

a) $\vec{F} = -(\frac{dE}{dx})p\,\hat{x}$

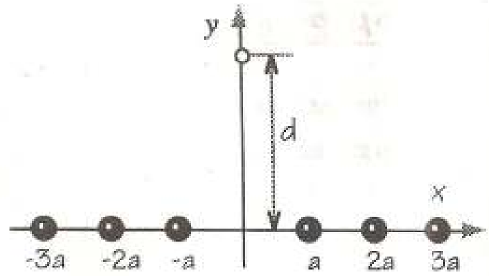
b) $\vec{F}_{dip} = -(\frac{2kQ}{r^3})p\,\hat{r}$

PROBLEMAS PARA RESOLVER

PP-2.01. Campo eléctrico de una cadena de cargas

Una cadena de partículas con cargas idénticas, q, están alineadas en posiciones de coordenadas $(na, 0, 0)$, siendo a una constante y $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm N$.

¿ Cuál es el vector campo eléctrico en un punto de coordenadas $(0, d, 0)$?



Respuesta:

$$\vec{E} = \hat{y}\,2kqd \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n^2a^2+d^2)^{3/2}}$$

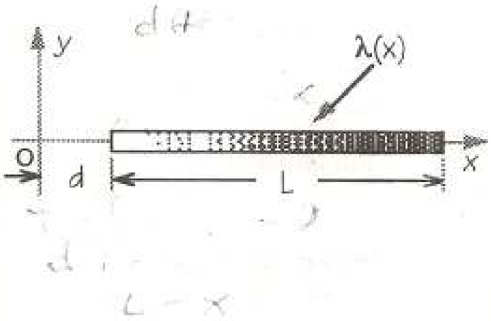
Ayuda: Considerando un par de cargas equidistantes de $x = 0$, sus componentes de campos horizontales se cancelan y la resultante queda en la dirección vertical.

PP-2.02. Barra con carga no uniforme

Una línea de carga con longitud L y orientada a lo largo del eje x, tiene una carga por unidad de longitud que varía con la distancia x de la siguiente forma:

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{x}{d} - 1\right)$$

Donde d es la distancia de la barra al origen y λ_0 una constante. Encuentre el campo eléctrico en el origen.



Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{k\lambda_0}{d}\left[\ln\left(1+\frac{L}{d}\right) - \left(\frac{L}{L+d}\right)\right](\widehat{-x})$$

Ayuda: Considere un elemento de carga $dQ = \lambda(x)\,dx$. Todos los elementos de carga en la barra producen campos $d\vec{E}$ en la misma dirección y se suman (integran) como escalares.

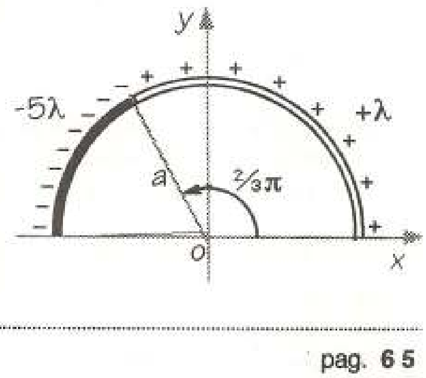
PP-2.03. Semi-aro con porciones de carga diferentes

Un hilo delgado de material aislante se le da la forma de una semi-circunferencia de radio a. La distribución de cargas es la que se indica en la figura.

Calcule:

a) La carga neta del semi-aro.

b) el campo eléctrico en el centro de curvatura.



Respuesta:

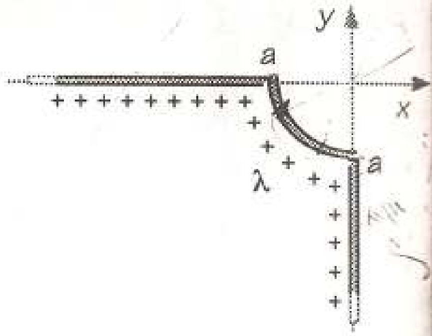
a) $Q = -\lambda \pi a$, b) $\vec{E} = \frac{k\lambda}{a}[-3\sqrt{3}\hat{x} + \hat{y}]$

Ayuda: Aplique el resultado del problema PR-2.9 para el campo producido por una barra cargada en forma de arco circular que subtiende un ángulo dado. Sume vectorialmente los aportes a $\vec{E}$ debidos a los dos arcos.

PP-2.04. Dos tramos rectos y uno curvo

Una carga positiva se distribuye con densidad uniforme, λ, a lo largo del eje x negativo desde $x = -\infty$ hasta $x = -a$, luego se dobla en un círculo de radio a y sigue en el eje negativo de las y, desde $y = -a$ hasta $y = -\infty$.

¿Cuál es el campo eléctrico en el punto O ?



Respuesta:

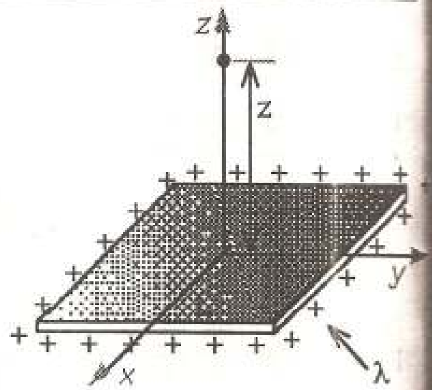
$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a}(\hat{x} + \hat{y})$$

Ayuda: El campo en O es la suma vectorial de tres términos: el de dos rectas de carga semi-infinitas (problema PR-2.2) y el de la carga uniforme en un cuarto de circunferencia (problema PR-2.9).

PP-2.05. Frotando los bordes del plexiglas

Una placa cuadrada de dimensiones L×L hecha de plexiglas, es frotada de manera tal que adquiere una carga uniformemente distribuida a lo largo de sus bordes, con densidad lineal λ (C/m), según se muestra en la figura.

Halle el campo eléctrico en el eje z, a una distancia arbitraria z respecto del centro de la placa.



Respuesta:

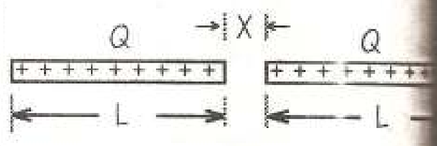
$$\vec{E} = \frac{4k\lambda L z}{(z^2 + \frac{1}{4}L^2)\sqrt{z^2 + \frac{1}{2}L^2}}\hat{z}$$

Ayuda: El campo resultante es la superposición vectorial de los campos debidos a las cuatro líneas de carga finitas (problema PR-2.3). Por simetría las componentes en el plano X-Y se cancelan. Las componentes según el eje z se suman.

PP-2.06. Fuerza de repulsión entre dos barras

Dos barras aislantes delgadas de longitud L llevan igual carga Q distribuidas uniformemente. Las barras están alineadas y sus extremos cercanos están separados por una distancia X.

¿ Cuál es la fuerza de repulsión entre las barras ?



Respuesta:

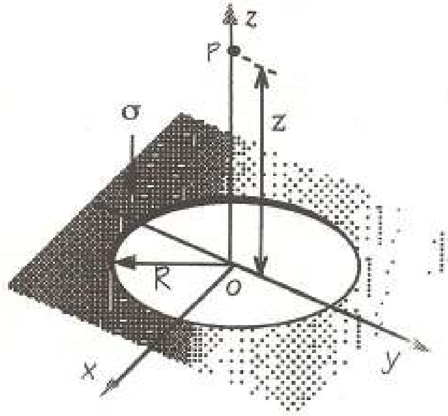
$$F = \frac{kQ^2}{L^2} \ln \left[\frac{(x+L)^2}{x(x+2L)} \right]$$

Ayuda: La fuerza sobre un elemento con carga $dQ=\lambda dx$ de una barra es $\vec{E}dQ$, donde $\vec{E}$ es el campo producido por la otra barra .

PP-2.07. Hoja grande de papel con agujero circular

Sea una hoja muy grande de papel que contiene una carga uniforme por unidad de área σ (C/m^2). A la hoja se le extrae una porción circular de radio R, como se indica en la figura.

¿ Cuál es el campo eléctrico en un punto del eje del agujero y a una distancia z del plano del papel ?



Respuesta:

$$\vec{E} = \hat{z}\, 2k\pi\sigma \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

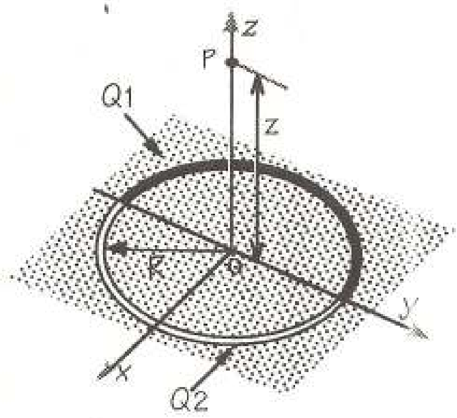
Ayuda: Aplique superposición. El campo de un plano completo es la suma de los campos de un disco circular de radio R y el campo (incógnita) debido al disco con el agujero.

PP-2.08. Un anillo compuesto

Un anillo circular de radio R tiene una carga Q_1 distribuida uniformemente sobre la mitad de su longitud y una carga Q_2 distribuida uniformemente sobre la otra mitad.

a) Determine las componentes del campo eléctrico en un punto P en el eje vertical a distancia z del centro, según se muestra en la figura.

b) Compruebe que cuando $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}Q$ el resultado se reduce al campo de un anillo uniforme con carga Q.



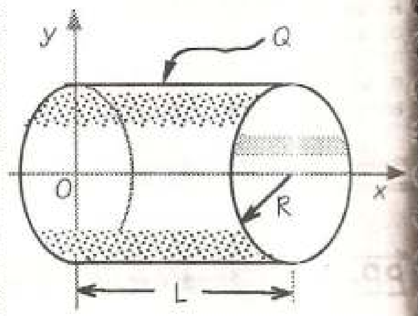
Respuesta:

a) $E_x = \dfrac{2k(Q_1-Q_2)R}{\pi(z^2+R^2)^{3/2}}$; $\quad E_y = 0$; $\quad E_z = \dfrac{k(Q_1+Q_2)z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$

b) $E_x = 0$; $\quad E_y = 0$; $\quad E_z = \dfrac{kQz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$

Ayuda: Sume vectorialmente los campos producidos por cada semi-aro independientemente.

PP 2.09. *Tubo cilíndrico hueco de plexiglas*



Un tubo cilíndrico hueco de radio R y longitud L, hecho de plexiglas es frotado con un papel y queda con una carga Q uniformemente repartida.
Determine el campo eléctrico a lo largo del eje x positivo del tubo.
Demuestre que $\vec{E}$ depende de las distancias $D_1=\sqrt{R^2+x^2}$ y $D_2=\sqrt{R^2+(x-L)^2}$ desde el punto en x hasta los bordes del tubo.

Respuesta:

$$\vec{E}=\frac{kQ}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+(x-L)^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]\hat{x}$$

__*Ayuda:*__ Divida el tubo en tajadas diferenciales circulares o anillos de carga dQ=(Q/L)dx. El campo debido a cada anillo en un punto x estará en la dirección +x, (Véase el problema PR-2.5). Integre la expresión sobre todos los anillos en la longitud del tubo.

PP 2.10. *Partículas moviéndose y equidistantes*

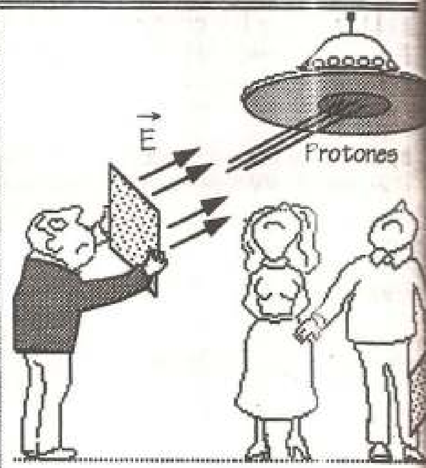
Sean dos partículas, una de masa m y carga Q y la otra de masa M y carga Q. Las partículas están en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$.
¿ Cuál debe ser la configuración de las partículas para que sean aceleradas como un todo, sin que varíe su disposición relativa ?

__*Respuesta:*__

Deben estar alineadas con el campo y separadas por una distancia:

$$d=\sqrt{\frac{kqQ(m+M)}{E(mQ+Mq)}}$$

PP 2.11. *Pantalla anti-protones*



En una comiquita de la guerra de las galaxias, desde un platillo volador los invasores disparan protones a una rapidez de 5×10^5 m/s. Para repeler los protones, un terrícola inventó una pantalla protectora que produce un campo eléctrico de magnitud 435 N/C.

Determine la distancia en la dirección del campo que recorren los protones antes de detenerse.

Suponga que el campo eléctrico es uniforme.

Respuesta:

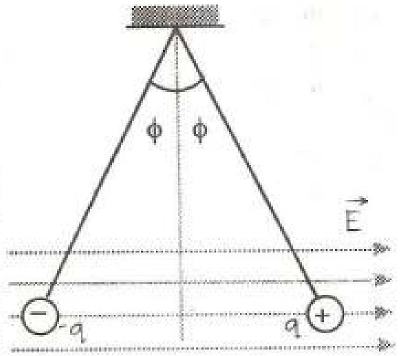
$$d = mv^2/2qE = 3 \text{ m.}$$

Ayuda: Aplique las relaciones de cinemática con aceleración constante.

PP 2.12. *El campo eléctrico separa las cargas*

Dos esferitas idénticas de masa m y cargas iguales y opuestas de magnitud q, están suspendidas por cuerdas ligeras de longitud L. Un campo uniforme se aplica en la dirección x y las dos esferitas se ubican en equilibrio cuando los hilos forman un ángulo θ.

Determine la magnitud del campo eléctrico.



Respuesta:

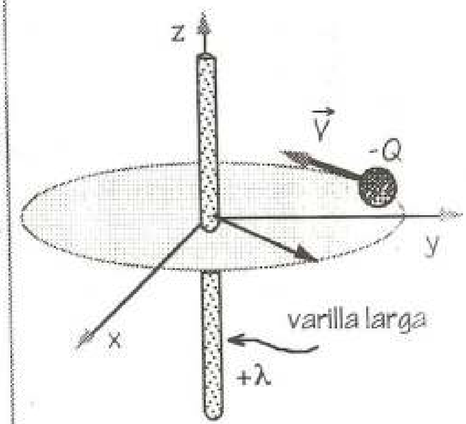
$$E = \frac{kq}{4L^2 \text{sen}^2\phi} + \frac{mg \text{ tg}\phi}{q}$$

Ayuda: Las fuerzas sobre cada carga son: la debida al campo $\vec{E}$, la atracción coulombiana entre ellas, la tensión de la cuerda y el peso. Escriba las dos ecuaciones de equilibrio (horizontal y vertical) y resuélvalas.

PP 2.13. *Velocidad de rotación no depende del radio*

Se tiene una varilla infinita con densidad uniforme de carga, λ, a lo largo del eje z. Una partícula con carga negativa -Q se mueve en un círculo, en el plano xy, con centro en el alambre.

Calcule la velocidad de la partícula y demuestre que es independiente del radio del círculo.



Respuesta:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_o m}}$$

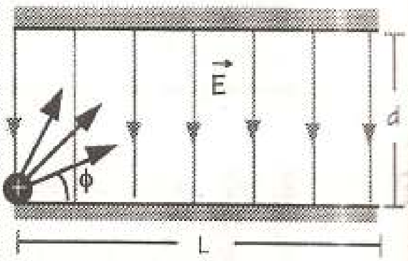
Ayuda: Calcule el campo producido por un alambre infinito. La fuerza de atracción $Q\vec{E}$ del alambre sobre la carga provee la fuerza centrípeta.

PP 2.14. *Angulos de lanzamiento del protón*

En la región entre dos placas metálicas paralelas de longitud L=0.5 m y separación d=0.1m se establece un campo eléctrico uniforme de magnitud $E=8\times10^{3}$ N/C.

Un protón entra por el borde de la placa inferior con una rapidez inicial $V_0 = 8\times10^{5}$ m/s en dirección formando un ángulo ϕ con la placa, como se ilustra en la figura.

¿ Para cuáles valores del ángulo ϕ el protón no chocará con ninguna de las dos placas.?



$m_p=1.67\times10^{-27}$ kg
$q_p = 1.6\times10^{-19}$ C

Respuesta:

$$\phi_{\min} = \frac{1}{2}\text{arcsen}\left(\frac{eLE}{mV_0^2}\right), \qquad \phi_{\text{máx}} = \text{arcsen}\sqrt{\frac{2edE}{mV_0^2}}$$

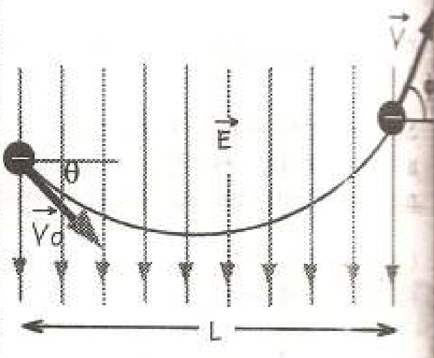
$$18.4° < \phi < 29.3°$$

Ayuda: Escriba las ecuaciones para las componentes horizontal y vertical del movimiento parabólico. Para que el electrón no choque con la placa superior (ϕ máximo) debe moverse en un tiempo tal que reduzca a cero la componente vertical de la velocidad en ymáx =d. Para que no choque con la placa inferior (ϕ mínimo) debe recorrer una distancia horizontal menor que la longitud L.
mayor

PP 2.15. *¿Cuán rápido entran los electrones?*

Un haz de electrones entra en una región entre dos placas paralelas de longitud L donde existe un campo eléctrico uniforme vertical $\vec{E}$.
El haz de electrones incide en una dirección formando un ángulo θ con la horizontal y abandona la región formando un ángulo ϕ, como lo ilustra la figura.

¿ Cuál es la rapidez inicial V_0 de los electrones ?



Respuesta:

$$V_0 = \sqrt{\frac{eEL\cos\phi}{m\cos\theta\,\text{sen}(\theta - \phi)}}$$

Ayuda: Escriba la componente vertical de la velocidad en el punto de salida en términos de la componente vertical en el punto de entrada. Sustituya allí las expresiones de la aceleración y del tiempo de vuelo.

3

LA LEY DE GAUSS

La ley de Coulomb permite calcular el campo eléctrico debido a cualquier distribución de cargas en reposo, sin embargo, en muchos casos el cálculo puede resultar tedioso porque las integrales a evaluar pueden ser complicadas. Hay situaciones que presentan ciertas simetrías, para las cuales se puede calcular el campo eléctrico con extraordinaria facilidad usando un recurso alternativo conocido como la ley de Gauss. En realidad, la ley de Gauss es equivalente a la ley de Coulomb y relaciona el flujo del campo eléctrico sobre una superficie cerrada con la carga neta encerrada por dicha superficie. Además, la ley de Gauss es de suma utilidad para comprender ciertas propiedades básicas del campo eléctrico y mostrar, por ejemplo, dónde se ubican las cargas en los materiales conductores.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos vinculados con:

- Flujo del campo eléctrico.
- La ley de Gauss.
- Aplicaciones de la ley de Gauss.
- Conductores en equilibrio electrostático.

FLUJO DE UN CAMPO ELECTRICO UNIFORME

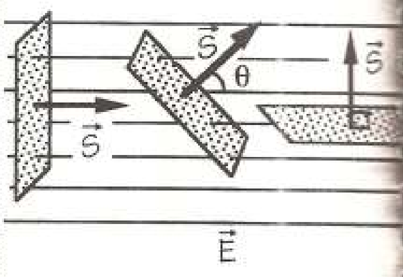
El flujo de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie plana, se define como el producto de la componente de $\vec{E}$ normal a dicha superficie multiplicada por su área (S), o sea, el producto escalar:

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = E\,S \cos\theta$$

Donde $\vec{S}$ es un vector de magnitud igual al área de la superficie y cuya dirección es la de la normal al plano que contiene dicha superficie.

Observe que como una superficie tiene dos caras, la escogencia de la dirección normal a dicha superficie es arbitraria.

El flujo del campo eléctrico es una medida del número de líneas de campo eléctrico que pasan a través de una superficie.



Si $\theta < \frac{1}{2}\pi$, el flujo es positivo
Si $\theta = \frac{1}{2}\pi$, el flujo es cero
Si $\theta > \frac{1}{2}\pi$, el flujo es negativo

UNIDAD SI de Flujo del campo eléctrico: $N\text{-}m^2/C$

Newton-metro^2/Coulomb

FLUJO DE UN CAMPO NO UNIFORME

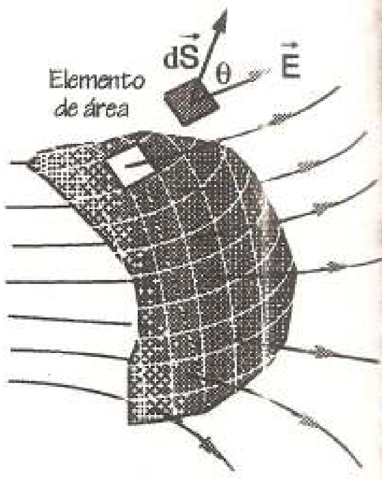
En general, el campo eléctrico puede variar de un punto a otro en una superficie. En este caso, se puede considerar la superficie dividida en un gran número de elementos pequeños, sobre los cuales puede despreciarse la variación de $\vec{E}$.

El diferencial de flujo sobre un elemento de área $d\vec{S}$ es:

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Por lo tanto, el flujo eléctrico total sobre una superficie es la suma sobre todos los elementos:

$$\phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



Superficie en campo no-uniforme

FLUJO SOBRE UNA ESFERA CON UNA CARGA PUNTUAL EN SU CENTRO.

Consideramos el campo debido a una carga puntual Q, el cual es radial:

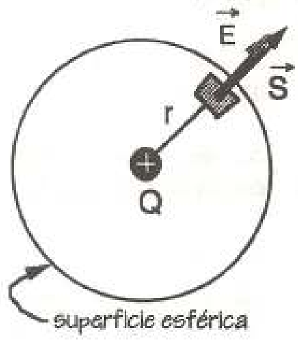
$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Calculemos el flujo de $\vec{E}$ sobre una esfera imaginaria de radio r y concéntrica con Q. Si $\hat{r}$ es un vector unitario radial, el vector elemento de área sobre la esfera es $\hat{r}dS$ y el flujo es:

$$\phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{esfera} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\right)\cdot\hat{r}dS$$

$$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{esfera} dS = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Observe que el radio, r, de la esfera se cancela en los cálculos y el flujo o número de líneas de campo que atraviesan la esfera, no depende de r.



$S=4\pi r^2$

Flujo sobre la esfera= Q/ε_0

$\varepsilon_0 = 8,85\text{x}10^{-12}\ C^2/N\,m^2$

LA LEY DE GAUSS

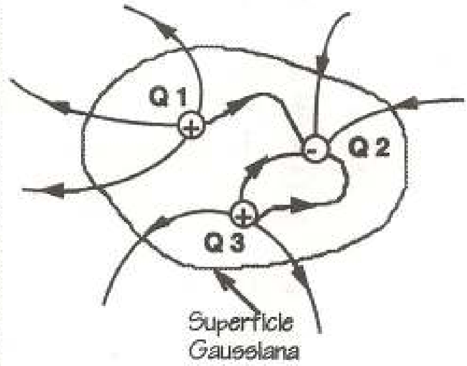
Podemos generalizar el resultado anterior y mostrar que el flujo eléctrico sobre una superficie cerrada depende de las cargas encerradas por dicha superficie y no depende de la forma de ésta.

Esto nos permite formular la ley de Gauss:

"El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie hipotética cerrada es igual a la carga neta encerrada por esta superficie dividida por ε_0"

La superficie cerrada, S, que rodea la distribución de cargas recibe el nombre de *superficie Gaussiana.* La carga neta es la suma algebraica ($\sum$) de todas las cargas dentro de dicha superficie.

La ley de Gauss y la ley de Coulomb son estrictamente equivalentes en el caso de los campos electrostáticos.



Ley de Gauss:

$$\boxed{\phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_{enc}}$$

COMO CALCULAR CAMPOS CON GAUSS...

Supongamos que la distribución de cargas está dada y se desea calcular el campo eléctrico en un punto. Para facilitar el cálculo de la integral de la izquierda, sin conocer el valor de E, se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_{enc}}$$

Ley de Gauss

1 . Identifique la simetría espacial de la distribución de carga y la del campo que ésta produce.

2 . Seleccione la superficie Gaussiana de modo que pase por el punto en cuestión y además, sea apropiada a la simetría.

3 . Divida la superficie en pedazos (planos, cilindros,..) de modo que en cada integral, $\vec{E}$ esté orientado para que sea posible una de las dos condiciones:

a) $\vec{E} \perp d\vec{S}$, para que se cumpla: $\vec{E}\cdot d\vec{S}= 0$

b) $\vec{E}\ //\ d\vec{S}$ y $|\vec{E}|$ constante, de modo que: $\vec{E}\cdot d\vec{S} = \pm E\, dS$

4 . Evalúe la carga neta *encerrada por la superficie completa y aplique la expresión de Gauss.*

SIMETRIA ESFERICA

Una distribución de carga tiene simetría esférica si *depende sólo de la distancia a un punto*.

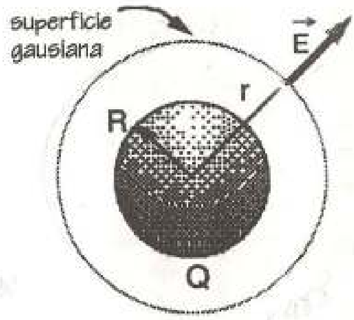
En estos casos el campo $\vec{E}$ es radial y la superficie gaussiana apropiada es una esfera concéntrica con la distribución y por tanto perpendicular a $\vec{E}$.

Como $|\vec{E}|$ es constante para todos los puntos, el flujo sobre la esfera Gaussiana de radio r es:

$$\phi_{neto} = \pm E 4\pi\, r^2$$

La carga neta encerrada por la superficie puede ser calculada, y esto permite determinar el campo eléctrico en cada caso particular.

Observe que no necesariamente la carga debe estar repartida uniformemente. Podría ser, por ejemplo una nube con densidad volumétrica que depende de la distancia a un punto fijo: $\rho = \rho(r)$



Ejemplo: Concha esférica de radio R y carga uniforme, Q.

r< R: $Q_{enc}=0 \Rightarrow E=0$

r> R: $Q_{enc}= Q$ $\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$

SIMETRIA CILINDRICA

Una distribución de carga tiene simetría cilíndrica si *depende sólo de la distancia a una línea recta.*

En este caso la superficie Gaussiana apropiada es un cilindro. En las tapas planas del cilindro el flujo es cero por ser el vector $\vec{E}$ tangente a las mismas.

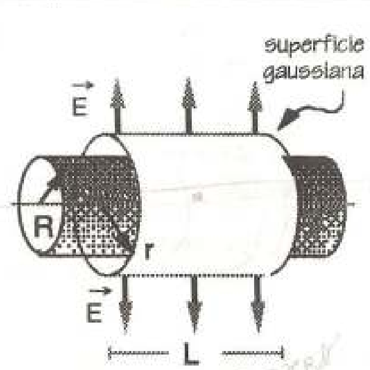
En la parte cilíndrica de la superficie el campo es perpendicular y de magnitud constante, por lo tanto el flujo neto es:

$$\phi_{neto} = \pm E 2\pi r L$$

siendo r y L, el radio y la longitud del cilindro respectivamente.

La carga neta encerrada por el cilindro imaginario depende de la situación particular.

La carga puede estar ubicada en una línea, en una concha cilíndrica o en un volumen cilíndrico.



Ejemplo: Concha cilíndrica o varilla larga con densidad lineal λ.

$r<R$: $Q=0 \Rightarrow E=0$

$r>R$: $Q=\lambda L$, $\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}}$

SIMETRIA PLANA

Una distribución de carga tiene simetría plana si *depende sólo de la distancia a un plano.*

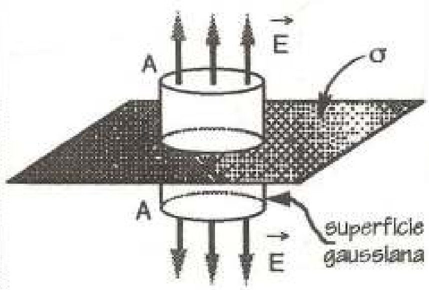
La superficie Gaussiana apropiada a esta simetría es una caja con sus tapas planas paralelas y equidistantes al plano.

En los laterales de la caja, por ser el vector $\vec{E}$ tangente, el flujo es cero. En ambas tapas planas el campo debe ser perpendicular, de magnitud constante y de igual valor.

El flujo neto es dos veces el flujo en cada tapa:

$$\phi_{neto} = \pm 2EA$$

Siendo A el área de cada tapa. Igualando el flujo con la carga neta encerrada, σA, se obtiene el campo eléctrico.



Ejemplo: Plano infinito con densidad superficial de carga σ.

$Q = \sigma A$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTATICO

Un material conductor es aquel en el cual puede haber cargas libres de moverse. Por ejemplo, en un metal hay electrones que no están ligados a ningún átomo particular y pueden moverse con entera libertad dentro del material. Cuando no hay movimiento neto de carga en el conductor, se dice que éste se encuentra en equilibrio electrostático.

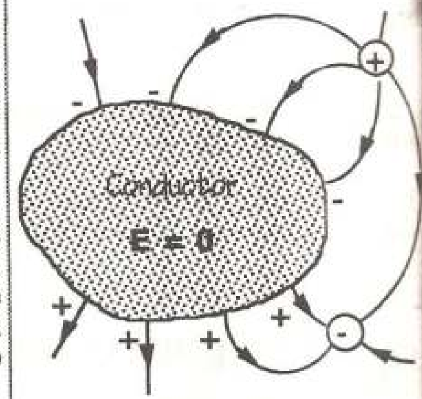
La ley de Gauss y la distribución de cargas en los conductores

Para un conductor en equilibrio electrostático se cumplen las siguientes condiciones:

1) En equilibrio electrostático, el campo eléctrico es cero en cualquier punto del interior del conductor.

Demostración: Si éste no fuera el caso, las cargas libres se acelerarían bajo la acción del campo eléctrico, violando así la condición de equilibrio.

Por ejemplo, si colocamos un conductor en la región donde existe un campo originado por otras cargas, las cargas libres del conductor se distribuirán en su superficie de tal manera que cuando se alcanza el equilibrio, el campo que ellas generan anula al campo externo dando un campo resultante nulo dentro del conductor.



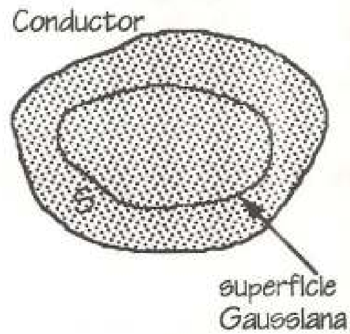
2) Cualquier carga neta en un conductor aislado debe residir enteramente sobre su superficie.

Demostración: Consideremos una superficie gaussiana arbitraria que esté en el interior del conductor.

Como el campo es nulo internamente, en todos los puntos de la superficie gaussiana que hemos escogido $\vec{E} = 0$ y por tanto el flujo neto integral a través de dicha superficie debe ser nulo.

La ley de Gauss implica que el volumen definido por dicha superficie no debe tener ninguna carga neta.

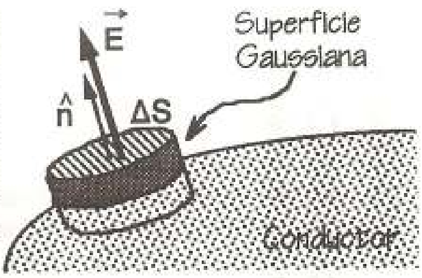
Por consiguiente, si existe algún exceso de carga en el conductor debe residir enteramente en su superficie.



La carga neta debe estar en la superficie.

3) *En el lado exterior inmediato a la superficie de un conductor, el campo eléctrico es perpendicular a dicha superficie y tiene un valor σ/ε_0 donde σ es la densidad superficial de carga "local".*

Demostración: El campo justo en la superficie del conductor debe ser perpendicular a dicha superficie, ya que si hubiese una componente tangencial, ésta provocaría un movimiento de las cargas libres en la superficie, lo cual contradice la suposición de equilibrio electrostático.



Para hallar la magnitud de $\vec{E}$ seleccionamos un pequeño cilindro gaussiano con una tapa plana afuera y la otra tapa adentro del conductor. No existe ningún flujo a través de la pared cilíndrica, por ser $\vec{E}$ tangente a ella. Dentro del conductor el campo es nulo y tampoco allí habrá flujo.

El flujo neto que sale de la caja es $\phi = ES$, siendo S el área de la tapa plana. La relación buscada se demuestra igualando el flujo con la carga neta encerrada por la superficie (σA).

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

✳ Observe que el campo en la superficie del conductor, (σ/ε_0) es justamente el doble del campo producido por una hoja de carga, ($\sigma/2\varepsilon_0$), ¿por qué?

VERIFICA TU COMPRENSION

PE-3.01. ***De acuerdo a la ley de Gauss, ...***

a) Si el flujo neto a través de una superficie gaussiana es cero, es porque no hay ninguna carga encerrada por dicha superficie.

b) Si el flujo neto a través de una superficie gaussiana es cero, se deduce que en todos los puntos de dicha superficie, $\vec{E} = 0$.

c) Si no hay cargas en una región del espacio, $\vec{E} = 0$ en cualquier superficie Gaussiana que rodea dicha región.

d) En la integral, $\vec{E}$ es el campo eléctrico debido a todas las cargas, estén o no en el interior de la superficie Gaussiana.

e) En la integral, $\vec{E}$ es el campo eléctrico debido únicamente a la carga interior a la superficie Gaussiana.

Ley de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

√ **PE-3.02.** ***Es correcto afirmar que......***

a) Las superficie gaussianas son superficies abiertas.

b) Las superficies gaussianas están delimitadas por líneas cerradas.

c) El flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana que encierra una carga dada no depende ni del tamaño ni de la forma de la superficie.

d) Si una superficie gaussiana encierra un dipolo eléctrico el flujo de $\vec{E}$ no puede ser cero en esa superficie.

e) La ley de Gauss es válida únicamente en el caso de distribuciones simétricas de cargas.

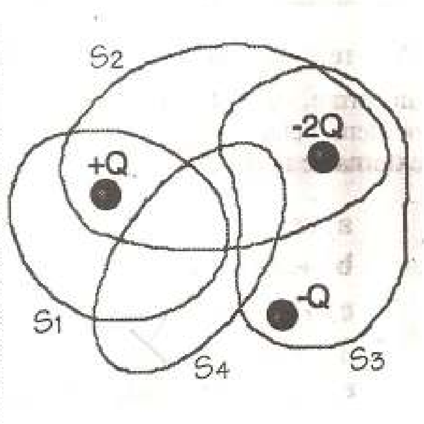
PE-3.03. *¿En cuál de las superficies hay mayor flujo ?*

¿ Considerando la distribución de cargas mostrada, en cuál de las superficies gaussianas dibujadas, resultará mayor la magnitud del flujo del campo eléctrico ?

$S_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q-2Q)$

$S_3 = \frac{1}{\varepsilon_0}(-2Q-Q)$

a) S_1.
b) S_2.
c) S_3.
d) S_4.
e) S_2 y S_3.



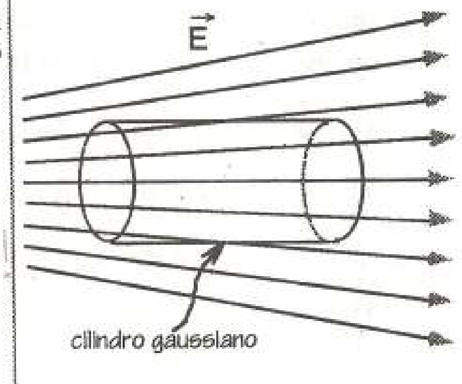
PE-3.04. *¿Cuánto vale el flujo del campo eléctrico?*

Se dibuja una superficie gaussiana en forma de un cilindro, en una región donde existe un campo eléctrico divergente, como indica la figura.

El flujo neto que pasa por la superficie del cilindro es:

a) positivo.
b) cero.
c) negativo.

¡claro, no hay campo dentro de la superficie!

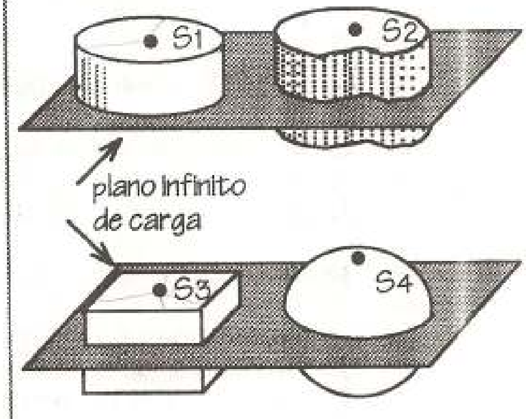


PE-3.05. *¿ Cuál superficie gaussiana es apropiada ?*

Para determinar el campo eléctrico en un punto exterior a una hoja de carga infinita y uniforme se sugieren varias superficies gaussianas que pasan por dicho punto.

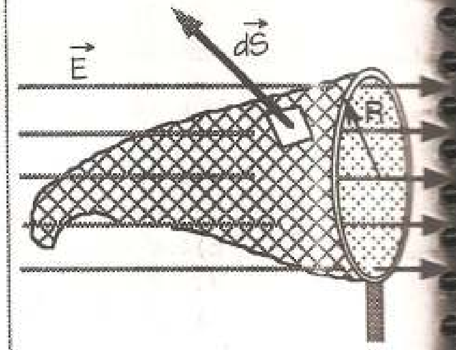
Para determinar $\vec{E}$ en el punto mostrado usando la ley de Gauss, ¿ cuál o cuáles superficies son las apropiadas ?

a) S_1.
b) S_2
c) S_4
d) S_1, S_2 y S_3
e) S_2 y S_3



PE-3.06. *Flujo en una red de cazar mariposas*

Una red de cazar mariposas está en un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$. El aro es un círculo de radio R que está perpendicular al campo. El valor del flujo sobre la superficie externa de la red es:



- **a)** cero
- **b)** $+\pi R^2 E$
- **c)** $+2\pi R^2 E$
- **d)** $-\pi R^2 E$
- **e)** Se necesita saber la geometría exacta de la red.

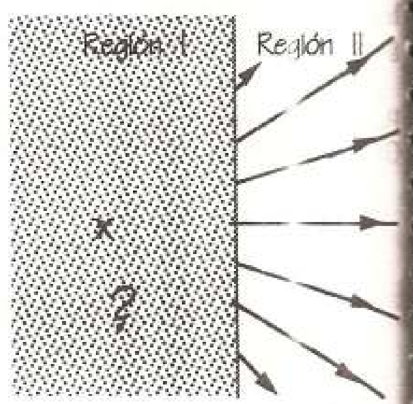
PE-3.07. *Esfera Gaussiana dividida en partes iguales*

Sea una carga puntual +Q localizada afuera de una superficie esférica. Se subdivide la superficie esférica en un cierto número de regiones de *igual área* ΔS. Podemos decir que el flujo de $\vec{E}$:

- **a)** tendrá el mismo valor para todas las regiones.
- **b)** varía de una región a otra pero nunca será negativo.
- **c)** varía de una región a otra pero nunca será positivo.
- **d)** será positivo para la mitad de las regiones y negativo para la otra mitad.
- **e)** varía de una región a otra y puede tener valores positivos o negativos.

PE-3.08. *¿Cuáles cargas generan este campo ?*

En la región I existe una distribución de cargas desconocida que genera el campo eléctrico que mostrado en la región II. Las líneas de campo divergen desde un punto X en la región I.



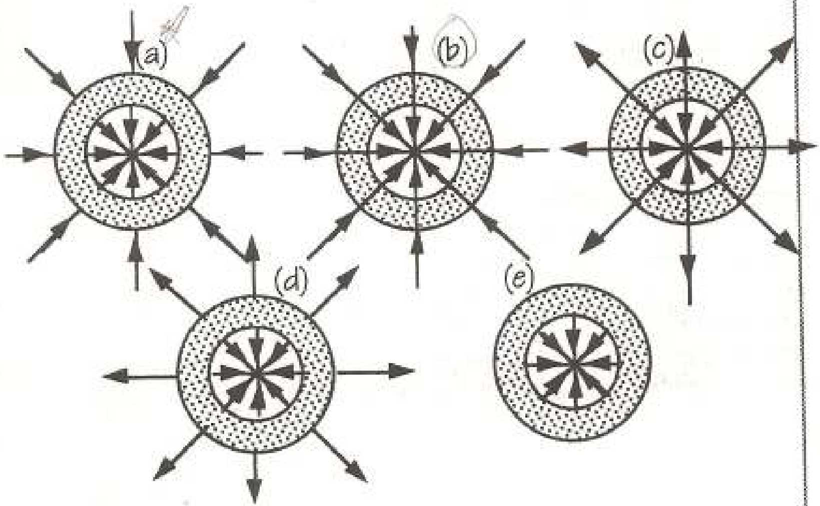
¿ Cuál es esta posible distribución de carga ?

- **a)** solamente una carga puntual.
- **b)** solamente un cascarón esférico uniforme.
- **c)** solamente una esfera sólida uniforme.
- **d)** solamente una nube con simetría esférica.
- **e)** cualquiera de las anteriores.

PE-3.09. *¿ Cuál es el diagrama de líneas de campo ?*

Una carga negativa se coloca en el centro de una esfera conductora hueca que estaba inicialmente descargada.

¿Cuál diagrama representa mejor las líneas de campo eléctrico ?



PE-3.10. *Compara los campos de las tres esferas*

Considere tres esferas de *igual radio*, R, e *igual carga eléctrica total*, pero con distribuciones diferentes.

Esfera 1 Carga uniforme en todo el volumen.
Esfera 2: Carga uniforme en toda la superficie
Esfera 3: Densidad de carga decreciente desde el centro.

Si comparamos los campos eléctricos en puntos ubicados adentro (r=½R) y afuera (r=2R), ¿ cuál relación es correcta ?

a) Adentro: $E_2 < E_1 < E_3$ Afuera: $E_1 = E_2 = E_3$
b) Adentro: $E_1 = E_2 = E_3$ Afuera: $E_1 < E_2 < E_3$
c) Adentro: $E_1 = E_2 = E_3$ Afuera: $E_3 < E_2 < E_1$
d) Adentro: $E_3 < E_2 < E_1$ Afuera: $E_1 = E_2 = E_3$
e) Adentro: $E_1 = E_2 = E_3$ Afuera: $E_1 < E_2 < E_3$

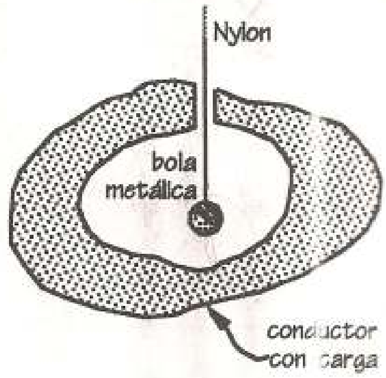
PE-3.11. *Para los metales se puede decir que........*

a) Todos los electrones de conducción están en la superficie.
b) Si su carga neta es cero, la densidad de carga en cualquier parte de su superficie debe ser cero.
c) Cuando se le aplica un campo externo, el metal lo "detiene" y por lo tanto el campo interno es nulo.
d) Bajo un campo eléctrico externo, los electrones se reordenan hasta crear un campo igual y opuesto al externo y así el campo interno resultante es cero.
e) El campo eléctrico es cero en el interior del metal pero no puede ser cero en un punto dentro de una cavidad vacía en el metal.

PE-3.12. *¿ Con que carga queda la bolita metálica ?*

Un conductor con una cavidad está inicialmente cargado positivamente. Mediante un hilo de nylon, se introduce una bolita metálica sin carga neta en la cavidad, a través de un pequeño agujero hasta que toque la superficie interna del conductor. Después de despegar la bolita metálica de la pared, ésta quedará:

a) con una carga positiva.
b) con una carga negativa.
c) sin carga apreciable.
d) con una carga que depende de la geometría de la cavidad.



Cap. 3: Respuestas

Pregunta	a	b	c	d	e
PE-3.01				✓	
PE-3.02			✓		
PE-3.03			✓		
PE-3.04		✓			
PE-3.05					✓
PE-3.06				✓	
PE-3.07					✓
PE-3.08					✓
PE-3.09	✓				
PE-3.10	✓				
PE-3.11				✓	
PE-3.12			✓		

PR 3.01. *¿ Qué habrá dentro de esa caja ?*

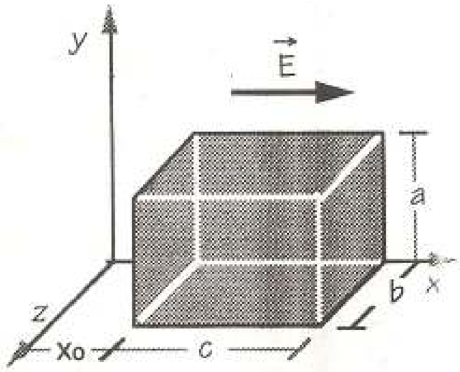
Una superficie cerrada, en forma de una caja rectangular, con dimensiones a, b y c, está localizada a una distancia x_0 del origen de coordenadas, como se muestra en la figura. En la región existe un campo eléctrico que está dado por la expresión:

$$\vec{E} = (m + nx^2)\hat{x} \text{ N/C}$$

Donde $m = 3$ N/C, $n = 2$ N/C·m² y x está en metros.

a) Calcule el flujo eléctrico a través de cada tapa de la caja.

b) Determine la carga neta que hay en la caja, suponiendo que $x_0 = 0{,}1$ m; $a = 0{,}2$ m; $b = 0{,}3$ m y $c = 0{,}4$ m.



Solución: El flujo de $\vec{E}$ en cada cara se calcula mediante la expresión:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Donde el vector elemento de área $d\vec{S}$ es perpendicular y apunta hacia afuera de la superficie.

En las cuatro caras S_1, S_2, S_3 y S_4 el vector $\vec{E}$ es perpendicular a los respectivos $d\vec{S}$, (Fig a). Por lo tanto $\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$, y el flujo es cero en cada una de ellas:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$$

Por otra parte, en las caras S_5 y S_6, el vector $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{S}$ y su magnitud es constante (Fig. b).

La cara S_5 está ubicada en $x = x_0$, por lo tanto:

$$\vec{E} = (m + nx_0^2)\hat{x} \quad \text{y} \quad d\vec{S} = dS(-\hat{x})$$

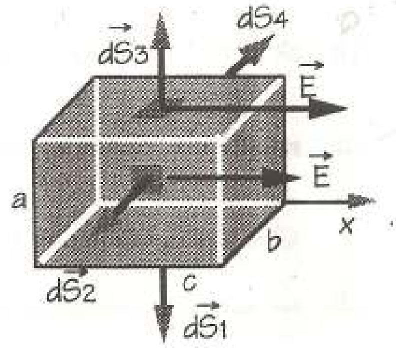


Figura (a)

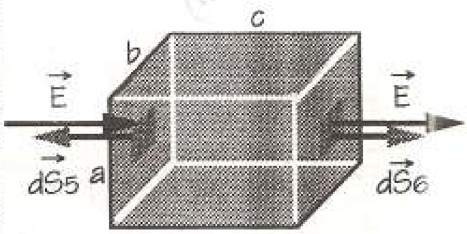


Figura (b)

Reemplazando $\vec{E}\cdot d\vec{S}$ en la integral del flujo, se tiene:

$$\Phi_5 = -(m + nx_0^2)\int_{S5} dS = -(m + nx_0^2)\,(ab)$$

La cara S_6 está ubicada en $x = (x_o + c)$, por tanto:

$$\vec{E} = [m + n(x_o+c)^2]\hat{x} \quad \text{y} \quad d\vec{S} = dS(+\hat{x})$$

Reemplazando $\vec{E}\cdot d\vec{S}$ en la integral del flujo, se tiene:

$$\Phi_6 = [m + n(x_o+c)^2]\int_{S6} dS = [m + n(x_o+c)^2]\,(ab)$$

$\frac{\Phi}{\varepsilon_0} = 2 m abc\,(2x_0+c)$

$\boxed{Q = \frac{2 m abc(2x_0+c)}{\varepsilon_0}}$

El flujo total es la suma de los flujos en todas las caras:

$$\Phi_{total} = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i = [m+n(x_o+c)^2 - (m+nx_0^2)]\,(ab) = nabc(2x_o+c)$$

b) Usando la ley de Gauss la carga neta dentro de la caja es:

$$Q = \varepsilon_0 \Phi_{total}$$

Reemplazando los valores numéricos, encontramos:

$$Q = 2(0,2)(0,3)(0,4)[2(0,1)+0,4](8,85\text{x}10^{-12}) = 2.55\text{x}10^{-13}\text{C}$$

Respuesta

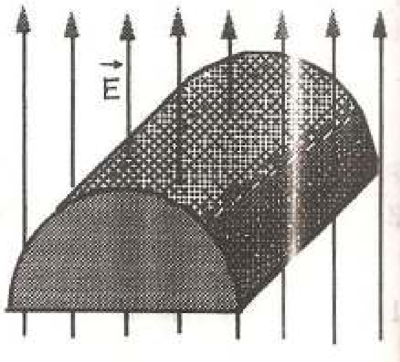
a) $\Phi = 2abc(2x_o+c)$ N.m^2/C
b) $Q = 2,55\text{x}10^{-13}$ C

PR 3.02. *Flujo en superficie semi-cilíndrica.*

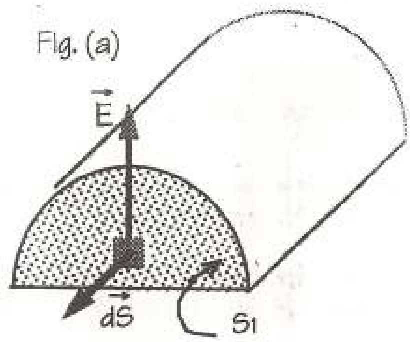
Un campo uniforme $\vec{E}$ penetra una superficie que tiene forma de un cilindro de radio R cortado por la mitad (como indica la figura). Las líneas de campo entran perpendicularmente por la base que tiene forma rectangular plana, de longitud L y ancho $2R$.

***a**) Calcule el flujo del campo eléctrico a través de las superficies planas y curvas del semi-cilindro.*

***b**) Demuestre que la carga encerrada por la superficie entera es cero.*



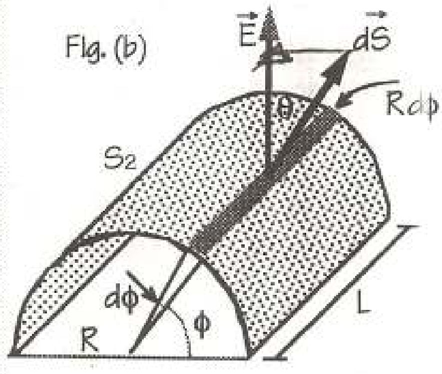
Solución: a) Consideremos primero las dos tapas laterales planas (superficies S_1, Figura a). Como $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{S}$ en ambas superficies, el flujo a través de ellas es cero:



$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} E(\cos 90°)dS = 0$$

Para hallar el flujo en la cara cilíndrica (superficie S_2, Fig. b), escogemos un elemento diferencial de superficie en forma de tira rectangular delgada de longitud L y espesor $Rd\phi$.

El área de la tira es: $dS = LRd\phi$, y por lo tanto el flujo es:



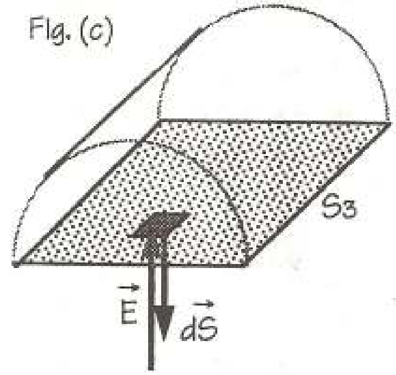
$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_2} E(\cos\theta)LRd\phi$$

Observe que los ángulos ϕ y θ son complementarios: $\phi = (90° - \theta)$. Por lo tanto $\cos\theta = \operatorname{sen}\phi$. Reemplazando:

$$\Phi_2 = ELR\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi = ELR[-\cos\phi]_0^{\pi}$$

$$\Phi_2 = -ELR[-1 - (1)] = +2ELR$$

Por el último, en la tapa rectangular $\vec{E}$ es antiparalelo a $d\vec{S}$ (ver la Fig. c) y el flujo es:



$$\Phi_3 = \int_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(\cos 180°)\int_{S_3} dS = -2ELR$$

El flujo total sobre la superficie es cero:

$$\Phi_{total} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 + 2ELR - 2ELR = 0$$

b) Como el flujo total que atraviesa la superficie cerrada es cero, de acuerdo a la ley de Gauss, también será nula la carga neta encerrada por dicha superficie:

$$\varepsilon_0 \Phi = Q_{neta} = 0$$

Respuesta

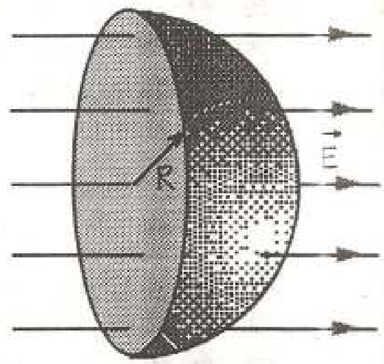
a) $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = +2ELR$, $\Phi_3 = -2ELR$
b) $Q_{enc} = 0$

PR 3.03. *Flujo a través de un hemisferio.*

Un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ penetra en un hemisferio de radio R, perpendicularmente a su cara plana.

a) Calcule explícitamente el flujo Φ que emerge de la superficie curva del hemisferio.

b) Demuestre que el flujo que emerge de la superficie curva es justamente el negativo del flujo que entra en la superficie plana.



Solución: La simetría es apropiada para escoger un elemento de área en la forma de una cinta circular delgada de radio:

$$r = R\,\text{sen}\theta.$$

El área de la tira es el producto de su longitud ($2\pi r = 2\pi R\,\text{sen}\theta$) por su ancho ($R\,d\theta$):

$$dS = 2\pi R^2 \text{sen}\theta)d\theta$$

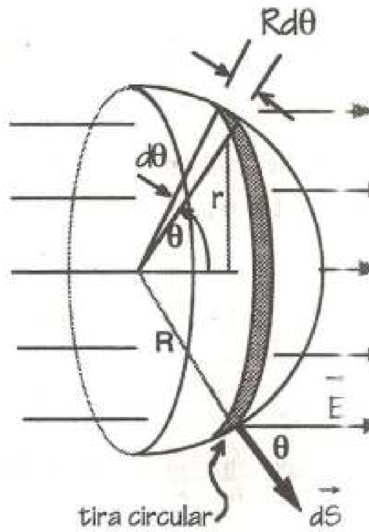
Se observa en la figura, que el ángulo θ entre los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ es el mismo sobre la tira entera.

Además, para barrer toda la superficie hemisférica, el ángulo θ debe variar entre 0 y $\pi/2$.

Integrando, obtenemos el flujo total sobre el hemisferio:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi/2} E(\cos\theta)(2\pi R^2 \text{sen}\theta)d\theta$$

$$\Phi = 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} \text{sen}\theta\ d(\text{sen}\theta) = 2\pi R^2 E\left(\frac{\text{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi R^2 E$$



El resultado es, justamente el negativo del flujo que entra por la tapa plana ($EA\cos 180° = -\pi R^2 E$), de modo que si el hemisferio se cubriera con una tapa plana, tendríamos una superficie cerrada y el flujo neto que la atraviesa es cero. Esto es lo que predice la ley de Gauss, en virtud de no haber carga neta encerrada.

Respuesta:

$$\boxed{\Phi = \pi R^2 E}$$

PR 3.04. *Un cilindro macizo y una línea de carga*

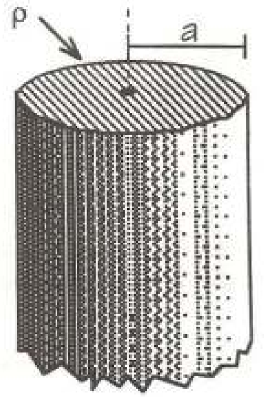
En un cilindro infinitamente largo de radio a, *existe una carga uniforme con densidad* ρ *(C/m*^{3}*).*

a) Determine el campo eléctrico dentro y fuera del cilindro.

b) Demuestre que si el cilindro es infinitamente delgado (línea de carga) el campo a una distancia r *viene dado por:*

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}$$

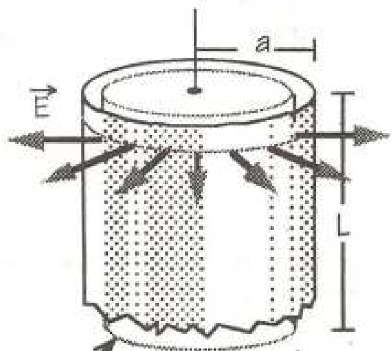
Siendo λ *(C/m) la densidad lineal de carga y* $\hat{r}$ *un vector unitario perpendicular a la línea de carga.*



Solución: a) La simetría cilíndrica sugiere que el campo $\vec{E}$ es radial y tiene igual magnitud en una circunferencia concéntrica de radio r.

Región interior ($r \leq a$): La superficie gaussiana apropiada es un cilindro de largo L y radio $r \leq a$. Como el campo es radial el flujo eléctrico en las tapas planas del cilindro es nulo y el flujo total que sale de la superficie Gaussiana es:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\int dS = E(2\pi rL)$$



La carga encerrada por esta superficie es: $Q=\rho(\pi r^2L)$, y por la ley de Gauss:

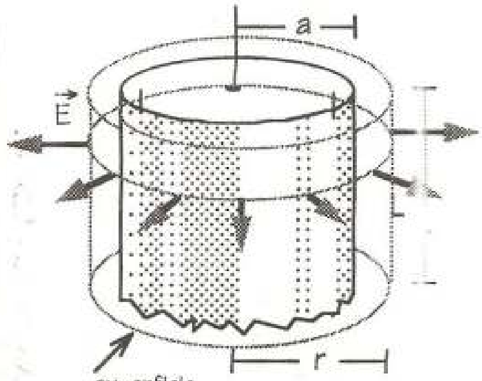
$$E(2\pi rL) = \frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_o}$$

La magnitud de $\vec{E}$ se obtiene despejando, por lo tanto, el vector campo eléctrico será:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}\hat{r} \qquad r\leq a$$

Región exterior ($r \geq a$): Tomamos un cilindro de largo L y radio $r \geq a$. El flujo eléctrico en las tapas planas del cilindro es nulo y el flujo total que sale de la superficie gaussiana es $\Phi = E(2\pi rL)$. La carga encerrada por la superficie es $Q = \rho\pi a^2 L$, y aplicando la ley de Gauss: $\Phi = Q/\varepsilon_o$, se obtiene E. Por lo tanto:

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_o r}\hat{r} \qquad r\geq a$$



b) Si consideramos que el cilindro cargado es delgado (línea de carga), entonces la cantidad ($\rho\pi a^2$) representa la carga por unidad de longitud λ (C/m). Por lo tanto, la expresión anterior puede escribirse de la forma:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}$$

Este resultado coincide con el que habíamos obtenido en el capítulo anterior, mediante calculo directo del campo.

Respuesta:

a) Cilindro macizo:

$\vec{E}(r \le a) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}\hat{r}$, $\vec{E}(r \ge a) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_o r}\hat{r}$

b) Línea de carga:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}$$

PR 3.05. *Nube de cargas con distribución esférica*

En un núcleo atómico ligero, la carga está distribuida esféricamente con una densidad que depende de la distancia al origen, de acuerdo a la expresión:

$$\rho = \rho_o\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \qquad \text{para } r \le a$$
$$\rho = 0 \qquad \text{para } r \ge a$$

a) Calcule la carga total del núcleo.
b) Determine el campo eléctrico dentro y fuera de la nube.
c) ¿ A qué distancia radial, tiene E el máximo valor ?

Solución: a) Para hallar la carga total, escogemos como diferencial de carga dQ, una concha esférica de radio r y espesor dr. El área de la concha es $4\pi r^2$ y su volumen $dV = 4\pi r^2 dr$. La carga total se obtiene sumando todos los aportes de las conchas con radios desde 0 hasta a:

$$Q = \int \rho dV = \int_0^a \rho_o\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)4\pi r^2 dr$$

$$Q = 4\pi\rho_o\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right]_0^a = \left(\frac{8}{15}\right)\pi a^3\rho_o$$

b) Para hallar el campo dentro de la nube, consideremos una superficie esférica imaginaria interna de radio $r < a$. El campo $\vec{E}$ es radial y de magnitud constante en esta superficie, de modo que el flujo es:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E$$

La carga encerrada por S_1 es:

$$Q = \int \rho dV = \int_0^r \rho_o(1 - \frac{r^2}{a^2})4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_o(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2})$$

Aplicando la ley de Gauss $\Phi = Q/\varepsilon_o$, obtenemos el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\rho_o r}{\varepsilon_o}(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2})\hat{r} \qquad r < a$$

Para hallar el campo eléctrico en la región externa, escogemos una esfera gaussiana de radio $r > a$ (superficie S_2). Toda la carga de la distribución $(8\pi a^3\rho_o/15)$ está encerrada por esta superficie.
El campo es radial y de magnitud constante sobre la superficie esférica, por lo tanto el flujo es $4\pi r^2 E$. Aplicando de nuevo la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{2\rho_o a^3}{15\varepsilon_o r^2}\hat{r} \qquad r > a$$

c) Observe que las dos soluciones de $\vec{E}$ (dentro y fuera de la esfera) coinciden en la frontera ($r = a$):

$$E(r{=}a) = \frac{2\rho_o a}{15\varepsilon_o}$$

Además, la solución para $r > a$ es una función decreciente con la distancia radial.

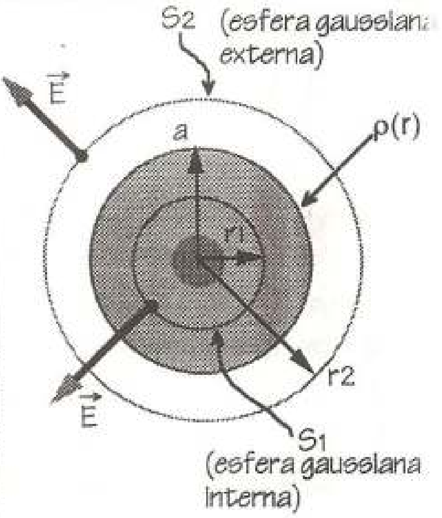
A fin de determinar si la solución para $r < a$ presenta un valor máximo, impondremos la condición de que la derivada de E respecto de r sea nula:

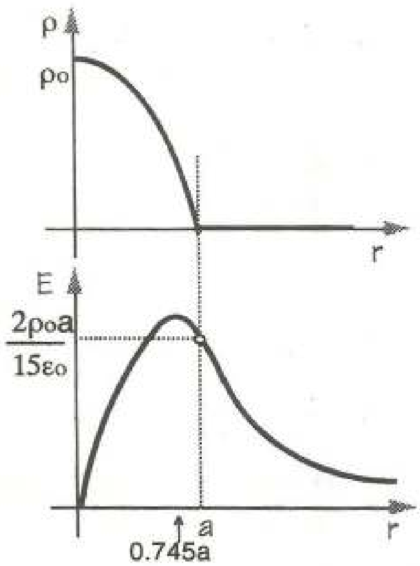
$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}(\frac{1}{3} - \frac{3r^2}{5a^2}) \qquad r < a$$

La expresión entre paréntesis se anula para:

$$r = \frac{\sqrt{5}}{3}a = 0.745a$$

Esta es la posición para la cual E tiene un máximo, según se observa en el gráfico.





Respuesta:

a) $Q = (\frac{8}{15})\pi a^3\rho_o$

b) $\vec{E} = \frac{\rho_o r}{\varepsilon_o}(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2})\hat{r} \qquad r \leq a$

$\vec{E} = \frac{2\rho_o a^3}{15\varepsilon_o r^2}\hat{r} \qquad r \geq a$

c) $r = (\frac{\sqrt{5}}{3})a = 0.745a$

PR 3.06. *Esfera maciza rodeada de cascarón metálico*

Una esfera no conductora de radio a *y carga uniforme* $+Q$ *está situada en el centro de una esfera metálica hueca de radio interior* b *y radio exterior* c. *La esfera hueca exterior contiene una carga* $-Q$. *Halle* $E(r)$ *en tlas regiones: siguientes*

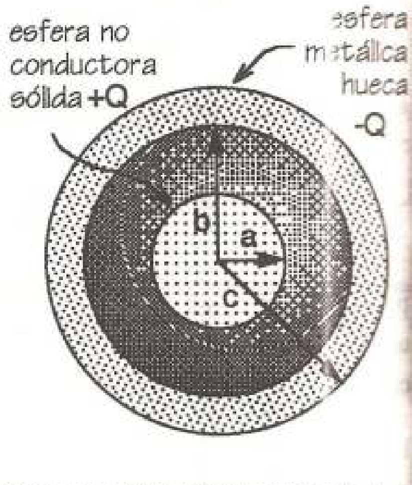
a) dentro de la esfera sólida $(r < a)$.

b) entre la esfera maciza y la hueca $(a < r < b)$.

c) dentro de la esfera hueca $(b < r < c)$.

d) fuera de la esfera hueca $(r > c)$.

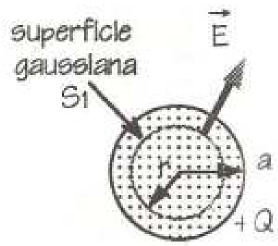
e) ¿Cuáles cargas aparecen en las superficies interna y externa de la esfera hueca ?



Solución: Para cada región escogemos superficies esféricas concéntricas que pasen por el punto donde se desea hallar el campo. En cada superficie gaussiana el campo es radial y tiene magnitud constante, de modo que el flujo es:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E$$

donde r es el radio de la superficie gaussiana respectiva.



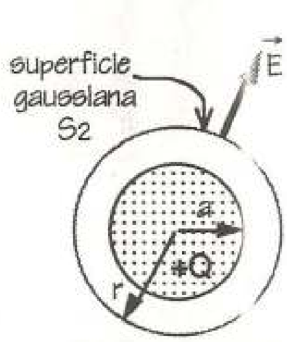
a) Dentro de la esfera sólida $(r < a)$: la carga encerrada por la superficie S_1 es $Q(r/a)^3$.

Aplicando la ley de Gauss:

$$4\pi r^2 E = \left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^3$$

de modo que el campo es:

$$\vec{E} = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r}$$

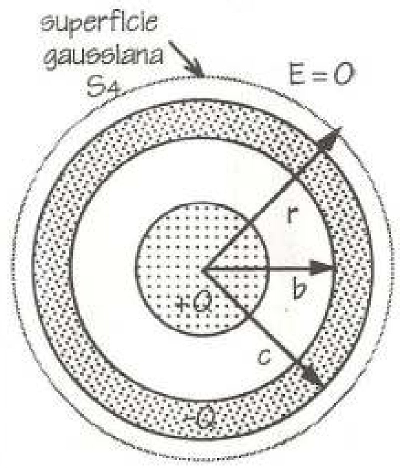


b) Entre la esfera sólida y la hueca $(a < r < b)$: la carga encerrada por la superficie S_2 es $+Q$. Aplicando la ley de Gauss:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

de modo que:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



c) Dentro de la esfera hueca $(b < r < c)$. Como la esfera es conductora el campo eléctrico en su interior es cero ($\vec{E} = 0$).

d) Fuera de la esfera hueca ($r > c$). La carga encerrada por la superficie gaussiana S_4 es cero ($Q - Q$) y de la ley de Gauss se obtiene:

$$4\pi r^2 E = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0$$

e) Consideremos una superficie gaussiana S_3 que queda dentro del cuerpo de la esfera conductora hueca. Como $\vec{E} = 0$, el flujo será cero y la carga neta encerrada también es cero. La superficie interna del cascarón debe tener una carga Q_i tal que:

$$Q + Q_i = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_i = -Q$$

Sea Q_e la carga sobre la superficie externa del cascarón. Como la carga neta en el cascarón es $-Q$, entonces:

$$Q_e + Q_i = -Q$$

$$Q_e = -Q - Q_i = -Q - (-Q) = 0$$

Toda la carga neta del cascarón reside en su superficie interna.

Respuesta

$\vec{E}(r \le a) = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r}$, $\vec{E}(b \le r \le c) = 0$

$\vec{E}(a \le r \le b) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$, $\vec{E}(r \ge c) = 0$

e) Cargas: $Q_i = -Q$; $Q_e = 0$

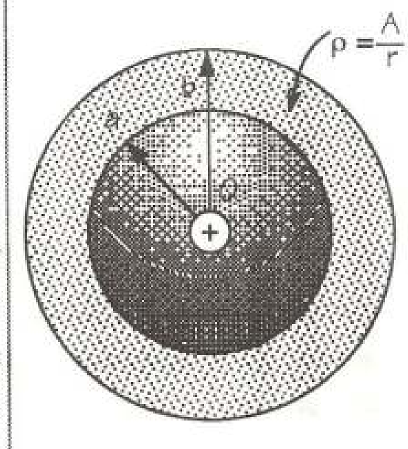
PR 3.07. *Un campo constante en una esfera cargada*

La región esférica $a < r < b$ contiene una carga por unidad de volumen:

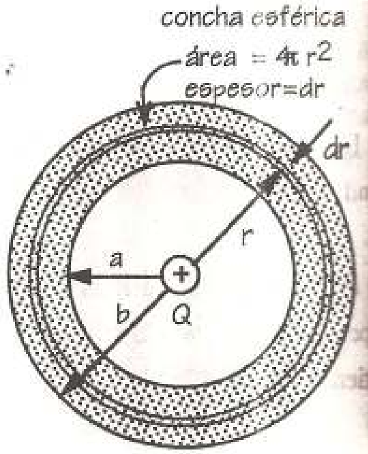
$$\rho = \frac{A}{r}$$

Siendo A una constante. Si se coloca en el centro de la cavidad cerrada una carga puntual $+Q$,

¿ Cuál será el valor de A de modo que el campo eléctrico en la región $a < r < b$ tenga magnitud constante ?



Solución: Debemos hallar el campo eléctrico a una cierta distancia r_o del centro ($a < r_o < b$), en términos de A. Para ello escogemos una esfera gaussiana de radio r_o concéntrica con la carga.



Para hallar la carga Q_o encerrada, tomamos como diferencial de volumen dV el de una concha esférica de radio r y espesor dr:

$$Q_o = \int \rho dV = \int_a^{r_o} \left(\frac{A}{r}\right)(4\pi r^2 dr)$$

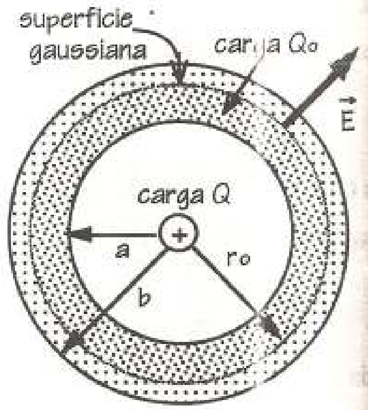
Integrando:

$$Q_o = 4\pi A \int_a^{r_o} r dr = 2\pi A(r_o^2 - a^2)$$

La carga *total* encerrada dentro de la superficie Gaussiana es:

$$Q + Q_o = Q + 2\pi A(r_o^2 - a^2)$$

Como el campo eléctrico es radial, el flujo a través de la superficie gaussiana es:



$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r_o^2 E$$

Siendo E la magnitud del campo eléctrico. Aplicando la Ley de Gauss:

$$4\pi\varepsilon_o r_o^2 E = Q + 2\pi A(r_o^2 - a^2)$$

Despejando E:

$$E = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)\left[\frac{Q}{r_o^2} + 2\pi A - \frac{2\pi A a^2}{r_o^2}\right] \qquad \text{(i)}$$

Para que E sea constante, $dE/dr = 0$,

$$\frac{dE}{dr_o} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)\left[-\frac{2Q}{r_o^3} + 0 + \frac{4\pi A a^2}{r_o^3}\right] = 0$$

y como el corchete debe anularse, se cumple la condición:

$$A = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Este resultado también podría haberse obtenido directamente de la expresión (i), si igualamos el primer y tercer término del corchete (para que así E no dependa de r_o).

Respuesta:

$$\boxed{A = \frac{Q}{2\pi a^2}}$$

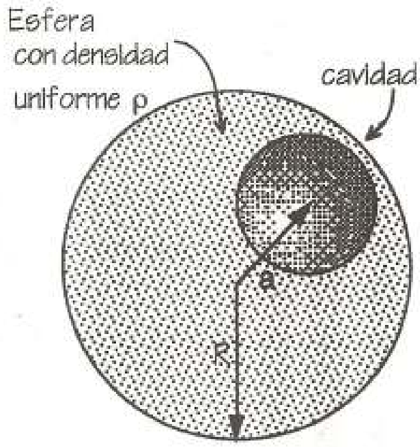
PR 3.08. Superposición en acción.

Una esfera de radio R *y carga uniforme por unidad de volumen* ρ*, contiene excéntricamente una cavidad esférica de radio* b*. La distancia entre el centro de la cavidad y el centro de la esfera es igual a* a*, como se muestra en la figura.*

Demuestre que el campo eléctrico en la cavidad es uniforme y viene dado por:

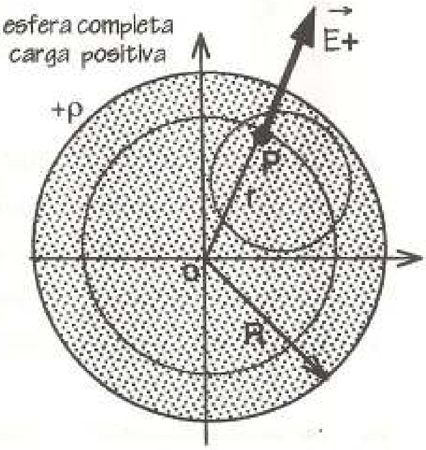
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

¡Independientemente de los radios de la esfera y de la cavidad!



Solución: Podemos *rellenar la cavidad* con una carga positiva de densidad volumétrica $+\rho$ y otra negativa de densidad volumétrica $-\rho$, sin que con ello varíe el campo en P.

Como resultado, obtendremos dos esferas completas, la mayor de radio R y carga homogénea *positiva* $+\rho$ y la menor del tamaño de la cavidad (radio b) y carga homogénea *negativa* $-\rho$.

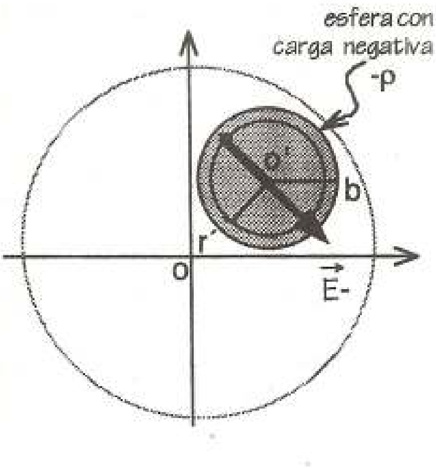


El campo resultante en cualquier punto de la cavidad es la **superposición** del campo $\vec{E}_+$ debido a la esfera grande, más el campo $\vec{E}_-$ de la esfera pequeña.

El campo en el interior de una esfera sólida con densidad ρ se determina aplicando la ley de Gauss a una esfera gaussiana de radio r que pase por el punto P.

$$\varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 (4\pi r^2 E) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$



Por lo tanto el campo eléctrico debido a la esfera grande, con densidad de carga positiva (ρ) es:

$$\vec{E}^+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

De manera similar el campo eléctrico en P debido a la esfera del tamaño de la cavidad, con densidad de carga negativa ($-\rho$) es:

$$\vec{E}^- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$$

Note que por ser la carga negativa $\vec{E}^-$ apunta en dirección contraria al vector posición $\vec{r}'$ de P respecto del centro de la cavidad.

Los vectores posición $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ están relacionados:

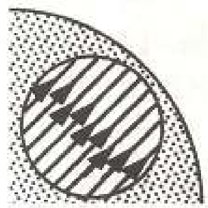
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$$

Superponiendo los dos campos, obtenemos finalmente:

$$\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

Observe que el campo eléctrico dentro de la cavidad es *uniforme*, es decir, tiene magnitud y dirección constantes (apunta en la dirección del centro de la esfera al centro de la cavidad. Además, el campo eléctrico *no depende ni del radio de la esfera ni del radio de la cavidad.*

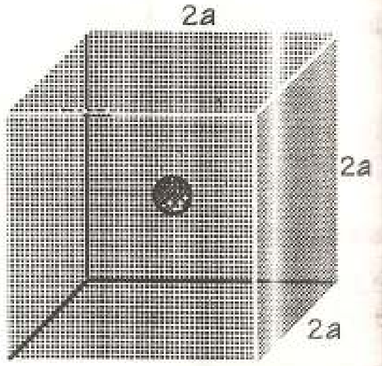
Respuesta:



$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}}$$

PR 3.09. *Con Gauss se aprovecha la simetría.*

Una carga puntual Q se encuentra en el centro de un cubo de lado 2a, como indica la figura.



Determine el flujo del campo eléctrico en una de sus caras, usando dos procedimientos diferentes:

a) Calculando explícitamente la integral $\int \vec{E}\cdot d\vec{S}$

b) Usando la Ley de Gauss.

Solución: a) Cálculo directo: Consideremos un sistema de coordenadas centrado en la carga. En la cara del cubo mostrada en la figura, un elemento de área será:

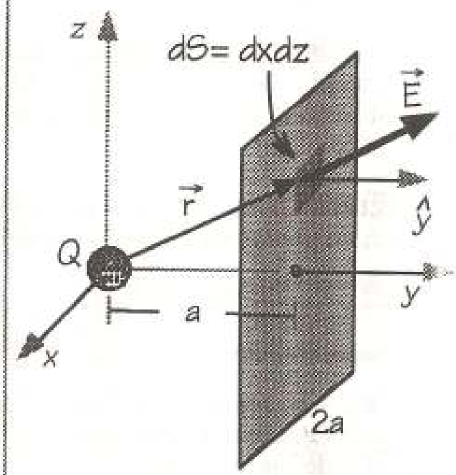
$$d\vec{S} = dxdz\,\hat{y}$$

El campo eléctrico en este elemento de área ubicado a distancia r de la carga puntual es:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^3}\vec{r} = \frac{kQ}{r^3}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

Donde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, es el vector posición, y $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son los vectores unitarios en las direcciones *x, y, z* respectivamente. Tomando en cuenta que: $\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{y} = 0$ *y* $\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$ y que sobre esta cara y = a, el producto escalar de $\vec{E}$ con $d\vec{S}$ es:

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{kQa}{r^3}dxdz = \frac{kQa}{(x^2+z^2+a^2)^{3/2}}dxdz$$



Para hallar el flujo total sobre la superficie cuadrada integramos:

$$\Phi = kQa\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\frac{dxdz}{(x^2+z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\Phi = 4kQa\int_0^a dz\int_0^a\frac{dx}{(x^2+z^2+a^2)^{3/2}}$$

Para evaluar esta integral doble, procedemos primero a integrar sobre la variable x. La integral es del tipo:

$$\int dx/(x^2+b^2)^{3/2} = x/b^2(x^2+b^2)^{1/2},$$

donde: $b^2 = z^2 + a^2$.

El resultado es:

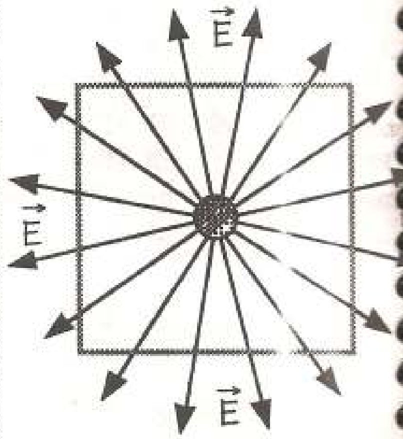
$$\Phi = 4kQa\int_0^a\frac{adz}{(z^2+a^2)\sqrt{z^2+2a^2}}$$

La integral sobre z es más complicada y puede hallarse en las Tablas Matemáticas (Véase: *Handbook of Mathematical Functions* por Abramowitz & Stegun, pag.13, Dover 1965)

$$\int_0^a \frac{dz}{(z^2+a^2)\sqrt{z^2+c^2}} = \frac{1}{a\sqrt{c^2-a^2}}\,\text{arctg}\left(\frac{z\sqrt{c^2-a^2}}{a\sqrt{c^2+z^2}}\right)\Bigg|_0^a$$

Resultado que es válido para $c^2 > a^2$.
En este caso tenemos $c^2=2a^2$, por lo tanto, el flujo por la cara del cubo es:

$$\Phi = 4kQa^2\left[\frac{1}{a^2}\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = 4kQ\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{Q}{6\varepsilon_o}$$



b) Procedimiento usando la ley de Gauss y simetría: Se observa que la carga Q está ubicada en el centro del cubo y por lo tanto, simétricamente respecto de cada una de las seis caras del cubo.

De acuerdo a la Ley de Gauss el flujo neto a través de la superficie gaussiana del cubo es justamente:

$$\Phi_{cubo} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Este flujo se reparte por igual entre las 6 caras idénticas del cubo. Por lo tanto, el flujo a través de cualquiera de las caras es un sexto de este valor:

$$\Phi_{cara} = \frac{Q}{6\varepsilon_o}$$

Este resultado coincide con el que obtuvimos anteriormente por el método directo y mucho más laborioso.

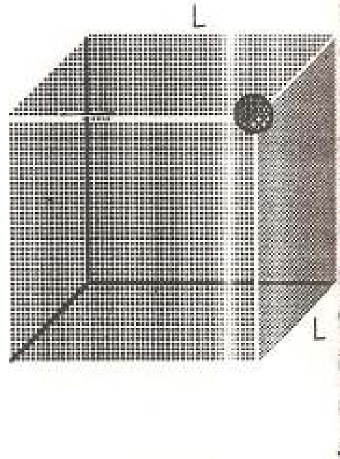
Respuesta

Por ambos procedimientos:
$\Phi_{cara} = \frac{Q}{6\varepsilon_o}$

PR 3.10. *Flujo de una carga en la esquina del cubo.*

Una carga puntual Q está localizada en una esquina de un cubo de lado L, como indica la figura.

Determine el flujo del campo eléctrico que atraviesa cada una de las seis caras del cubo.

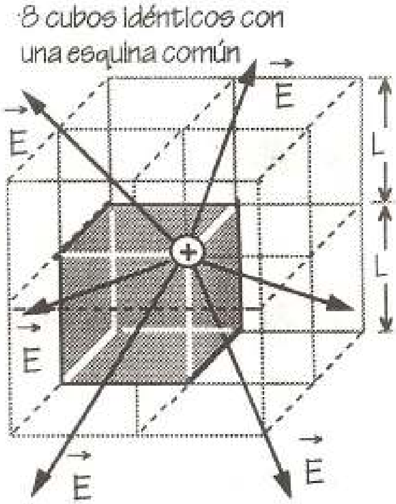


Solución: Según en el problema anterior, aquí tampoco es necesario el procedimiento complicado de integración, basta usar la ley de gauss y argumentos de simetría.

Como el campo producido por una carga puntual tiene dirección radial en las tres caras adyacentes al vértice donde está Q, el campo $\vec{E}$ será tangencial a dichas superficies y por lo tanto el flujo allí será nulo.

Para hallar el flujo en las tres caras restantes, podemos apilar 8 cubos idénticos de forma tal que la carga Q quede en una esquina común a todos ellos. Se forma de esta manera una superficie gaussiana cúbica (de lado 2L) alrededor de la carga puntual (véase la figura).

De acuerdo a la ley de Gauss el flujo total a través de la superficie así formada será Q/ε_0. Este flujo es la suma de los flujos de cada una de las 24 caras idénticas de cubos pequeños, correspondiéndole a cada cara, partes iguales de flujo por un valor de $(Q/24\varepsilon_0)$.



Respuesta:

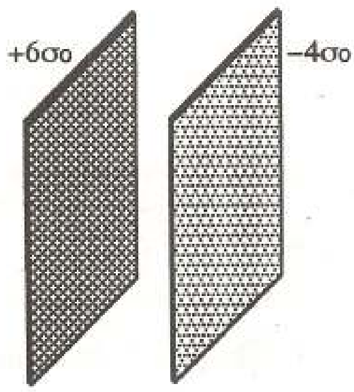
3 Caras adyacentes: $\Phi = 0$
3 Caras opuestas: $\Phi = Q/24\varepsilon_0$

PR 3.11. Dos láminas de carga paralelas..

Dos láminas infinitas no conductoras, con carga uniforme están enfrentadas paralelamente. La lámina de la izquierda tiene una densidad de carga superficial $+6\sigma_0$ y la de la derecha tiene una densidad de carga $-4\sigma_0$.

Determine el campo eléctrico en las siguientes regiones:

a) a la izquierda de las dos láminas.
b) entre las láminas.
c) a la derecha de las dos láminas.



Solución: Consideremos los campos generados por la lámina de carga, positiva $(+6\sigma_0)$ y de carga negativa $(-4\sigma_0)$, separadamente.
Los campos a cualquier distancia de cada lámina individual tienen magnitudes:

$$|\vec{E}_+| = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} = 3\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)$$

$$|\vec{E}_-| = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = 2\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)$$

a) En la región a la izquierda, los campos son:

$$\vec{E}_+ = -3\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} \qquad y \qquad \vec{E}_- = +2\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

El campo neto se obtiene superponiendo estos dos campos:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

b) En la región comprendida entre las dos láminas, los campos son:

$$\vec{E}_+ = +3\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} \qquad y \qquad \vec{E}_- = +2\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

Superponiendo estos dos campos, resulta:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = +5\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

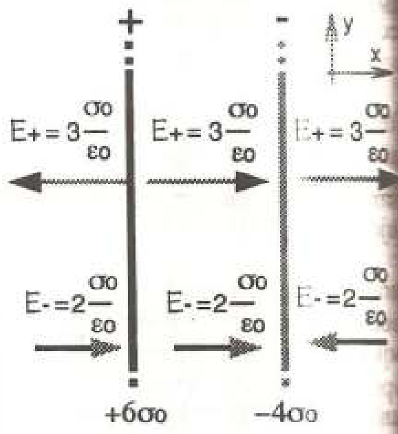
c) Finalmente, a la derecha de las dos láminas, los campos son:

$$\vec{E}_+ = +3\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} \qquad y \qquad \vec{E}_- = -2\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

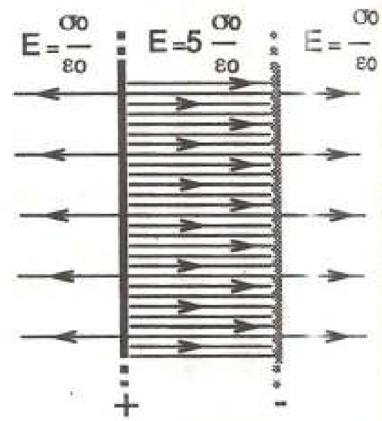
el campo neto es:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = +\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

Observe que si las densidades de carga hubiesen sido de igual magnitud y de signo opuesto, resultaría un campo nulo a ambos lados de las láminas.



Respuesta:



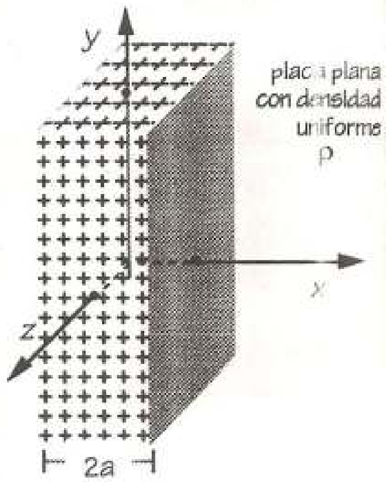
PR 3.12. Placa no-conductora con carga uniforme.

Una placa plana no-conductora, de espesor 2a, tiene una carga uniforme con densidad volumétrica ρ (C/m³). En términos de la distancia medida desde el plano medio de la placa, x, halle el campo eléctrico en todos los puntos del espacio:

a) Dentro de la placa.

b) Fuera de la placa.

c) Grafique la magnitud de E en función de x.



Solución: a) Se escoge una superficie gaussiana en forma de una cajita cilíndrica, de largo $2x$, tapas planas con **área** A y centrada en el interior de la placa. (*Fig. a*).

El campo es uniforme y normal a las caras planas de la cajita y tiene igual magnitud sobre ellas. Si ρ es positivo $\vec{E}$ apunta hacia afuera y el flujo en cada cara es EA. Sobre las caras curvas, $\vec{E}$ es paralelo a la superficie y a través de ésta el flujo es cero.

El flujo total a través de la cajita gaussiana es:

$$\Phi = 2EA$$

El volumen encerrado es $V=2xA$ y la carga que contiene es $(2xA)\rho$. Aplicando la ley de Gauss:

$$\varepsilon_0(2EA) = 2xA\rho$$

Por lo tanto, el campo dentro de la placa crece linealmente desde cero:

$$\vec{E} = \pm\left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

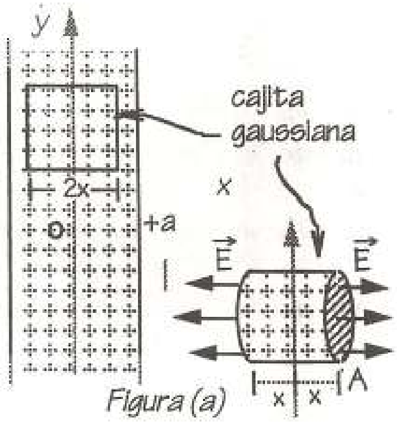


Figura (a)

b) Para hallar el campo afuera también se escoge una superficie gaussiana en la forma de una cajita cilíndrica, de tapas planas con área A y largo $2x$, con $x > a$ (*Fig. b*).

El flujo total sobre la superficie de la cajita es:

$$\Phi = 2EA$$

Pero la carga encerrada es: $Q = (2aA)\rho$. Aplicando la ley de Gauss:

$$\varepsilon_0(2EA) = 2aA\rho$$

Despejando, tenemos que el campo eléctrico afuera de la placa es constante:

$$\vec{E} = \pm\left(\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

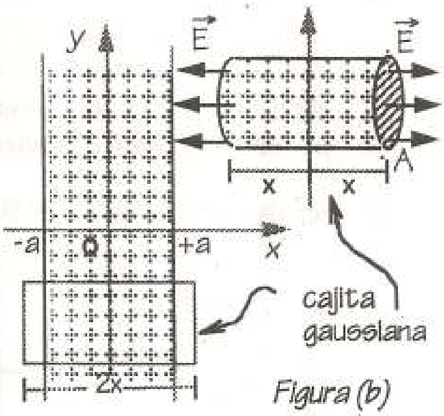
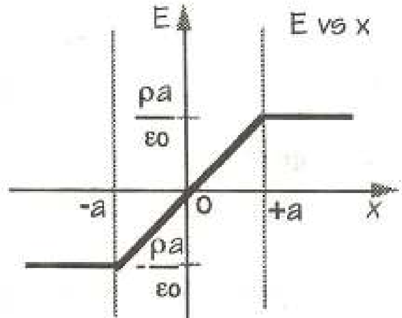


Figura (b)

c) Los resultados están representados en la gráfica de E vs. x.



Respuesta

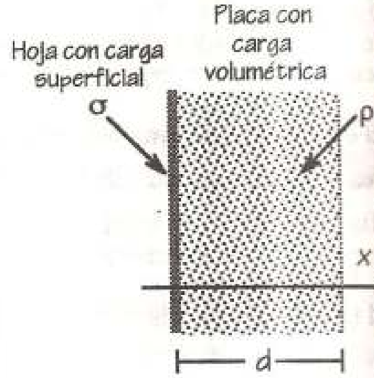
Dentro: $\vec{E} = \pm\left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$

Fuera: $\vec{E} = \pm\left(\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$

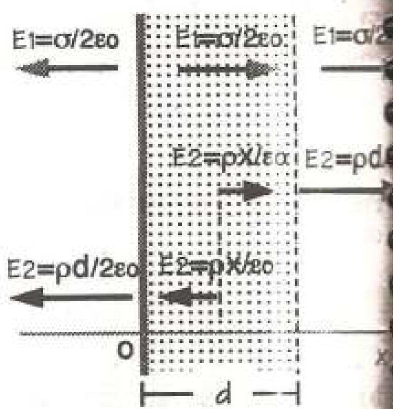
PR 3.13. ***Campo de carga superficial y volumétrica.***

Un plano infinito tiene una distribución de carga superficial uniforme con densidad σ (C/m^2). Justo a su derecha está una placa de espesor d, *que contiene una carga uniforme con densidad volumétrica ρ (C/m^3). Todas las cargas están fijas.*

Determine el campo $\vec{E}$ *en todas las regiones.*



Solución: En cada una de las regiones se puede aplicar el principio de superposición y combinar los campos individuales: $\vec{E}_1$ de la hoja y $\vec{E}_2$ de la placa.
Conviene escoger el origen de coordenadas en la hoja. Para la placa de densidad ρ podemos usar los resultados del problema anterior, tomando como espesor d en lugar de 2a.



<u>En la región a la izquierda: x < 0:</u>

$$\vec{E}_1 = -\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}; \qquad \vec{E}_2 = -\left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

El campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\left(\frac{\sigma + \rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

<u>En la región intermedia: 0 < x < d:</u>

$$\vec{E}_1 = +\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x};$$

$$\vec{E}_2 = \left(-\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

El campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{\sigma - \rho d + 2\rho x}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

<u>En la región a la derecha: x > 0:</u>

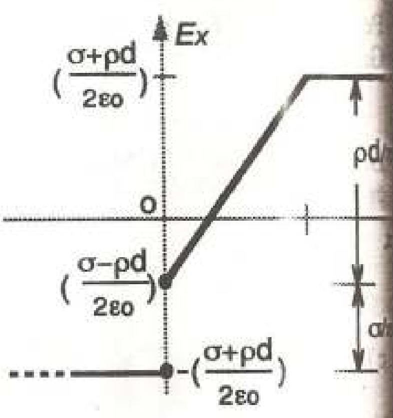
$$\vec{E}_1 = +\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}; \qquad \vec{E}_2 = +\left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

El campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{\sigma + \rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

Los resultados pueden resumirse en el gráfico de E vs x.

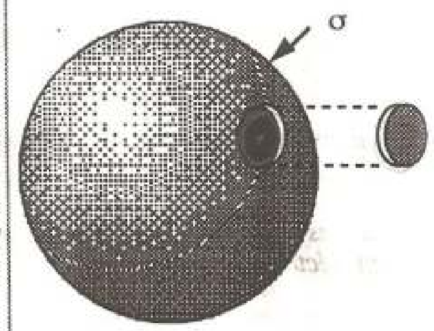
Respuesta



PR 3.14. *Agujero en una concha esférica.*

Un cascarón esférico de radio R tiene una carga uniforme con densidad superficial σ (C/m²). Se le quita un pedazo circular pequeño de radio a « R.

¿ Cuál será la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto medio del agujero ?



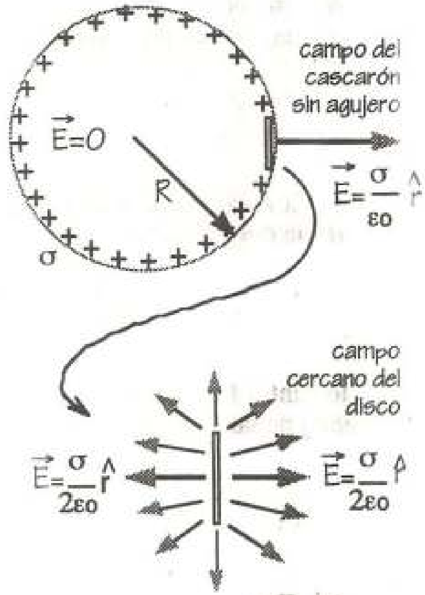
Solución: Podemos aplicar el principio de superposición, considerando los campos que generarían en ese punto, el cascarón original y el pedacito que se le ha extraído.

Hallemos primero, el campo eléctrico del cascarón completo. En el interior del cascarón, si tomamos una esfera gaussiana concéntrica de radio $r<R$, debido a la simetría esférica el flujo es $4\pi r^2 E$ y como la carga neta encerrada es cero, se sigue que $\vec{E}=0$.

Para hallar $\vec{E}$ en la superficie del cascarón, imaginamos una esfera gaussiana de radio $\approx R$ (que justamente la envuelva).

Debido a la simetría, el flujo es $\Phi = 4\pi R^2 E$ y la carga neta encerrada es $Q = \sigma A = 4\pi R^2 \sigma$, por lo tanto de acuerdo a la Ley de Gauss, el campo es:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{casc} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\hat{r}$$



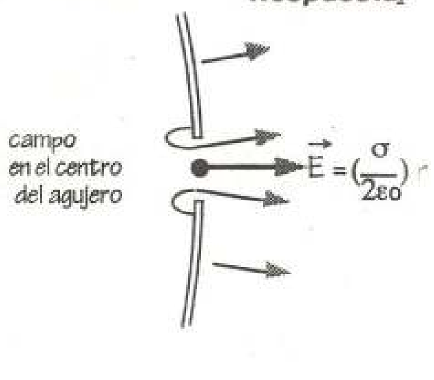
$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ↓gaussiana

Consideremos ahora el disco. Para puntos muy próximos a su centro, éste puede ser considerado como un plano infinito que genera un campo uniforme a ambos lados.

Tomando en esa región, una cajita gaussiana de caras planas y paralelas al disco, el flujo es $\Phi = 2EA$ y la carga encerrada es $Q=\sigma A$, por lo tanto usando la ley de Gauss encontramos:

$$\vec{E}_{disco} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{r}$$

Respuesta:



De acuerdo al principio de superposición, el campo en la posición media del agujero es:

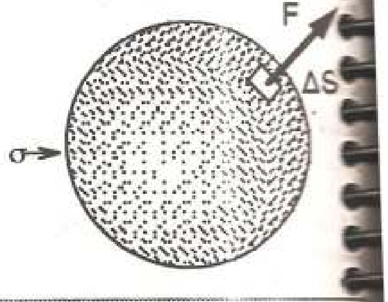
$$\vec{E}_{agujero}=\vec{E}_{casc}-\vec{E}_{disco} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{r}$$

O.X.

PR-3.15. La presión sobre un globo cargado

Un globo esférico de goma está cargado en su superficie con una densidad uniforme σ (C/m^2). La fuerza de repulsión eléctrica entre sus partes tiende a expandirlo.

¿ Cuál es la presión (fuerza por unidad de área) debida a la fuerza eléctrica ?



Solución: Escojamos una pequeña región del globo de área ΔS. De acuerdo al problema anterior, el campo eléctrico sobre una región pequeña de la superficie del globo debido a todas las cargas, salvo las cargas que se encuentran en la propia región es:

$$E = \sigma/2\varepsilon_0.$$

La fuerza neta que se ejerce sobre un pedazo de área ΔS en la superficie del globo es:

$$F = Q_{pedazo}E_{resto} = (\sigma\,\Delta S)\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\Delta S\,\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Por lo tanto, la presión (Fuerza / área) que se ejerce sobre el pequeño pedazo es:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Respuest

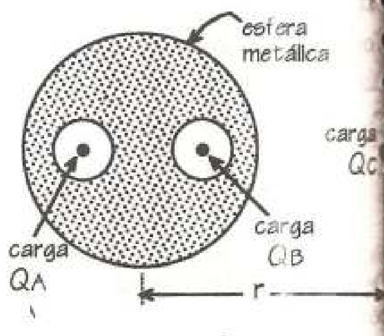
$$\boxed{P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

PR 3.16. *Apantallamiento electrostático.*

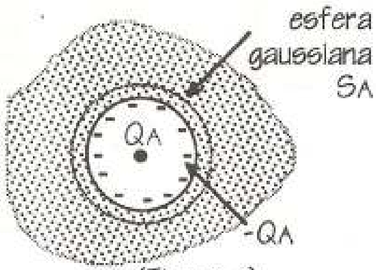
Una esfera metálica maciza, contiene dos cavidades esféricas. La esfera no tiene carga neta pero en los centros de las cavidades hay cargas Q_A y Q_B, respectivamente. Por otra parte, a una distancia r muy grande (en comparación con el tamaño de la esfera), existe una carga puntual Q_C como se indica en la figura.

Determine:

a) Las cargas inducidas en la esfera metálica.
b) La fuerza que actúa sobre la esfera metálica y sobre cada una de las cargas puntuales



Solución: a) En una cavidad de un conductor, el campo $\vec{E}$ es independiente de cualquier carga situada afuera (apantallamiento). Si la cavidad contiene una carga Q_A en su centro, podemos imaginar una superficie gaussiana, S_A, de radio igual a la cavidad pero ubicada en el conductor.

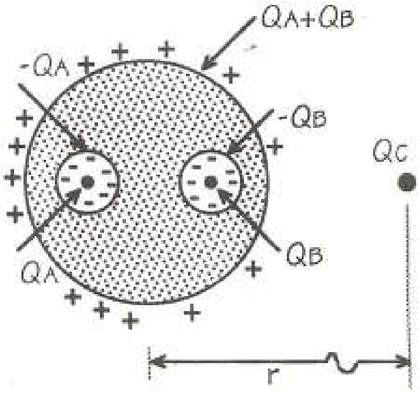


(Figura a)

El flujo a través de esta superficie debe ser nulo en virtud de que en un conductor $\vec{E} = 0$. Por lo tanto debe haber una carga igual y opuesta, $-Q_A$ uniformemente distribuida en la superficie de la cavidad (Ver figura a).

Igual razonamiento se puede usar para la cavidad que tiene una carga Q_B en su centro; y se deduce que habrá una carga opuesta $-Q_B$ inducida en la superficie de dicha cavidad.

Ahora bien, si la esfera metálica tiene en sus superficies internas una carga $-(Q_A+Q_B)$, para que la carga total sea cero, debe existir una cantidad igual de carga, de signo opuesto (Q_A+Q_B) en la superficie externa, véase la figura b.



(Figura b)

b) Las cargas puntuales Q_A y Q_B se encuentran en los centros de las cavidades completamente protegidas de la influencia de la carga puntual Q_C ubicada afuera de la esfera metálica. Por lo tanto no se ejercerá ninguna fuerza sobre estas cargas:

$$F_A = F_B = 0$$

Si la carga externa Q_C no existiese, el campo externo de la esfera metálica tendría simetría radial. La presencia de la carga externa altera la distribución de carga en su superficie externa (sin afectar la cantidad total de carga).

Sin embargo, si suponemos que la separación r entre la esfera metálica y la carga puntual Q_C es grande, la fuerza sobre éstas son iguales y opuestas, y de magnitud:

$$F_{esfera} = F_C = k\frac{(Q_A+Q_B)Q_C}{r^2}$$

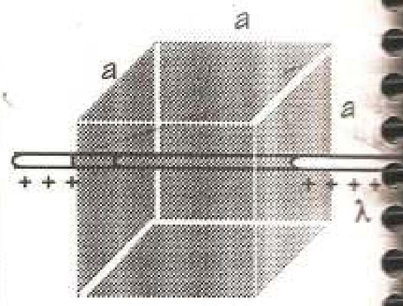
Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_A = F_B = 0 \\ F_{esfera} = F_C = k\dfrac{(Q_A+Q_B)Q_C}{r^2} \end{array}}$$

PP-3.01. Línea infinita de carga atraviesa un cubo

Una línea recta de carga infinita, con densidad λ, atraviesa un cubo de lado a, perpendicularmente a dos de sus caras y por sus centros, como se indica en la figura.

¿ Cuál es el flujo del campo eléctrico que atraviesa cada una de las caras del cubo ?



Respuesta:

En las dos caras perpendiculares: $\Phi_{\perp} = 0$

En cada una de las 4 caras paralelas: $\Phi_{\parallel} = \lambda a / 4\varepsilon_0$

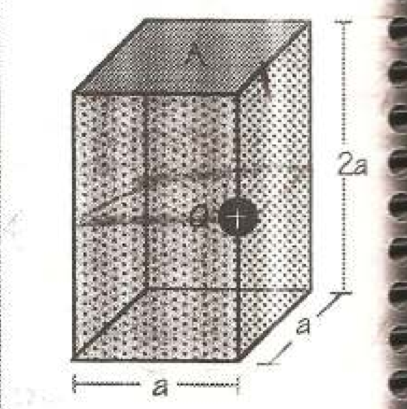
Ayuda: Calcule la carga encerra[da] divídala por ε_0. Este es el flujo to[tal] por simetría se reparte por igual e[n] las 4 caras paralelas a la línea de ca[rga]

PP-3.02. Flujo de $\vec{E}$ en un paralelepípedo

Sea un paralelepípedo de base cuadrada de longitud a, y con altura $2a$, como se indica en la figura. Una partícula con carga Q se encuentra situada en el punto medio de una de las aristas largas.

a) ¿ Cuál es el flujo a través de la cara cuadrada A ?

b) ¿ Cual es el flujo total en las seis caras del paralelepípedo ?



Respuesta:

a) $\phi_A = Q/24\varepsilon_0$

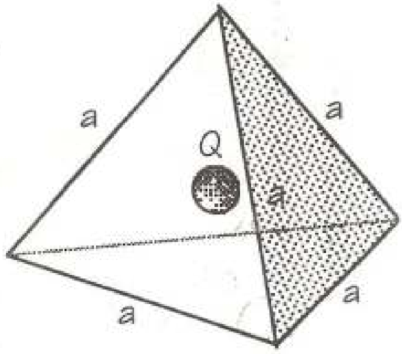
b) $\phi_{total} = Q/4\varepsilon_0$

Ayuda: Agregue tres paralelepíp[edos] iguales que tengan en común co[n] dado, la arista donde está la carga. [...] la simetría..

PP-3.03. Promedio del campo $\vec{E}$ en un tetraedro

Una carga puntual está en el centro de un tetraedro de lado a.

¿ Cuál es el valor promedio del campo eléctrico sobre una cara del tetraedro ?



Respuesta:

$$\langle E \rangle = Q / \sqrt{3}\, \varepsilon_o a^2$$

Ayuda: Usando Gauss y simetría, determine el flujo en una de las caras. El promedio buscado será la magnitud de un campo $\vec{E}$ perpendicular a dicha cara que produzca el mismo flujo.

PP-3.04. Campo de un cilindro hueco

Un cilindro infinito de radio b tiene un hueco de radio a, a lo largo de su eje central. En la región comprendida entre a y b el cilindro tiene una densidad de carga no-uniforme:

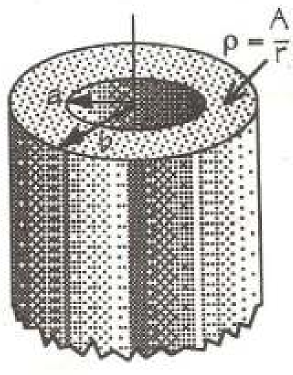
$$\rho = \frac{A}{r} \quad (\mathrm{C/m^3})$$

$dQ = \rho\, dV$

Siendo A ($\mathrm{C/m^2}$) una constante.

a) Determine la carga total en un trozo del cilindro de longitud L

b) ¿ Cuál es el campo eléctrico en la región ($a \le r \le b$) ?



Respuesta:

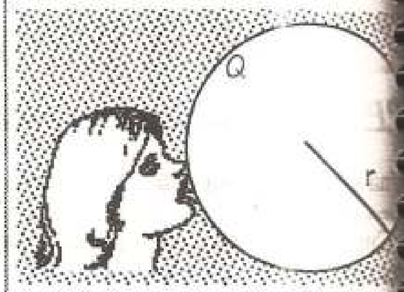
a) $Q = A 2\pi L(b - a)$; b) $\vec{E} = \frac{A}{\varepsilon_o}(1 - \frac{a}{r})\,\hat{r}$

Ayuda: Para hallar Q escoja como elemento de volumen una concha cilíndrica e integre. Para hallar $\vec{E}$ aplique Gauss a un cilindro gaussiano de radio entre a y b.

PP-3.05. Inflando un globo cargado

Un globo de goma esférico de radio r_0 es frotado hasta que tenga una carga total Q distribuida uniformemente sobre su superficie. A continuación el globo es inflado lentamente de modo que su radio aumenta linealmente hasta el doble en un tiempo T.

Determine el campo eléctrico en función del tiempo en la superficie exterior inmediata del globo.



Respuesta:

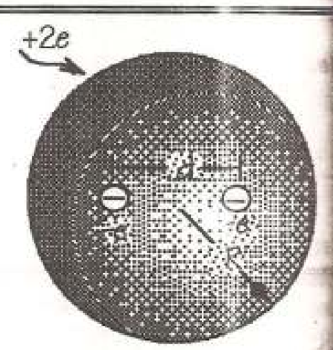
$$\vec{E} = \frac{kQ}{r_0^2(1+\frac{t}{T})^2}\hat{r}$$

Ayuda: Aplique Gauss a una esf gaussiana para hallar E en la superfic del globo. Sustituya el radio que es u función lineal del tiempo.

PP-3.06. Modelo atómico de Thomson

En el modelo *clásico* del átomo del Helio que propuso Thomson, dos electrones de carga -e, en reposo están incrustados simétricamente en una esfera uniforme de radio R y carga positiva (+2e), como indica la figura.

Halle la distancia d entre los electrones de modo que la configuración esté en equilibrio estático.



Respuesta:

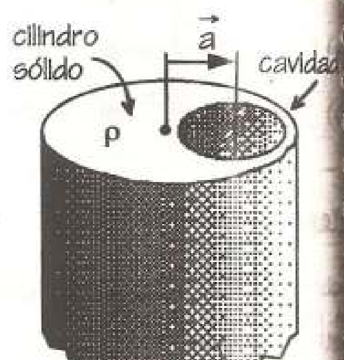
$$d = R$$

Ayuda: Usando Gauss, calcule campo en el interior de una esfera carga uniforme, +2e, a una distancia de su centro. Este campo debe ser igu y opuesto al campo coulombiano de carga puntual -e, a distancia 2x.

PP-3.07. Campo en la cavidad de un cilindro

Dentro de un cilindro infinito homogéneo con densidad volumétrica de carga ρ, hay una cavidad cilíndrica excéntrica. La distancia entre los ejes paralelos del cilindro y de la cavidad es igual a a.

Hallar el vector campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior de la cavidad.



Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\vec{a}$$

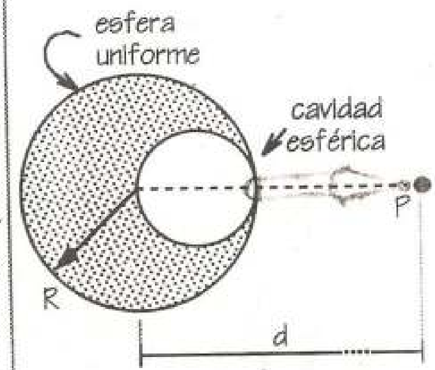
Siendo $\vec{a}$ el vector que conecta el eje del cilindro con el eje de la cavidad.

Ayuda: Use Gauss para determinar el campo dentro de un cilindro macizo. Aplique superposición vectorial de los campos de dos cilindros uniformes; el grande con densidad positiva y el pequeño con densidad negativa.

PP-3.08. *Campo externo de una esfera con cavidad*

Una esfera no conductora de radio R y densidad de carga uniforme ρ (C/m^3), tiene una cavidad esférica de radio ½R como se indica en la figura.

Determine el campo eléctrico en un punto P ubicado a una distancia d » R, del centro de la esfera.



Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{7\rho R^3}{24\varepsilon_o d^2}\hat{r}$$

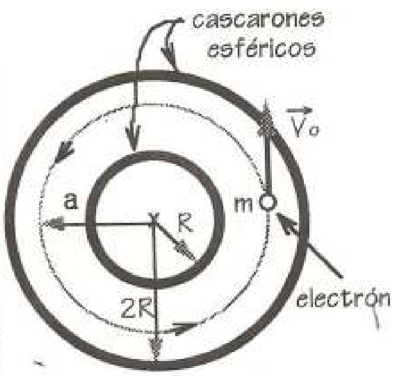
Ayuda: Sustituya la cavidad por esferas de igual densidad de carga positiva y negativa. Aplique Gauss y superposición.

PP-3.09. *Electrón circulando*

Dos cascarones esféricos concéntricos, no conductores y de radios R y 2R respectivamente, tienen cargas distribuidas uniformemente.

a) Si un electrón (masa m y carga -e) gira con una rapidez V_o (m/s) en una órbita circular de radio a comprendido entre R y 2R, ¿ Cuál es la densidad de carga σ_i (C/m^2) del cascarón interno ?

b) Si el campo eléctrico es nulo en un punto ubicado a distancia radial 3R , ¿ cuál es la densidad de carga σ_e (C/m^2) del cascarón externo ?



Respuesta:

a) $\sigma_i = \dfrac{mv_0^2\varepsilon_o a}{eR^2}$ (c/m²)

b) $\sigma_e = -\dfrac{1}{4}\sigma_i$ (c/m²)

Ayuda: Usando Gauss, se relac el campo con la densidad de carg la esfera interna. Aplicando la 2a. le Newton se relaciona la fu centrípeta debida al campo co velocidad del electrón.

PP-3.10. Distribución esférica no-uniforme.

Una distribución esférica de carga no-uniforme tiene una densidad :

$$\rho = \rho_o(1 - \frac{r}{a}) \quad \text{para } r \leq a$$
$$\rho = 0 \quad \text{para } r \geq a$$

Donde $\rho_O = 3Q/\pi a^3$ es una constante.

a) ¿ Cuál es la carga total ?

b) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la distribución, ($r < a$)?

c) ¿Cuál es el campo eléctrico afuera de la distribución ,($r > a$)?

d) ¿ Coinciden las expresiones obtenidas en (b) y en (c) para los puntos en la frontera ($r = a$)?.

Respuesta:

a) Carga total =Q, b) $\vec{E}(r < a) = (kQr/a^3)(4 - 3r/a)\,\hat{r}$

c) $\vec{E}(r > a) = (kQ/r^2)\,\hat{r}$, d) Si: $\vec{E}(r = a) = (kQ/a^2)\,\hat{r}$

Ayuda: Escoja una concha esfe de espesor dr como elemento de ca $dQ=\rho 4\pi r^2 dr$. Para hallar la carga integre la expresión. Para hallar campos adentro y afuera, selecci esferas gaussianas y aplique Gauss.

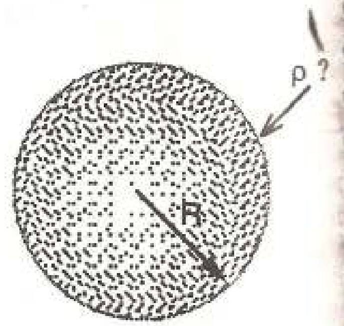
PP-3.11. ¿Cómo está distribuida la carga?

Una carga está distribuida en una esfera de radio R =1m con una densidad que depende únicamente de la distancia radial r. Se sabe que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E} = \frac{r^2}{4\varepsilon_o}\hat{r} \quad \text{(en N/C)}$$

a) ¿ Cuál es la densidad de carga $\rho(r)$ en C/m³?

b) ¿ Cuál es la carga total en C ?



Respuesta:

a) $\rho(r) = r$ (C/m³), b) $Q = \pi R^4$ (C) = 3,14 C

Ayuda: Escoja una esfera gauss de radio r, la carga encerrada es integral de $\rho 4\pi r^2 dr$. Como E conocido, aplicando la ley de Gaus simetría se deduce el valor de la integ y de allí, ρ(r).

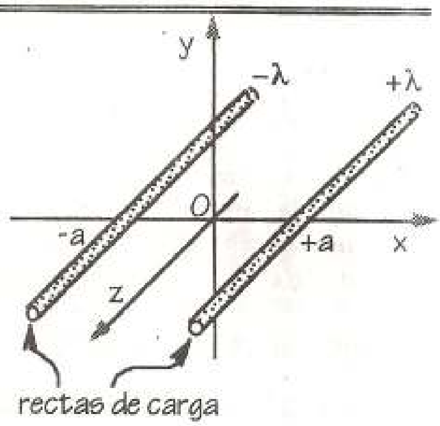
PP-3.12. Atracción entre varillas paralelas.

Dos varillas largas y paralelas tienen densidades uniformes de carga, iguales y opuestas, $+\lambda$ y $-\lambda$ respectivamente. Las varillas están separadas por una distancia $2a$.

Determine el campo eléctrico en las siguientes regiones:

a) En un punto entre las varillas.
b) Sobre el eje y, perpendicular al plano.

c) Halle la fuerza de atracción por unidad de longitud de las varillas.



Respuesta:

$$\text{a) } \vec{E} = \frac{\lambda a}{\pi\varepsilon_0(a^2-x^2)}(-\hat{x}), \quad \text{b) } \vec{E} = \frac{\lambda a}{\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)}(-\hat{x}),$$

$$\text{c) } F/L = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Ayuda: El campo debido a una línea infinita se obtiene aplicando Gauss a un cilindro gaussiano coaxial con dicha línea. El campo resultante en un punto cualquiera es la superposición vectorial de los campos de las dos líneas de carga.

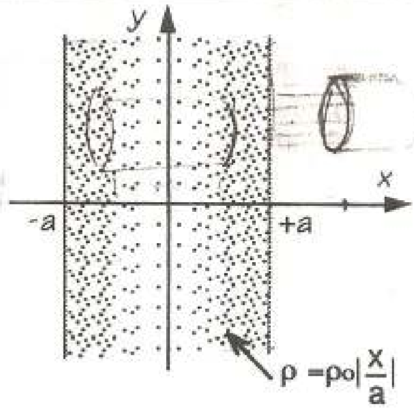
PP-3.13. Campo de una placa infinita no uniforme

En la región del espacio comprendida entre dos planos infinitos $x = -a$ y $x = +a$ existe una carga eléctrica positiva distribuida no uniforme, con densidad volumétrica:

$$\rho = \rho_0 \left| \frac{x}{a} \right| \qquad (\mathrm{C/m^3})$$

Siendo ρ_0 una constante.

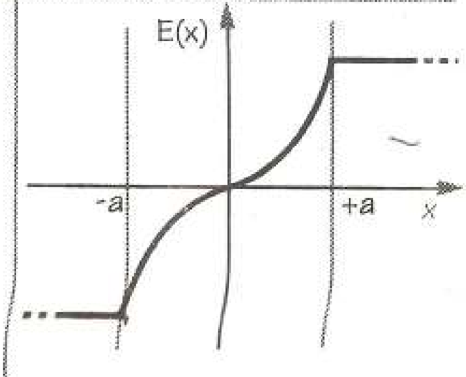
a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio.
b) Haga una gráfica de E vs. x para todo x.



Respuesta:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 a}(\pm\hat{x}) \qquad |x| \le a$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}(\pm\hat{x}) \qquad |x| \ge a$$

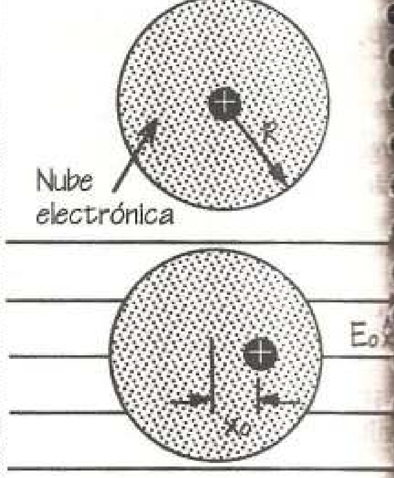


PP-3.14. Dipolo Inducido en el átomo de Thomson

En un modelo *clásico* del átomo de hidrógeno propuesto por Thomson, la carga electrónica (-e) está distribuida con densidad uniforme sobre una esfera de radio R, mientras que el núcleo (protón con carga +e) está en el centro de la nube electrónica.

Suponga ahora que se le aplica un campo eléctrico externo $E_0\hat{x}$.

¿ Cuál será el momento de dipolo eléctrico inducido en el átomo?



Respuesta:

$$\vec{p} = ex_0\hat{x} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0\hat{x}$$

Ayuda: El campo externo desplaza núcleo del centro de la nube electrónic El campo total en el núcleo es la sum del campo externo más el producido p la nube electrónica. Este último obtiene aplicando Gauss. En equilibr la fuerza neta sobre el núcleo es cero.

4

EL POTENCIAL ELECTRICO

En electrostática, al igual que en mecánica, el concepto de energía potencial proporciona una herramienta valiosa para resolver diversos problemas con mayor facilidad que si se utilizan directamente las fuerzas involucradas. La existencia de una función energía potencial es consecuencia del hecho de que la fuerza eléctrica es conservativa. Esta es una característica de todas las fuerzas centrales, es decir, aquellas fuerzas que actúan radialmente hacia o alejándose de la fuente del campo de fuerzas. En este capítulo veremos cómo pasar del lenguaje vectorial de campo eléctrico a un lenguaje escalar, definiendo el potencial eléctrico, una función de la posición que permite una manera mas sencilla de analizar los problemas en electrostática. Además, el concepto de potencial tiene importancia de carácter práctico ya que rara vez se mide directamente un campo eléctrico; usualmente lo que se mide es voltaje o diferencia de potencial; a partir del cual se puede determinar el campo eléctrico.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos vinculados con:

- Energía potencial eléctrica.
- Diferencia de potencial eléctrica.
- Potencial en un campo eléctrico uniforme.
- Potencial debido a cargas puntuales.
- Potencial debido a distribuciones de cargas.
- Cálculo del campo a partir del potencial eléctrico.
- Potencial eléctrico en conductores.

ENERGIA POTENCIAL ELECTRICA

Para mover una carga de prueba q_0 (con velocidad constante) en un campo eléctrico, debemos aplicar una fuerza igual y opuesta a la fuerza eléctrica ($\vec{F}_{ap} = -q_0\vec{E}$).

Para un pequeño desplazamiento $d\vec{s}$, el trabajo realizado *sobre* la carga es:

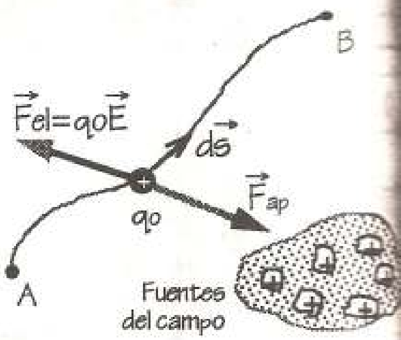
$$dW_{ext} = \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{s} = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Este se traduce en un incremento en su energía potencial:

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Para un desplazamiento total entre los puntos A y B, la **energía potencial total** almacenada es:

$$\Delta U = W_{A\to B} = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Energía Potencial

$$\Delta U_{A\to B} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL

La diferencia de potencial entre dos puntos A y B se define como el trabajo por unidad de carga que un agente externo debe realizar para mover una carga de prueba (sin aceleración) desde A hasta B.

$$V_B - V_A = W_{A\to B}/q_0$$

Diferencia de potencial entre A y B

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

POTENCIAL ELECTRICO

Aunque sólo tiene significado la diferencia de potencial, podemos elegir arbitrariamente un punto de referencia y hablar simplemente de potenciales eléctricos.

Frecuentemente se elige el potencial cero en un punto infinitamente lejos de las cargas que generan el campo ($V_\infty = 0$). Con esta elección podemos definir el potencial eléctrico en un punto P como el trabajo requerido por unidad de carga para llevar una carga de prueba desde el infinito hasta ese punto.

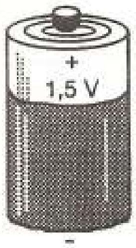
Potencial en P

$$V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

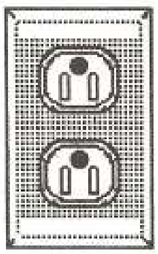
UNIDAD SI DE POTENCIAL ELECTRICO

La unidad SI de potencial y diferencia de potencial es el Joule/Coulomb y se denomina Voltio (V). Por esta razón, se acostumbra llamar *voltaje* a la diferencia de potencial .

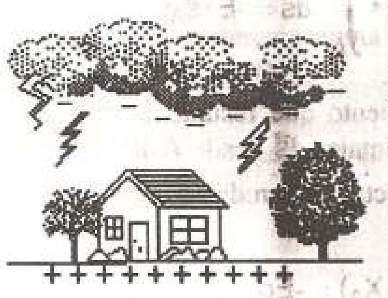
Voltajes típicos



Pila
1,5 voltios



Toma-corrientes
120 voltios



Nube cargada y tierra
10^8 voltios

Unidad de potencial eléctrico

un voltio (V) = 1 J/C

Unidad de campo eléctrico

1N/C = 1V/m

MOVIMIENTO DE CARGAS

Si una partícula con carga Q se mueve a través de una diferencia de potencial V_{AB}, su energía potencial cambia en una cantidad:

$$\Delta U = U_B - U_A = QV_{AB}$$

Aplicando la conservación de la energía ($\Delta K + \Delta U = 0$) podemos expresar la variación de energía cinética ΔK en términos de la diferencia de potencial:

$$\Delta K = -\Delta U = -QV_{AB}$$

El signo de ΔK dependerá de los signos de Q y de V_{AB}.

Por ejemplo, si Q es positiva y se mueve en un potencial decreciente ($V_{AB} < 0$), la partícula ganará energía cinética.

Variación de energía potencial

$$\boxed{\Delta U = Q V_{AB}}$$

Diferencia de potencial

EL ELECTRON-VOLTIO: UNIDAD DE ENERGIA

Cuando se trabaja a nivel de física atómica o molecular, la unidad SI de energía (el Joule) es demasiado grande y en su lugar se utiliza una unidad denominada el electrón-voltio (eV).

Un electrón-voltio se define como la energía que adquiere (o pierde) un electrón al moverse a través de una diferencia de potencial de un voltio.

Un electrón-voltio (1eV) =

$(1{,}6\times10^{-19}C)(1V) = 1{,}6\times10^{-19}J$

POTENCIAL EN UN CAMPO UNIFORME

En un campo eléctrico uniforme ($\vec{E}$ es constante) la diferencia de potencial entre dos puntos A y B es:

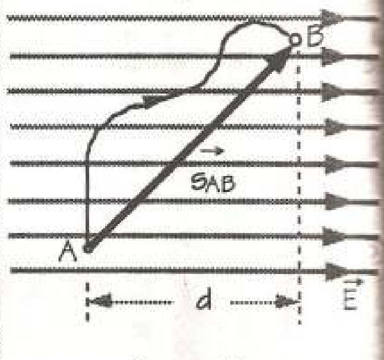
$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\vec{E} \bullet \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \bullet \vec{s}_{AB}$$

Donde $\vec{s}_{AB}$ es el vector desplazamiento que resulta de sumar todos los desplazamientos infinitesimales $d\vec{s}$ desde A hasta B. Si $\vec{E}$ queda en la dirección $\hat{x}$, al efectuar el producto escalar, la expresión anterior queda:

$$V_B - V_A = -E(X_B - X_A) = -Ed$$

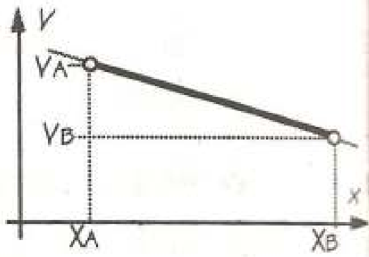
Donde d es la magnitud de la componente del desplazamiento paralela a las líneas de campo.

El potencial decrece linealmente a lo largo de la dirección del campo eléctrico.



Campo uniforme

$\boxed{V_B - V_A = -Ed}$



POTENCIAL DE UNA CARGA PUNTUAL

Una carga puntual produce un campo eléctrico que es radial:

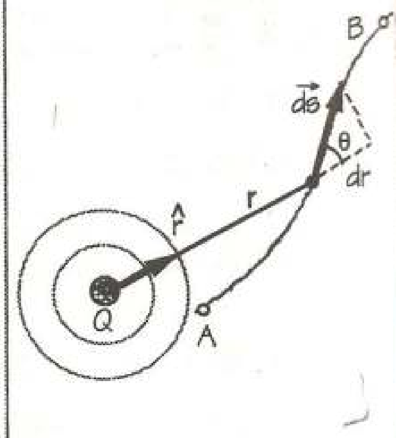
$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos A y B sustituimos esta expresión de $\vec{E}$ en la integral de línea:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{s} = -kQ\int_A^B \frac{\hat{r} \bullet d\vec{s}}{r^2}$$

El producto escalar $\hat{r} \bullet d\vec{s}$ es justamente la proyección del vector desplazamiento $d\vec{s}$ en la dirección del vector unitario radial $\hat{r}$. Por lo tanto:

$$V_B - V_A = -kQ\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = kQ\frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = kQ\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$



$$\hat{r} \bullet d\vec{s} = (1)(ds)\cos\theta = dr$$

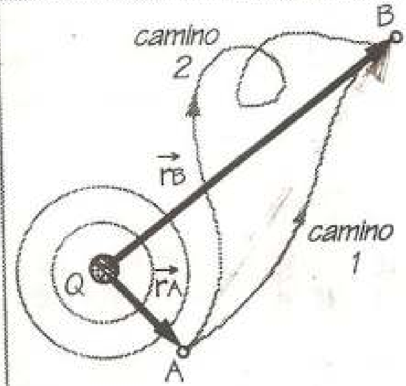
Vemos que la diferencia de potencial entre dos puntos A y B depende únicamente de las coordenadas radiales r_A y r_B.

El hecho de que en este caso la integral de $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ sea independiente de la trayectoria entre A y B es una propiedad general del *campo electrostático , que es conservativo.*

Si consideramos que el potencial es nulo a una distancia infinita de la cara puntual ($r_B=\infty$), el potencial en r_A es $V_A=kQ/r_A$.

En general, asignando $V(\infty) = 0$, para cualquier distancia r de la carga puntal Q el potencial eléctrico está dado por:

$$V(r) = k\frac{Q}{r}$$



Potencial de carga puntual

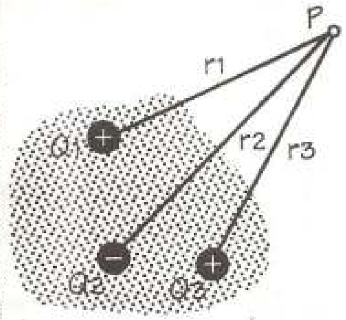
$$\boxed{V(r) = k\frac{Q}{r}}$$

POTENCIAL DE UN SISTEMA DE CARGAS

El potencial eléctrico debido a un grupo de N cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga individual (principio de superposición):

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = k\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i}$$

En esta suma deben considerarse los signos. El potencial para cada carga positiva ($V=kQ/r$) es positivo, mientras que el potencial para cada carga negativa es negativo.

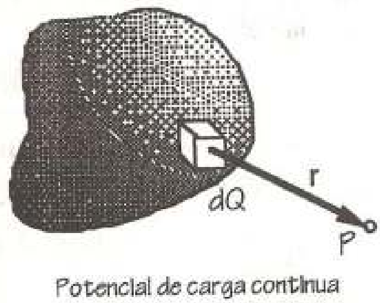


POTENCIAL DE DISTRIBUCION CONTINUA

Se divide la distribución en elementos de carga suficientemente pequeños para que se les considere como cargas puntuales. El potencial en el punto P debido a un elemento infinitesimal dQ, a distancia r, será $dV= k\, dQ/r$. Luego se procede a integrar dV para incluir los aportes de todos los elementos de la distribución.

$$V = k\int \frac{dQ}{r}$$

Es importante advertir que en esta expresión el potencial se ha tomado respecto al valor cero en el infinito y es aplicable únicamente *a distribuciones de cargas finitas*.



Potencial de carga continua

$$\boxed{V = k\int \frac{dQ}{r}}$$

Para realizar la integración es conveniente expresar dQ en términos de la correspondiente densidad de carga, λ (C/m), σ (C/m^2) o ρ (C/m^3), según sea el caso.

$dQ = \lambda\, dl$ (carga lineal)

$dQ = \sigma\, dA$ (carga superficial)

$dQ = \rho\, dV$ (carga volumétrica)

DOS METODOS PARA CALCULAR EL POTENCIAL ELECTRICO

A. Si se conoce el campo eléctricos se puede emplear directamente la expresión de la integral de línea para calcular la "diferencia de potencial" entre dos puntos. Uno de los puntos puede ser asignado como referencia para el potencial.

$$\boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

B. Si no se conoce $\vec{E}$ y si la distribución de carga no se extiende al infinito, se usa la expresión escalar para calcular el potencial, donde está implícito que el potencial es cero en el infinito.

$$\boxed{V = k\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i}}$$

$$\boxed{V = k\int \frac{dQ}{r}}$$

ENERGIA ELECTROSTATICA DE VARIAS CARGAS PUNTUALES

Una carga puntual Q aislada produce un potencial a distancia r:

$$V = k\,\frac{Q}{r}$$

Para traer una segunda carga puntual q desde el infinito hasta la vecindad de Q a distancia r, es necesario que un agente externo realice un trabajo:

$$U = qV(r) = k\,\frac{qQ}{r}$$

Esta ecuación expresa la energía potencial de una de las cargas en el campo eléctrico de la otra.

Si Q y q tienen igual signo la energía potencial es *positiva*. Significa que el agente externo realizó trabajo para reducir su separación desde el infinito en contra de la fuerza eléctrica repulsiva.

Si Q y q tienen signos opuestos la energía es *negativa*. Significa que se realiza trabajo sobre el agente externo ya que la fuerza eléctrica es atractiva.

Energía de dos cargas q y Q separadas por distancia r.

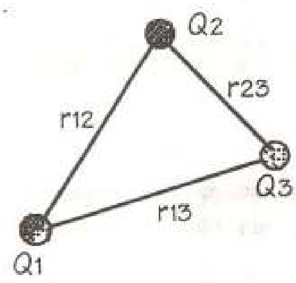
$$\boxed{U = k\,\frac{qQ}{r}}$$

En el caso de un sistema constituido por varias cargas la energía potencial electrostática total es la suma algebraica de términos, sin importar el orden en que se ensambla el sistema.

En este caso conviene etiquetar los términos por pares de cargas "i" y "j":

$$U_{ij} = k\,\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}}$$

Cuando sumamos todos los pares de cargas, hay que tener en cuenta que $U_{ij} = U_{ji}$. Por lo tanto, debemos poner en la suma la desigualdad $i < j$ para evitar el conteo de pares más de una vez.



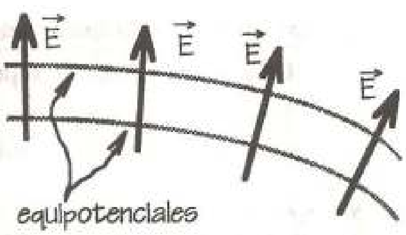
Energía de un sistema de cargas

$$\boxed{U = k\sum_{i<j} \frac{Q_iQ_j}{r_{ij}}}$$

REGIONES EQUIPOTENCIALES

El potencial electrostático es solamente una función de las coordenadas de posición $V(\vec{r})$, y las regiones, en las que el potencial eléctrico tiene valores constantes, se llaman equipotenciales. En tres dimensiones estos lugares son las *superficies equipotenciales*. En dos dimensiones son las *líneas equipotenciales*.

Como no se realiza trabajo para mover una partícula sobre una equipotencial, las líneas de campo eléctrico son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales y apuntan de mayor a menor potencial.



$\vec{E}$ perpendicular a las equipotenciales

CALCULO DE $\vec{E}$ A PARTIR DE V

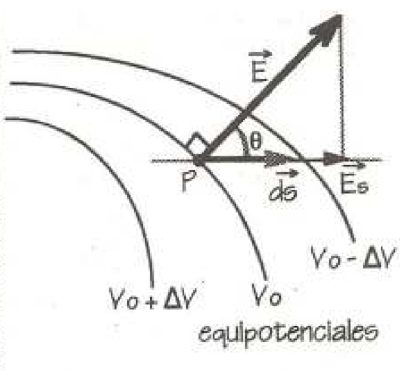
Sabemos cómo determinar V a partir de $\vec{E}$. Recíprocamente es posible también, determinar el vector $\vec{E}$ si se conoce la función potencial escalar V(r). En efecto, la diferencia de potencial entre dos puntos separados por un desplazamiento infinitesimal $d\vec{s}$ es:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E\cos\theta\ ds$$

donde θ es el ángulo entre el desplazamiento $d\vec{s}$. Despejando:

$$E\cos\theta = E_s = -\frac{dV}{ds}$$

El negativo de la derivada del potencial es la componente del campo en esa dirección.



$$\boxed{E_x = -\frac{dV}{dx}}$$

La dirección para la cual la derivada presenta su máximo valor en el punto P, es claramente la dirección de $\vec{E}$, o sea la dirección de la normal a la superficie equipotencial:

$$|\vec{E}| = (dV/ds)_{máx}$$

El campo eléctrico apunta en la dirección más corta de una equipotencial hacia la siguiente.

$\vec{E}$ en términos de las derivadas de V

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}}$$

E_x E_y E_z

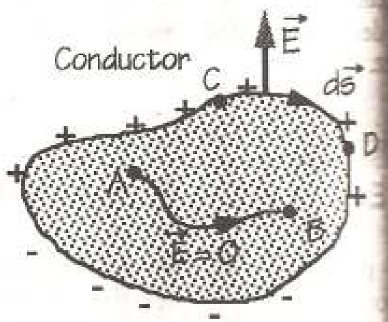
CONDUCTORES Y POTENCIAL ELECTRICO

En una situación estática el campo eléctrico en un conductor es cero. Por ser $\vec{E}$=0, entonces $\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ y la diferencia de potencial entre dos puntos A y B en el interior del conductor es cero.

De la misma manera, si consideramos una trayectoria C→D a lo largo de la superficie, $\vec{E}$ siempre será perpendicular a la superficie y el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. La integral también es cero y por lo tanto, V es constante en toda la superficie.

El potencial eléctrico de todos los puntos dentro de un conductor homogéneo, incluyendo los puntos de su superficie es constante.

El conductor puede estar cargado o estar en un campo externo.



$V_A = V_B = V_C = V_D$

El potencial es constante en todo los puntos de un conductor

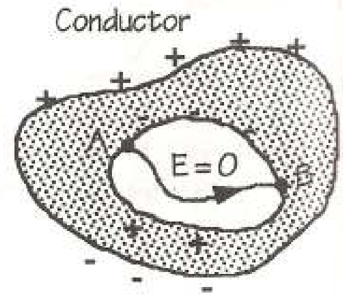
BLINDAJE ELECTROSTATICO

El hecho de que un conductor es equipotencial nos permite demostrar que si el conductor tiene una cavidad vacía, el campo allí también debe ser cero.

En efecto, si el campo no fuera cero, sería posible hallar una ruta entre A y B en la cavidad que vaya a lo largo de $\vec{E}$, para la cual $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ será siempre un número positivo y así la integral también debería ser positiva. Pero como sabemos que $V_B = V_A$, la integral debe ser cero. Se concluye entonces que $\vec{E}$=0 dentro de la cavidad, en tanto no existan cargas dentro de ella.

El resultado tiene aplicaciones prácticas interesantes:

Es posible proteger un sistema de campos eléctricos externos rodeándolos con paredes conductoras.



En una cavidad vacía el campo es cero

O.X.

VERIFICA TU COMPRENSION

PE-4.01. ***Es correcto afirmar que......***

a) Si V = 0 en un punto, es por que no hay cargas en la vecindad de ese punto.

b) Si V = 0 en un punto, debe ser $\vec{E} = 0$ en ese punto.

c) Si $\vec{E} = 0$ en un punto, debe ser V = 0 en ese punto.

d) Si $\vec{E}$ es uniforme en una región, V debe ser constante en dicha región.

e) Si V es constante en una región volumétrica, debe ser $\vec{E} = 0$ en dicha región.

PE-4.02. ***Selecciona la afirmación que no es correcta***

a) Al potencial en un punto siempre se le puede asignar el valor que uno quiera.

b) Los electrones tienden a ir a regiones de potencial elevado.

c) Los campos eléctricos siempre apuntan hacia las regiones de potencial mas bajo.

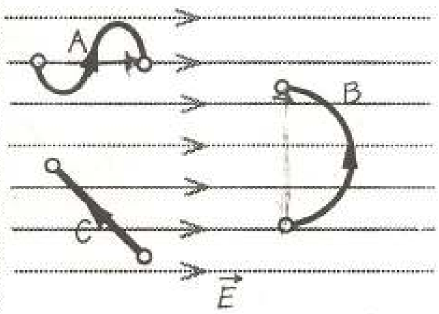
d) Los campos eléctricos siempre varían de una superficie equipotencial a otra.

e) Un conductor cargado negativamente puede tener un potencial positivo.

PE-4.03. ***¿ En cuál camino se realiza más trabajo ?***

Si comparamos el trabajo W hecho por un agente externo para trasladar una carga positiva por las rutas indicadas en un campo uniforme, ¿ cuál de los siguientes alternativas es la correcta ?:

a) $W_A > W_B > W_C$
b) $W_A = W_B = W_C$
c) $W_C > W_B > W_A$
d) $W_B > W_C > W_A$
e) $W_C > W_A > W_B$



PE-4.04. *Desdoblando un anillo de carga*

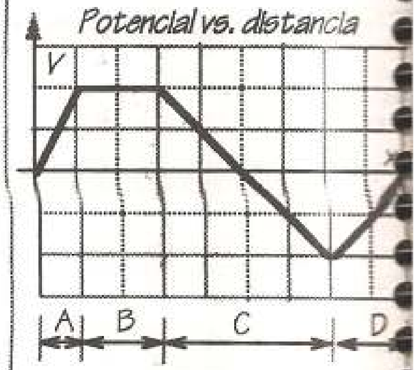
Un anillo de carga positiva uniforme de radio R es cortado en un punto y desdoblado de forma tal que las cargas queden en una línea recta y a una distancia perpendicular R del punto P.

Si comparamos con la situación inicial, ¿ cómo serán en esta nueva situación el potencial eléctrico y la magnitud del campo eléctrico ?

a) V es menor y E es mayor.
b) Ambos, V y E son menores.
c) Ambos, V y E son mayores.
d) V es mayor y E es menor.
e) Tanto V como E no varían.

PE-4.05. *¿ En cuál región es mas intenso el campo ?*

En el dibujo de la derecha se muestra la dependencia del voltaje V(Voltios) en función de la distancia x (metros) en una cierta región del espacio.

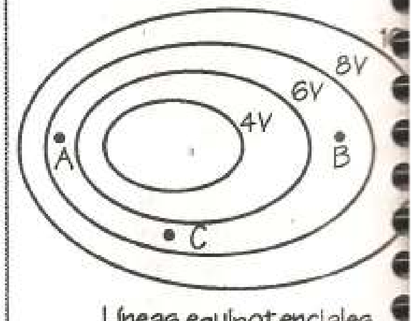


Al comparar la magnitud del campo eléctrico en las cuatro regiones A, B, C y D, encontramos que:

e) $E_A = E_B > E_C = E_D$
b) $E_A > E_C = E_D > E_B$
c) $E_C > E_A = E_D = E_B$
d) $E_C > E_D = E_B > E_A$
e) $E_B > E_A = E_C > E_D$

PE-4.06. *Líneas equipotenciales*

La figura muestra un grupo de líneas equipotenciales en una cierta región. Si comparamos el campo eléctrico en los puntos indicados, podemos afirmar que:



Líneas equipotenciales

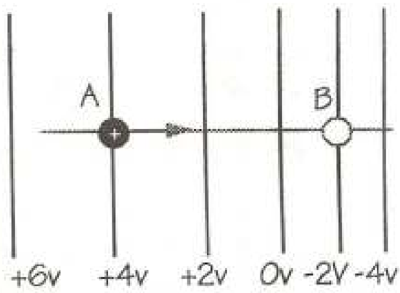
a) es mayor en el punto A y aquí apunta hacia la izquierda.
b) es mayor en el punto A y aquí apunta hacia la derecha.
c) es mayor en el punto B y aquí apunta hacia la izquierda.
d) es mayor en el punto B y aquí apunta hacia la derecha.
e) es mayor en el punto C aquí y apunta hacia abajo.

PE-4.07. *Lanzando protones*

En el diagrama se representan varias superficies equipotenciales en una cierta región. Se lanza un protón en la dirección indicada de modo que cuando pasa por el punto A lleva una energía cinética de 10 eV.

Cuando el protón alcanza el punto B tendrá una energía cinética de:

a) 0 eV, **b)** 2 eV, **c)** 4 eV, **d)** 12 eV, **e)** 16 eV

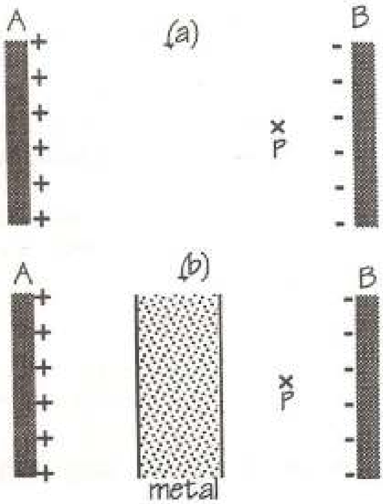


PE-4.08. *¿Cuál es el efecto de la lámina conductora ?*

Dos placas grandes y paralelas tienen densidades de carga iguales y opuestas (*Fig. a*). A continuación se introduce en el espacio entre ellas una lámina metálica gruesa y sin carga neta (*Fig. b*).

Si consideramos la nueva diferencia de potencial V_{AB} entre las placas originales y la nueva magnitud del campo eléctrico E_P en el punto P, podemos decir que:

a) Tanto V_{AB} como E_P disminuyeron.
b) Tanto V_{AB} como E_P se mantuvieron constantes.
c) V_{AB} disminuyó y E_P se mantuvo constante.
d) V_{AB} aumentó y E_P disminuyó.
e) V_{AB} se mantuvo constante y E_P disminuyó.

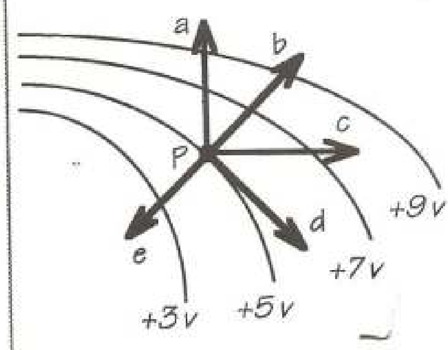


PE-4.09. *¿Cuál es la dirección del campo eléctrico ?*

En la figura se muestra un grupo de líneas equipotenciales en una cierta región.

¿ Cuál de las direcciones indicadas representa la dirección del campo eléctrico en el punto P ?

a) a **b)** b **c)** c **d)** d **e)** e

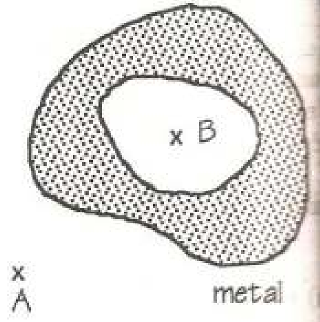


PE-4.10. *La Jaula de Faraday*

Considere una carga Q_B encerrada por la cavidad de un metal y una carga Q_A exterior al metal. El metal no tiene carga neta.

Podemos afirmar que:

a) El campo de Q_A en B es cero y el de Q_B en A es cero.
b) El campo de Q_A en B es cero pero el de Q_B en A no es cero.
c) El campo de Q_B en A es cero pero el de Q_A en B no es cero.
d) El campo en B resulta cero porque al campo de Q_A se le suma el campo opuesto debido las cargas que se re distribuyen en el metal.
e) El campo en B es cero únicamente si la cavidad es esférica.

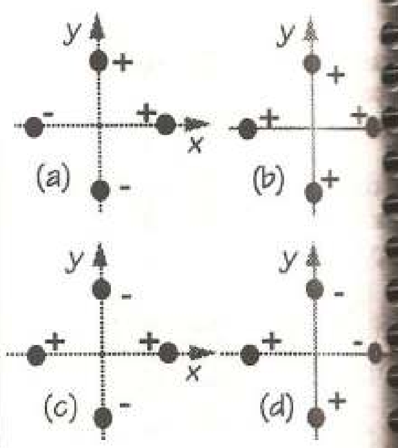


PE-4.11. *¿ En cuál configuración es V=0 y E=0 ?*

Cuatro cargas puntuales tienen igual magnitud y signos indicados. Las cargas se colocan a igual distancia del origen, en las cuatro diferentes configuraciones mostradas.

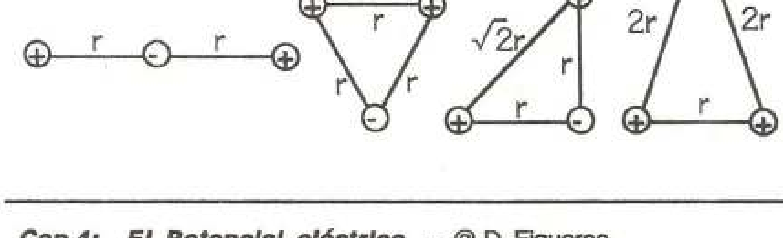
¿ En cuál de estas configuraciones, tanto el campo eléctrico como el potencial eléctrico son nulos en el origen de coordenadas ?

a) en (a)
b) en (b)
c) en (c)
d) en (d)
e) en ninguna de estas.



PE-4.12. *¿ No hay que realizar trabajo ?*

Tres cargas puntuales de igual magnitud, dos positivas y una negativa, se colocan en las cuatro diferentes configuraciones mostradas.



¿ En cuál caso, el trabajo realiza por el agente externo pa ensamblar la configuración cero ?

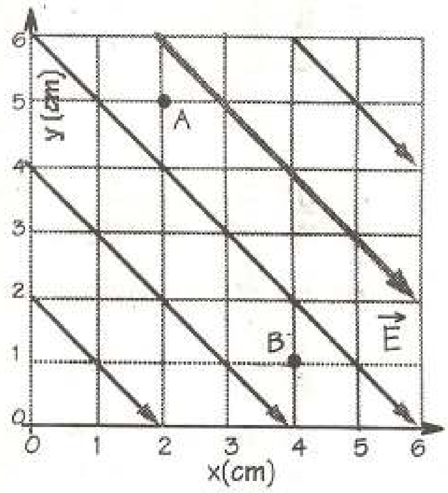
a) Para la (a)
b) Para la (b)
c) Para la (c)
d) Para la (d)
e) Para ninguna.

PE-4.13. ***¿Cuál es la diferencia de potencial ?***

Un campo eléctrico uniforme de magnitud 10 V/cm está orientado como muestra la figura.

¿ Cuál será la diferencia de potencial entre los puntos A y B, (V_B - V_A) ?

a) + 44,7 V
b) - 42,4 V
c) + 40 V
d) - 20 V
e) + 2,36 V



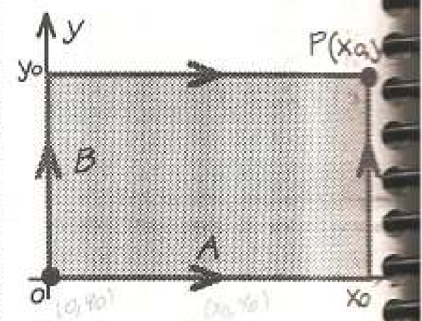
Cap. 4: Respuestas

Pregunta	a	b	c	d	e
PE-4.01					✓
PE-4.02				✓	
PE-4.03			✓		
PE-4.04	✓				
PE-4.05		✓			
PE-4.06		✓			
PE-4.07					✓
PE-4.08			✓		
PE-4.09					✓
PE-4.10				✓	
PE-4.11			✓		
PE-4.12				✓	
PE-4.13		✓			

PR-4.01. Verificando que la diferencia de potencial no depende del camino

En una región del espacio existe un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E} = 2xy\hat{x} + (x^2-y^2)\hat{y}$$



a) *Determine la diferencia de potencial entre el punto $P(x_o,y_o)$ y el origen , y compruebe que el resultado es el mismo para las siguientes trayectorias:*

camino A: $(0,0) \rightarrow (x_o,0) \rightarrow (x_o,y_o)$

camino B: $(0,0) \rightarrow (0,y_o) \rightarrow (x_o,y_o)$

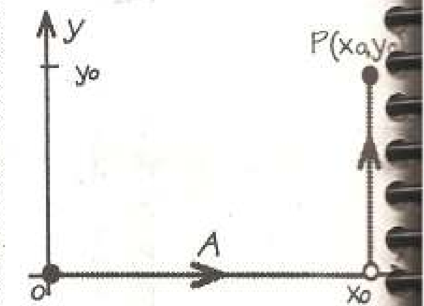
b) *Fijando el potencial en el origen, $V(0,0) = V_o$. Haga la operación inversa, es decir, determine el campo eléctrico.*

Solución: a) Para el camino A tenemos (Fig. a):

$$V(x_o,y_o) - V(0,0) = -\int_{0,0}^{xo,\,yo} \vec{E}\bullet\vec{dl}$$

$$= -\int_0^{xo} E_x(x,0)dx - \int_0^{yo} E_y(x_o,y)dy$$

$$= 0 - \int_0^{yo} (x_o^2-y^2)dy = -x_o^2y_o + \frac{y_o^3}{3}$$

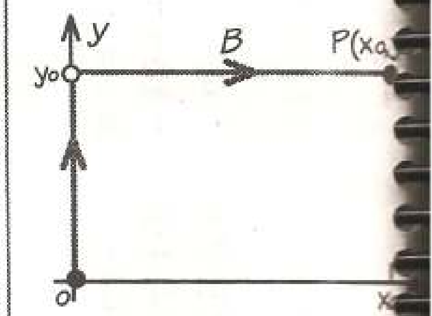


(Fig. a)

Mientras que para el camino B tenemos (Fig. b):

$$V(x_o,y_o) - V(0,0) = -\int_{0,0}^{xo,\,yo} \vec{E}\bullet\vec{dl}$$

$$= -\int_0^{yo} E_y(0,y)dy - \int_0^{xo} E_x(x,y_o)dx$$



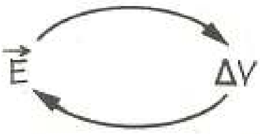
(Fig. b)

$$V(x_o,y_o) - V(0,0) = -\int_0^{y_o} (0 - y^2)dy - \int_0^{x_o} 2xy_o dx$$

$$= \frac{y_o^3}{3} - x_o^2 y_o$$

Se verifica así que la diferencia de potencial entre los dos puntos es independiente de la trayectoria.

b) Si fijamos el potencial en el origen en un cierto valor constante, V_o, el potencial en el punto (x,y) será:



$$V(x,y) = V_o + \frac{1}{3}y^3 - x^2y$$

Tomando las derivadas parciales de esta función, se obtienen las componentes del campo eléctrico:

$$E_x = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=\text{constante}} = +2xy$$

$$E_y = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\Big|_{x=\text{constante}} = x^2 - y^2$$

Resultado que coincide con la función original.

Respuesta:

$$\boxed{V(x_o,y_o) - V(0,0) = \frac{y_o^3}{3} - x_o^2 y_o}$$

igual para ambos caminos

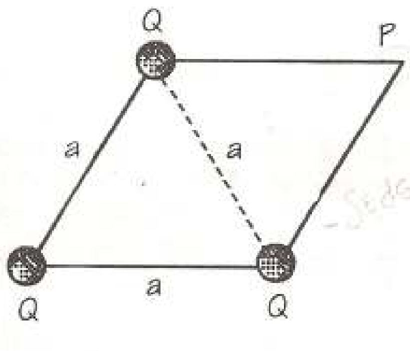
PR-4.02. *Cargas en las esquinas de un rombo*

Tres partículas de carga Q están en esquinas de un rombo que tiene sus lados y una diagonal de igual longitud a.

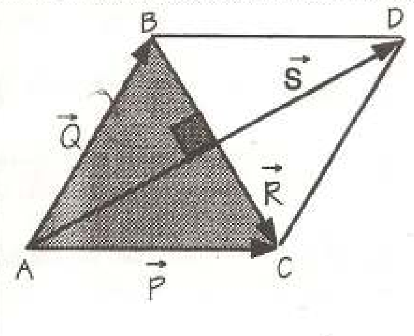
a) *Determine el potencial electrostático en la esquina vacante del rombo (punto P).*

b) *¿ Cuál sería trabajo realizado por un agente externo para traer una cuarta partícula de igual carga Q, inicialmente en reposo en el infinito y colocarla en reposo en el sitio vacante P.*

c) *¿Cuál es la energía potencial electrostática de la configuración final de las cuatro cargas ?*



Solución: a) Para calcular el potencial en la esquina vacante del rombo, debemos conocer todas las distancias a las cargas. Para hallar la longitud de la diagonal mayor, consideremos el diagrama vectorial en el cual los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ representan dos lados adyacentes y los vectores $\vec{R}$ y $\vec{S}$ representan las diagonales del rombo. Siendo.



$$|\vec{P}| = |\vec{Q}| = |\vec{R}| = a$$

Los vectores de las diagonales $\vec{R}$ y $\vec{S}$ vienen dados por las relaciones:

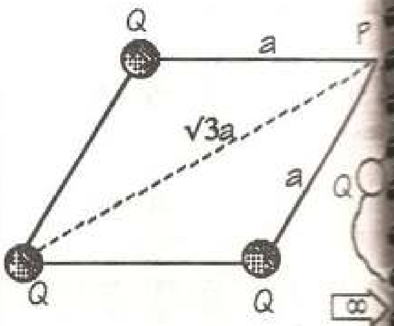
$$\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$$
$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{Q}$$

Tomando el producto escalar de $\vec{R}$ y $\vec{S}$

$$\vec{R}\cdot\vec{S} = (\vec{P} - \vec{Q})\cdot(\vec{P} + \vec{Q})$$
$$= |\vec{P}|^2 - |\vec{Q}|^2 = 0$$

Como $\vec{R}\cdot\vec{S}=0$ concluimos que los vectores son ortogonales. Tomando en cuenta que las diagonales se intersectan en sus puntos medios, para hallar la magnitud de $\vec{S}$ aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\frac{1}{2}|\vec{S}| = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$$



Luego $|\vec{S}| = \sqrt{3}a$ y el potencial electrostático en la esquina vacante P, debido a las tres cargas y tomando como referencia $V(\infty) = 0$, es:

$$V_P = \sum_{i=1}^{3} k\frac{Q_i}{r_i} = 2k\frac{Q}{a} + k\frac{Q}{\sqrt{3}a} = (2 + \frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kQ}{a}$$

b) El trabajo requerido para traer la cuarta carga, Q, desde el infinito a este sitio vacante es:

$$W_{por\ agente} = Q\,(V_P - V_\infty) = QV_P = (2 + \frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kQ^2}{a}$$

c) La energía potencial electrostática total de las cuatro cargas es la energía electrostática de la configuración inicial de las tres cargas en el triángulo equilátero ($3kQ^2/a$), más el trabajo que debe realizar un agente externo para traer la cuarta carga:

$$U = 3\frac{kQ^2}{a} + (2 + \frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kQ^2}{a} = (5 + \frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kQ^2}{a}$$

Respuest

a) $V_P = (2 + \frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kQ}{a}$

b) $W = (2 + \frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kQ^2}{a}$

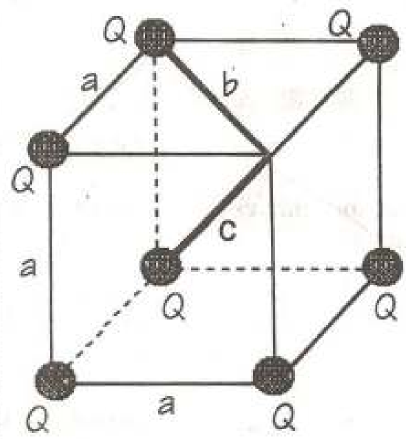
c) $U = (5 + \frac{1}{\sqrt{3}})\frac{kQ^2}{a}$

PR-4.03. *Potencial eléctrico en la esquina de un cubo*

Considere siete partículas con cargas $Q = +1\ \mu C$ que están fijas en esquinas de un cubo de lado $a = 1$ cm.

¿ Cuál es el potencial eléctrico en la esquina vacante, suponiendo $V = 0$ en el infinito ?

Solución: En la figura se ilustra un cubo de lado a, con siete de sus esquinas ocupadas por cargas Q.



Podemos determinar en términos de a, las longitud b de las diagonales de las caras y la longitud c de las diagonales del cubo.
Usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$b = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}\,a$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+2a^2} = \sqrt{3}\,a$$

De acuerdo a la figura, desde el sitio vacante existen:

tres cargas a distancia a
tres cargas a distancia b
una carga a distancia c

Por lo tanto, el potencial en el sitio vacante es:

$$V = 3\left(\frac{kQ}{a}\right) + 3\left(\frac{kQ}{\sqrt{2}a}\right) + \left(\frac{kQ}{\sqrt{3}a}\right)$$

$$V = \left(\frac{kQ}{a}\right)\left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Reemplazando los valores numéricos, tenemos:

$$V = \frac{(9\times10^9 N.m^2/C^2)(1\times10^{-6}C)}{1\times10^{-2}m}\left[3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

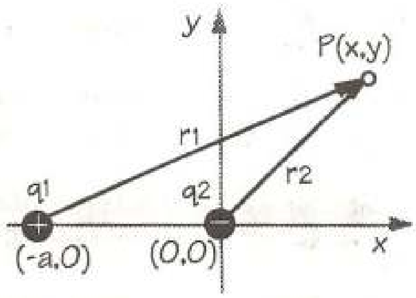
$$V = (9\times10^5)(5{,}7)V = 5{,}1\times10^6 V$$

Respuesta:

$$\boxed{V = 5{,}1\times10^6 V}$$

PR-4.04. *¿ Cuál es la ecuación de la equipotencial ?*

Sean dos partículas cargadas en el plano x-y. Una con carga $q_1 = +2Q$ situada en (-a, 0) y la otra con carga $q_2 = -Q$ situada en el origen (0, 0).

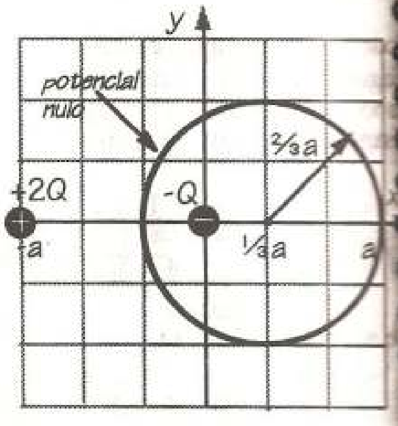


Determine la expresión (y en función de x) para los puntos cuyo potencial sea cero.
Tómese la referencia V = 0 para r = ∞.

Solución: El potencial en un punto arbitrario P(x,y) es la suma de los potenciales debidos a ambas cargas:

$$V = V_1 + V_2 = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2}$$

$$V(x,y) = k\frac{2Q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + k\frac{(-Q)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



Estamos interesados en una equipotencial con V(x,y) =0, por lo tanto:

$$\frac{2kQ}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Elevando al cuadrado y simplificando, tenemos:

$$4(x^2+y^2) = (x+a)^2+y^2$$

$$3x^2 - 2ax - a^2+3y^2= 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}ax + y^2= \frac{1}{3}a^2$$

Esta última expresión puede escribirse en la forma:

$$(x - \frac{a}{3})^2 + y^2= (\frac{2}{3}a)^2$$

Esta es justamente la ecuación de una circunferencia de radio $r=⅔a$ centrada en el punto (⅓a, 0).

Respuesta:

Circunferencia
$$(x - \frac{a}{3})^2+ y^2= (\frac{2a}{3})^2$$

PR-4.05. *Potencial de una línea finita de carga (I).*

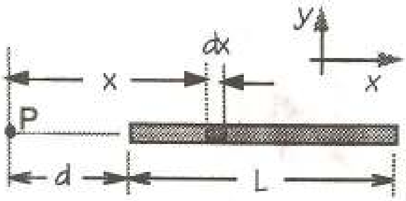
Una varilla delgada aislante de longitud L tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ.

a) Determine el potencial en un punto P sobre el eje a distancia d de un extremo.(Tómese $V_\infty = 0$)

b) Verifique su resultado tomando el caso límite d » L.

Solución: a) Para un elemento infinitesimal de longitud dx, la carga será $dQ = \lambda dx$.

El potencial eléctrico en el punto P debido a este elemento es:



$$dV = k\frac{dQ}{r} = k\frac{\lambda dx}{x}$$

Para hallar el potencial total en P debido a toda la varilla integramos sobre los valores de x desde d hasta (d+L):

$$V = \int dV = k\lambda\int_{d}^{d+L}\frac{dx}{x}$$

$$V = k\lambda \ln x\Big]_{d}^{d+L} = k\lambda \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]$$

b) Para puntos lejanos ($d \gg L$), el término que contiene el logaritmo toma el valor aproximado:

$$\ln\left[\frac{d+L}{d}\right] = \ln\left[1+\frac{L}{d}\right] \approx \frac{L}{d} \qquad \text{para } L/d \ll 1$$

Sustituyendo esta expresión en el potencial y tomando en cuenta que $\lambda = Q/L$, donde Q es la carga total sobre la varilla tenemos:

$$V \approx k\left(\frac{Q}{L}\right)\left(\frac{L}{d}\right) = k\frac{Q}{d} \qquad \text{para } d \gg L$$

Es decir, que a grandes distancias la barra luce como una carga puntual.

Respuesta:

a) $V = k\lambda \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]$

b) $V \approx k\frac{Q}{d}$ para $d \gg L$

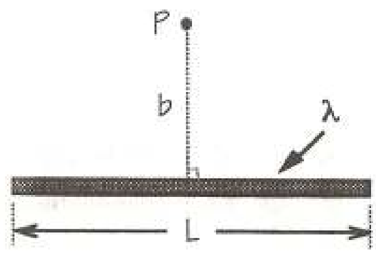
PR-4.06. *Potencial de una línea finita de carga (II).*

$V = \int \frac{dq \cdot k}{R}$

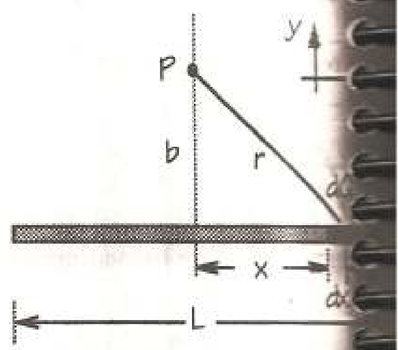
Una varilla delgada aislante de longitud L tiene una densidad de carga uniforme λ.

a) Determine el potencial eléctrico en un punto P sobre la mediatriz de la varilla, a una distancia b del eje X.(Tómese $V_\infty = 0$)

*b) Si la línea de carga fuera infinita, ¿ se podría obtener el potencial a partir de la expresión obtenida en la parte **a** ?*



Solución: a) Tomemos un elemento infinitesimal de carga $dQ = \lambda dx$, como indica la figura. Para obtener el potencial en el punto P debido a la varilla entera debemos sumar (integrar) todas las contribuciones de los elementos dQ:



$$V = \int \frac{k\,dQ}{r} = k\lambda \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = 2k\lambda \int_{0}^{+L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

$dq = \lambda dx$

La integral es del tipo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \ln\left[x + \sqrt{x^2+b^2}\right]$$

$2\int_0^{l/2} \frac{\lambda K dx}{\sqrt{x^2+b^2}}$

Integrando:

$$V = 2k\lambda \ln\left[x + \sqrt{x^2+b^2}\right]_0^{L/2}$$

$$= 2k\lambda \ln\left[\frac{L}{2b} + \sqrt{\left(\frac{L}{2b}\right)^2 + 1}\right]$$

b) Si la varilla fuera infinita, al tomar el límite de esta expresión para ($L \to \infty$), el potencial resulta infinito.

Este inconveniente siempre se presenta para distribuciones de carga infinitas, como consecuencia de haber usado la expresión para el potencial donde se ha asignado el valor de referencia $V \equiv 0$ en $r = \infty$.

Respue

a) $V = 2k\lambda \ln\left[\frac{L}{2b} + \sqrt{\left(\frac{L}{2b}\right)^2 +}\right.$

b) no se puede determinar V.

PR-4.07. Potencial de una varilla infinita de carga

Considere una varilla recta infinitamente larga con carga uniforme con densidad $\lambda(C/m)$.
Determine el potencial eléctrico debido a esta varilla infinita..

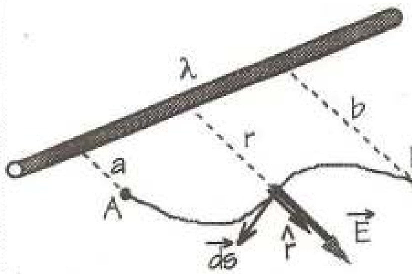
Solución: El campo eléctrico debido a una línea de carga de densidad lineal $\lambda(C/m)$ es radial y se obtiene aplicando la ley de Gauss a una superficie cilíndrica de radio r y longitud L (Fig. a). En las tapas planas el flujo es nulo y en la cara curva vale $(2\pi r L E)$.

Igualando el flujo con la carga neta encerrada (λL) dividida por ε_0, se obtiene inmediatamente:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

(Fig. a)

A partir del campo eléctrico, calcularemos la **diferencia de potencial** entre dos puntos A y B situados a distancias radiales a y b de la línea de carga (Fig. b).



(Fig. b)

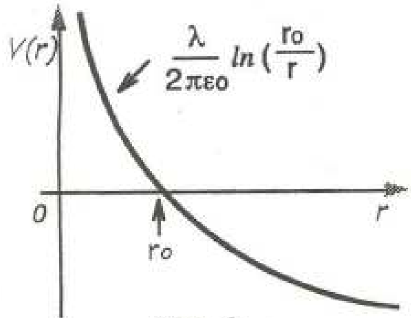
$$V_A - V_B = -\int_b^a \vec{E}\cdot\vec{ds}$$

Como el campo es radial, $\vec{E}\cdot\vec{ds} = E\,\hat{r}\cdot\vec{ds}$ y el producto escalar $\hat{r}\cdot\vec{ds} = (1)(ds)\cos\theta$ es justamente la proyección dr del vector desplazamiento $\vec{ds}$ en la dirección radial.

Por tanto $\vec{E}\cdot\vec{ds} = E\,dr$:

$$V_A - V_B = -\int_b^a E\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} ln\,(\frac{b}{a})$$



(Fig. c)

Observe que si tomamos el punto B en el infinito ($b = \infty$) y ponemos $V_B=0$, *entonces el potencial en A resultaría infinito!* :

$$V_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} ln\,(\frac{\infty}{a}) = \infty$$

Por lo tanto conviene escoger V=0 en un punto arbitrario situado a distancia finita $b = r_0$ de la línea de carga. De esta manera el potencial a cualquier otra distancia, r viene dado por:

$$V_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} ln\,(\frac{r_0}{r})$$

Esta función logarítmica está graficada en la Figura c.

Respuesta:

$$\boxed{V_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} ln\,(\frac{r_0}{r}) \quad \text{donde } V=0 \text{ en } r=r_0}$$

PR-4.08. *Potencial en el eje de un anillo.*

Considere un anillo de radio R, con carga total Q uniformemente repartida.

a) Encuentre el potencial eléctrico en un punto P ubicado en el eje del anillo, a distancia X de su centro.

b) De este resultado halle una expresión para el campo eléctrico en el eje del anillo.

R Q P x

$dq = \delta.\ 2\pi R\,dR$

$V = \int \frac{K\,dq}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{KQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$

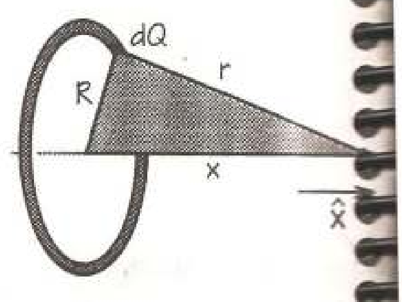
$\Delta V = \int E\,ds$

$\frac{dV}{dx} = -E$

$V = \frac{K\,dq}{R}$

$\frac{dV}{dx} = E$

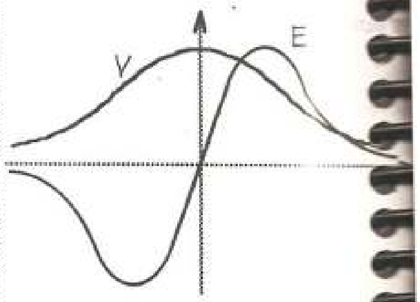
Solución: a) Sea el elemento de carga dQ a una distancia del punto P igual a $r=\sqrt{x^2+R^2}$. El potencial en el punto P debido a todo el anillo es:



$$V = k\int \frac{dQ}{r} = k\int \frac{dQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

Como todos los elementos dQ están a la misma distancia del punto P, el denominador es un factor constante y puede sacarse de la integral. La expresión para el potencial se reduce a:

$$V = \frac{k}{\sqrt{x^2+R^2}}\int dQ = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$$



b) Esta expresión para V se restringe únicamente a puntos sobre el eje x. Por otra parte, de la simetría de la distribución de cargas, se deduce que el campo eléctrico $\vec{E}$ sólo puede tener componente en la dirección x. Por lo tanto, el campo eléctrico en el punto P se calcula tomando la derivada negativa del potencial con respecto de la coordenada x:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -kQ\frac{\partial}{\partial x}(x^2+R^2)^{-1/2} \\ &= -kQ\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+R^2)^{-3/2}(2x) \\ &= \frac{kQx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

El resultado coincide con la expresión obtenida directamente de la ley de Coulomb.

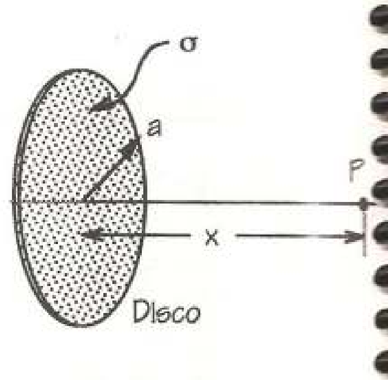
Respuesta:

a) $V = \dfrac{kQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$

b) $\vec{E} = \dfrac{kQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

PR-4.09. Potencial en el eje de un disco uniforme.

Sea un disco de radio a, y carga uniforme con densidad σ.



a) Encuentre el potencial eléctrico en un punto P ubicado en el eje, a distancia x de su centro.
b) Verifique que el resultado anterior se reduce a la expresión esperada en el caso extremo en que la distancia del punto P al disco sea muy grande ($x \gg a$).
c) A partir de la expresión del potencial eléctrico, determine el campo eléctrico en cualquier punto axial P.

Solución: a) El problema se simplifica considerando el disco como una serie de anillos concéntricos. Para un anillo de radio r y anchura dr, el área es $dA=2\pi r dr$ y su carga es:

$$dQ = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$$

De acuerdo al resultado del problema anterior, el potencial en el punto P debido a este anillo está dado por:

$$dV = \frac{kdQ}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

El potencial total en P se halla sumando las contribuciones de todos los anillos desde $r=0$ hasta $r=a$.

$$V = k\sigma\pi\int_0^a \frac{2rdr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

Esta integral es del tipo: $\int u^n du = u^{n+1}/(n+1)$ siendo $n=-½$ y $u=x^2+r^2$. Por lo tanto;

$$V = 2\pi k\sigma\left[\frac{\sqrt{x^2+r^2}}{1/2}\right]_0^a = 2\pi k\sigma\left[\sqrt{x^2+a^2}- x\right]$$

b) Para puntos lejanos ($a/x \ll 1$) y podemos escribir:

$$\sqrt{x^2+a^2} = x\left[1 + \frac{a^2}{x^2}\right]^{1/2} \simeq x\left[1+ \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}\right]$$

Por tanto el término entre corchetes se reduce a: $\sqrt{x^2+a^2} - x \simeq a^2/2x$. Usando esta aproximación y tomando en cuenta que la densidad de carga es $\sigma=Q/\pi a^2$, la expresión para el potencial se simplifica a:

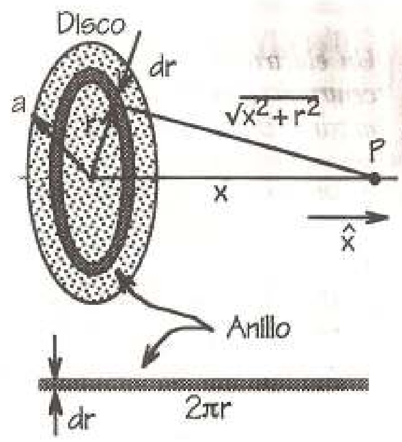
$$V \rightarrow 2\pi k\sigma\left[\frac{a^2}{2x}\right] = k\frac{Q}{x} \qquad (x \gg a)$$

A grandes distancias el disco parece ser una carga puntual.

c) Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto axial tomamos la derivada negativa de V con respecto de x:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(2\pi k\sigma)\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x^2+a^2}- x\right]$$
$$= 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]$$

Resultado que concuerda con el que se obtiene integrando directamente la expresión del campo dada por ley de Coulomb.



$x\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}} - x \simeq \frac{a^2}{2x}$

$x\left[1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}\right] - x$

Respuesta:

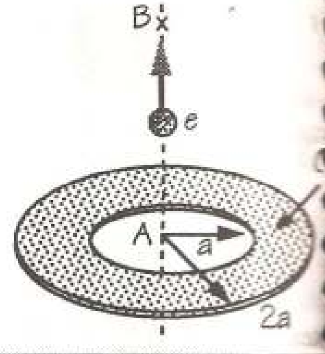
a) $V = 2\pi k\sigma\left[\sqrt{x^2+a^2} - x\right]$
b) $V \rightarrow k\frac{Q}{x} \qquad (x \gg a)$
c) $E = 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]$

PR-4.10. *Electrón atravesando un anillo cargado*

Un anillo circular tiene una carga **Q** *distribuida uniformemente sobre su superficie que está comprendida dentro los radios* **a** *y* **2a**.

Un electrón se aproxima en el eje del anillo pasando por el centro **A** *con una rapidez* u_A. *Si el electrón alcanza una posición máxima* **B** *a distancia* **3a** *del centro y se devuelve.*

¿ Con qué rapidez había pasado el electrón por el centro ?

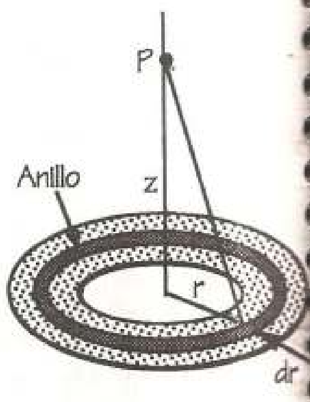


Solución: Considerando un anillo delgado de radio r y espesor dr el potencial en un punto axial a distancia z del centro es:

$$dV = \frac{kdQ}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Donde $\sigma(C/m^2)$ es la carga por unidad de área:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi[(2a)^2+a^2)]} = \frac{Q}{3\pi a^2}$$



Sumando las contribuciones de todos los anillos, encontramos el potencial total en el punto genérico a distancia z:

$$V(z) = \int_a^{2a} \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = k\sigma 2\pi \int_a^{2a} d(\sqrt{z^2+r^2})$$

$$= k\sigma 2\pi[\sqrt{z^2+r^2}]_a^{2a}$$

$$V(z) = k\sigma 2\pi[\sqrt{z^2+4a^2} - \sqrt{z^2+a^2}]$$

$\Delta U = q\int E \cdot dl$

Los potenciales en los puntos de interés son:

$\underline{z=0}$: $V_A = k\sigma 2\pi a$

$\underline{z=3a}$: $V_B = k\sigma 2\pi a[\sqrt{13} - \sqrt{10}]$

Aplicando el principio de conservación de la energía y tomando en cuenta que la velocidad en **B** es nula ($u_B=0$) se tiene:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$qV_A+\frac{1}{2}mu_A^2 = qV_B+\frac{1}{2}mu_B^2$$

$$-e\,k\sigma 2\pi a + \frac{1}{2}mu_A^2 = -e\,k\sigma 2\pi a\left[\sqrt{13} - \sqrt{10}\right]$$

Finalmente, despejando u_A se tiene:

$$u_A=\sqrt{\frac{ek\sigma 4\pi a}{m}\left[1-\sqrt{13}+\sqrt{10}\right]}$$

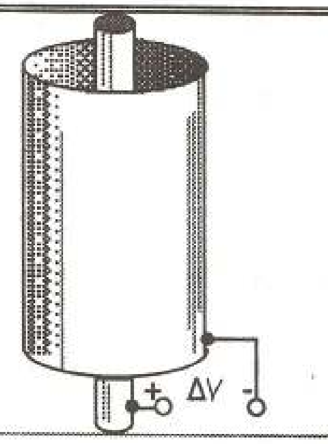
Respuesta:

$$\boxed{u_A=\sqrt{\frac{eQ}{3\pi\varepsilon_o ma}\left[1-\sqrt{13}+\sqrt{10}\right]}}$$

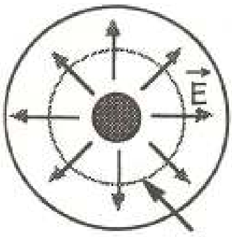
PR-4.11. *Cilindro metálico concéntrico con alambre*

Un contador Geiger-Muller es un típico detector de radiación que consta esencialmente de un cilindro metálico hueco de radio b *(el cátodo) a lo largo de cuyo eje se extiende un alambre de radio* a *(el ánodo).*

Si se aplica una diferencia de potencial ΔV, *determine el campo eléctrico en la región entre el alambre y el cilindro, en función de la distancia radial,* r.



Solución: Aplicamos la ley de Gauss para relacionar el campo eléctrico con la densidad lineal de carga (λ desconocida). Luego usaremos esta expresión para encontrar la diferencia de potencial entre el cilindro y el alambre en términos de λ. Finalmente se despeja λ y se sustituye en la expresión del campo eléctrico.



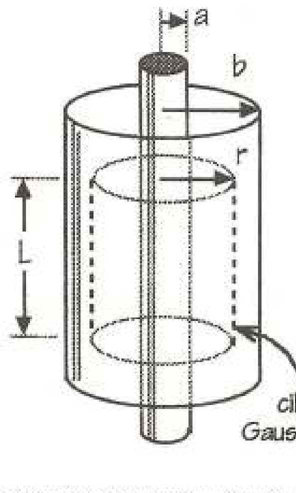
Consideremos una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud L, concéntrica con el alambre. El campo eléctrico es normal y uniforme en la superficie curva y es nulo en las tapas planas. El flujo del campo eléctrico es $\Phi = (2\pi rL)E$ y la carga encerrada es $Q = \lambda L$.

De acuerdo a la ley de Gauss: $\Phi = Q/\varepsilon_o$ y el campo es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}$$

La diferencial de potencial entre el alambre (radio a) y el cilindro (radio b) es:

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot\vec{ds}$$



Como el campo es radial, $\vec{E}\cdot\vec{ds} = E\,\hat{r}\cdot\vec{ds}$ y el producto escalar $\hat{r}\cdot\vec{ds} = (1)(ds)\cos\theta$ es justamente la proyección dr del vector desplazamiento $\vec{ds}$ en la dirección radial. Sustituyendo $\vec{E}\cdot\vec{ds} = E\,dr$: en la expresión anterior:

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a E\,dr = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\,dr$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\int_b^a \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{a}{b}\right) = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Despejando λ:

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_o\,\Delta V}{\ln(b/a)}$$

Al sustituir λ en la expresión del campo eléctrico, se tiene:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r} = \frac{\Delta V}{r\ln(b/a)}\hat{r}$$

Respu

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\Delta V}{r\ln(b/a)}}$$

PR-4.12. *Potencial de una esfera hueca.*

Un cascarón esférico de radio interior a y radio exterior b tiene una carga Q repartida uniformemente .Tomando $V(\infty)=0$, determine el potencial en función de la distancia r desde el centro. Considere las tres regiones:

a) $r>b$, *b)* $a<r<b$, *c)* $r<a$

$\frac{qk}{R}$

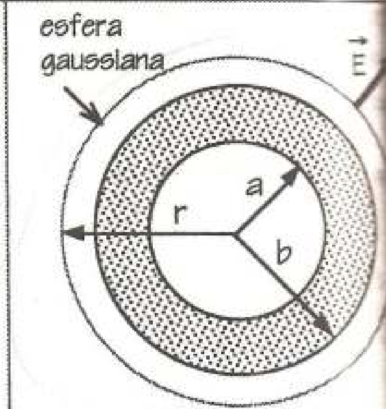
Solución: a) En la región exterior $r > b$ para determinar $\vec{E}$ tomamos una esfera gaussiana concéntrica de radio r. El campo es radial y de magnitud constante, de modo que el flujo que la atraviesa es $\Phi = 4\pi r^2 E$.

Aplicando la ley de Gauss ($\Phi = Q_r/\varepsilon_o$), encontramos: $\vec{E} = (kQ/r^2)\hat{r}$. Es decir, el campo es igual al de una carga puntual.

$V = -\int \vec{E}\,d\vec{l}$

Tomando el valor $V(\infty) = 0$, el potencial a distancia radial r es:

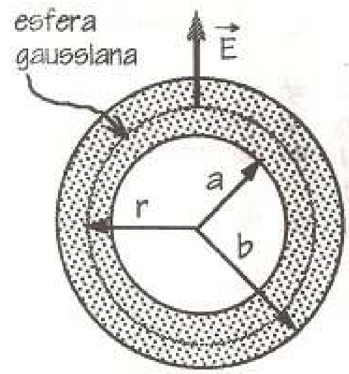
$$V(r) = V_\infty - \int_\infty^r \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_\infty^r \frac{kQ}{r^2}\,dr = \frac{kQ}{r}$$



a) Región exterior

b) En la región intermedia $\underline{a < r < b}$, para determinar $\vec{E}$ tomamos una esfera gaussiana concéntrica de radio r. La carga encerrada es:

$$Q_r = \rho\, V_r = \left[\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)}\right]\frac{4\pi}{3}(r^3 - a^3) = Q\,(\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3})$$



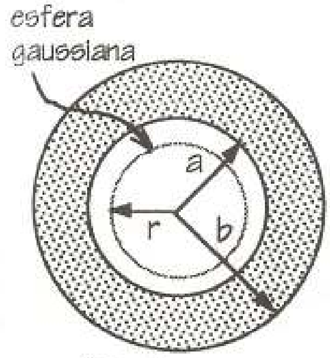
b) Región intermedia

El campo es radial y el flujo es $\Phi = 4\pi r^2 E$. Aplicando la ley de Gauss $\Phi = Q_r/\varepsilon_o$, tenemos:

$$\vec{E}(r) = (\frac{kQ}{r^2})(\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3})\,\hat{r} \qquad (a< r<b)$$

Calculemos ahora la diferencia de potencial entre un punto a distancia radial r y un punto en la superficie exterior:

$$V_r - V_b = -\int_b^r E\,dr = -\frac{kQ}{b^3 - a^3}\int_b^r (r - \frac{a^3}{r^2})\,dr$$



c) Región interior

Integrando:

$$V(r) - V_b = -\frac{kQ}{b^3 - a^3}[\frac{1}{2}(r^2 - b^2) + a^3(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})]$$

El potencial V_b se obtiene de la expresión para puntos exteriores, es decir:

$$V_b = kQ/b.$$

Reemplazando y reagrupando términos:

$$V(r) = \frac{kQ}{(b^3 - a^3)}[\frac{3b^2}{2} - \frac{a^3}{r} - \frac{r^2}{2}] \qquad (a< r < b)$$

c) Para la región interior $\underline{r < a}$ tomamos una esfera Gaussiana interior de radio r.
Como E debe ser constante y la carga encerrada es cero, la ley de Gauss predice que el campo $\vec{E}$=0 y por lo tanto el potencial es constante.

Su valor se obtiene sustituyendo (r=a) en la expresión anterior:

$$V(r) = V_a = kQ\,\frac{3(b^2 - a^2)}{2(b^3 - a^3)} \qquad (r < a)$$

Respuesta:

$$\text{a) } V(r\geq b) = \frac{kQ}{r}$$

$$V(a\leq r\leq b) = \frac{kQ}{(b^3 - a^3)}[\frac{3b^2}{2} - \frac{a^3}{r} - \frac{r^2}{2}]$$

$$\text{c) } V(r\leq a) = kQ\,\frac{3(b^2 - a^2)}{2(b^3 - a^3)}$$

PR-4.13. Potencial de una esfera sólida

Una esfera sólida aislante de radio b tiene una densidad de carga uniforme y carga total Q. Tomando como potencial cero en puntos alejados ($r = \infty$), determine el potencial

a) para puntos fuera de la esfera ($r > b$)

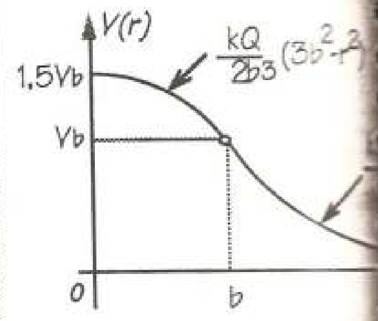
b) para puntos dentro de la esfera ($r < b$)

Solución: El procedimiento es idéntico al empleado en el problema anterior de la esfera hueca. De hecho, podemos usar los mismos resultados considerando que la esfera sólida es un caso especial de la esfera hueca cuando el radio interno se reduce a cero (a=0).

a) Para la región externa ($r \geq b$), el potencial eléctrico es:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{r}$$

Esta expresión es igual a la de una carga puntual y es válida para cualquier distribución que sea esféricamente simétrica. La distribución esférica se comporta como si la carga entera estuviese concentrada en el centro.



b) Para la región interna ($r \leq b$), usaremos la expresión del problema anterior para el potencial de la esfera hueca en su región intermedia ($a \leq r \leq b$).

Poniendo a=0, se tiene:

$$V(r) = \frac{kQ}{2b^3}[3b^2 - r^2]$$

Respues

$$V(r \geq b) = \frac{kQ}{r}$$

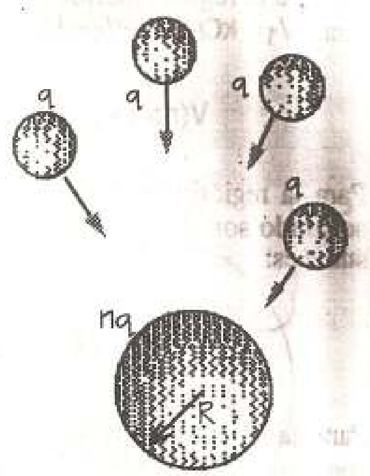
$$V(r \leq b) = \frac{kQ}{2b^3}[3b^2 - r^2$$

PR-4.14. Gotas de lluvia que se unen.

Sean n gotas esféricas idénticas de radio r que tienen cargas iguales e inicialmente están muy separadas entre sí.

Las gotas están a un potencial V_0 y se unen para formar una sola gota,
¿ Cuál será el potencial de la gota grande así formada?

Solución: El volumen resultante de la gota grande debe ser igual a la suma de los volúmenes de las gotas individuales:



$$n(\frac{4}{3}\pi r^3) = (\frac{4}{3}\pi R^3)$$

De modo que el radio R de la gota grande es:

$$R = r\sqrt[3]{n}$$

La carga de la gota grande es igual a la suma de las cargas de todas las gotas pequeñas (nq). Si suponemos que las gotas de agua son conductoras, tal que la carga en ellas se reparte uniformemente sobre su superficie, el potencial de la gota esférica grande es:

$$V = k\frac{nq}{R} = k\frac{nq}{r_o\sqrt[3]{n}}$$

De modo que en términos del potencial (V_o =kq/r) de las gotas individuales (V_o=kq/r), el potencial en la superficie de la gota grande es:

$$V = \frac{n}{\sqrt[3]{n}}(k\frac{q}{r_o}) = n^{2/3}V_o$$

Respuesta:

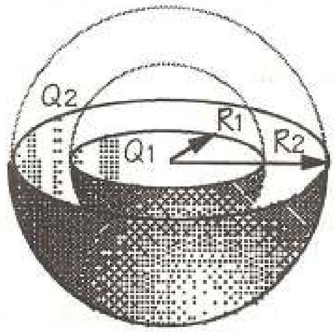
$$\boxed{V = n^{2/3}V_o}$$

PR-4.15. *Potencial de esferas concéntricas*

Dos conchas esféricas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 tienen cargas Q_1 y Q_2 respectivamente.

a) *Determine el potencial eléctrico en todas las regiones, suponiendo $V \equiv 0.$ en $r = \infty$.*

b) *¿ Cual es la diferencia de potencial entre las dos esferas ?*



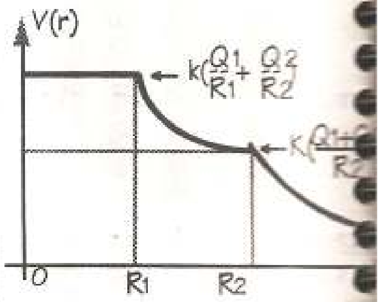
conchas esféricas metálicas

Solución: Debido a la simetría de la configuración, la carga en cada esfera conductora debe estar distribuida uniforme. Podemos calcular el potencial resultante por simple *superposición* de los potenciales:

1) de la esfera interna como si la externa no existiese.
2) de la esfera externa como si la interna no existiese.

a) Para la región exterior $(r \geq R_2)$ los potenciales por separado son: $V_1 = kQ_1/r$ y $V_2 = kQ_2/r$. La suma es:

$$V(r \geq R_2) = \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{r} = k\frac{(Q_1+Q_2)}{r}$$



Para la región intermedia $(R_1 < r < R_2)$, los potenciales por separado son $V_1 = kQ_1/r$ y $V_2 = kQ_2/R_2$ = constante. La suma es:

$$V(R_1 \leq r \leq R_2) = k\frac{Q_1}{r} + k\frac{Q_2}{R_2}$$

Para la región interior $(r < R_1)$, ambos potenciales son constantes: $V_1 = kQ_1/R_1$ y $V_2 = kQ_2/R_2$, respectivamente. La suma es:

$$V(r < R_1) = k\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$$

b) Usando la expresión de V(r) para la región intermedia, los potenciales en las superficies de las esferas metálicas son respectivamente:

$$V_1 = V(R_1) = k\frac{Q_1}{R_1} + k\frac{Q_2}{R_2}$$

$$V_2 = V(R_2) = k\frac{Q_1}{R_2} + k\frac{Q_2}{R_2}$$

Por la tanto, la diferencia de potencial es:

$$V_1 - V_2 = kQ_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Respu

a) $V(r \geq R_2) = k\frac{(Q_1+Q}{r}$

$V(R_1 \leq r \leq R_2) = k\frac{Q_1}{r} + k$

$V(r < R_1) = k\left(\frac{Q_1}{R_1} + \right.$

b) $\Delta V_{12} = kQ_1\left(\frac{1}{R_1} - \right.$

PR-4.16. *Energía de una esfera y radio del electrón*

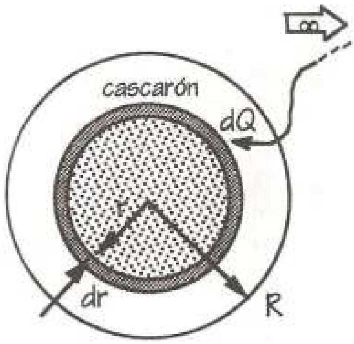
Una esfera sólida de radio R tiene una carga total Q distribuida uniformemente.

a) Determine la energía potencial electrostática de la esfera cargada.
b) Halle el radio clásico de un electrón, igualando la energía utilizada eléctricamente para construir el electrón con su energía en reposo dada por la teoría de la relatividad $E = mc^2$.

Solución: a) Imaginemos que la esfera es construida agregando capas sucesivas de cascarones concéntricos. Supongamos que en una cierta etapa del proceso tengamos una esfera sólida de radio r y carga Q(r). El potencial en la superficie de esta esfera es:

$$V(r) = k\frac{Q(r)}{r} = k\frac{(4/3)\pi r^3\rho}{r}$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de cargas. Si ahora traemos desde el infinito un cascarón esférico de radio r y carga dQ, el trabajo para realizar esta operación es:



$$dW = VdQ = [\frac{k(4/3)\pi r^3\rho}{r}][\rho(4\pi r^2 dr)]$$

$$dW = (16/3)k\rho^2\pi^2 r^4 dr)$$

De modo que el trabajo total para construir una esfera incrementando los radios desde r=0 hasta r=R es entonces:

$$W = \int_0^R (16/3)k\rho^2\pi^2 r^4 dr = (16/3)k\rho^2\pi^2[R^5/5]$$

$$= (16/15)k[\frac{Q}{(4/3)\pi R^3}]^2\pi^2 R^5 = \frac{3kQ^2}{5R}$$

$m_o = 9{,}1\text{x}10^{-31}$ kg
$e = 1{,}6\text{x}10^{-19}$ C
$c = 3\text{x}10^8$ m/s
$k = 9\text{x}10^9$ Nm^2/C^2

b) Para hallar el radio clásico del electrón igualamos el trabajo hecho en construirlo eléctricamente, con su energía relativista en reposo:

$$\frac{3ke^2}{5R_e^3} = m_o c^2 \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{3ke^2}{5\, m_o c^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos de las constantes, tenemos:

$$R_e = \frac{3(9\text{x}10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2)(1{,}6\text{x}10^{-19}\text{C})^2}{5\ (9{,}1\text{x}10^{-31}\text{kg})(3\text{x}10^8\text{m/s})^2} = 1{,}69\text{x}10^{-15}\text{ m}$$

Respuesta:

a) $U = \dfrac{3kQ^2}{5R}$
b) $R_e = 1{,}69\text{x}10^{-15}$ m

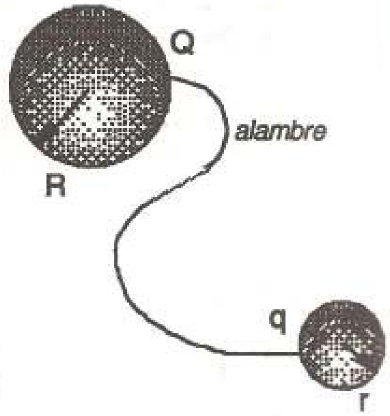
Como dato curioso, diez años antes de que Einstein publicara su teoría de la relatividad, J. J. Thomson propuso que el electrón debía estar constituido por pequeñas partes que interactúan eléctricamente y sugirió que su energía era mc^2.

PR-4.17. *Efectos de puntas y "descarga corona"*

Dos conductores esféricos de radios r y R separados por una distancia mucho mayor que los radios de cada esfera, se conectan con un alambre conductor. Si las cargas en las esferas en equilibrio son Q y q respectivamente.

Determine la razón de las densidades de carga y de las intensidades de campo en las superficies de las esferas.

Solución: Por estar las esferas conectadas mediante un alambre, ambas están al mismo potencial V. Ya que las esferas están muy separadas el potencial está dado por:



$$V = k\frac{q}{r} = k\frac{Q}{R}$$

Por lo tanto, la razón entre las cargas es:

$$\frac{q}{Q} = \frac{r}{R}$$

Las cargas están uniformemente repartidas en las superficies y las densidades respectivas son:

$$\sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{y} \quad \sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Por lo tanto, la razón entre las densidades de carga es:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_R} = \left(\frac{q}{Q}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)$$

y los campos eléctricos en sus superficies son, respectivamente:

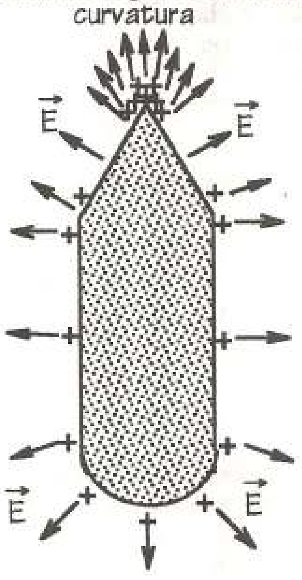
$$E_r = k\frac{q}{r^2} \quad \text{y} \quad E_R = k\frac{Q}{R^2}$$

De modo que la razón entre los campos eléctricos es:

$$\frac{E_r}{E_R} = \left(\frac{q}{Q}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)$$

En conclusión, *la densidad de cargas y el campo eléctrico son inversamente proporcionales al radio de curvatura local.*

En un conductor cargado el campo eléctrico es mayor cerca de las regiones de menor curvatura



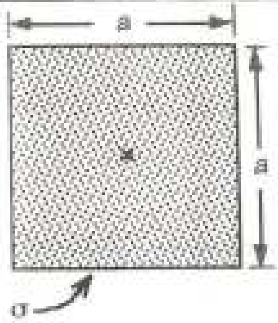
Como las cargas tienden a concentrarse en las zonas de menor radio de curvatura, es muy importante evitar regiones puntiagudas en conductores que son usados en equipos de alto voltaje. Cuando E alcanza valores muy grandes (>3x10^6 V/m), los electrones de las moléculas del aire circundante tienden a desprenderse (ionización) y se presenta la llamada *descarga corona*.

Respuesta:

$$\boxed{\frac{E_r}{E_R} = \frac{R}{r}}$$

PR-4.18. *Potencial en el centro de un cuadrado*

Determine el potencial eléctrico en el centro de una placa cuadrada de lado **a** *que tiene una densidad de carga uniforme* σ *(C/m²)*



Solución: Para hallar el potencial en el centro procederemos en varias etapas:

1. Dividimos el cuadrado en cuatro regiones triangulares (Fig.1).
2. En una de las secciones, seleccionamos una franja delgada de ancho dx, a distancia x del centro y calculamos su potencial (Fig.2).
3. Sumamos los potenciales de todas las franjas que llenan la zona triangular (Fig.3).
4. Finalmente, el potencial total en C será 4 veces el potencial debido a una zona triangular individual.

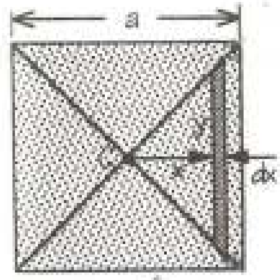
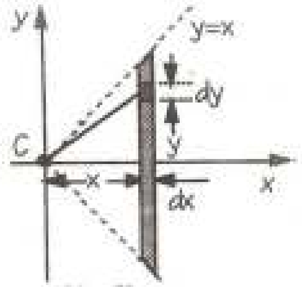


Fig. 1)

Un elemento de área dxdy tendrá una carga σdxdy y su contribución al potencial en el punto central C es:

$$dV = k\frac{\sigma dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

el potencial debido a la tira completa de largo 2y=2x es:



(Fig. 2)

$$dV_{tira} = \int_{-x}^{+x} \frac{k\sigma dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2k\sigma dx \int_{0}^{+x} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dV_{tira} = 2k\sigma dx\left[\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_0^x$$

$$dV_{tira} = 2k\sigma dx \ln\left[\frac{(x+\sqrt{2}x)}{x}\right] = 2k\sigma dx \ln(1+\sqrt{2})$$

Verifique que este resultado concuerda con el del problema PR-4.06

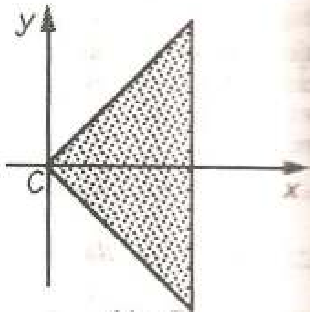
El potencial debido al triángulo entero es la suma de los potenciales de todas las tiras ubicadas entre $x=0$ y $x=a/2$:

$$V_{triángulo} = \int_0^{a/2} dV_{tira} = \int_0^{a/2} 2k\sigma \ln(1+\sqrt{2})\, dx$$

$$V_{triángulo} = 2k\sigma \ln(1+\sqrt{2}) \int_0^{a/2} dx = k\sigma a \ln(1+\sqrt{2})$$

Finalmente, como la placa cuadrada está formada por cuatro de tales triángulos, el potencial total en el centro de la placa es:

$$V_{cuadrado} = 4k\sigma a \ln(1+\sqrt{2})$$



(Fig. 3)

Respues

$$\boxed{V = 4k\sigma a \ln(1+\sqrt{2})}$$

PROBLEMAS PARA RESOLVER

PP-4.01. *Escoja Ud. la ruta*

En una región del espacio existe un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E} = (2\hat{x} + 3\hat{y})\ \text{V/m}$$

¿ Cuál será la diferencia de potencial, $(V_B - V_A)$, entre el punto B(2,1,0) y el punto A(0,3,2)?

Respuesta:

$$(V_B - V_A) = 2 \text{ voltios}$$

Ayuda: El campo $\vec{E}$ es conservativo y la diferencia de potencial puede ser calculada a lo largo de cualquier camino que conecte los puntos dados.

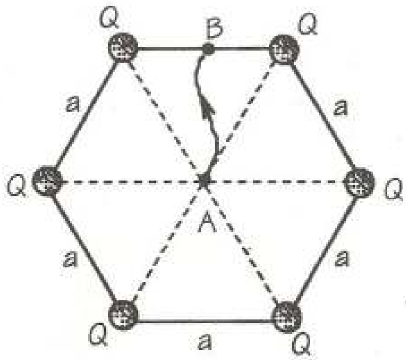
PP-4.02. *Cargas en las esquinas de un hexágono*

Seis cargas +Q están colocadas en las esquinas de un hexágono de lado a.

a) Calcule el potencial electrostático en el centro del hexágono (punto A) y en el punto medio entre dos cargas (punto **B**).

b) Calcule el trabajo que hay que realizar para mover una carga Q_0 desde el punto A hasta el punto B.

c) ¿ Cuál será el trabajo requerido para ensamblar las seis cargas +Q en el hexágono de lado a ?



Respuesta:

$$\text{a) } V_A = \frac{6kQ}{a};\quad V_B = \frac{4kQ}{a}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{13}}\right]$$

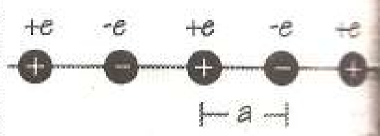
$$\text{b) } W_{A\to B} = \frac{2kQ_0Q}{a}\left[-1 + \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right]$$

$$\text{c) } W_{\text{hexágono}} = \frac{3kQ^2}{a}\left[2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right]$$

Ayuda: Halle las distancias entre todas las cargas y desde cada una de ellas hasta los puntos A y B. Identifique las cargas que equidistan de los puntos en cuestión y agrúpelas. Use la expresión para el potencial de una carga puntual tomando como referencia cero en el infinito.

PP-4.03. *Cristal iónico uni-dimensional*

Un modelo sencillo de cristal iónico consiste de una hilera de un número N muy grande de cargas de igual magnitud e y signos alternantes, cada una de ellas separadas a una distancia a de sus dos cargas contiguas.



a) Determine el potencial en el lugar (N+1) de la fila.
b) Calcule la energía potencial coulombiana de una carga situada en el medio de una fila infinita.

Respuesta:

a) $V = \pm \left(\frac{ke}{a}\right) \ln 2$; b) $U = -\left(\frac{ke^2}{a}\right) 2\ln 2$

Ayuda: La suma de los potenc... debido a los otros iones resulta e... serie : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ..... = \ln 2$)... energía potencial se obt... multiplicando el potencial por la carg...

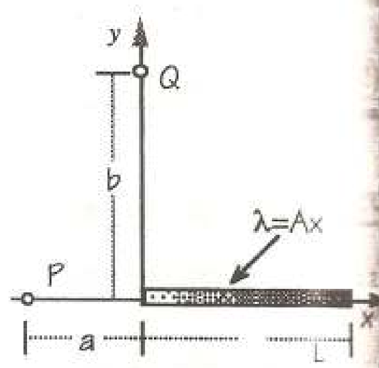
PP-4.04. *Potencial de una barra no-uniforme*

Sobre una barra delgada de longitud L está distribuida una carga por unidad de longitud:

$$\lambda(x) = \alpha\, x \ \ (C/m^2)$$

siendo α una constante positiva.

Tomando $V(\infty) = 0$, determine el potencial electrostático:
a) En un punto P a distancia a desde el extremo izquierdo.
b) En un punto Q a distancia b perpendicular al extremo izquierdo.



Respuesta:

a) $V_P = \alpha k[L - a \ln(1 + \frac{L}{a})]$

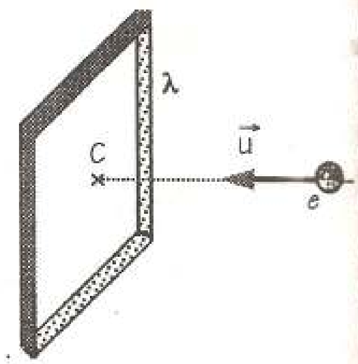
b) $V_Q = \alpha k[\sqrt{L^2 + b^2} - b]$

Ayuda: Seleccione un elemento... carga $dQ = \lambda dx$, escriba el diferen... de potencial en términos de la distanc... al punto P e integre la expresión en... los límites x=0 y x=L.

PP-4.05. *Cargas sobre un cuadrado*

Una carga positiva está distribuida uniformemente con densidad λ (C/m) sobre los bordes de un cuadrado.

a) Tomando $V \equiv 0$ en el infinito, ¿ cuál es el potencial electrostático en el centro del cuadrado ?
b) Si desde el infinito y a lo largo del eje del cuadrado, se libera un electrón (carga -e, masa m), ¿ con qué velocidad pasará por el punto central ?



Respuesta:

a) $V_C = 8k\lambda \ln[1+\sqrt{2}]$

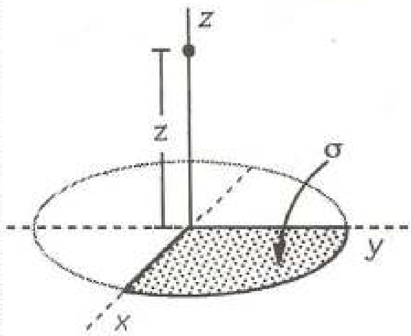
b) $u_C = 4\sqrt{\dfrac{ek\lambda \ln[1+\sqrt{2}]}{m}}$

Ayuda: El potencial en el centro del cuadrado es 4 veces el debido a una recta de carga en su mediatriz (Prob. PR. 4.06. La energía cinética en C es la variación de energía potencial desde el infinito hasta el punto C.

PP-4.06. *Un cuarto de disco plástico cargado*

Un disco plástico de radio R tiene una densidad superficial de carga uniforme σ que está distribuida sobre un cuadrante únicamente . El resto de la superficie del disco no tiene carga.

Suponiendo V=0 en el infinito, determine el potencial en el punto P ubicado en el eje del disco y a una distancia z del centro.



Respuesta:

$$V = \frac{1}{2}\pi k\sigma\left[\sqrt{z^2+a^2} - z\right]$$

Ayuda: Relacione el potencial debido a todo el disco con el potencial de un cuarto del mismo.

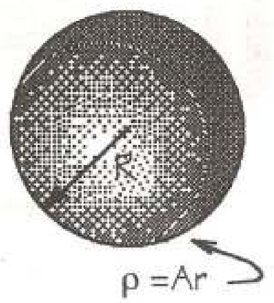
PP-4.07. *Potencial de esfera no uniforme*

Una esfera no conductora de radio R posee una densidad de carga no uniforme:

$$\rho(r) = Ar$$

Donde A es una constante y r la distancia radial.

a) ¿Cuál es la carga total de la esfera ?
b) Determine el potencial eléctrico en todos los puntos, admitiendo que $V = 0$ para $r = \infty$.



Respuesta:

a) $Q = A\pi R^4$

b) $V(r \geq R) = \dfrac{kA\pi R^4}{r}$

$V(r \leq R) = \dfrac{kA\pi}{3}(4R^3 - r^3)$

Ayuda: a) Sume las cargas dQ de conchas esféricas de espesor dr. b) Utilice Gauss para hallar los campos eléctricos en las dos regiones. Determine los potenciales calculando las integrales de línea a partir del infinito

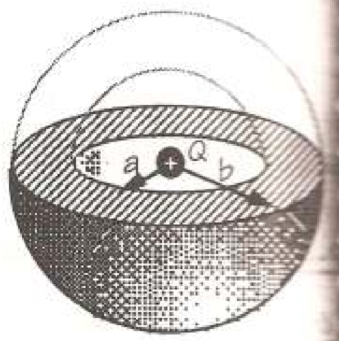
PP-4.08. *Carga puntual rodeada de concha metálica*

Un carga puntual $+Q$ está en el centro de una concha de material conductor de radio interior a y radio exterior b La concha no posee carga neta.

Determine el campo eléctrico y el potencial eléctrico para las diferentes regiones:

a) $r<a$, b) $a<r<b$, c) $r>b$

Haga un esquema de $V(r)$ en función de r.

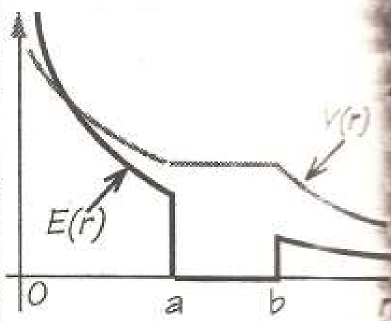


Respuesta:

a) $\underline{r<a}$: $\vec{E}=\frac{kQ}{r^2}\hat{r}$; $V=kQ\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

b) $\underline{a<r<b}$: $\vec{E}=0$; $V=\frac{kQ}{b}$

c) $\underline{r>b}$: $\vec{E}=\frac{kQ}{r^2}\hat{r}$; $V=\frac{kQ}{r}$



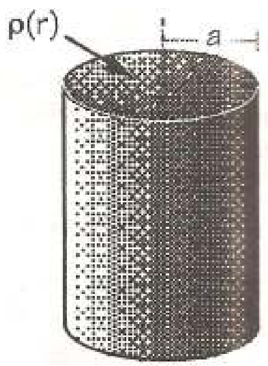
PP-4.09. *Potencial de cilindro infinito no uniforme*

Un cilindro sólido circular de radio a e infinitamente largo tiene una densidad de carga no uniforme, dada por:

$$\rho(r)=\frac{3Q}{\pi a^3}(a-r)$$

donde r es la distancia radial desde el eje.

Calcule el potencial eléctrico en todas las regiones.



Respuesta:

$$V(r\le a)=\left(\frac{kQ}{3a^3}\right)(5a^3-9ar^2+4r^3)$$

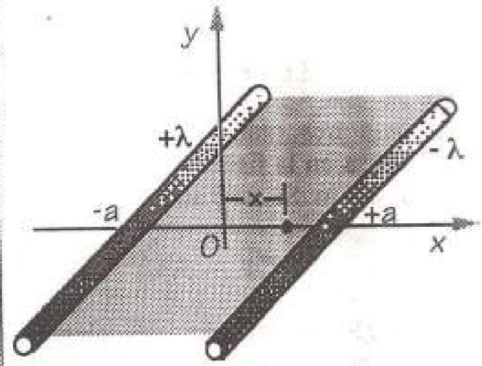
$$V(r\ge a)=-2kQ\log\left(\frac{r}{a}\right)$$

Ayuda: Escoja superficies cilíndric gaussianas y aplique Gauss para ha los campos eléctricos. Partiendo des el infinito, evalúe las integrales líneas para determinar los potencia Observe que para ambas solucion $V=0$ en la superficie del cilindro ($r=a$).

PP-4.10. *Potencial entre dos varillas paralelas*

Dos líneas de carga infinitamente largas y paralelas tienen densidades de carga lineal iguales y opuestas ($\pm\lambda$).

Calcular la expresión para el potencial en un punto entre las líneas, ubicado en su plano común, respecto del punto medio O.



Respuesta:

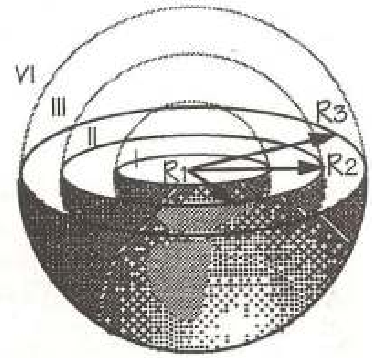
$$V(x) - V(0) = 2k\lambda \ln \left[\frac{a + x}{a - x}\right]$$

Ayuda: Halle el campo de cada varilla aplicando la ley de Gauss a cilindros gaussianos concéntricos. El campo resultante es la suma vectorial de los campos de cada varilla. Se calcula ΔV mediante la integral de línea de E.

PP-4.11. *Esfera dentro de esfera dentro de esfera*

Considere tres cascarones esféricos delgados y concéntricos de radios R_1, R_2, y R_3, y cargas Q_1, Q_2, y Q_3 respectivamente.

Determine el campo y el potencial eléctrico en cada una de las cuatro regiones I, II, III y IV, delimitadas por las esferas.



Respuesta:

Región I: $E_I = 0$, $\quad V_1 = k\left[\frac{Q_I}{R_I} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3}\right]$

Región II: $E_{II} = k\frac{Q_I}{r^2}$, $\quad V_{II} = k\left[\frac{Q_I}{r} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3}\right]$

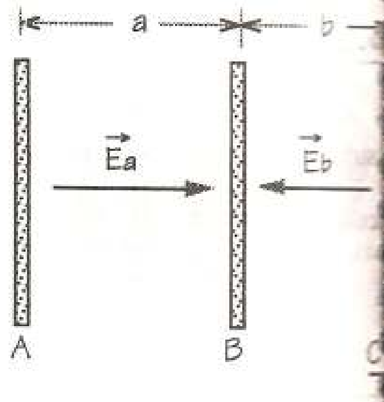
Región III: $E_{III} = k\frac{Q_I + Q_2}{r^2}$, $\quad V_{III} = k\left[\frac{Q_I + Q_2}{r} + \frac{Q_3}{R_3}\right]$

Región IV: $E_{IV} = k\frac{Q_I + Q_2 + Q_3}{r^2}$, $\quad V_{IV} = k\left[\frac{Q_I + Q_2 + Q_3}{r}\right]$

Ayuda: Para hallar los campos se escogen esferas gaussianas en cada una de las regiones, se determina la carga encerrada y se aplica la ley de Gauss. Para hallar los potenciales proceda a calcular las integrales de línea, partiendo desde el infinito, es decir, desde afuera hacia adentro de las esferas.

PP-4.12. *Averigüe los potenciales*

Sean tres planos paralelos cargados y dispuestos como se ilustra en la figura, siendo la distancia a=0,5 m y la distancia b=0,3 m Se sabe además que:



$$\vec{E}_a = 300\hat{x}\ \text{N/C}, \quad \vec{E}_b = -200\hat{x}\ \text{N/C}$$

a) ¿Si el potencial del plano C es cero, cuáles son los potenciales de los planos A y B ?

b) ¿ Cuáles son las densidades de carga en cada plano ?

Respuesta:

a) $V_A = +90$ V, $V_B = -60$ V

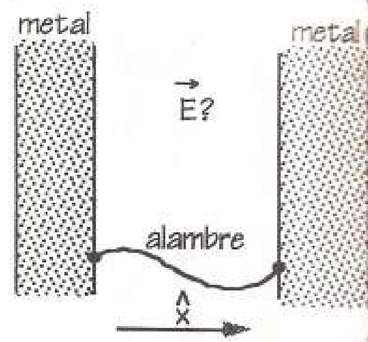
b) $\sigma_A = +2{,}65\text{x}10^{-9}$ C/m^2, $\sigma_B = -4{,}42\text{x}10^{-9}$ C/m^2

$\sigma_C = +1{,}77\text{x}10^{-9}$ C/m^2

Ayuda: Los campos son uniforme $\Delta V = E\Delta x$. Partiendo del plano C los tomando en cuenta si los potencia aumentan o disminuyen. Para hallar densidades de carga use caj gaussianas alrededor de los planos relacione σ con E.

PP-4.13. *Un cortocircuito entre las placas metálicas*

En una región donde hay dos placas metálicas paralelas grandes y sin carga neta, se aplica un campo externo uniforme transversalmente, $E_0\hat{x}$. Determine el campo eléctrico resultante en la región entre las placas, en las siguientes situaciones.......



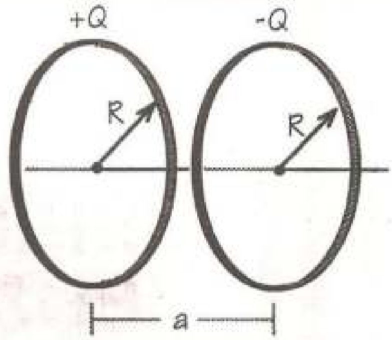
a) Después de aplicar el campo externo.
b) Después de conectar un alambre delgado entre las caras internas de las placas, manteniendo aplicado el campo externo.
c) Después de desconectar el alambre, manteniendo el campo externo aún aplicado.
d) Después de haber quitado tanto el alambre como el campo externo.

Respuesta:

a) $\vec{E} = +E_0\hat{x}$, **b)** $\vec{E} = 0$,
c) $\vec{E} = 0$, **d)** $\vec{E} = -E_0\hat{x}$

Ayuda: La conexión mediante alambre, en presencia del cam externo, provoca una distribución cargas hasta que las dos placas es al mismo potencial.

PP-4.14. *Diferencia de potencial entre anillos*



Sean dos anillos de radio R, cuyos ejes coinciden y están separados por una distancia a . Los anillos tienen carga iguales y opuestas ± Q.

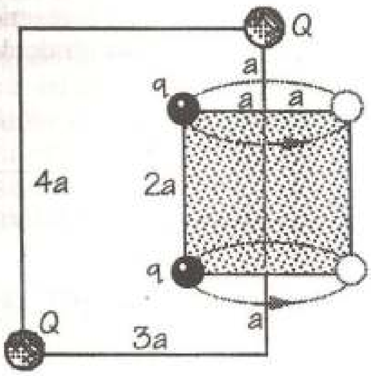
¿ Cuál es la diferencia de potencial entre los centros de los anillos ?

Respuesta:

$$\Delta V = \frac{2kQ}{R}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+(a/R)^2}}\right]$$

Ayuda: En un anillo todas las cargas equidistan de cualquier punto del eje. Determine el potencial debido a cada anillo en ambos puntos centrales. Use superposición.

PP-4.15. *¿Cuánto se trabaja para rotar el cuadrado ?*



Sobre dos vértices opuestos de un cuadrado de lados 2a están dos cargas positivas iguales +q (las negras) y sobre los vértices opuestos de un rectángulo de lados 3a y 4a están dos cargas iguales +Q (las grises), como se indica en la figura.

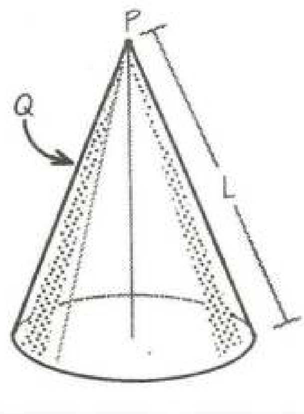
¿ Cuánto trabajo debe ser realizado en contra de las fuerzas eléctricas para rotar en 180° el cuadrado que contiene las cargas negras sobre el lado del rectángulo ?

Respuesta:

$$W = \left(\frac{kqQ}{a}\right)\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$$

Ayuda: Hay 6 contribuciones a la energía potencial electrostática. Debido a la simetría, sólo dos de estos términos cambian cuando el cuadrado es rotado.

PP-4.16. *Potencial en el vértice de un cono cargado*



Un cono circular recto está hecho de un material aislante y tiene una carga total Q repartida uniformemente en su *superficie* cónica. El cono tiene una generatriz de longitud L.

¿ Cuál es el potencial eléctrico en el punto vértice P ?

Respuesta:

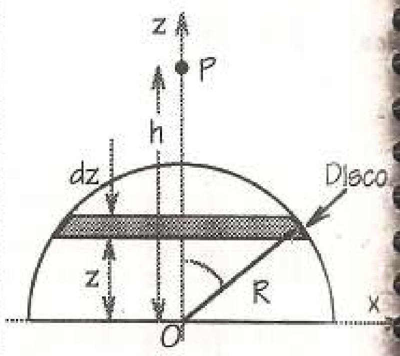
$$V_P = k\frac{2Q}{L}$$

Ayuda: Divida la superficie cónica [en] anillos de ancho "dl" y radio r = l sen[φ]. La carga elemental dQ = (2πrdl)[σ] produce un potencial dV = kdQ[/l]. Integre esta expresión para hallar [el] potencial total. Escriba el resultado [en] términos de la carga total Q. Recuer[de] que el área lateral es igual a la se[mi]circunferencia de la base multiplica[da] por la longitud L de la generatriz: A = $\pi RL = \pi L^2 sen\phi$.

PP-4.17. *Potencial de un hemisferio sólido*

En un hemisferio de radio R hay una carga distribuida uniformemente con *densidad volumétrica* ρ (C/m^3).

Determine el potencial eléctrico en un punto sobre su eje ubicado a una distancia h desde su centro, como lo muestra la figura.



Respuesta:

$$V(h) = \frac{k\rho\pi}{3h}\left[2(h^2+R^2)^{3/2}-2h^3-3R^2h+2R^3\right]$$

Ayuda: Divida el hemisferio en disc[os] delgados de espesor "dz". Use [la] expresión obtenida para el potencial [en] el eje de un disco (PR- 4.09). En es[te] caso el disco tiene una densid[ad] superficial $\sigma = \rho dz$. Sustituya en e[sa] expresión las distancias en términos [de] z y de h. Para hallar el potencial to[tal] integre desde z=0 hasta z=R.

5

CONDENSADORES Y DIELECTRICOS

Los condensadores son configuraciones compactas de conductores que permiten almacenar carga. Son dispositivos de amplio uso en casi todos los circuitos electrónicos como los de radio y TV, circuitos de marcapasos, flash para cámaras, sistemas de arranque de automóviles, etc. Un condensador se caracteriza por su capacitancia, la cual es una medida cuantitativa de su facultad para almacenar carga. En este capítulo veremos cómo se calcula la capacitancia de condensadores con geometrías sencillas y también cómo determinar la capacitancia equivalente de combinaciones de condensadores. Por último, examinaremos la función de los materiales dieléctricos en los condensadores.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos vinculados con:

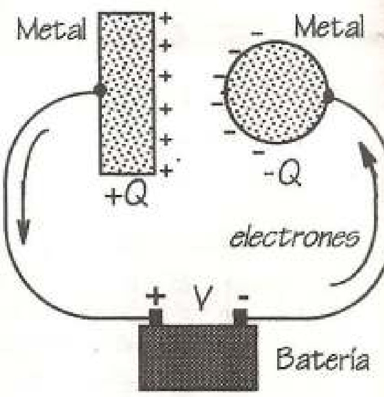
- Condensadores y capacitancia
- Cálculo de la capacitancia
- Combinación de condensadores: serie y paralelo
- Energía almacenada en un condensador
- Condensador con dieléctrico
- Dieléctricos: descripción atómica
- Los dieléctricos y la ley de Gauss

EL CONDENSADOR

Un condensador es un dispositivo que almacena carga o energía potencial electrostática en el campo eléctrico que estas generan.

Usualmente consiste de dos conductores metálicos separados por una región que puede estar vacía o puede estar llena con un material aislante.

Cuando se aplica a los dos conductores una diferencia de potencial mediante una batería, se transfieren electrones de un conductor al otro. Al desconectar la batería, el conductor que pierde electrones queda con carga positiva (+Q) y el que los adquiere queda con carga negativa (-Q). De esta manera, los dos conductores almacenan cargas de igual magnitud y de signos opuestos.



LA CAPACITANCIA

La cantidad de carga que adquiere cada una de los conductores de un condensador es proporcional a la diferencia de potencial aplicada V.

$$Q = CV$$

La constante de proporcionalidad, C, recibe el nombre de capacitancia y expresa la facultad del condensador para almacenar carga eléctrica.

Capacitancia

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

UNIDAD SI DE CAPACITANCIA

La unidad SI de capacitancia es el Coulomb por Voltio, unidad que se denomina Faradio (F)

$$\text{Faradio} = \frac{\text{Culombio}}{\text{Voltio}}$$

Para un condensador específico la capacitancia es una constante que depende de la geometría, es decir, del tamaño, forma y posición relativa de los dos conductores, así como también del material que los separa.

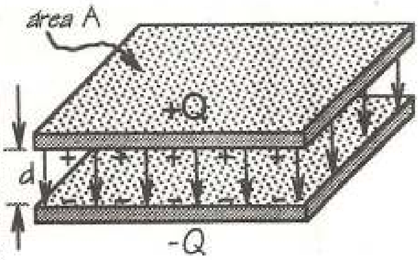
Podemos determinar en forma analítica la capacitancia para geometrías sencillas: Placas paralelas, cilíndricas y esféricas.

Símbolo

CONDENSADOR DE PLACAS PARALELAS

Sean dos placas de área A separadas por una distancia **d** que es pequeña en comparación con sus dimensiones. Si una placa tiene carga +Q y la otra tiene carga -Q, el campo eléctrico entre ellas es uniforme y perpendicular a las placas. Conocido el campo eléctrico:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$



Podemos determinar la diferencia de potencial entre las placas:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

De esta relación, y de la definición de capacitancia obtenemos:

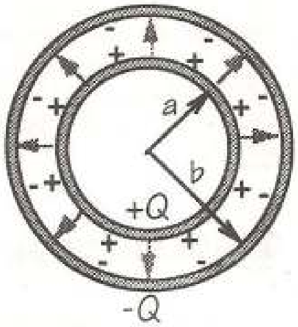
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Capacitancia placas paralelas

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

CONDENSADOR ESFERICO

Los dos conductores son esferas concéntricas de radios **a** y **b**, y supongamos que la esfera interna tiene carga +Q y la externa tiene carga -Q.



El campo eléctrico entre las esferas es radial, y viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

La diferencia de potencial entre las esferas conductoras es:

$$V_b - V_a = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b E_r dr$$

$$V_b - V_a = -\left(-\frac{kQ}{r}\right)\Big|_a^b = kQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Llamando $V = (V_a - V_b)$, y $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

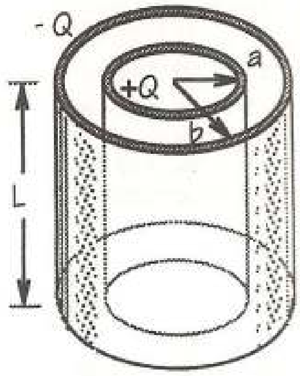
Capacitancia condensador esférico

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)}$$

CONDENSADOR CILINDRICO

Consiste de dos cilindros conductores concéntricos de radios a y b, y longitud L, como indica la figura. Supongamos que el cilindro interno tiene carga +Q y el externo tiene carga -Q, el campo eléctrico entre los cilindros es radial, y viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{r}$$



La diferencia de potencial entre las placas es:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\right)\ln r \Big|_a^b = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Llamando $V = V_a - V_b$, la capacitancia viene dada por:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Capacitancia condensador cilíndrico

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$$

COMBINACION DE CONDENSADORES

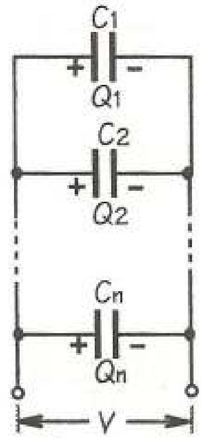
Las características más importantes de un condensador son: su *capacitancia* y la *máxima diferencia de potencial* que puede ser aplicada sin que se dañe el material aislador entre las armaduras. Si no se dispone de un valor específico de capacitancia para una particular aplicación, podemos conectar condensadores en forma apropiada para obtener la capacitancia equivalente deseada.

CONDENSADORES EN PARALELO

Dos o más condensadores están conectados en paralelo cuando la diferencia de potencial, V, para cada uno de ellos es la misma, como indica la figura. La carga total Q, almacenada es la suma de las cargas individuales.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$$

$$= C_1 V + C_2 V + \ldots + C_n V = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)V$$



Por lo tanto un solo condensador equivalente que contenga la misma carga Q y al mismo potencial V tendrá una capacitancia:

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

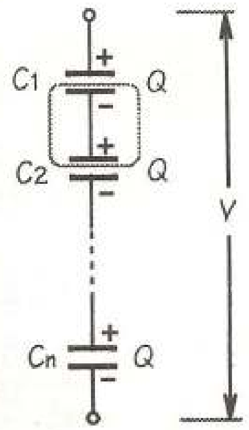
La capacitancia equivalente de condensadores en paralelo es la suma de las capacitancias individuales.

Condensadores en paralelo

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots\dots + C_n}$$

CONDENSADORES EN SERIE

Dos o más condensadores están en serie cuando se conectan uno a continuación de otro, de forma tal que la carga de cada uno de ellas tiene el mismo valor.



La diferencia de potencial total V, es la suma de las diferencias de potencial a través de cada condensador individual.

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Observando que $V_1 = Q_1/C_1$, $V_2 = Q_2/C_2$,... etc, tenemos:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots\dots + \frac{Q}{C_n}$$

Por lo tanto un solo condensador equivalente que contenga la misma carga Q al mismo potencial V tendrá una capacitancia dada por:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots\dots + \frac{1}{C_n}$$

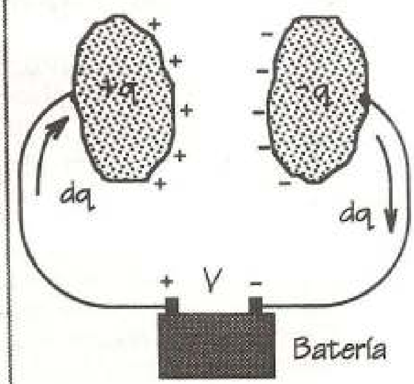
El inverso de la capacitancia total de condensadores en serie es la suma de los inversos de las capacitancias individuales.

Condensadores en serie

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots\dots + \frac{1}{C_n}}$$

ENERGIA EN UN CONDENSADOR

La energía electrostática que se almacena en un condensador proviene del trabajo realizado para cargarlo. Suponga que q es la carga en el condensador en algún instante durante el proceso.



El trabajo (realizado por la batería) para transferir una carga adicional dq, cuando entre las placas existe una diferencia de potencial V, es $dW = Vdq$.

Como $V = q/C$, el trabajo total realizado para cargar el condensador desde $q = 0$ hasta $q = Q$ es:

$$W = \int_0^Q V\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Este trabajo es igual a la energía potencial U, almacenada en el condensador.
Utilizando la relación $Q = CV$ podemos escribir:

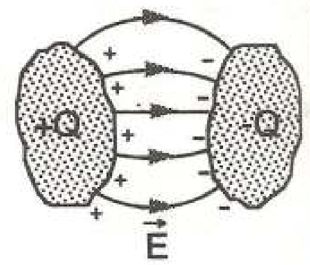
$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

Energía almacenada en un condensador

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2}$$

DENSIDAD DE ENERGIA

La energía almacenada en un condensador puede considerarse que reside en el campo eléctrico entre las placas. Por ejemplo, para un condensador de placas paralelas de área A y separación d, la capacitancia es $C=\varepsilon_o A/d$ y la diferencia de potencial está relacionada con el campo mediante: $V=Ed$. Por lo tanto:



$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_o A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2\,(Ad)$$

Como el volumen del condensador de placas paralelas ocupado por el campo eléctrico es (Ad), entonces la energía por unidad de volumen (J/m^3) es:

$$u = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

Densidad de energía $= \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}}$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2}$$

La densidad de energía es proporcional al cuadrado del campo eléctrico.

Este resultado es de validez general para cualquier región del espacio donde exista un campo eléctrico.

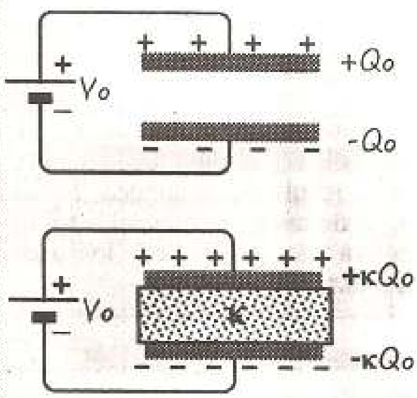
CONDENSADOR CON DIELECTRICO

Exceptuando algunos casos, los condensadores se fabrican con un dieléctrico entre las placas. Los dieléctricos son materiales no conductores, como la mica o el papel, que al introducirlo entre las placas de un condensador cumplen las siguientes funciones:

1 .Permiten una construcción rígida y compacta con una separación pequeña entre las placas conductoras.
2 .Permiten que se pueda aplicar un mayor voltaje sin que cause una descarga (campo E de ruptura mayor que el del aire).
3 .Aumentan la capacitancia del condensador.

Para visualizar como se consigue aumentar la capacitancia veamos dos experimentos simples:

A) *Insertando el dieléctrico con la batería conectada:* Sea un condensador de capacitancia C_0 que adquiere carga Q_0 mediante una batería. Si se introduce el dieléctrico, se observa que *la carga en las placas aumenta* en un cierto factor κ.

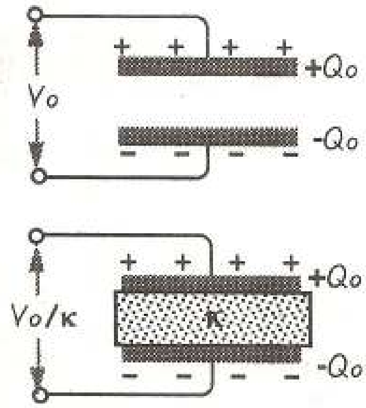


Como el voltaje V_0 no se altera (lo garantiza la batería conectada) podemos concluir que la nueva capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\kappa Q_0}{V_0} = \kappa\left(\frac{Q_0}{V_0}\right) = \kappa C_0$$

La capacitancia aumenta en un factor κ

B) *Insertando el dieléctrico sin la batería:* Supongamos que el condensador de capacitancia C_0 adquiere carga Q_0 y se *desconecta de la batería.* Si a continuación se introduce el dieléctrico, se observa que la *diferencia de potencial disminuye* en un factor κ.



Como la carga no se altera (el circuito está abierto), podemos concluir que el condensador tiene una nueva capacitancia:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\kappa} = \kappa\left(\frac{Q_0}{V_0}\right) = \kappa C_0$$

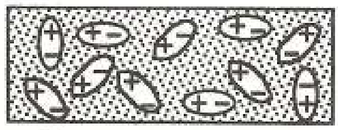
La capacitancia también aumenta en un factor κ

DIELECTRICOS: DESCRIPCION ATOMICA

La constante κ se denomina *constante dieléctrica* del material y mide la respuesta de sus dipolos moleculares a un campo eléctrico externo.

Los dipolos pueden ser de dos tipos:

a) *Dipolos permanentes:* Que poseen moléculas cuyos centros de cargas (+) no coinciden con sus centros de carga (-) (moléculas polares).

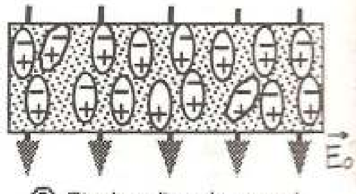


① Dipolos desorientados

b) *Dipolos inducidos:* Están en moléculas en las que sí coinciden los centros de cargas (+) con los de cargas (-), sin embargo, se puede provocar una ligera separación de cargas mediante un campo eléctrico externo (moléculas no-polares).

1 . En ausencia de un campo externo los dipolos están orientados al azar.

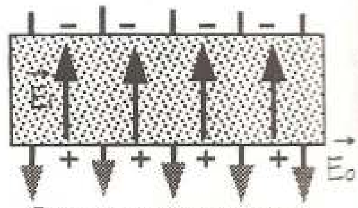
2 . La aplicación de un campo externo, $\vec{E}_0$, tenderá a orientar a los dipolos permanentes y a la vez también a inducir dipolos. Como resultado, aparecen de cada lado del dieléctrico más cargas de un signo que del otro. Es decir, ocurre una separación efectiva de cargas en los extremos del material (*cargas inducidas*).



② Dipolos alineados con el campo externo

3 . Las cargas inducidas crean a su vez un campo eléctrico $\vec{E}_i$ *(campo inducido)* en dirección opuesta al campo aplicado. Por lo tanto el campo neto E dentro del dieléctrico resulta disminuido:

$$E = E_0 - E_i = \frac{E_0}{\kappa}$$

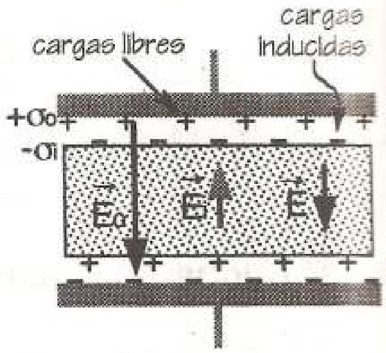


① La separación de cargas a cada lado produce un campo opuesto $\vec{E}_i$

El factor de reducción, κ, se denomina *constante dieléctrica* del material y es un número adimensional mayor que la unidad.

CARGAS LIBRES Y CARGAS INDUCIDAS

Para un condensador de placas paralelas podemos relacionar la densidad de cargas inducidas en la superficie del dieléctrico (σ_i) con la densidad superficial de cargas libres en las placas metálicas (σ_0).



El campo aplicado es $E_0=\sigma_0/\varepsilon_0$ y el campo inducido es opuesto y de magnitud $E_i = \sigma_i/\varepsilon_0$, tenemos:

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{\sigma_0 - \sigma_i}{\varepsilon_0}$$

Tomando en cuenta que $E/E_0=\kappa$, se deduce que:

$$\sigma_i = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

inducidas

$$\boxed{\sigma_i = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)}$$

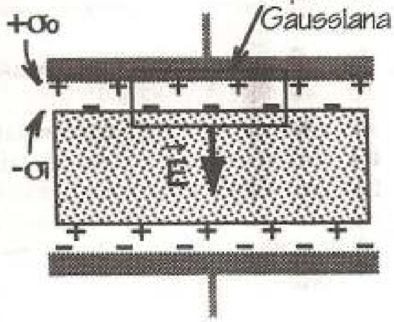
libres

Como $\kappa > 1$, de esta expresión se deduce que la densidad de cargas inducidas resulta siempre menor que la densidad de cargas libres.

LA LEY DE GAUSS PARA DIELECTRICOS

La ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada con la carga neta dentro de dicha superficie.

Si en un condensador de placas paralelas, escogemos una caja cilíndrica Gaussiana que tenga una tapa plana dentro de la superficie metálica y la otra que está ubicada dentro del dieléctrico. Esta superficie incluye *cargas libres* y *cargas inducidas* .



Podemos escribir a ley de Gauss así:

$$\varepsilon_0 \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{encerrada} = Q_{libre} + Q_{induc}$$

Si A es el área de las tapas del cilindro, la carga encerrada es:

$$Q_{encerrada} = (\sigma_0 - \sigma_i)A = \frac{\sigma_0 A}{\kappa} = \frac{Q_{libres}}{\kappa}$$

Por lo tanto podemos escribir la ley de Gauss de forma que relacione el campo resultante *únicamente con las cargas libres*:

Ley de Gauss para dieléctricos

$$\boxed{\varepsilon_0 \int_S \kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{libres}}$$

Esta expresión de la ley de Gauss tiene validez general para condensadores con dieléctricos de geometría arbitraria, aún cuando las diferentes partes de la superficie gaussiana esté embebida en dieléctricos con diferentes constantes κ.

PE-5.01. *La capacitancia de un condensador.....*

a) Es la cantidad de carga total que es capaz de almacenar.
b) Es el voltaje requerido para almacenar la unidad de carga.
c) Será mayor cuanto mayor sea el voltaje aplicado.
d) Será mayor cuanto menor sea el voltaje aplicado.
e) Es la constante de proporcionalidad entre la carga y el voltaje.

PE-5.02. *En los condensadores en serie......*

Cuando conectamos dos condensadores desiguales ($C_1 > C_2$) *en serie* con una batería, al comparar las:

cargas Q,
diferencias de potencial V,
y energías almacenadas U,

podemos afirmar que.....

a) $Q_1>Q_2$, b) $V_1>V_2$, c) $Q_1<Q_2$, d) $V_1<V_2$, e) $U_1>U_2$

PE-5.03. *En los condensadores en paralelo.....*

Cuando los condensadores son diferentes y se conectan *en paralelo* con una batería, si comparamos las:

cargas Q,
diferencias de potencial V,
y energías almacenadas U,

podemos afirmar que tendrán la misma:

a) Q, b) V, c) U, d) V y U, e) Q y U.

PP-5.04. *Paralelo vs. Serie.*

Sea un grupo de N condensadores idénticos que van a ser conectados en serie o en paralelo.
Si comparamos las capacitancias equivalentes de la combinación paralela y serie, ($C_{paralelo}/C_{serie}$) es igual a:

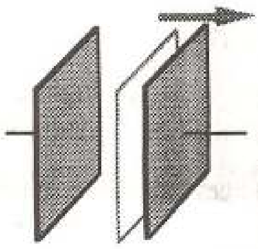
a) N, b) $2N$, c) N^2, d) $\sqrt{N}$, e) $N^{2/3}$

PP-5.05. *Desconecta la batería y separa las placas ..*

Un condensador de placas plano-paralelas y grandes, se carga hasta una diferencia de potencial y luego se desconecta de la fuente. Las placas se separan entonces hasta el doble de su separación original.

Este proceso *hará doblar* el valor de:

a) la capacitancia.
b) la fuerza entre las placas.
c) la carga en cada placa.
d) la energía almacenada.
e) el campo eléctrico entre las placas.

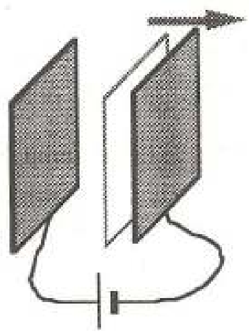


PP-5.06. *Mantenga la batería y separe las placas*

Un condensador de placas plano-paralelas se carga mediante una batería.. A continuación se aumenta la separación entre las placas, manteniendo conectada la batería.

Este proceso hará que *aumente* el valor de:

a) la carga del condensador .
b) el campo eléctrico entre las placas .
c) la energía almacenada.
d) la carga y la energía almacenada.
e) ni la carga, ni el campo eléctrico, ni la energía .

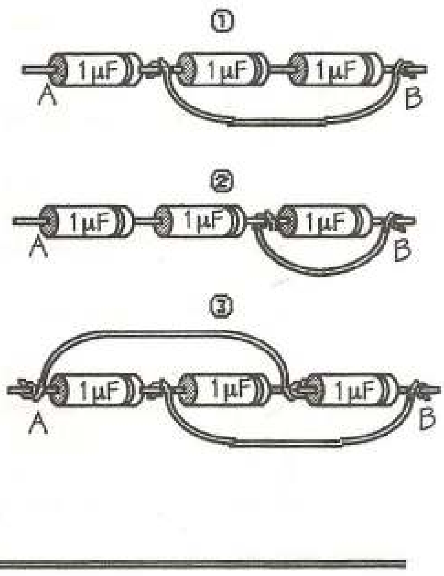


PE-5.07. *¿ Cuál combinación tendrá mayor C ?*

Tres condensadores idénticos se combinan como se muestra en las figuras.
Si calculamos las capacitancias equivalentes entre los extremos A y B de las tres combinaciones, entonces:

a) $C_1 > C_2 > C_3$
b) $C_3 > C_1 > C_2$
c) $C_2 > C_1 > C_3$
d) $C_3 > C_2 > C_1$
e) $C_1 > C_3 > C_2$

$C = \frac{Q}{V}$ dq Eds.



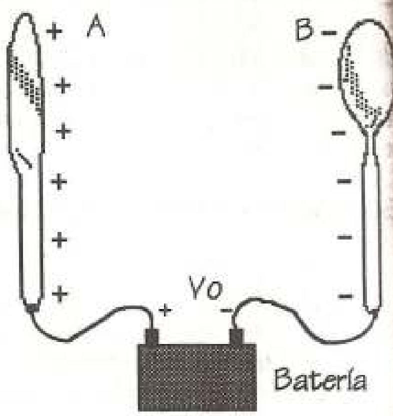
PP-5.08. *Acercando dos metales cargados..*

Dos objetos metálicos A y B están inicialmente a cierta distancia y se les conecta una batería, de V_0 voltios, de modo que adquieren cargas iguales y opuestas.

Después de desconectar la batería, acercamos los dos objetos hasta la mitad de su separación inicial.

En esta nueva situación se tendrá:

a) $V_{AB} < V_0$
b) $V_{AB} = V_0$
c) $V_{AB} = 2V_0$
d) $V_{AB} > 2V_0$
e) $V_0 < V_{AB} < 2V_0$

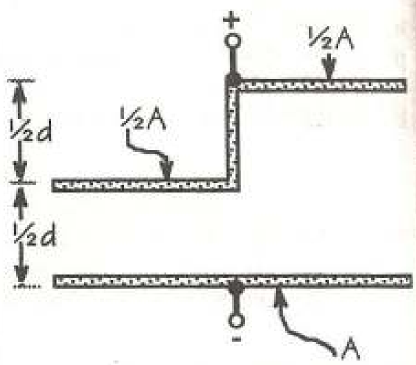


PP-5.09. *¿Cuál es la capacitancia ?*

Enfrente de una placa metálica plana, se coloca una placa metálica doblada como indica la figura.

La capacitancia del sistema es:

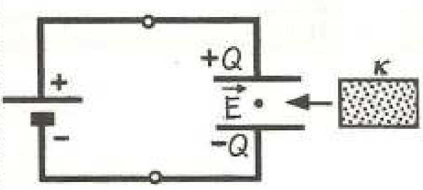
a) $C = \varepsilon_0 A/2d$
b) $C = 3\varepsilon_0 A/2d$
c) $C = 2\varepsilon_0 A/3d$
d) $C = \varepsilon_0 A/3d$
e) $C = 3\varepsilon_0 A/4d$



PP-5.10. *¿Qué sucederá al introducir el dieléctrico ?*

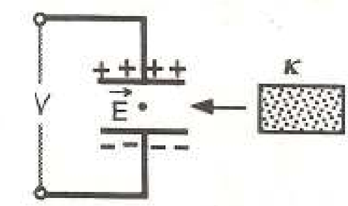
Mientras un condensador se mantiene conectado a una batería, se le introduce un bloque de dieléctrico que llena todo el espacio entre su placas. Respecto de la carga Q en las placas del condensador y del campo eléctrico E en la región entre las placas, podemos afirmar que al insertar el dieléctrico:

a) Q permanece contante y E permanece constante.
b) Q disminuye y E permanece constante.
c) Q aumenta y E disminuye.
d) Q aumenta y E aumenta.
e) Q aumenta y E permanece constante.



PP-5.11. *¿ Qué sucede al potencial y al campo ?*

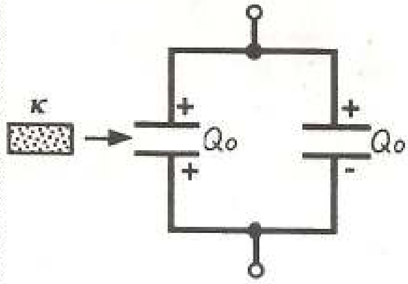
Un condensador se carga mediante una batería y luego se aísla. A continuación se le introduce un bloque de dieléctrico que llena todo el espacio entre su placas. Respecto de la diferencia de potencial V entre las placas y del campo eléctrico E en el punto P, podemos decir que al insertar el dieléctrico:



a) V permanece contante y E disminuye.
b) V disminuye y E permanece constante.
c) V disminuye y E disminuye.
d) V permanece constante y E aumenta.
e) V permanece constante y E permanece constante.

PP-5.12. *¿ Cuánta carga se transfiere ?*

Dos condensadores idénticos están conectados en paralelo y cada uno posee una carga Q_0. A continuación se introduce un dieléctrico de constante κ=3 en uno de ellos. En consecuencia, se transfiere de un condensador al otro una cantidad de carga:



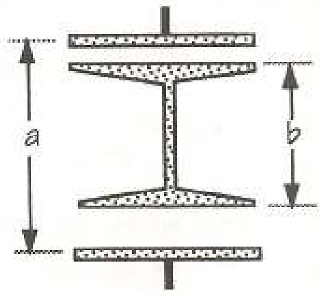
a) $\frac{1}{2}Q_0$, b) $\frac{2}{3}Q_0$, c) $\frac{3}{4}Q_0$, d) $\frac{1}{3}Q_0$, e) $\frac{1}{4}Q_0$

Cap. 5: Respuestas

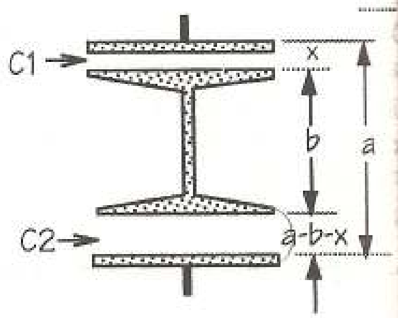
Pregunta	a	b	c	d	e
PE-5.01					✓
PE-5.02				✓	
PE-5.03		✓			
PE-5.04			✓		
PE-5.05				✓	
PE-5.06					✓
PE-5.07		✓			
PE-5.08	✓				
PE-5.09		✓			
PE-5.10					✓
PE-5.11			✓		
PE-5.12	✓				

√ PR 5.01. Condensador con sección móvil

Un condensador de placas paralelas separadas por una distancia a, *tiene una sección central rígida de longitud* b *que es móvil verticalmente.*
Determine la capacitancia equivalente de la combinación y demuestre que ésta es independiente de la posición de la sección central.



Solución: Cuando la pieza central se coloca entre las dos placas cargadas, ocurre una separación de cargas en esta pieza, con cargas -Q en frente de la placa positiva y +Q enfrente de la placa negativa. Se tienen así dos condensadores, C_1 y C_2, de igual área A, que están conectados en *serie*.



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{x}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{(a - b - x)}$$

Donde x es la separación de las placas superiores, y $(a - b - x)$ la separación de las placas inferiores. La capacitancia equivalente está determinada por:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 A} + \frac{(a - b - x)}{\varepsilon_0 A} = \frac{(a - b)}{\varepsilon_0 A}$$

De donde:

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{(a - b)}$$

que es independiente de la posición vertical de la pieza central.

Respuesta:

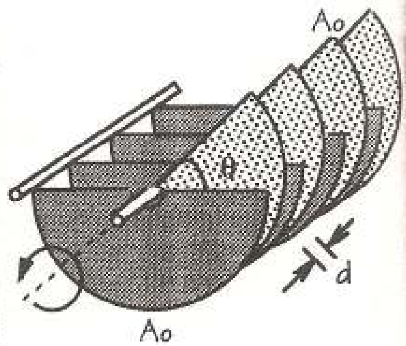
$$\boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{(a - b)}}$$

PR 5.02. ¡ Sintoniza la radio !

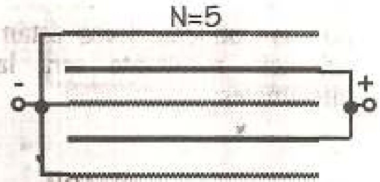
La figura muestra un condensador variable del tipo empleado para sintonizar aparatos de radio. Está formado por un juego de placas fijas conectadas entre sí y alternadamente, otro juego de placas con posibilidad de rotación.
Si hay un total de N *placas, cada una con un área* A_0 *y separadas de las placas contiguas por una distancia* d.

a) Halle la capacitancia para $\theta = 0°$.

b) Halle la capacitancia para $\theta = 45°$.

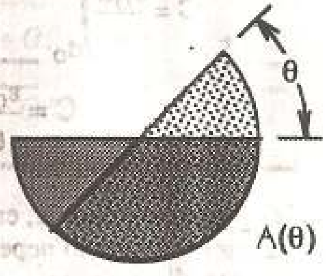


Solución: Según se ilustra en la figura, si hay 5 placas se forman 4 condensadores. Se infiere que para un total de N placas conectadas alternadamente, se tendrán (N-1) condensadores conectados en paralelo.



Si d es la separación entre placas adyacentes y $A(\theta)$ es el área solapada, la capacitancia equivalente de (N-1) condensadores idénticos en paralelo será la suma:

$$C(\theta) = (N-1)C_o = (N-1)\frac{\varepsilon_o C(\theta)}{d}$$



a) Si $\theta=0°$, el área solapada es A_o y tendremos la máxima capacitancia:

$$C_{máx} = (N-1)\frac{\varepsilon_o A_o}{d}$$

b) Si $\theta = 45°$, el área solapada es $\frac{1}{2}A_o$ y la capacitancia es:

$$C = \frac{1}{2}(N-1)\frac{\varepsilon_o A_o}{d}$$

Respuesta:

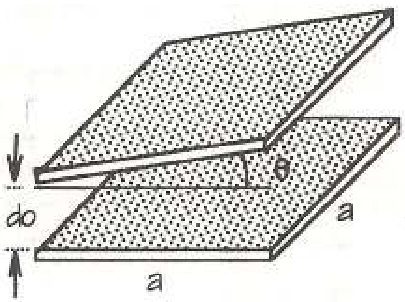
$$\boxed{C(\theta) = (N-1)\frac{\varepsilon_o C(\theta)}{d}}$$

√PR 5.03. *Las placas no son perfectamente paralelas*

Un condensador tiene placas cuadradas de lado a*, que no están perfectamente paralelas sino que forman un ángulo θ entre sí, siendo d_o la separación mínima, como indica la figura.*

Demuestre que, para θ pequeño, la capacitancia está dada por:

$$C = \frac{\varepsilon_o a^2}{d_o}\left(1 - \frac{a\theta}{2d_o}\right)$$



Solución: Si el ángulo de inclinación es pequeño, podemos suponer que el campo eléctrico es vertical y subdividir las placas en una sucesión de plaquitas infinitesimales paralelas.

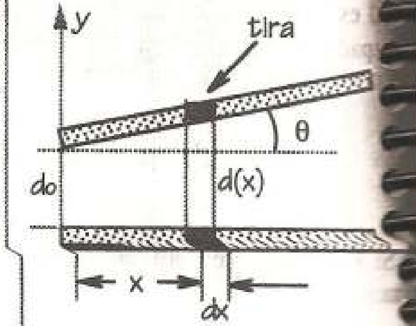
Consideremos un par de placas infinitesimales de espesor dx, a una distancia x del origen y separadas por una distancia vertical y. La capacitancia de este condensador elemental es:

$$dC = \varepsilon_o a dx/y$$

Si θ es pequeño $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ y la relación entre y y x es:

$$y = d_o + x\,\operatorname{tg}\theta \approx d_o + x\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = dy/\theta$$

Como los condensadores están efectivamente en paralelo, la capacitancia resultante será la suma de las capacitancias infinitesimales:



$$C = \frac{\varepsilon_o a}{\theta}\int_{d_o}^{d_o + a\theta} \frac{dy}{y} = \frac{\varepsilon_o a}{\theta} \ln y \,\Big|_{d_o}^{d_o + a\theta}$$

$$C = \frac{\varepsilon_o a}{\theta} \ln\left(1 + \frac{a\theta}{d_o}\right)$$

Si θ es pequeño y $d_o \ll a$, entonces $z = a\theta/d_o \ll 1$ y podemos aproximar el logaritmo neperiano por los dos primeros términos de su desarrollo en serie:

$$\ln(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \ldots\ldots \cong z - \tfrac{1}{2}z^2.$$

Con esta aproximación tenemos finalmente:

$$C = \frac{\varepsilon_o a^2}{d_o}\left(1 - \frac{a\theta}{2d_o}\right)$$

Respues

$$C = \frac{\varepsilon_o a^2}{d_o}\left(1 - \frac{a\theta}{2d_o}\right)$$

Si $\theta = 0$, resulta la C de placas paralelas.

PR 5.04. *Condensadores con polaridad opuesta*

Dos condensadores C_1 y C_2 están cargados a una diferencia de potencial V_o. Se desconectan de la fuente y se unen entre sí con polaridad opuesta, es decir, el lado positivo de un condensador con el lado negativo del otro condensador, y viceversa.

Determine

a) las cargas iniciales de los condensadores.
b) la nueva diferencia de potencial.
c) las cargas finales de los condensadores.

Suponga los valores:
$C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$, $V_o = 100$ V

Solución: a) Inicialmente las cargas en los condensadores son respectivamente:

$$Q_1 = C_1 V_o = (3 \times 10^{-6} F)(100V) = 3 \times 10^{-4} C.$$
$$Q_2 = C_2 V_o = (1 \times 10^{-6} F)(100V) = 1 \times 10^{-4} C.$$

b) Cuando se conectan con polaridad opuesta, habrá una compensación parcial de cargas y la carga neta resultante es:

$$Q' = Q_1 - Q_2 = (C_1 - C_2)V_0$$

Los condensadores quedan en paralelo ($C_{eq}=C_1+C_2$) y la carga total se distribuye hasta que la nueva diferencia potencial vuelva a ser igual para ambos:

$$V' = \frac{Q'}{C'_{eq}} = \frac{(C_1 - C_2)V_0}{(C_1+C_2)}$$

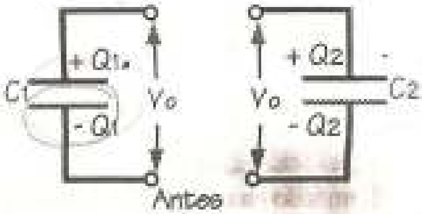
Reemplazando los valores numéricos:

$$V' = \left[\frac{3x10^{-4}F - 1x10^{-4}F}{3x10^{-4}F + 1x10^{-4}F}\right](100V) = 50V$$

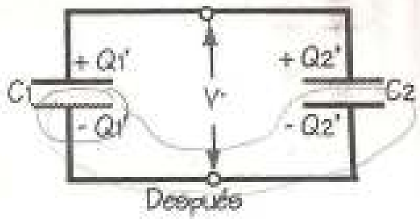
c) Las nuevas cargas son respectivamente:

$$Q_1' = C_1V' = (3\ x10^{-6}F)(50V) = 1,5x10^{-4}C.$$

$$Q_2' = C_2V' = (1x10^{-6}F)(50V) = 5,0x10^{-5}C.$$



Antes



Después

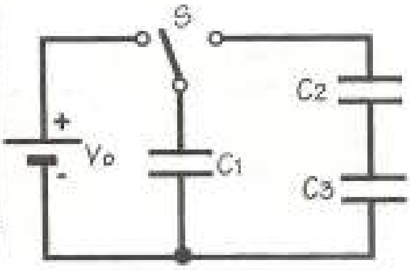
Respuesta:

a) $Q_1 = 3x10^{-4}C$, $Q_2 = 1x10^{-4}C$
b) $V' = 50\ V$
c) $Q_1' = 1,5x10^{-4}C$, $Q_2' = 5x10^{-5}C$

PR 5.04. ¿ Cómo se reparte la carga ?

En el circuito de la figura, los condensadores C_1, C_2 y C_3 están descargados inicialmente. Cuando el interruptor S se pasa a la posición izquierda, el condensador C_1 se carga al voltaje V_0 de la batería.

Si ahora el interruptor S se pasa a la posición de la derecha, ¿ cuáles serán las cargas de los condensadores ?



Solución: Inicialmente la carga en C_1 es $Q_0 = C_1V_0$. Al pasar S a la derecha, parte de esta carga fluye hacia las placas de C_2 y C_3.

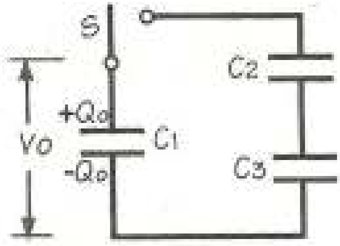
La *conservación de la carga* requiere que:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

Además la rama que conecta C_2 con C_3 debe mantenerse neutra, por lo tanto:

$$-Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow Q_2 = Q_3$$

Antes



Por otra parte, la *suma de potenciales* de C_2 y C_3 debe se igual al potencial de C_1:

$$V_1 = V_2 + V_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Tomando en cuenta que: $Q_2 = Q_3 = (Q_0 - Q_1)$ se tiene:

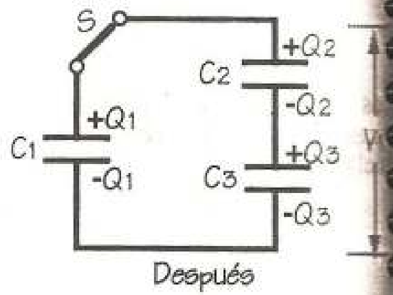
$$\frac{Q_1}{C_1} = (Q_0 - Q_1)\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Despejando Q_1 y poniendo $Q_0 = C_1 V_0$, tenemos:

$$Q_1 = \frac{Q_0(1/C_2 + 1/C_3)}{(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3)} = \frac{V_0 C_1^2 (C_2 + C_3)}{(C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3)}$$

Similarmente, las cargas en C_2 y C_3 son:

$$Q_2 = Q_3 = Q_0 - Q_1 = \frac{V_0 C_1 C_2 C_3}{(C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3)}$$



Respuesta

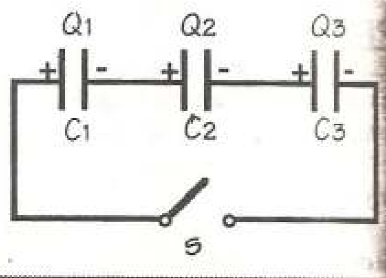
$$Q_1 = \frac{V_0 C_1^2 (C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

$$Q_2 = Q_3 = \frac{V_0 C_1 C_2 C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}$$

PR 5.06. ¿ Cómo se reparten las cargas ?

Tres condensadores C_1, C_2 y C_3 se cargan por separado con cargas Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente, y a continuación se conectan en serie, con las polaridades indicadas.

¿ Cuál será la carga en cada condensador, después de cerrar el interruptor S ?



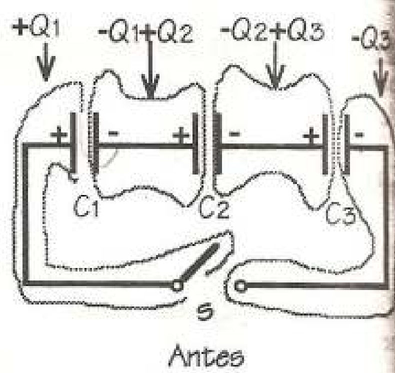
Solución: De acuerdo a la ley de *conservación de la carga* eléctrica, en cada rama por separado podemos igualar la carga antes y después de haber cerrado el interruptor S:

$$Q_2' - Q_1' = Q_2 - Q_1 \quad \Rightarrow \quad Q_2' = Q_2 - Q_1 + Q_1' \qquad \text{(i)}$$

$$Q_3' - Q_2' = Q_3 - Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_3' = Q_3 - Q_2 + Q_2' \qquad \text{(ii)}$$

$$Q_1' - Q_3' = Q_1 - Q_3 \quad \Rightarrow \quad Q_3' = Q_3 - Q_1 + Q_1' \qquad \text{(iii)}$$

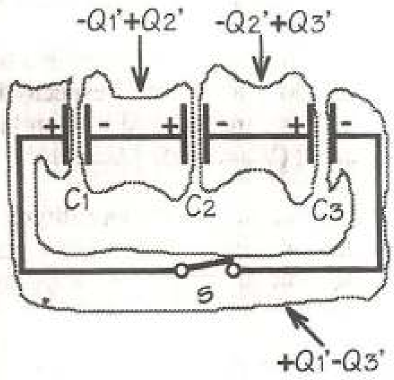
Además, es evidente que al cerrar S, se iguala el potencial de la placa izquierda de C_1 con el de la placa derecha de C_3.



La diferencia de potencial (nula) entre los extremos, es la suma de las diferencias de potencial de los condensadores individuales:

$$V_1' + V_2' + V_3' = 0$$

$$\frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} + \frac{Q_3'}{C_3} = 0$$



Después

Reemplazando las cargas Q_2' y Q_3' por sus expresiones (i) y (iii), en términos de Q_1', se tiene:

$$\frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2 - Q_1 + Q_1'}{C_2} + \frac{Q_3 - Q_1 + Q_1'}{C_3} = 0$$

Después de reordenar y simplificar los términos, podemos finalmente despejar Q_1' en función de las cargas conocidas:

$$Q_1' = \frac{Q_1C_1(C_2+C_3) - Q_2C_1C_3 - Q_3C_1C_2}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}$$

Reemplazando esta expresión de Q_1' de vuelta en las relaciones (i) y (iii) obtenemos Q_2' y Q_3':

$$Q_2' = \frac{Q_2C_2(C_1+C_3) - Q_3C_2C_1 - Q_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}$$

$$Q_3' = \frac{Q_3C_3(C_1+C_2) - Q_1C_3C_2 - Q_2C_3C_1}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}$$

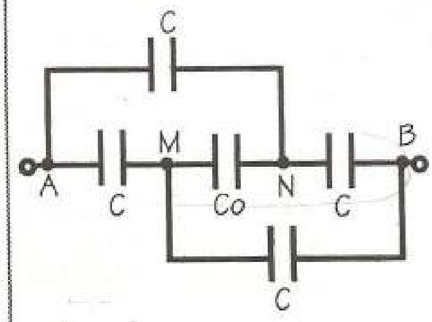
Respuesta:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1' &= \frac{Q_1C_1(C_2+C_3) - Q_2C_1C_3 - Q_3C_1C_2}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \\ Q_2' &= \frac{Q_2C_2(C_1+C_3) - Q_3C_1C_2 - Q_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \\ Q_3' &= \frac{Q_3C_3(C_1+C_2) - Q_1C_3C_2 - Q_2C_3C_1}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \end{aligned}}$$

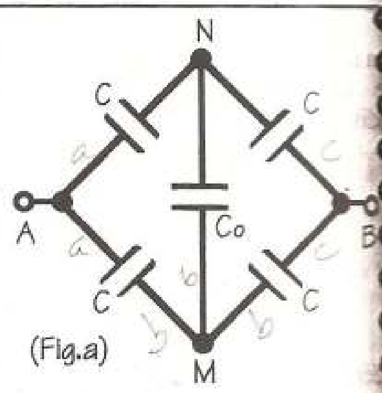
PR 5.07. *Aprovechando la simetría*

Cinco condensadores se encuentran conectados como indica la figura. Cuatro de ellos son idénticos y de valor C y el del medio es diferente, de valor C_0.

Determine la capacitancia equivalente entre los puntos A y B



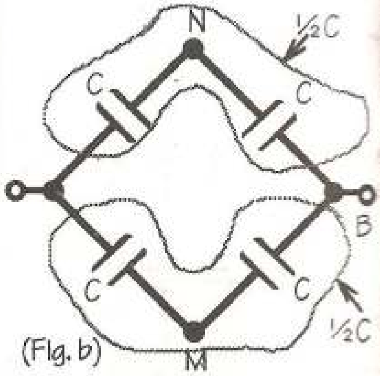
Solución: Para apreciar mejor la simetría, procedemos a re-dibujar los alambres de conexión (Fig.a).



(Fig.a)

Supongamos que se conecta una batería entre los terminales A y B. Debido a la simetría (respecto de un eje AB), es evidente que los puntos simétricos M y N en la rama vertical están al mismo potencial ($V_N = V_M$).

Esto significa que no hay diferencia de potencial a través del condensador central C_o y por lo tanto éste está descargado. En consecuencia, podemos desconectarlo sin que ello afecte el resto del circuito (Fig. b).



(Fig. b)

Con esta simplificación, tenemos ahora un circuito constituido por dos ramas en paralelo. La de arriba es una combinación serie cuya capacitancia equivalente es:

$$C_{ANB} = CC/(C+C) = \tfrac{1}{2}C.$$

Similarmente, la rama de abajo es una combinación serie que equivale a ½C.

Por lo tanto, la capacitancia equivalente entre A y B es la resultante de dos condensadores de valor ½C, combinados en paralelo:

$$C_{AB} = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C = C$$

Respuesta

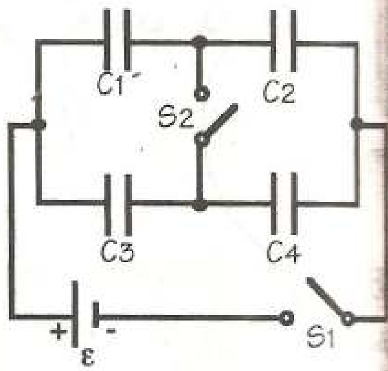
$\boxed{C_{AB} = C}$

PR 5.08. *Conmutación de condensadores.*

En el circuito mostrado, inicialmente ambos interruptores están abiertos y todos los condensadores están descargados.

a) Si se cierra S_1, ¿cuál será la carga en cada condensador ?
b) Se además, se cierra S_2, cuál será la nueva carga en cada condensador ?
c) Después de cerrar S_2, ¿cuánta carga circuló a través de S_2 ?

$$C_1=6\mu F,\quad C_2=3\mu F,\quad C_3=1\mu F,\quad C_4=4\mu F,\quad \varepsilon=15\ v.$$



Solución: (a) Con S_1 *cerrado:* C_1 queda en serie con C_2 y sus cargas son iguales, $Q_1 = Q_2$. Además, la suma de sus voltajes da el voltaje total de la fuente:

$$V_{AB} = \varepsilon = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

Despejando Q_1, tenemos:

$$Q_1 = Q_2 = \varepsilon\,(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}) = (15V)\,\frac{(6\mu F)(3\mu F)}{(6\mu F+3\mu F)} = 30\mu C$$

De manera similar, C_3 y C_4 están en serie y,

$$Q_3 = Q_4 = \varepsilon\,(\frac{C_3C_4}{C_3+C_4}) = (15V)\,\frac{(1\mu F)(4\mu F)}{(1\mu F+4\mu F)} = 12\mu C$$

(b) *S_1 y S_2 cerrados:* En este caso quedan $C_1 // C_3$ y $C_2 // C_4$. Igualando los voltajes de los condensadores en paralelo:

$$V_1=V_3 \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_3}{C_3} \Rightarrow Q_1= Q_3(\frac{C_1}{C_3}) = 6Q_3$$

$$V_2=V_4 \Rightarrow \frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_4}{C_4} \Rightarrow Q_2= Q_4(\frac{C_2}{C_4}) = \frac{3}{4}Q_4$$

Si tomamos en cuenta que la carga neta en el conductor central debe permanecer nula, $(Q_2 + Q_4 - Q_1 - Q_3 = 0)$ y usando las expresiones anteriores de Q_1 y Q_2, tenemos:

$$Q_4 = Q_3 + Q_1 - Q_2 = Q_3 + 6Q_3 - \frac{3}{4}Q_4 \Rightarrow Q_4 = 4Q_3$$

Por otra parte, la suma de los voltajes de C_3 y C_4 es el voltaje total de la fuente:

$$\varepsilon = V_3 + V_4 = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = Q_3\,(\frac{1}{C_3} + \frac{4}{C_4}) = 2x10^6Q_3$$

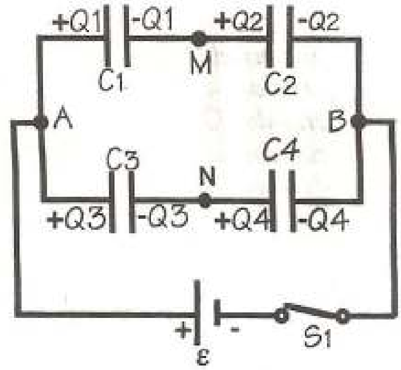
Por lo tanto:

$$Q_3 = \varepsilon/2x10^6 = (15V/2x10^6F^{-1}) = 7{,}5\mu C$$
$$Q_4 = 4Q_3 = 4 \times 7{,}5\mu C = 30\mu C$$
$$Q_1 = 6Q_3 = 6 \times 7{,}5\mu C = 45\mu C$$
$$Q_2 = 3Q_4/4 = 22{,}5\mu C$$

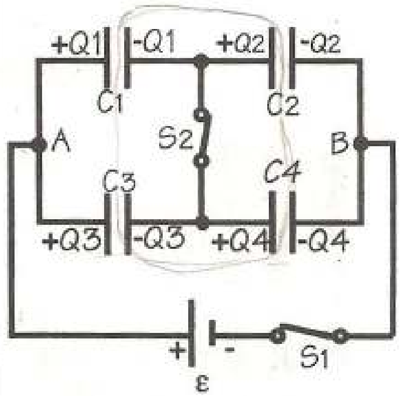
c) La carga que circuló por el interruptor S_2 es la carga neta en la rama inferior:

$$\Delta Q = Q_4 - Q_3 = 30\mu C - 7{,}5\mu C = 22{,}5\mu C$$

que debe coincidir con el negativo de la carga neta en la rama superior.



(a) S1 cerrado



(b) S_1 y S_2 cerrados

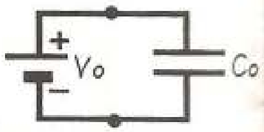
Respuesta:

a) $Q_1 = Q_2 = 30\mu C$
$Q_3 = Q_4 = 12\mu C$
b) $Q_1 = 45\mu C$, $Q_2 = 22{,}5\mu C$
$Q_3 = 7{,}5\mu C$, $Q_4 = 30\mu C$
c) $\Delta Q = 22{,}5\mu C$

PR-5.09. *Para obtener un voltaje elevado*

Un condensador C_0 se carga a un voltaje V_0 mediante una pila A continuación se desconecta de la pila y se conecta a otro condensador C_1. Luego C_0 se desconecta y se usa para cargar otro condensador C_2; después C_0 carga a un tercero, C_3, y así sucesivamente. Finalmente los condensadores cargados $C_1, C_2., C_3$, etc,..se acoplan uno a continuación de otro.

¿ Cuál será la máxima diferencia de potencial obtenible entre los extremos de la cadena de condensadores ?



Suponga que
$C_1 = C_2 = C_3 = ... = C_0/100$

Solución: Después que el condensador C_0 se desconecta de la pila su carga inicial es $Q_0 = C_0V_0$ Al conectar C_0 con C_1 esta carga se distribuye hasta que sus voltajes sean iguales.

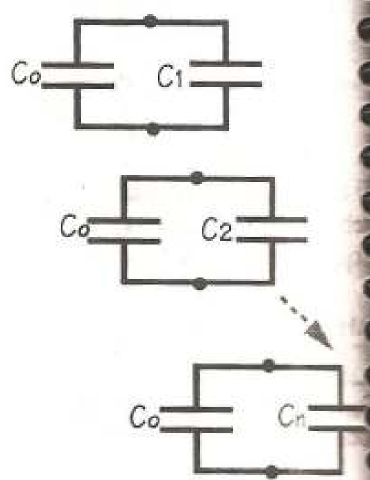
$$V_1 = \frac{Q_0}{C_{eq}} = \frac{C_0V_0}{C_0+C_1} = \left(\frac{C_0}{C_0+C}\right)V_0$$

Cuando se desconecta C_o, su voltaje es V_1 y la carga que le queda es:

$$Q_0' = C_0V_1 = \frac{C_0^2V_0}{C_0+C}$$

Después de conectar C_o con C_2, esta carga se distribuye hasta igualar sus voltajes.
El nuevo voltaje de C_o y C_2 es:

$$V_2 = \frac{Q_0'}{C_0+C_2} = \frac{1}{C_0+C}\left(\frac{C_0^2V_0}{C_0+C}\right) = \left(\frac{C_0}{C_0+C}\right)^2V_0$$

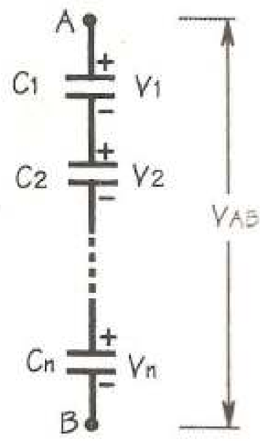


Podemos repetir esta operación n veces y tendremos así un conjunto de condensadores cargados a expensas de C_o con voltajes V_1, V_2, V_3, ...,V_n., siendo el voltaje del n-simo condensador:

$$V_n = \left(\frac{C_0}{C_0+C}\right)^nV_0$$

Al conectar estos condensadores cargados, uno a continuación de otro, el voltaje total en los extremos es la suma

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + V_3 + .. + V_n + ...$$



Observe que las cargas individuales de los condensadores se mantienen sin re-distribuirse (¿por qué ?)

$$V_{AB} = (\frac{C_o}{C_o+C})V_o + (\frac{C_o}{C_o+C})^2 V_o + ... + (\frac{C_o}{C_o+C})^n V_o + ...$$

$$V_{AB} = (\frac{C_o V_o}{C_o+C})[1 + r + r^2 + r^3 + ...]$$

El término en corchetes es una serie geométrica cuya razón es: $r = C_0/(C_0+C) < 1$, y cuya suma viene dada por:

$$[1 + r + r^2 + r^3 + ...] = \frac{1}{(1-r)} = \frac{1}{1 - C_o/(C_o+C)} = \frac{(C_o+C)}{C}$$

Por lo tanto la diferencia de potencial máxima en los extremos de la cadena es:

$$V_{AB} = (\frac{C_o V_o}{C_o+C})(\frac{C_o+C}{C}) = (\frac{C_o}{C})V_o$$

En el caso particular para $C = C_0/100$, tenemos: $V_{AB} = 100V_0$.

Respuesta:

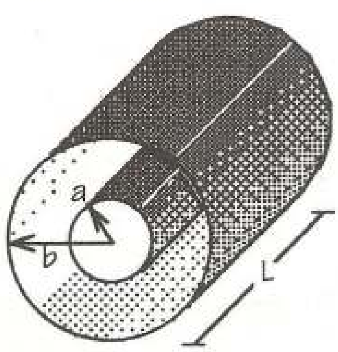
$$\boxed{V_{AB} = (\frac{C_o}{C})V_o = 100V_o}$$

PR 5.10. *Energía en condensador cilíndrico.*

Considere un condensador cilíndrico de radios a *y* b, *que está cargado. Demuestre que la mitad de la energía electrostática está almacenada dentro de un cilindro cuyo radio es:*

$$R = \sqrt{ab}$$

(Ignore efectos de borde)

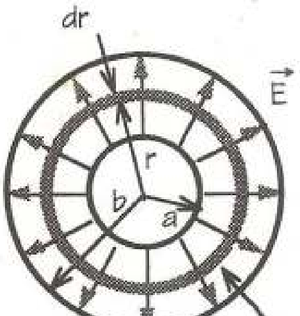


Solución: Si Q es la carga en el cilindro interno, entonces el campo eléctrico es radial y su magnitud a una distancia r del eje está dada por:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}$$

Donde L es la longitud del cilindro. La densidad de energía (energía por unidad de volumen) en ese punto es:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 L^2 r^2}$$



Si consideramos un casquete cilíndrico de longitud L, radio r y espesor dr, (volumen $dV = 2\pi rL\, dr$), la energía contenida es:

$$dU = u\, dV = \left(\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 L^2 r^2}\right)(2\pi r L\, dr) = \frac{Q^2 dr}{4\pi\varepsilon_0 L^2 r}$$

Por lo tanto, la energía total almacenada en una región de radio R es:

$$U_R = \int_a^R u\, dV = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\int_a^R \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Para determinar la energía "total" almacenada dentro del condensador sustituimos R por b:

$$U_b = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Si queremos hallar un radio R tal que $U_R/U_b = ½$, entonces:

$$\ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{ab}$$

Respuesta:

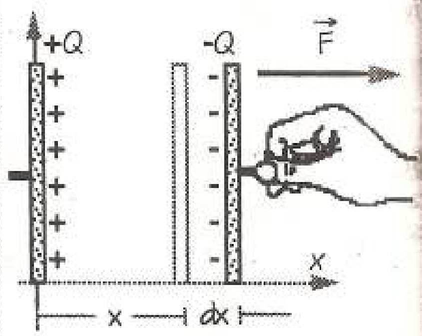
$$\boxed{R = \sqrt{ab}}$$

PR 5.11. *Atracción entre placas paralelas*

Considere un condensador de placas paralelas con cargas ±Q. ¿Cuál es la fuerza de atracción entre las placas ?

Solución: Si A es el área de las placas y x la separación, la energía electrostática almacenada es:

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 A}$$



El trabajo que habría que realizar para separar las placas en una distancia diferencial adicional dx aplicando una fuerza F(x) es*

$$dW = F(x)\, dx$$

El trabajo realizado se traduce en un incremento de la energía potencial electrostática:

$$dU = \left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\right) dx$$

Por lo tanto:

$$dU = dW \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$$

Respuesta:

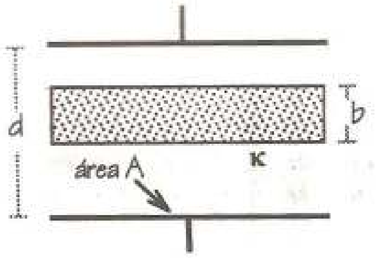
$$\boxed{F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}}$$

* Esta técnica se conoce en física como ***Principio del trabajo virtual***, ya que el desplazamiento no se lleva a cabo realmente.

PR 5.12. *Condensador parcialmente lleno*

Un bloque de material de constante dieléctrica κ *y de espesor* b *es insertado entre las placas de un condensador de placas paralelas de área* A *y separación* d.

Determine la nueva capacitancia.



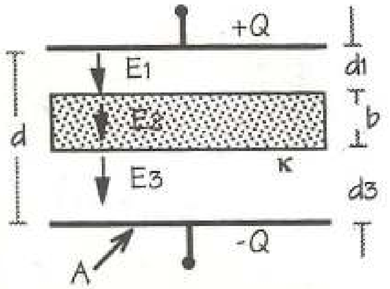
Solución: Supongamos una carga +Q en la placa superior y una carga -Q en la placa inferior (Fig. a).

El campo eléctrico en las regiones vacías, se obtiene aplicando Gauss:

$$E_1 = E_3 = E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Mientras que en la región con dieléctrico el campo eléctrico se reduce en un factor κ.

$$E_2 = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 A}$$

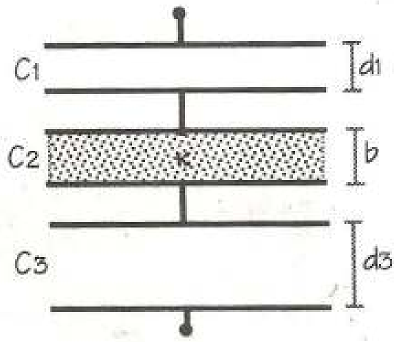


(Fig. a)

El campo es uniforme en cada región y podemos expresar la diferencia de potencial entre las placas como la suma:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = E_0 d_1 + \left(\frac{E_0}{\kappa}\right)b + E_0 d_3$$

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left(d_1 + \frac{b}{\kappa} + d_3\right) = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 A}[\kappa(d_1+d_3) + b]$$



(Fig. b)

Si tomamos en cuenta que:

$$(d_1 + d_3) = (d - b),$$

la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa(d_1 + d_3) + b} = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa d - b(\kappa - 1)}$$

Podríamos haber obtenido un idéntico resultado, considerando que el condensador está constituido por *tres condensadores en serie,* estando el del medio lleno con dieléctrico (Fig. b).

Se observa que el resultado no depende de la ubicación del dieléctrico dentro de las placas.

Respuesta:

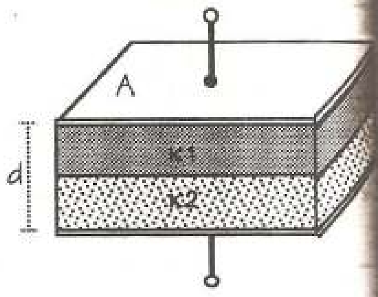
$$\boxed{C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa d - b(\kappa - 1)}}$$

PR 5.13. *Condensador con dieléctrico mixto I.*

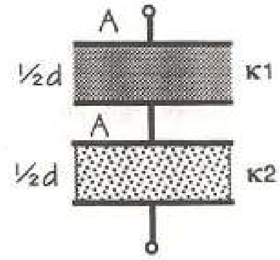
Sea un condensador de placas paralelas, de área A *y separación* d. *Se insertan dos bloques de constantes dieléctricas* κ_1 *y* κ_2, *cada una de ellas de espesor* ½ d *y de área* A, *como indica la figura. Demostrar que la nueva capacitancia viene dada por:*

$$C = \left(\frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right)C_o$$

Donde C_o *es la capacitancia original.*



Solución: Podemos considerar que este condensador es equivalente a *dos condensadores conectados en serie*, como indica la figura* . Las dos capacitancias están dadas por:



$$C_1 = \frac{\kappa_1\varepsilon_0 A}{d/2}, \qquad C_2 = \frac{\kappa_2\varepsilon_0 A}{d/2}$$

La capacitancia equivalente de la combinación serie es:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d/2}{\kappa_1\varepsilon_0 A} + \frac{d/2}{\kappa_2\varepsilon_0 A} = \frac{d}{2\varepsilon_0 A}\left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}\right)$$

Como la capacitancia original era: $C_o = \varepsilon_o A/d$, tenemos:

$$C = \frac{2\varepsilon_o A}{d}\left(\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right) = C_o\left(\frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right)$$

* La capacitancia no se altera si imaginamos que en la interfaz de los dieléctricos hay una película metálica muy delgada. Cuando el condensador tiene carga ±Q, se puede suponer que en la laminita imaginaria, habría carga +Q en un lado y carga -Q del otro lado, de forma tal que la carga neta global de la laminita es cero.

Respuesta

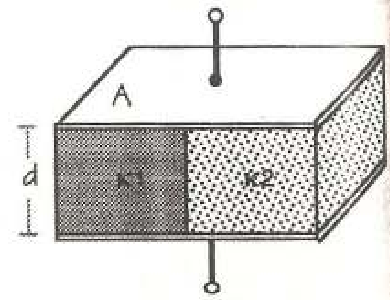
$$\boxed{C = \left(\frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right)C_o}$$

PR 5.14. *Condensador con dieléctrico mixto II.*

Sea un condensador de placas paralelas de área A *y separación* d. *Se insertan dos bloques dieléctricos de constantes* κ_1 *y* κ_2, *cada una de ellas de espesor* d *y área* ½A, *como indica la figura. Demostrar que la nueva capacitancia es:*

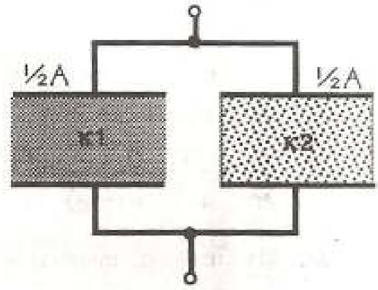
$$C = C_o\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)$$

Donde C_o *es la capacitancia original.*



$C_0 = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ $C_1 = K_1 C_0$

Solución: Podemos considerar que este condensador es equivalente a dos condensadores conectados *en serie*, como indica la figura.
La capacitancia equivalente es la suma de las capacitancias individuales:



$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 (A/2)}{d} + \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 (A/2)}{d}$$

En términos de la capacitancia original $C_0 = \varepsilon_0 A/d$, tenemos:

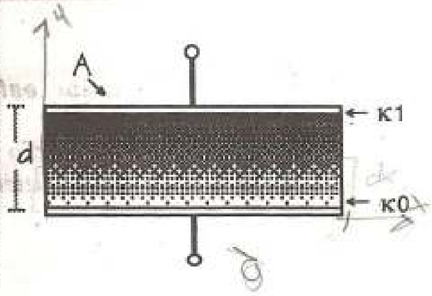
$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\kappa_1 + \kappa_2) = C_0\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)$$

Respuesta:

$$\boxed{C = C_0\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)}$$

PR 5.15. *Condensador con dieléctrico lineal*

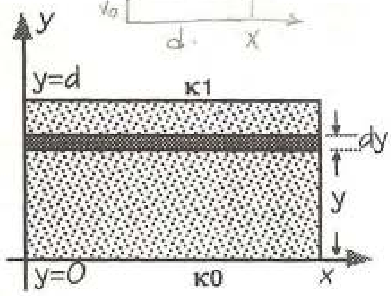
Un condensador de placas paralelas tiene área $L \times L$, *y separación entre placas* $d \ll L$. *Está relleno con un dieléctrico no uniforme, cuya constante varía linealmente de una placa a la otra. En la placa inferior el valor de la constante dieléctrica es* κ_0, *mientras que en la superior, el valor es* κ_1.



Determine la capacitancia.

Solución: La constante dieléctrica es una función lineal de la coordenada y:

$$\kappa(y) = \kappa_0 + [(\kappa_1 - \kappa_0) y/d]$$



Por lo tanto, dividiremos el dieléctrico en tiras de espesor Δy, y área $L \times L$.
La capacitancia de esta tira es:

$$C(y) = \kappa(y)\frac{\varepsilon_0 L^2}{\Delta y}$$

Todas las tiras desde $y = 0$ hasta $y = d$ están *en serie*, y se cumple que el inverso de la capacitancia total es la *suma* de los inversos de todas las capacitancias así constituidas.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\sum_i C_i} \rightarrow \int_0^d \frac{dy}{\kappa(y)\varepsilon_0 L^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 L^2}\int_0^d \frac{dy}{\kappa_0 + [(\kappa_1 - \kappa_0) y/d]}$$

Integrando:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 L^2(\kappa_1-\kappa_0)} \ln[\kappa_0+(\kappa_1-\kappa_0)y/d]\Big|_0^d$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 L^2(\kappa_1-\kappa_0)} \ln\left[\frac{\kappa_0+(\kappa_1-\kappa_0)}{\kappa_0}\right] = \frac{d\ln(\kappa_1/\kappa_0)}{\varepsilon_0 L^2(\kappa_1-\kappa_0)}$$

Tomando el inverso, tenemos finalmente la capacitancia:

$$C = \frac{\varepsilon_0 L^2(\kappa_1-\kappa_0)}{d\ \ln(\kappa_1/\kappa_0)}$$

* Verifique que en el límite $\kappa_1=\kappa_0$ esta expresión se reduce a la expresión conocida de la capacitancia de placas paralelas con un dieléctrico uniforme

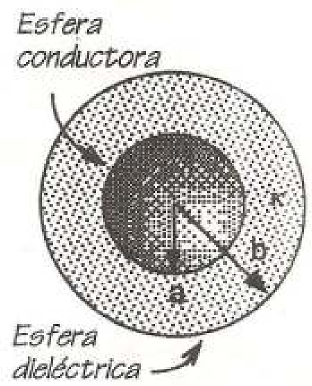
Respuest

$$\boxed{C = C_0\left(\frac{\kappa_1-\kappa_0}{\ln(\kappa_1/\kappa_0)}\right)}$$

PR 5.16. _ ***Condensador esférico con dieléctrico.***

Una esfera conductora de radio a *embebida en una esfera dieléctrica concéntrica que se extiende desde un radio* a *hasta un radio* b.

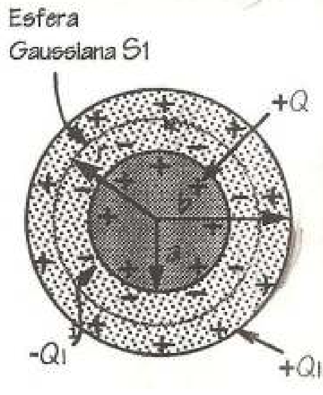
Determine la capacitancia de la esfera.



Solución: El campo eléctrico producido por la esfera conductora con carga Q, se obtiene aplicando la ley de Gauss a una esfera concéntrica imaginaria de radio r.

En la región donde existe dieléctrico ($a < r < b$), la carga neta encerrada es la carga libre Q, en la superficie del conductor, menos la carga inducida en la superficie interior del dieléctrico, Q_i:

$$\varepsilon_0 \int_{S1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0(4\pi r^2 E) = (Q-Q_i) = Q\left(1-\frac{Q_i}{Q}\right) = \frac{Q}{\kappa}$$

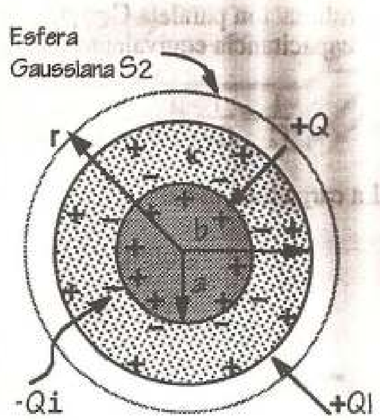


Despejando, tenemos la magnitud del campo en el dieléctrico:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \kappa r^2} \qquad (a < r < b)$$

Mientras que en la región exterior, libre de dieléctrico ($r > b$), la carga neta encerrada es sólo la carga libre del conductor, Q:

$$\varepsilon_0 \int_{S2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0(4\pi r^2 E) = Q \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > b)$$



La diferencia de potencial entre la esfera conductora, V_a y el infinito $V_\infty = 0$, es:

$$V_a - V_\infty = -\int_\infty^a \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_\infty^b E\,dr - \int_b^a E\,dr$$

Reemplazando las expresiones correspondientes de E, tenemos:

$$V_a = 0 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^b \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

Después de integrar:

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa a}\left[1 + \frac{a}{b}(\kappa - 1)\right]$$

Podemos asignar una capacitancia al sistema si suponemos que el electrodo metálico faltante es una esfera conductora de radio infinito.

$$C = \frac{Q}{V_a} = \frac{4\pi\varepsilon_0\kappa a}{\left[1 + \frac{a}{b}(\kappa - 1)\right]}$$

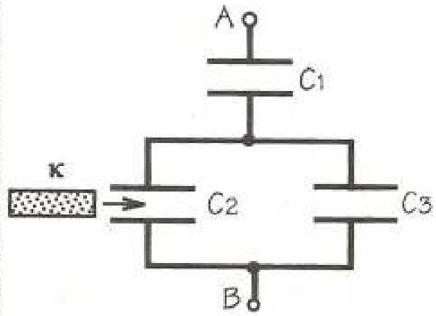
Respuesta:

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0\kappa a}{\left[1 + \frac{a}{b}(\kappa - 1)\right]}}$$

ojo
Hacer!

PR 5.17. *Trabajo para introducir el dieléctrico.*

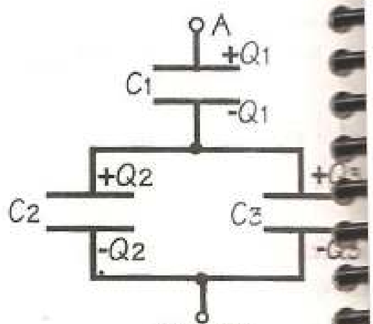
Tres condensadores idénticos de igual capacitancia $C_1 = C_2 = C_3 = C_o$, están conectados como se indica en la figura. Inicialmente los terminales A y B tienen una diferencia de potencial V_o. A continuación, en el condensador C_2 se introduce un bloque de constante dieléctrica κ.



a) Calcule la nueva diferencia de potencial V_{AB}.
b) Calcule el trabajo realizado por el agente externo para introducir el dieléctrico.

Solución: a) El condensador C_1 está en serie con la combinación paralela $C_2 // C_3$. Antes de introducir el dieléctrico la capacitancia equivalente está dada por:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2+C_3}=\frac{1}{C_o}+\frac{1}{2C_o} \quad \Rightarrow \quad C=\frac{2}{3}C_o$$



(Antes)

La carga total almacenada es:

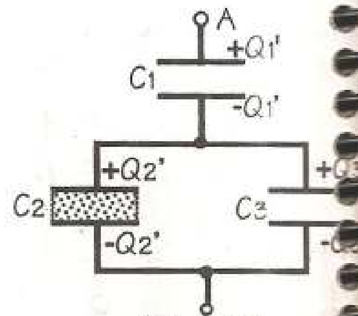
$$Q = CV_o = (2/3)C_oV_o = Q_1$$

$$Q = Q_2 + Q_3 = (2/3)C_oV_o$$

$$Q_2 = Q_3 = (1/3)C_oV_o$$

Después de introducir el dieléctrico, la carga total se conserva y se re-distribuye entre C_2 y C_3 hasta igualar sus voltajes:

$$V_2' = V_3' \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2'}{C_2'}=\frac{Q_3'}{C_3'}, \qquad \frac{Q_2'}{\kappa C_0}=\frac{Q_3'}{C_0} \quad \Rightarrow \quad Q_2' = \kappa Q_3'$$



(Después)

Tomando en cuenta que :

$$Q_2' + Q_3' = Q = (2/3)C_oV_o,$$

Tenemos:

$$Q_1' = \frac{2}{3}C_oV_o, \qquad Q_2' = \frac{2\kappa C_oV_o}{3(\kappa+1)}, \qquad Q_3' = \frac{2\ C_oV_o}{3(\kappa+1)}$$

La nueva diferencia de potencial es:

$$V_{AB}' = V_1' + V_2' = \frac{Q_1'}{C_1'}+\frac{Q_2'}{C_2'} = \frac{(2/3)C_oV_o}{C_o} + \frac{2\kappa C_oV_o/3(\kappa+1)}{\kappa C_o}$$

$$V_{AB}' = \frac{2(\kappa+2)}{3(\kappa+1)}V_o$$

b) El trabajo hecho "por" el agente externo es:

$$W = U_{fin} - U_{ini} = \frac{1}{2}Q_fV_f - \frac{1}{2}Q_iV_i = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}C_oV_o^2\right)\left[\frac{2(\kappa+2)}{3(\kappa+1)} - 1\right]$$

$$W = -\frac{1}{9}\frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)}C_oV_o^2$$

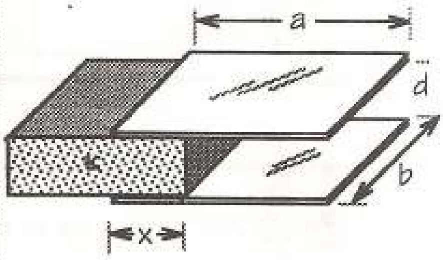
El trabajo es negativo, lo cual significa que el dieléctrico es succionado hacia el condensador.

Respue

a) $V_{AB}' = \frac{2(\kappa+2)}{3(\kappa+1)}V$

b) $W = -\frac{1}{9}\frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)}C_o$

PR 5.18. *El condensador se "chupa" al dieléctrico.*

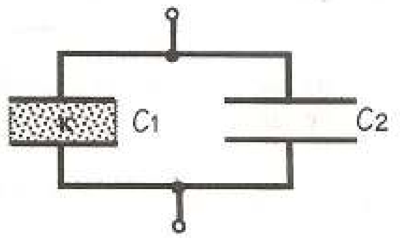


Sea un condensador de placas rectangulares a x b *y separación* d. *Estando el condensador cargado con carga* Q, *se introduce un material dieléctrico de constante* κ, *a una distancia* x *dentro de las placas, como en la figura.*

a) Determine la fuerza sobre el dieléctrico .

b) ¿Por qué el dieléctrico es atraído por las placas ?

Solución: a) Cuando el dieléctrico es introducido hasta una distancia x, el condensador equivale a dos condensadores en paralelo, uno de las cuales tiene dieléctrico y el otro no (Fig. a). La capacitancia equivalente es la suma:

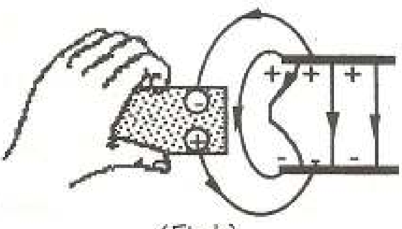


(Fig. a)

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa\varepsilon_0 x b}{d} + \frac{\varepsilon_0 (a - x) b}{d} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}[a + x(\kappa - 1)]$$

La energía almacenada en el condensador es:

$$U(x) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2b\varepsilon_0\,[a + x(\kappa - 1)]}$$



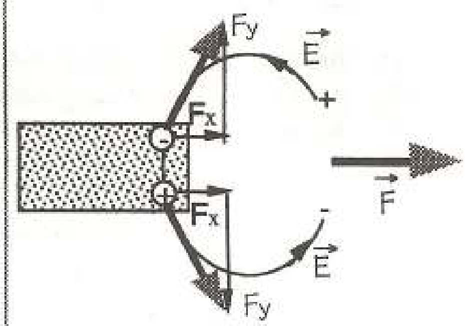
(Fig.b)

Si cambia la distancia x, sin que varíe la carga Q, el cambio de energía almacenada viene dado por:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{Q^2}{2b\varepsilon_0}\right)\frac{-(\kappa - 1)}{[a + x(\kappa - 1)]^2}$$

El hecho de que (dU/dx) sea negativo significa que al incrementarse x, la energía almacenada disminuye y por lo tanto se realiza trabajo sobre el agente externo.

Es decir, el trabajo del campo electrostático es: dW = Fdx = -dU. Por lo tanto, la fuerza F con la que el campo *atrae al dieléctrico* es:



(Fig.c)

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{Q^2}{2b\varepsilon_0}\right)\frac{(\kappa - 1)}{[a + x(\kappa - 1)]^2}$$

y en la figura apunta hacia la derecha. Observe que el valor de F es máximo para x = 0.

b) La fuerza se debe a que el dieléctrico se encuentra en un campo eléctrico no-uniforme, cerca de las orillas de las placas del condensador. El campo actúa sobre las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico, como se ilustra en la Figuras b y c.

Respuesta:

$$\boxed{F(x) = \left(\frac{Q^2}{2b\varepsilon_0}\right)\frac{(\kappa - 1)}{[a + x(\kappa - 1)]^2}}$$

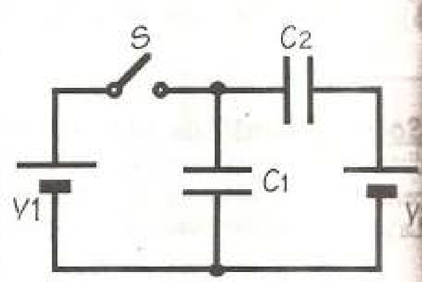
PROBLEMAS PARA RESOLVER

PP-5.01. ***¿Cuál es la carga en los condensadores ?***

Considere el circuito mostrado que consiste de dos condensadores C_1 y C_2. y de dos baterías cuyos voltajes son V_1 y V_2 respectivamente.

a) Determine las cargas en los condensadores antes y después de cerrar el interruptor S.

b) ¿Qué cantidad de carga pasa por el interruptor S al cerrarlo ?



Respuesta:

a) Antes de cerrar S: $Q_1 = Q_2 = V_2\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)$
Después: $Q_1 = C_1V_1$, $Q_2 = C_2(V_1 - V_2)$

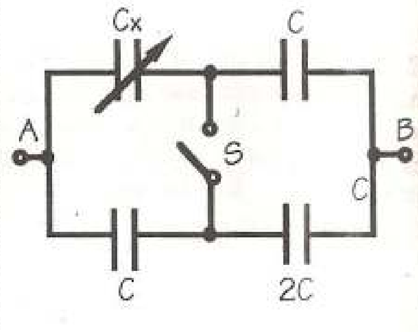
b) Carga que pasa por S: $C_1V_1 + C_2(V_1 - V_2)$

Ayuda: Los dos condensadores están inicialmente en serie con la batería V2. Al cerrar el interruptor, el voltaje en C1 es el mismo de la batería V1 mientras que el de C2 es la diferencia de los voltajes de las dos baterías.

PP-5.02. ***Abriendo o cerrando el suiche, da lo mismo.***

En el esquema representado, el valor de la capacitancia C_x se ajusta hasta que la capacitancia equivalente en los terminales AB tenga el mismo valor, antes y después de cerrar el interruptor S.

¿ Cuáles son los valores de C_x y de C_{AB} ?



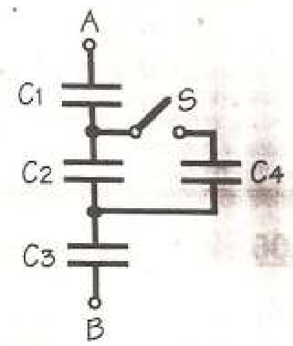
Respuesta:

$C_x = \frac{1}{2}C$, $C_{AB} = C$

Ayuda: Exprese C_{AB} en términos de C_x para ambas situaciones. Cuando S está abierto la rama serie de arriba está en paralelo con la rama serie de abajo. Cuando S está cerrado, la rama paralela de la izquierda está en serie con la rama paralela de la derecha.

PP-5.03. *Conmutando condensadores*

En el circuito mostrado y estando el interruptor S abierto, los terminales A y B se conectan a una batería de V_o Voltios y luego se desconectan de la batería. De esta manera, inicialmente los condensadores C_1, C_2 y C_3 están cargados, mientras que el condensador C_4 está descargado. A continuación se cierra el interruptor S.



Si los cuatro condensadores son idénticos,
a) ¿ cuál es la nueva diferencia de potencial en cada uno de los condensadores ?
b) ¿ cuál es la nueva diferencia de potencial total V_{AB} ?.

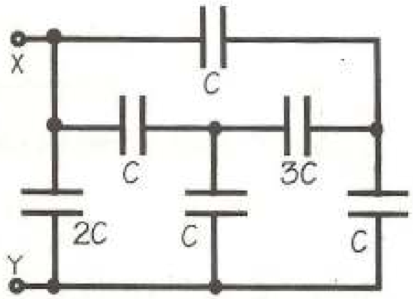
Respuesta:

a) $V_1 = V_3 = \frac{1}{3}V_o$, $V_2 = V_4 = (1/6)V_o$
b) $V_{AB} = (5/6)V_o$.

Ayuda: Al cerrar S, la cargas en C_1 y C_3 no se alteran. La carga en C2 se reparte por igual entre C_2 y C_4.

PP-5.04. *Aprovechando la simetría*

Hallar la capacidad equivalente entre los terminales xy del siguiente arreglo de condensadores.



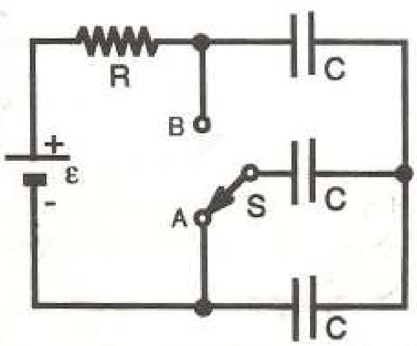
Respuesta:

$$C_{xy} = 3C$$

Ayuda: Redibujando el circuito se ve que. por simetría, en el condensador 3C no hay diferencia de potencial y puede eliminarse. Quedan dos combinaciones serie de condensadores C (de valor C/2 cada una). Las dos combinaciones están a su vez en paralelo con 2C.

PP-5.05. *¿Realiza algún trabajo la batería ?*

En el circuito mostrado cuando se pasa el conmutador S de la posición A a la posición B.



a) ¿ Cambia la energía total almacenada en los condensadores ?
b) ¿ Realiza la batería algún trabajo ?
c) ¿ Se disipa energía en la resistencia ?

Respuesta:

a) No.

b) Si. $W_B = C\varepsilon^2/3$

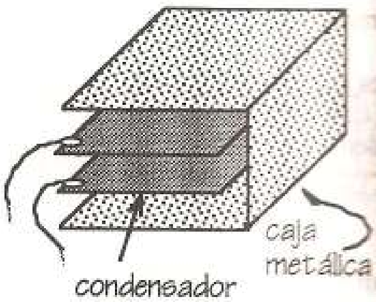
c) Si. $E_R = C\varepsilon^2/3$

Ayuda: La capacitancia total y la carga total almacenada no varían. Compare las cargas en cada condensador antes y después y verifique que por la batería debe pasar cierta carga ΔQ. El trabajo que realiza la batería debe ser igual al calor desprendido en R.

PP-5.06 . *Condensador dentro de una cajita.*

Un condensador plano de capacitancia C es encerrado en una cajita metálica, como indica la figura. La distancia de las placas del condensador a las caras paralelas de la cajita, es la misma que la separación entre las placas del condensador.
¿ Cuál es la nueva capacitancia ?*

*Desprecie efectos de borde.



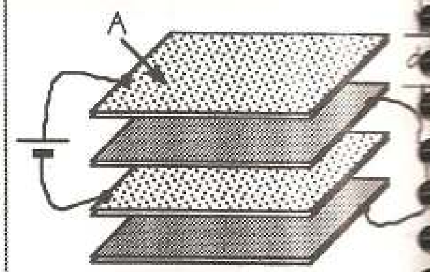
Respuesta:

$$C = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_o A}{d}$$

Ayuda: Las dos placas del condensador sirven de electrodos a dos condensadores y el arreglo total equivale a tres condensadores de igual capacidad. Los dos externos están en serie y el del medio está acoplado en paralelo a este par.

PP-5.07. *Placas Interconectadas*

Cuatro placas idénticas de área A se encuentran en el aire paralelamente y a iguales distancias d una de la otra. Dos de las placas están conectadas entre sí mediante un alambre y las otras dos, están conectadas a los bornes de una batería, como indica la figura.
Determine la capacitancia del sistema*



Respuesta:

$$C = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_o A}{d}$$

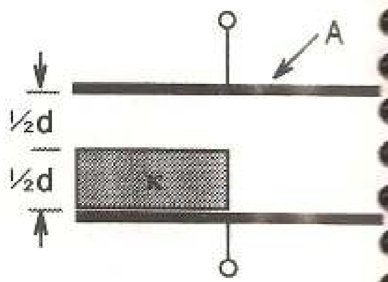
*Desprecie efectos de borde.

Ayuda: El sistema equivale a tres condensadores de igual C. La placa del lado (-) de la batería es común a dos condensadores que están en paralelo. La placa del lado (+) es el electrodo de un condensador que está en serie con la combinación paralela de los dos anteriores.

PP-5.08. *¿ Cuál es la capacitancia ?*

En un condensador de placas paralelas de área A y separación d se introduce un bloque dieléctrico de constante κ, que llena la cuarta parte de su espacio vacío, como indica la figura.

Determine la capacitancia equivalente.



Respuesta:

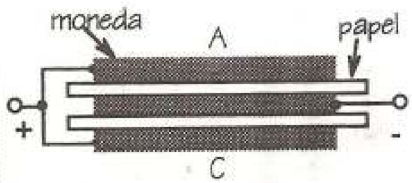
$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}\left(\frac{3\kappa + 1}{\kappa + 1}\right)$$

Ayuda: Es equivalente a tres condensadores de igual área, (A/2). Dos de ellos, están a la izquierda, tienen separación (d/2) y conectados en serie: uno sin dieléctrico y el otro con dieléctrico. El tercero, está a la derecha, tiene separación (d) y está en paralelo con la combinación serie.

PP-5.09. *Un condensador de papel-moneda.*

Tres monedas de diámetro D=2,3 cm y espesor d=1,5mm se colocan separadas por hoja de papel de 0,1 mm de espesor y constante dieléctrica κ=5. Las monedas exteriores se conectan al terminal (+) de una pila de 1,5 Voltios y la moneda interior se conecta al terminal (-), como muestra la figura.

a) ¿ Cuál es la capacitancia resultante ?
b) ¿Cuál es la carga en cada moneda ?



Respuesta:

a) $C = \frac{2\kappa\varepsilon_0 A}{d} = 3{,}67\times10^{-10}F$

b) $Q_A = Q_C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}V = 2{,}75\times10^{-10}C$

$Q_B = -2Q_A = -5{,}5\times10^{-10}C$

Ayuda: Son dos condensadores idénticos, con dieléctrico, que tienen un electrodo en común: la moneda del medio. Esta tiene su carga total negativa repartida por igual en sus dos caras. Los dos condensadores están en paralelo.

PP 5.10. *¿ Cuál es la constante dieléctrica?.*

Un condensador de placas paralelas de área A=4 cm^2 y separación d =1 mm. tiene originalmente una diferencia de potencial V_0 = 30 Voltios. Al introducir un bloque de material aislante entre las placas el voltaje se reduce a 10 Voltios.

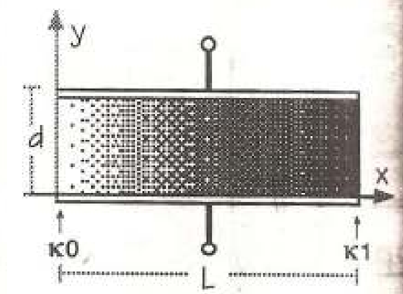
a) ¿ Cuál es la constante dieléctrica del bloque ?
b) ¿ Cuál es la densidad de cargas libres en las placas y la densidad de cargas inducidas en el dieléctrico ?

Respuesta:

a) κ=3
b) E= 10^4 N/C
c) $\sigma_0 = 0{,}266\mu C/m^2$; $\sigma_i = 0{,}177\mu C/m^2$

Ayuda: La constante dieléctrica es justamente el factor de reducción del campo eléctrico. La densidad de cargas libres en las placas es responsable del campo aplicado y no varía. La densidad de cargas inducidas en el dieléctrico es responsable de que el campo se reduzca.

PP 5.11. *Placas paralelas y dieléctrico no uniforme*



Un condensador de placas paralelas tiene área LxL, y separación entre placas $d \ll L$. Está relleno con un dieléctrico no uniforme, cuya constante aumenta linealmente desde un valor κ_0, en x=0 hasta un valor κ_1 en x=L.

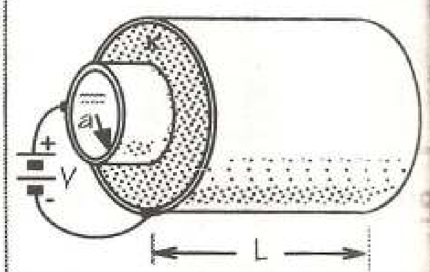
Determine la capacitancia.

Respuesta:

$$C = \left(\frac{\varepsilon_0 L^2}{d}\right)\left(\frac{\kappa_1+\kappa_0}{2}\right)$$

Ayuda: Se divide en condensadores elementales en forma de tiras perpendiculares a las placas, de ancho dx y constante dieléctrica $\varepsilon(x)$ Las capacitancias elementales están en paralelo y se suman.

PP-5.12. *Condensador cilíndrico con dieléctrico*



Un condensador cilíndrico de longitud L = 12 cm, radio interno a = 3 mm y radio externo b = 6 mm, contiene un dieléctrico de constante κ = 4 que llena el espacio entre los conductores cilíndricos.
Se aplica una diferencia de potencial V = 2500 Voltios entre las conchas conductoras.

Determine:
a) La capacitancia del condensador.
b) Las densidades de carga en la superficie de cada cilindro conductor y en los bordes interior y exterior del dieléctrico.

Respuesta:

a) $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\kappa L}{\ln(b/a)} = 3{,}85\times10^{-11}F = 38{,}5\ pF$

b) $\sigma = \frac{CV}{2\pi aL} = 4{,}26\times10^{-5}C/m^2$ (conductor interior)

$\sigma = \frac{CV}{2\pi bL} = 2{,}13\times10^{-5}C/m^2$ (conductor exterior)

$\sigma_a = \frac{CV}{2\pi aL}(1 - \frac{1}{\kappa}) = 3{,}19\times10^{-5}C/m^2$ (borde interior)

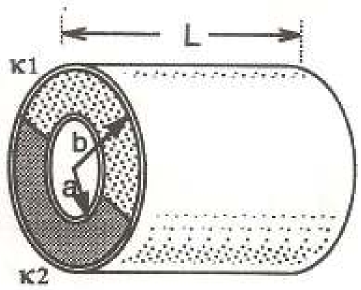
$\sigma_b = \frac{CV}{2\pi bL}(1 - \frac{1}{\kappa}) = 1{,}60\times10^{-5}C/m^2$ (borde exterior)

Ayuda: Imagine cargas +Q y -Q en los conductores y escoja una superficie gaussiana cilíndrica para hallar el campo eléctrico en el interior del dieléctrico. A partir de E, calcule la diferencia de potencial en términos de Q y de allí determine, la capacitancia.

PP-5.13. *Condensador cilíndrico con dieléctrico mixto*

Considere un condensador cilíndrico de radios a y b y longitud L, que tiene un dieléctrico en el espacio entre los conductores. El dieléctrico está constituido por dos semi-cilindros de igual tamaño y cuyas constantes son κ_1 y κ_2 respectivamente, como indica la figura.

Determine la capacitancia.



Respuesta:

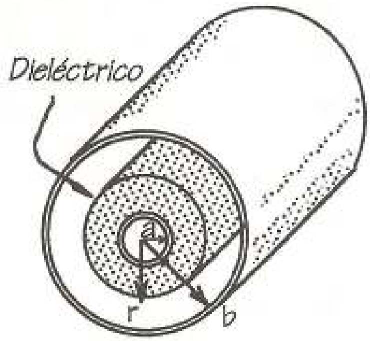
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)$$

Ayuda: La interfase dieléctrica es paralela al campo E. y la configuración puede ser considerada como dos condensadores en paralelo. Cada condensador por separado tiene la mitad de la carga que tendría si el dieléctrico la llenara completamente.

PP-5.14. *Línea coaxial con dieléctrico incompleto*

Sea un cable coaxial que está constituida por un conductor cilíndrico central de radio a y un conductor cilíndrico hueco externo de radio b. En el espacio entre los dos conductores está un dielectrico en contacto con el conductor interno y de radio exterior $r < b$.

Determine la capacitancia por unidad de longitud.



Respuesta:

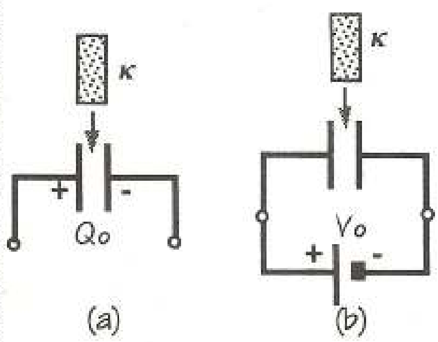
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\kappa}{\ln(r/a) + \kappa\ln(b/r)}$$

Ayuda: La superficie externa del dieléctrico es una equipotencial y podemos imaginar que está cubierta con una película conductora con cargas iguales y opuestas (esto no altera el campo). Se tiene así dos condensadores cilíndricos, uno dentro del otro, que están conectados en serie.

PP-5.15. *¿ Quien realiza trabajo ?*

Calcule la variación de la energía almacenada en un condensador de capacitancia C_0, al introducir un dieléctrico de constante κ, en las siguientes condiciones experimentales:

a) El condensador tiene carga Q_0 y está aislado.
b) El condensador permanece conectado a una batería de fem igual a V_0.



O.X.

Respuesta:

a) $\Delta U = -\frac{1}{2}\frac{Q_o^2}{C_o}(1 - \frac{1}{\kappa})$, (disminuye)
(El campo trabaja sobre el dieléctrico)

b) $\Delta U = +\frac{1}{2}C_o V_o^2(\kappa - 1)$, (aumenta)
La batería realiza un trabajo

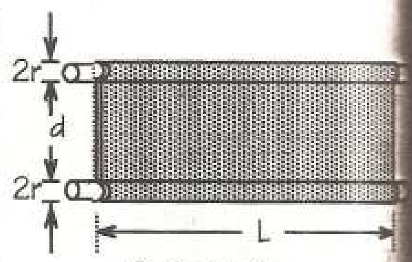
$$W_b = + C_o V_o^2(\kappa - 1) = +2\Delta U$$

Ayuda: Use las expresiones de la energía con y sin dieléctrico. En el caso (a) la energía disminuye; significa que el campo trabaja y se chupa al dieléctrico. En el caso (b) la energía aumenta pero esto no implica que el agente externo debe realizar trabajo para insertar el dieléctrico. Del trabajo hecho por la batería, la mitad va a aumentar la energía almacenada en C y la otra mitad se usa en el trabajo para chupar el dieléctrico en el campo.

PP-5.16. *Capacitancia del cable de antena de TV*

El cable gemelo que es plano y se usa para conectar la antena de la TV, consiste de dos hilos conductores paralelos, de radio r=0,25 mm, separados por una distancia d = 12 mm.

Halle la capacitancia de un trozo de cable de longitud L = 1 m.*



Cable gemelo

Respuesta:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ln(\frac{d}{r} - 1)} = 7,2 \text{ pF}$$

* Suponga que $r \ll d$.

Ayuda: Se colocan cargas con densidades lineales iguales y opuestas en cada cable. Considerándolos como líneas de carga se calcula (por Gauss) el campo en espacio entre ellas. Se determina la diferencia de potencial en términos de la carga en un trozo de longitud finita y de allí la capacitancia. Se podría también, tomar en cuenta el efecto dieléctrico del material plástico de separación

6

CORRIENTE Y RESISTENCIA

En los capítulos anteriores, hemos considerado las cargas en reposo. La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad se refieren a las cargas en movimiento, es decir, a corrientes eléctricas. En un material, el transporte de las cargas bajo la aplicación de campos eléctricos está limitado por cierta clase de "fricción" que se opone a la fuerza eléctrica. Para describir estos procesos en forma macroscópica se define la resistencia eléctrica, que cuantifica la dificultad para establecer una corriente eléctrica. En este capítulo se dará una descripción cualitativa de la corriente y de los factores que contribuyen a la resistencia eléctrica.

En este capítulo Ud.' encontrará aspectos vinculados con:

- Corriente eléctrica.
- Densidad de corriente
- Resistencia, resistividad y conductividad.
- La ley de Ohm.
- Modelo clásico de conducción eléctrica.
- Energía eléctrica y potencia.
- Combinaciones de resistencias.

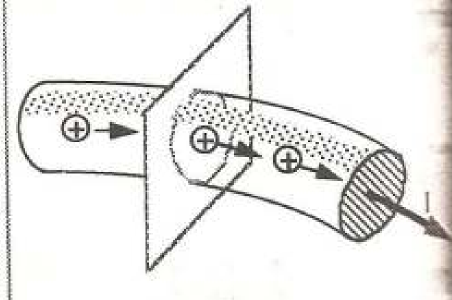
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

LA CORRIENTE ELECTRICA

Una corriente eléctrica es cualquier flujo neto de carga. Se define la intensidad de la corriente como la rapidez de flujo de carga eléctrica a través de una superficie imaginaria, tal como la sección de un conductor.

Si ΔQ es la carga que fluye por la sección del conductor en un tiempo Δt, definimos la intensidad de la corriente por la relación:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right) = \frac{dQ}{dt}$$



$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

UNIDAD SI DE CORRIENTE: 1 Ampere = 1C/s.

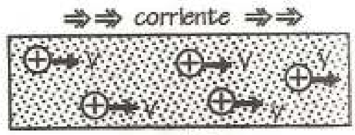
$$1\ \text{Ampere} = \frac{1\ \text{Coulomb}}{\text{segundo}}$$

DIRECCION DE LA CORRIENTE

Para producir una corriente es necesario que en el medio existan partículas cargadas que tengan cierta libertad de desplazarse. Los portadores de carga pueden ser electrones, iones (+) o (-), o partículas macroscópicas que tenga carga neta.

Como la corriente siempre posee un sentido, es por tanto una cantidad escalar con signo.

Por convención, se toma como *sentido positivo de la corriente, el de la trayectoria que seguirían las cargas positivas (Fig. a), aún si se trata de cargas negativas que se mueven en dirección contraria (Fig. b).*



(a)

(b)

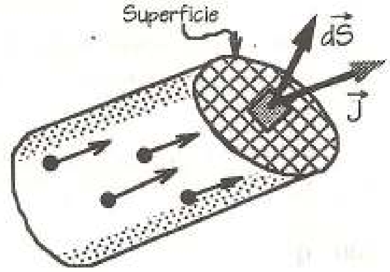
DENSIDAD DE CORRIENTE

Sea un conductor de sección transversal S que lleva una corriente i. Si di es la parte de la corriente que pasa por un elemento dS, se define una densidad de corriente, J, como la corriente por unidad de área transversal:

$$J = di/dS \qquad (A/m^2)$$

$$\text{Densidad de corriente} = \frac{\text{Corriente}}{\text{Area}}$$

La densidad de corriente es un vector, $\vec{J}$, cuya dirección y sentido corresponden a los del vector velocidad del movimiento ordenado de los portadores positivos y cuya magnitud es la corriente por unidad de área de la sección transversal.



La densidad de corriente, $\vec{J}$, puede ser no uniforme y la corriente que atraviesa un elemento de una superficie es:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Donde $d\vec{S}$ es el vector área de dicho elemento.

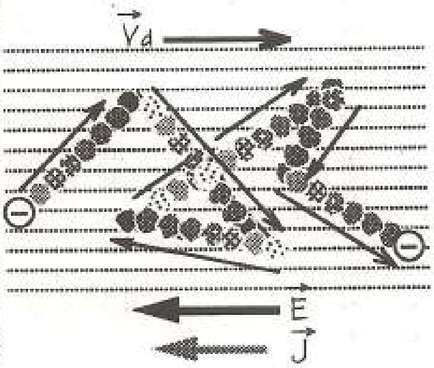
Corriente total

$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}$$

VELOCIDAD DE ARRASTRE

En un alambre el movimiento de los electrones de conducción es errático, chocando frecuentemente con los iones e impurezas de la red, los cuales están casi estacionarios. El número de electrones que se mueve en una dirección queda balanceado por igual número de ellos que se mueven en dirección opuesta.

Cuando se aplica una diferencia de potencial, se establece un campo eléctrico que provoca una tendencia de los electrones a moverse en dirección opuesta a la del campo eléctrico.



Ruta de zig-zag de un electrón por choques con iones, impurezas e imperfecciones de la red.

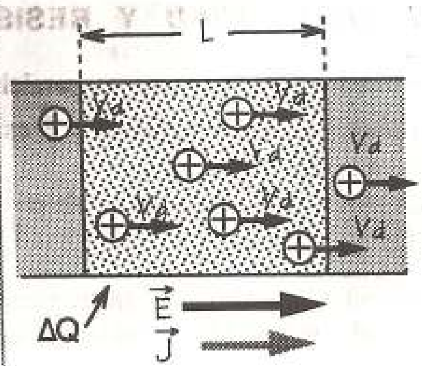
Aunque el campo $\vec{E}$ acelera los electrones, debido a los choques, sus velocidades no aumentan indefinidamente.

El resultado es que los electrones adquieren un movimiento lento y ordenado, con una velocidad promedio V_d, llamada velocidad de arrastre.

MODELO CLASICO DE CONDUCCION

En este modelo se supone que existen electrones desligados de sus átomos y libres de moverse como si fuese un gas. Por conveniencia, consideremos el desplazamiento equivalente de portadores de cargas positivas en dirección del campo.

Al aplicar un campo eléctrico, los portadores se desplazan con una velocidad promedio o de arrastre, V_d.



Si hay n partículas por unidad de volumen, con carga q, la carga total dentro de un trozo de longitud de longitud L y área A es:

$$\Delta Q = nq(AL)$$

Esta cantidad de carga pasa por cualquier sección del conductor en un tiempo Δt. La corriente es:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q(nAL)}{L/V_d} = nAqV_d$$

De modo que la densidad de corriente (promedio) es:

$$\vec{J} = nq\vec{V}_d$$

Densidad de corriente

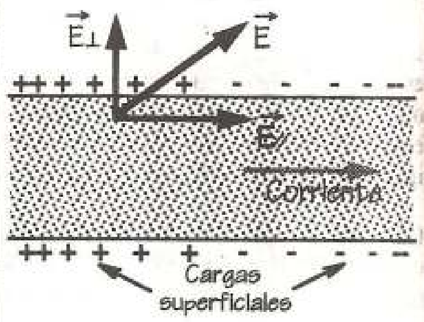
$$\boxed{\vec{J} = nq\vec{V}_d}$$

Velocidad de arrastre

CARGAS SUPERFICIALES Y CAMPO $\vec{E}$ EN UN CONDUCTOR CON CORRIENTE

Vimos que en electrostática el campo eléctrico interno de un conductor es cero y perpendicular a la superficie. Esto no es cierto cuando está circulando una corriente eléctrica.

Ahora las condiciones no son estáticas y hay un flujo continuo de cargas desde los terminales de la fuente alrededor del circuito. En la situación estacionaria, un cierto número de cargas se acumulan en *la superficie del conductor*. Estas cargas se distribuyen de manera no uniforme y generan un campo eléctrico que tiene una componente a lo largo del conductor. Es justamente esta componente la responsable del flujo de corriente.



Las cargas superficiales en los conductores con corriente son raramente mencionadas en los libros de texto* y cumplen tres funciones:

1) Mantienen la distribución de potencial a lo largo del circuito.
2) Generan un campo eléctrico en el exterior del conductor.
3) Aseguran el flujo continuo de los portadores de cargas.

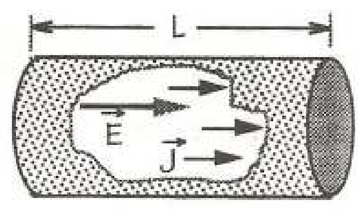
La corriente en un alambre es debida al campo eléctrico que producen las cargas en su superficie.

* J. D. Jackson, Am. J. Phys. **64** (79) 1996.

CONDUCTIVIDAD Y RESISTIVIDAD

La densidad de corriente es paralela al campo eléctrico en el alambre, y la relación entre $\vec{J}$ y $\vec{E}$ es:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$



Donde la constante $\sigma(\text{ohm.metro})^{-1}$ es la conductividad del material y su inverso se llama la resistividad:

$$\rho = 1/\sigma\ (\text{ohm·metro}).$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}}$$

Conductividad   Resistividad

J = densidad de corriente

RESISTENCIA

Para tomar en cuenta la forma y tamaño del conductor, definimos la resistencia eléctrica como el cociente entre la diferencia de potencial aplicada entre sus extremos y la corriente que fluye:

$$R = \frac{\text{Voltaje}}{\text{Corriente}} = \frac{V}{i}$$

Observe que ρ una propiedad intrínseca del tipo de material, mientras que R una propiedad de la muestra particular del material

$$\boxed{R = \frac{V}{I}}$$

Símbolo de Resistencia

UNIDAD SI DE RESISTENCIA: El ohm ($1\Omega \equiv 1V/A$).

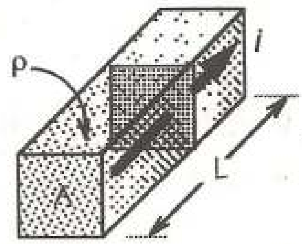
$$1\Omega = 1\,\frac{\text{Voltio}}{\text{Ampere}}$$

CONDUCTOR CON SECCION CONSTANTE

Sea un conductor homogéneo e isotrópico, de longitud L y de sección constante con área A. Si se aplica una diferencia de potencial, el campo es uniforme, ($E = V/L$) y la corriente es:

$$i = JA = \left(\frac{E}{\rho}\right)A = \left(\frac{V}{\rho L}\right)A$$

La resistencia de un conductor ($R = V/i$) es proporcional a la resistividad del material, ρ, y a su longitud, L, y es inversamente proporcional al área de su sección transversal, A.



Conductor de sección constante

$$\boxed{R = \rho\left(\frac{L}{A}\right)}$$

LA RESISTIVIDAD Y LA TEMPERATURA

En el caso de los metales, la resistividad ρ se incrementa con la temperatura. Esto se debe a que aumentan las amplitudes de vibración de los iones, lo cual aumenta la probabilidad de choques con los electrones móviles. En el rango de temperaturas cercanas a la ambiental la resistividad de un metal aumenta en forma lineal.

ρ_0 (en Ω·m) es la resistividad a alguna temperatura T_0 de referencia, y α (en $°C^{-1}$) es una constante denominada *coeficiente térmico de resistividad.*

Para otros materiales, ρ puede disminuir con la temperatura, como es el caso del grafito y los semiconductores.

La resistividad aumenta con la temperatura

$$\boxed{\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]}$$

$i = \int J \cdot ds$

LEY DE OHM

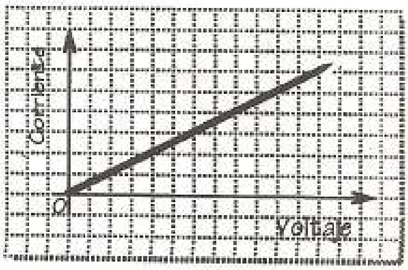
Existen muchos materiales para los cuales J es una función lineal de E (la conductividad es independiente del campo aplicado). □Estos materiales son conductores lineales y se dice que obedecen la ley de Ohm.

$$\frac{E}{J} = \text{constante} = \sigma$$

Si σ es independiente de E, entonces la resistencia R es independiente de V (si se mantienen constantes la temperatura y la presión) y el conductor obedece la ley de Ohm.

$$\frac{V}{i} = \text{constante} = R$$

Hay muchas sustancias que <u>no son lineales</u> y por lo tanto <u>no obedecen la ley de Ohm</u>. En realidad la ley de Ohm no constituye una ley física, sino que expresa una característica particular de ciertos materiales.



La gráfica I vs. V es lineal para los conductores que obedecen la Ley de Ohm

$$\boxed{\frac{V}{I} = \text{constante}}$$

POTENCIA Y ENERGIA ELECTRICA

En la figura se muestra una porción de un circuito, que puede ser un resistencia, un generador u otro dispositivo. En los terminales del elemento hay una diferencia de potencial $V_{AB} = (V_B - V_A)$ y la corriente circula en dirección $A \rightarrow B$.

En un tiempo Δt pasará una carga $dQ = i\,dt$ y el trabajo hecho sobre dicha carga es:

$$dW = V_{AB}\,dQ = V_{AB}\,i\,dt$$

Este trabajo representa una energía transferida al elemento, por lo tanto, la potencia eléctrica o tasa de transferencia de energía es:

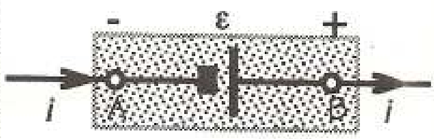
$$P = \frac{dW}{dt} = iV_{AB} \qquad \text{(Watts)}$$

Tasa de transferencia de energía eléctrica

$$\boxed{P = iV_{AB}}$$

Según sea el elemento del circuito, pueden suceder dos casos:

a) Si el potencial en B es mayor que en A ($V_{AB} > 0$), la carga gana energía potencial. El elemento le *suministra energía* eléctrica a expensa de otro tipo de energía. Podría tratarse de una batería, la cual convierte energía química, etc.., en eléctrica.

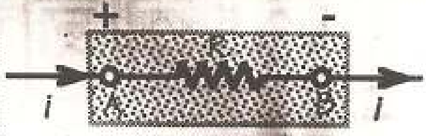


a) Batería: suministrando energía

b) Si el potencial en A es mayor que el de B, ($V_{AB} < 0$), la carga pierde energía potencial. El elemento *consume energía* y podría tratarse de una resistencia, en la cual la caída de potencial es $V_{AB}=iR$ y la potencia eléctrica correspondiente es:

$$P = V_{AB}i = i^2R = \frac{V_{AB}^2}{R} \quad \text{(Watts)}$$

Así obtenemos tres expresiones alternativas para la potencia en una resistencia. La pérdida de energía en la resistencia ocurre por colisiones de los portadores con los átomos de la red, lo que produce *energía térmica*.



b) Resistencia: consume energía

Potencia eléctrica perdida en una resistencia

$$\boxed{P = iV_{AB} = i^2R = \frac{V_{AB}^2}{R}}$$

RESISTENCIAS EN SERIE

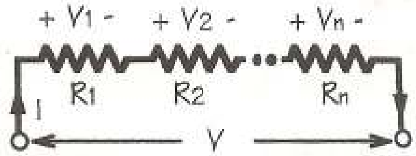
Cuando varias resistencias, $R_1, R_2, \ldots, R_n$, se conectan en serie, la corriente en cada uno de ellos es la misma, $i_1=i_2 \ldots = i_n=i$. De manera que las caídas de potencial individuales son: $V_1 = iR_1$, $V_2 = iR_2, \ldots, V_n = iR_n$

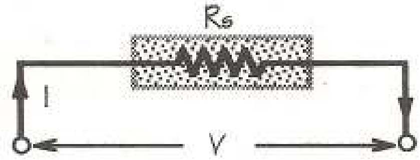
La suma de estos voltajes $V_1 + V_2 + \ldots + V_n$, es el voltaje total en los extremos:

$$V = i\,(R_1 + R_2, \ldots, +R_n)$$

Por lo tanto, podemos reemplazar la combinación por una sola resistencia equivalente que es la suma de las resistencias en serie:

$$R_s = \frac{V}{i} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$





En serie: las resistencias se suman

$$\boxed{R_s = R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

RESISTENCIAS EN PARALELO

Cuando varias resistencias $R_1, R_2, \ldots, R_n$ están conectadas en paralelo, la caída de potencial es idéntica en cada una de ellas,

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 = \ldots = i_n R_n = V$$

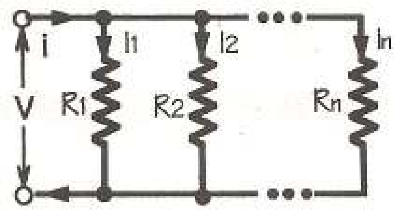
Además, la suma de las corrientes individuales es la corriente total.

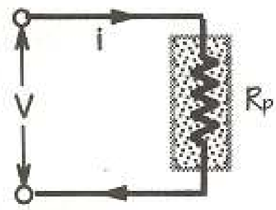
$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{V}{R_n}$$

$$i = V\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right] = V\left[\frac{1}{R_p}\right]$$

De modo que:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$





En paralelo: los recíprocos de las resistencias se suman

$$\boxed{\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$$

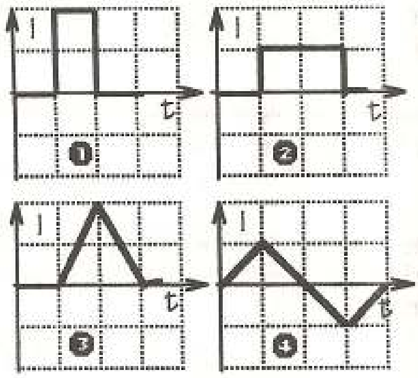
VERIFICA TU COMPRENSION

PE-6.01. ***La ley de Ohm establece que:***

a) $V = iR$
b) La resistencia es proporcional al voltaje, ($R = V/i$)
c) La ecuación $V = iR$ sólo se aplica a los materiales óhmicos.
d) La resistencia aumenta linealmente con la temperatura.
e) En ciertos materiales la resistencia es independiente del voltaje aplicado.

PE-6.02. ***¿ En cual caso circula mayor carga neta ?***

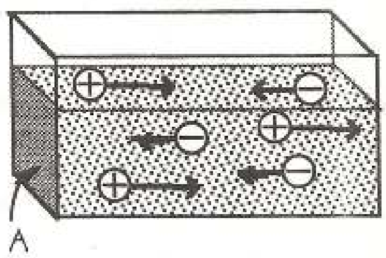
Los gráficos muestran la corriente que pasa por una sección de un conductor en función del tiempo, para cuatro casos diferentes. Si comparamos la <u>carga neta</u> que pasa por dicha sección, en cada caso permite concluir que:



a) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$.
b) $Q_1 = Q_2 = Q_3 > Q_4$.
c) $Q_1 > Q_2 = Q_3 > Q_4$.
d) $Q_1 < Q_2 = Q_3 < Q_4$.
e) $Q_1 = Q_2 < Q_3 < Q_4$.

PE-6.03. ***Corriente de iones positivos y negativos***

Un líquido electrólito contiene N iones negativos con carga ($-e$) e igual número de iones positivos con carga ($+e$), por unidad de volumen. La aplicación de un campo eléctrico provoca el desplazamiento de iones negativos hacia la izquierda con rapidez media V_0 y de iones positivos hacia la derecha, con rapidez media $3V_0$.
¿ Cuál es la corriente eléctrica en una área transversal A ?



a) NeV_0A
b) $2NeV_0A$
c) $3NeV_0A$
d) $4NeV_0A$
e) $5NeV_0A$

PE-6.04. *Conectadas en paralelo y luego en serie*

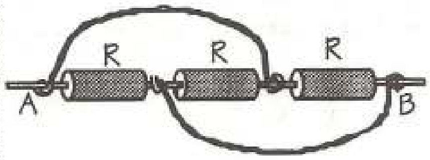
Cuando se conectan tres resistencias idénticas en paralelo, resulta una resistencia equivalente de 9 Ω.

Si las mismas resistencias se conectan en serie, la nueva resistencia equivalente es:

a) 1 Ω. b) 3 Ω. c) 9 Ω. d) 27 Ω. e) 81 Ω.

PE-6.05. *¿Serie, paralelo o qué ?*

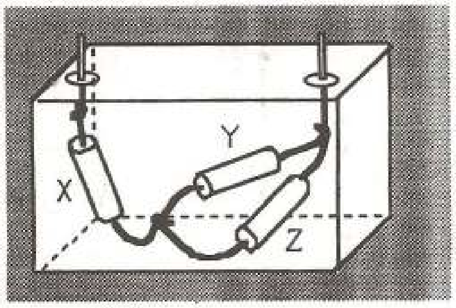
Tres resistencias idénticas de valor R se conectan mediante alambres de resistencias despreciables, como se indica en la figura.
La resistencia equivalente entre los extremos es:



a) 0. b) R/3. c) 2R/3. d) R. e) 3R.

PE-6.06. *¿Cómo lograr la mayor resistencia?*

Se dispone de tres resistencias diferentes: $R_1 > R_2 > R_3$.
¿Cómo conectarlas en el arreglo indicado de manera que la resistencia equivalente tenga el <u>mayor valor posible</u> ?



a) $R_1 \rightarrow X$, $R_2 \rightarrow Y$, $R_3 \rightarrow Z$
b) $R_2 \rightarrow X$, $R_3 \rightarrow Y$, $R_1 \rightarrow Z$
c) $R_2 \rightarrow X$, $R_1 \rightarrow Y$, $R_3 \rightarrow Z$
d) $R_3 \rightarrow X$, $R_1 \rightarrow Y$, $R_2 \rightarrow Z$
e) $R_3 \rightarrow X$, $R_2 \rightarrow Y$, $R_1 \rightarrow Z$

PE-6.07. *Estirando un alambre*

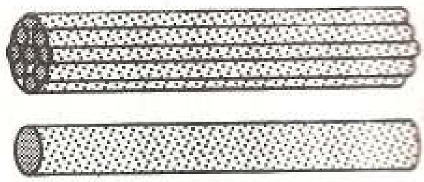
Un alambre que tiene una resistencia de 3Ω es estirado gradualmente hasta que su longitud sea el doble de la original, manteniendo la sección transversal uniforme a todo lo largo.

La nueva resistencia del alambre será:

a) 3 Ω. b) 6 Ω. c) 9 Ω. d) 12 Ω. e) 15 Ω.

PE-6.08. *Alambre único vs. alambre múltiple*

Un cable está constituido por 9 alambres de cobre, de diámetro d. Si queremos reemplazarlo por un solo alambre de cobre que tenga el mismo largo y ofrezca igual resistencia, el diámetro de este alambre debe ser:

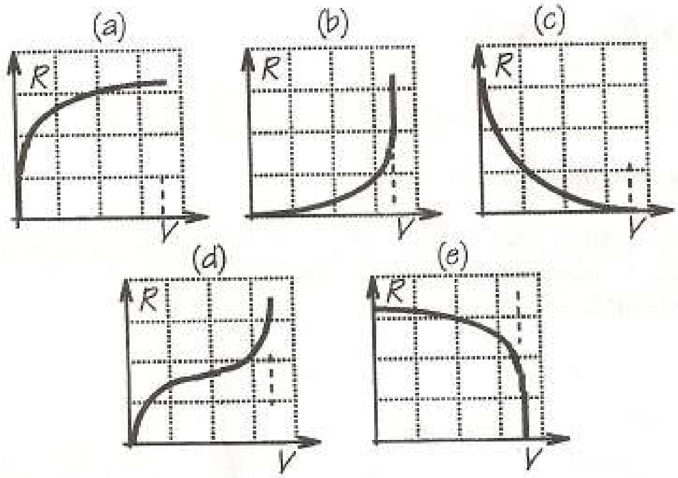


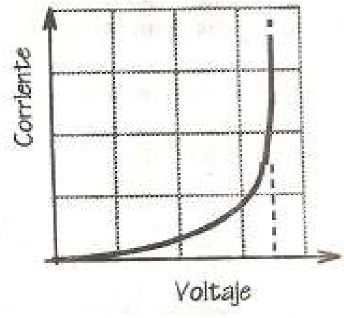
a) 1,5d b) 3d c) 6d d) 9d e) 12d

PE-6.09. *El diodo Zener, elemento no óhmico*

Cierto diodo Zener tiene una curva característica de Corriente vs Voltaje aplicado como se muestra en la figura de la derecha.

¿Cuál de las siguientes sería la correspondiente curva de Resistencia vs Voltaje ?.





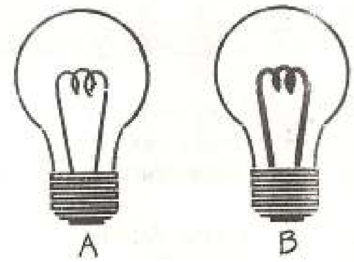
Corriente vs. voltaje para un diodo Zener

PE-6.10. *¿ Cuál bombillo brilla más ?*

Dos bombillos A y B tienen filamentos hechos del mismo material y de igual longitud. La diferencia está en que el filamento de B es *más grueso* que el filamento de A.

Si los bombillos se conectan a la red de 120 voltios, ¿ cuál brilla más ?

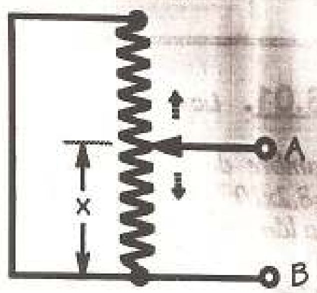
a) El B por tener menor resistencia
b) El B por tener mayor resistencia
c) El A por tener menor resistencia
d) El A por tener mayor resistencia
e) Brillan igual

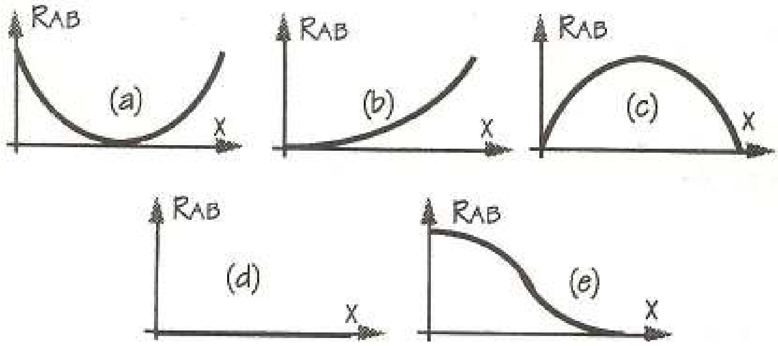


PE-6.11. ***¿Cómo varía la resistencia equivalente ?***

Los terminales extremos de un reóstato son corto-circuitados como indica en la figura de la derecha.

¿ Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la dependencia de la resistencia equivalente entre los terminales A y B con la posición x del cursor respecto del terminal B?





Cap. 6: Respuestas

Pregunta	a	b	c	d	e
PE-6.01					✓
PE-6.02		✓			
PE-6.03				✓	
PE-6.04					✓
PE-6.05		✓			
PE-6.06	✓				
PE-6.07				✓	
PE-6.08		✓			
PE-6.09					✓
PE-6.10	✓				
PE-6.11			✓		

PROBLEMAS RESUELTOS

PR 6.01. *Los electrones viajan a paso lento*

Un alambre de cobre #18 posee un diámetro de 1,02 mm (área=$8{,}2\times10^{-7}m^2$), y transporta una corriente constante de 0.83 A a una lámpara de 100 W.

***a)** Calcule la velocidad de arrastre de los electrones suponiendo que cada átomo de cobre suministra un electrón de conducción.*
***b)** ¿ Cuánto tiempo le tomaría a un electrón trasladarse una distancia de 5 m a lo largo del cable ?*
***c)** ¿ Por qué, siendo tan pequeña la velocidad de arrastre, un bombillo se enciende al instante de accionar el interruptor ?*

Solución: **a)** Un mol de cualquier sustancia contiene un número de átomos igual al número de Avogadro, $N_A=6{,}02\times10^{23}$. Si ρ es la densidad, el volumen ocupado por un mol es $V= m/\rho$, de modo que el número de electrones por unidad de volumen será:

$$n = \frac{N_A \rho}{m} = \frac{(6{,}02\times10^{23}\text{electrones/mol})(8{,}92\text{g/cm}^3)}{(63{,}54\text{g/mol})}$$

$$n = 8{,}45\times10^{22}\text{electrones/cm}^3 = 8{,}45\times10^{28}\text{electrones/m}^3$$

Para el cobre:

Masa molecular=63,54g/mol
Densidad = 8,92 g/cm^3.

La velocidad de arrastre de los electrones viene dada por:

$$I = neV_dA \quad \Rightarrow \quad V_d = \frac{I}{neA}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$V_d = \frac{(0{,}83\text{ A})}{(8{,}45\times10^{28}\text{elect/m}^3)(1{,}602\times10^{-19}\text{C/elect})(8{,}2\times10^{-7}\text{m}^2)}$$

$$V_d = 7{,}5\times10^{-5}\text{m/s}$$

b) Para recorrer una longitud de 5 m de cable, el tiempo requerido es:

$$t = (5\text{m})/(7{,}5\times10^{-5}\text{m/s}) = 6{,}67\times10^4\text{s} = 18{,}5\text{ horas.}$$

c) El tiempo de 18,5 horas que le tomaría a un electrón viajar desde el suiche a la lámpara, es irrelevante. Los electrones ya existen en el filamento de la lámpara. Cuando se acciona el suiche, el campo eléctrico que provoca el arrastre de los electrones, viaja por el cable a una velocidad próxima a la de la luz (≈3×10^8m/s) y tarda del orden de los nanosegundos.

Respuesta:

a) $V_d = 7{,}5\times10^{-5}$m/s
b) t = 18,5 horas
c) la perturbación viaja a la velocidad de la luz.

PR 6.02. *Corriente de un electrón en un átomo*

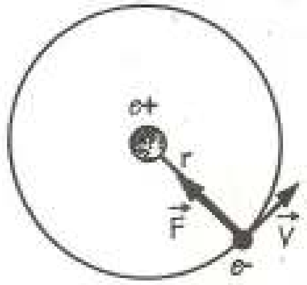
*Suponga que un átomo de hidrógeno consiste **de un electrón en** una órbita circular de radio $R = 5{,}3x10^{-11}$ m **alrededor de un** protón.*

¿Cual es la corriente circulando alrededor del protón ?

Solución: La corriente es la carga dividida por el periodo de revolución:

$$i = \frac{e}{T} = e\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Para hallar la frecuencia angular de rotación, ω, usamos la 2da ley de Newton (F = ma), donde la fuerza centrípeta es proporcionada por la atracción electrostática, por lo tanto:



$$k\frac{e^2}{r^2} = m\omega^2 r$$

Despejando la velocidad angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}}$$

masa del electrón
$9{,}1x10^{-31}$ kg

Reemplazando ω en la primera expresión tenemos,

$$I = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{e^2}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{mr^3}}$$

Finalmente, sustituyendo los valores numéricos:

$$I = \frac{(1{,}6x10^{-19}C)^2}{2\pi}\sqrt{\frac{9x10^9 N\cdot m^2/C^2}{(9{,}1x10^{-31}kg)(5{,}3x10^{-11}m)^3}}$$

Respuesta:

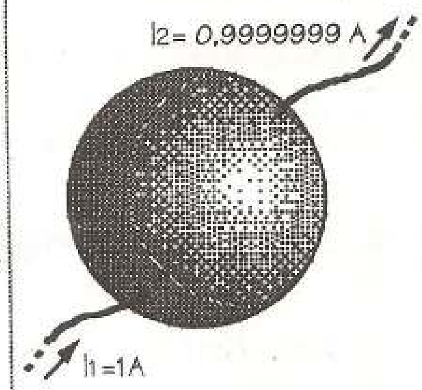
$\boxed{i = 1{,}05 \text{ mA}}$

PR 6.03. *¿En cuánto tiempo se carga la esfera?*

Hacia una esfera conductora aislada de radio r = 12 cm fluye por un alambre, una corriente de 1,000000 Ampere. Simultáneamente, por otro alambre sale de la esfera una corriente de 0,999999 Ampere.

¿ Cuánto tiempo le tomará a la esfera aumentar su potencial a 1000 Voltios ?

Solución: En un intervalo de tiempo Δt, la carga de la esfera aumenta en una cantidad ΔQ. El aumento correspondiente en el potencial de la esfera es $\Delta V = k(\Delta Q/r)$, por lo tanto:



$$\Delta Q = r\,\Delta V/k$$

Por otra parte, si la corriente que entra a la esfera es I_1 y la que sale es I_2, la carga acumulada es: $\Delta Q = (i_1 - i_2)\Delta t$, de modo que el tiempo requerido para acumularla es:

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{(I_1 - I_2)} = \frac{r\,\Delta V}{k(I_1 - I_2)}$$

Reemplazando los valores numéricos, encontramos:

$$\Delta t = \frac{(0{,}12\text{m})(1000\text{V})}{(9\times10^9 \text{N}\cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}000000 - 0{,}999999)\text{C/s}} = 0{,}013\text{s}$$

Respuesta:

$$\boxed{\Delta t = \frac{r\,\Delta V}{k(i_1 - i_2)} = 0{,}013\text{s}}$$

✓ PR 6.04. *Calor debido a una corriente lineal*

En una resistencia de 12 Ω la corriente aumenta linealmente de 1A hasta 5 A en 2 s. ¿ Cuál es la energía térmica que se genera en ese tiempo ?

Solución: La corriente varía linealmente con el tiempo de acuerdo a la expresión:

$$i(t) = i_o + \left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)t = 1 + \left(\frac{5-1}{2}\right)t = 1 + 2t$$

Donde i está en Amperes y t en segundos.

La potencia instantánea (energía por unidad de tiempo) desarrollada en la resistencia es i^2R (W), por lo tanto la energía térmica generada durante los 2 segundos es:

calor → $$Q = \int_0^2 i^2 R\, dt$$

$$= (12)\int_0^2 (1+2t)^2 dt = \left(\frac{1}{2}\right)(12)\int_0^2 (1+2t)^2 d(1+2t)$$

$$Q = \left(\frac{1}{2}\right)(12)\left(\frac{1}{3}\right)(1+2t)^3\Big|_0^2 = 248\text{ J}$$

Respuesta:

$$\boxed{Q = 248\text{ J}}$$

V=Ri

$R = \frac{\rho \cdot A}{l}$

PR 6.05. *Corriente debida a campo heterogéneo*

Dentro de un conductor óhmico cilíndrico de radio R y conductividad σ existe un campo eléctrico que varía de acuerdo a la ecuación:

$$\vec{E} = E_0(1 - \frac{r}{R})\hat{x}$$

Donde r es la distancia desde el eje del cilindro (eje x).

Determine la corriente que circula por el conductor.

Solución: La densidad de corriente viene dada por:

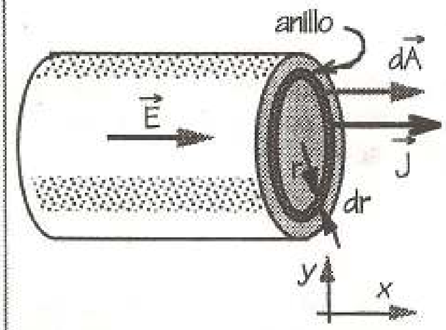
$$\vec{J} = \sigma\,\vec{E} = \sigma E_0(1 - \frac{r}{R})\hat{x}$$

Si escogemos un anillo elemental de radio r, ancho dr y área:

$$dA = 2\pi\, r\, dr$$

podemos integrar para hallar la corriente total que atraviesa el conductor:

$$I = \int \vec{J}\bullet d\vec{A} = \int_0^R [\sigma E_0(1 - \frac{r}{R})\hat{x}]\bullet[2\pi r\, dr\hat{x}]$$



Resolviendo:

$$I = 2\pi\sigma E_0 \int_0^R (1 - \frac{r}{R})r\, dr = 2\pi\sigma E_0(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R})\Big|_0^R$$

Simplificando esta expresión, tenemos:

$$i = \frac{1}{3}\pi R^2\sigma E_0$$

Respuesta:

$$\boxed{i = \frac{1}{3}\pi R^2\sigma E_0}$$

PR 6.06. *Todo depende de la temperatura*

Cuando una barra metálica se calienta, no sólo cambia su resistividad sino también su longitud y su área de sección transversal. La relación $R = \rho(L/A)$ indica que los tres factores deberían tomarse en cuenta, al medir R a varias temperaturas.

¿ Cuáles cambios fraccionales en la resistencia R ocurren en una barra de cobre cuya temperatura cambia en 1°C ?

Solución: Para pequeños cambios en la longitud L, el área A y la resistividad ρ, el cambio en la resistencia R viene dado por:

$$\Delta R = \left(\frac{\partial R}{\partial L}\right)\Delta L + \left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)\Delta A + \left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\right)\Delta \rho$$

Como la resistencia está dada por $R = \rho(L/A)$, las derivadas parciales respecto de cada variable son respectivamente:

Longitud: $\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right) = \frac{\rho}{A} = \frac{R}{L}$

Area: $\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right) = -\frac{\rho L}{A^2} = -\frac{R}{A}$

Resistividad: $\left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) = \frac{L}{A} = \frac{R}{\rho}$

Reemplazando estas derivadas en la expresión anterior y dividiendo por R, se tiene el cambio fraccional total en la resistencia:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Para un cambio de temperatura ΔT, los correspondientes cambios fraccionales en la longitud, área y resistividad son:

$$\frac{\Delta L}{L} = \beta\Delta T, \quad \frac{\Delta A}{A} = 2\beta\Delta T, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} = \alpha\Delta T$$

Siendo β (/°C) el coeficiente de dilatación lineal y α (/°C) el coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura. Sustituyendo estas expresiones, tenemos finalmente:

$$\frac{\Delta R}{R} = (\beta - 2\beta + \alpha)\Delta T = (\alpha - \beta)\Delta T$$

Para el cobre:

$$\frac{\Delta R}{R} = (4{,}3\times10^{-3}/°C - 1{,}7\times10^{-5}/°C)\,(1°C) = 4{,}3\times10^{-3}$$

Se observa que el cambio fraccional en la resistencia proviene principalmente del cambio fraccional en la resistividad (0,43%), ya que los cambios en la longitud y en el área son muy pequeños (0, 0017% y 0, 0034% respectivamente)

COBRE:

Coef. de dilatación lineal
$\beta = 1{,}7\times10^{-5}/°C$

Coef. de resistividad
$\alpha = 4{,}3\times10^{-3}/°C$

Respuesta:

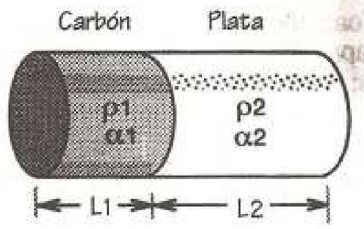
$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = (\alpha - \beta)\Delta T = 4{,}3\times10^{-3}}$$

Q. Part

PR 6.07. Resistencia independiente de temperatura

Un ingeniero desea construir un dispositivo cuya resistencia sea independiente de la temperatura a 20°C, para pequeñas variaciones de temperatura. Para ello une un pedazo de carbón (coeficiente negativo de resistencia con la temperatura), con un pedazo de plata de igual área.
¿ Cuál debe ser la relación entre sus longitudes ?

Solución: La resistencia efectiva de la combinación serie es la suma de las resistencias individuales:



$$R = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1 L_1}{A} + \frac{\rho_2 L_2}{A}$$

Reemplazando las expresiones de las resistividades en función de la temperatura, tenemos:

$$R = \frac{L_1}{A}\rho_{01}[1+\alpha_1(T-T_0)] + \frac{L_2}{A}\rho_{02}[1+\alpha_2(T-T_0)]$$

$$R = \frac{L_1\rho_{01}}{A}[1-\alpha_1 T_0] + \frac{L_2\rho_{02}}{A}[1-\alpha_2 T_0] + [\frac{L_1\rho_{01}\alpha_1 + L_2\rho_{02}\alpha_2}{A}]T$$

Carbón (20 °C):

$\rho_1 = 3{,}5\times10^{-5}\ \Omega\cdot m$

$\alpha_1 = -5{,}0\times10^{-4}K^{-1}$

Plata (20 °C):

$\rho_2 = 1{,}6\times10^{-8}\ \Omega\cdot m$

$\alpha_2 = 3{,}8\times10^{-3}K^{-1}$

Para que R no varíe con la temperatura debe cumplirse que:

$$\frac{dR}{dT} = 0 = \frac{L_1\rho_{01}\alpha_1 + L_2\rho_{02}\alpha_2}{A}$$

Por lo tanto:

$$L_1\rho_{01}\alpha_1 + L_2\rho_{02}\alpha_2 = 0$$

$$\frac{L_1}{L_2} = -\frac{\rho_{02}\alpha_2}{\rho_{01}\alpha_1} = -\frac{(1{,}6\times10^{-8}\Omega\cdot m)(3{,}8\times10^{-3}K^{-1})}{(3{,}5\times10^{-5}\Omega\cdot m)(-5{,}0\times10^{-4}K^{-1})} = 3{,}5\times10^{-3}$$

Esto significa que se requieren 3,5 mm de carbón por cada metro de plata.

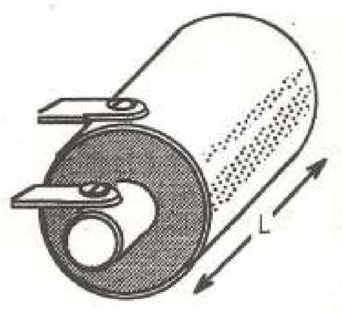
Respuesta:

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = -(\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}})(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}) = 3{,}5\times10^{-3}}$$

PR 6.08. Resistencia de un cilindro hueco

El espacio entre dos tubos coaxiales de radios a *y* b *se llena con un material de resistividad ρ.*

Determine la resistencia total de un pedazo del material de longitud L *cuando es medida entre el tubo interior y el tubo exterior.*



Solución: *Método 1:* Si se aplica una diferencia de potencial entre los electrodos, se establece una densidad de corriente que es radial. Considerando una superficie cilíndrica de radio r, la densidad de corriente es uniforme y la corriente que la atraviesa perpendicularmente es:

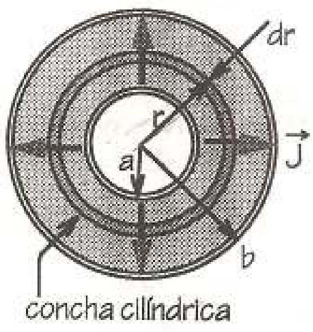
$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = JA = \left(\frac{E}{\rho}\right)(2\pi r L)$$

El campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \left(\frac{\rho\, i}{2\pi r L}\right)\hat{r}$$

Tomando en cuenta que la corriente es la misma en las sucesivas capas cilíndricas, la diferencia de potencial entre los electrodos es:

$$V = \left| -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| = \int_a^b \frac{\rho\, i}{2\pi r L}\, dr = \frac{\rho\, i}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho\, i}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



De acuerdo a la definición de resistencia tenemos:

$$R = \frac{V}{i} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Método 2: También podemos partir de una concha cilíndrica de longitud L, radio r y espesor dr, que tiene sección transversal constante y usar la expresión para su resistencia infinitesimal:

$$dR = \rho\left(\frac{\text{longitud}}{\text{área}}\right) = \rho \frac{dr}{2\pi r L}$$

Como las sucesivas conchas cilíndricas están *conectadas en serie*, la resistencia total es la suma (integral):

$$R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Resultado idéntico al obtenido por el primer procedimiento.

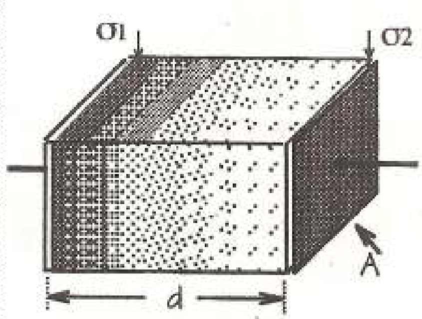
Respuesta:

$$\boxed{R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

PR 6.09. Conductividad que varía linealmente

Entre dos placas metálicas planas existe un bloque de material de área A y espesor d cuya conductividad varía uniformemente desde el valor σ_1 en una placa hasta σ_2 en la otra placa.

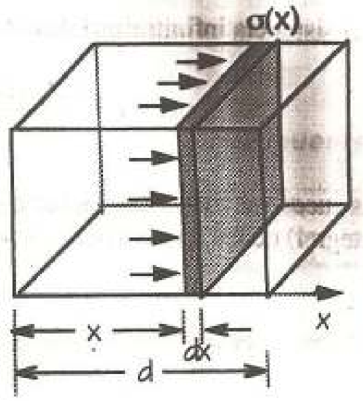
¿ Cuál es la resistencia entre las dos placas ?



A9-41
9:00 AM

Solución: Consideremos una tajada delgada de material de espesor dx ubicada a una distancia x de una de las placas. La conductividad de la tajada en función de x:

$$\sigma(x) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{x}{d}$$



La densidad de corriente es $\vec{J} = \sigma(x)\vec{E}$, queda en la dirección $\hat{x}$ del campo $\vec{E}$ y su magnitud es igual a la corriente, i, dividida entre el área A. Por lo tanto, el campo eléctrico es:

$$E(x) = \frac{J}{\sigma(x)} = \frac{i}{A[\,\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{x}{d}]}$$

La diferencia de potencial entre las placas es:

$$V = \int_0^d \vec{E}\bullet d\vec{l} = \frac{i}{A}\int_0^d \frac{dx}{[\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{x}{d}]} = \frac{id}{A\,(\sigma_2 - \sigma_1)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dU}{U}$$

J = δ · E

i = JdA

R = ρ/V

Siendo

$$U = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)x/d$$

Integrando, tenemos:

$$V = \frac{id}{A\,(\sigma_2 - \sigma_1)}\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

yo soy lo MAXIMO !!

Finalmente la resistencia es:

$$R = \frac{V}{i} = \frac{d}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

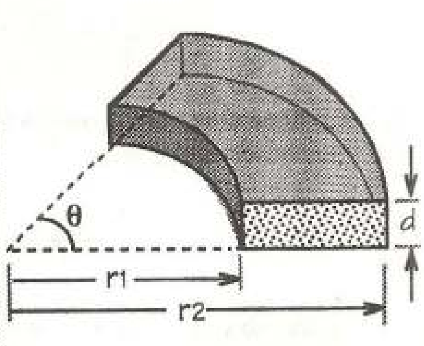
Respuesta:

$$\boxed{R = \frac{d}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)}$$

✓ **PR 6.10.** ***Resistencia de un pedazo de anillo***

Una tira de material conductor de resistividad ρ tiene forma de arco subtendiendo un ángulo θ, con radios r_1 y r_2 respectivamente y espesor d, como se ilustra en la figura.

Determine la resistencia medida entre los bordes curvos



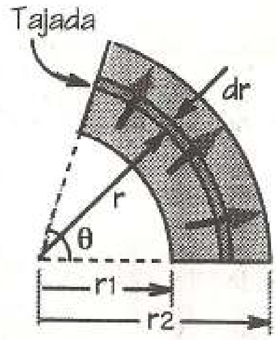
Solución: Tomemos una tajada de radio r y ancho dr. La corriente fluye radialmente y la sección transversal atravesada tiene un área que igual a la longitud del arco (rθ) por el espesor d.

La resistencia infinitesimal de la tira es:

$$dR = \rho\left(\frac{\text{longitud}}{\text{área}}\right) = \rho\frac{dr}{(r\theta)d}$$

Las sucesivas tiras están en serie y la resistencia total es la suma (integral) de los aportes desde r = a hasta r = b:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} dR = \frac{\rho}{\theta d}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\rho}{\theta d}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



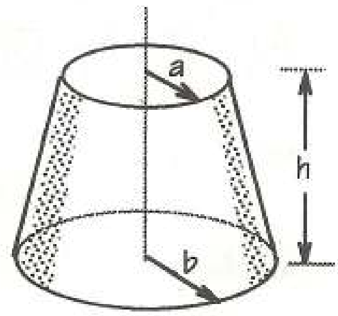
Respuesta:

$$\boxed{R = \frac{\rho}{\theta d}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

PR 6.11. *Resistencia de un cono truncado*

A un material de resistividad ρ se le da la forma de un cono truncado de altura h, y con radio b en su base y radio a en el extremo superior. Si se aplica una diferencia de potencial entre las tapas planas, halle la resistencia eléctrica.

✱ Suponga que los radios a y b son sólo ligeramente diferentes, como para considerar al campo uniforme y normal a cualquier sección circular del cono.



Solución: Consideramos un disco de radio x, ubicado a la altura y. La relación entre y y x es:

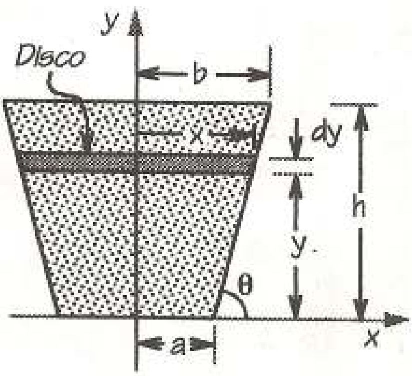
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{(x-a)} = \frac{h}{(b-a)}$$

Despejando y y derivando:

$$y = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)h \qquad dy = \left(\frac{h}{b-a}\right)dx$$

El disco tiene área (πx^2) y espesor dy, por lo tanto la resistencia entre sus bases será:

$$dR = \rho\frac{dy}{\pi x^2} = \frac{\rho h\, dx}{(b-a)\pi x^2}$$



Considerando que el cono está constituido por la sucesión de tajadas en serie, la resistencia total será:

$$R = \int dR = \frac{\rho h}{\pi(b-a)} \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{\rho h}{\pi(b-a)} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_a^b$$

Resolviendo:

$$R = -\frac{\rho h}{\pi(b-a)}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{\rho h}{\pi(b-a)}\left(\frac{a-b}{ab}\right) = \frac{\rho h}{\pi ab}$$

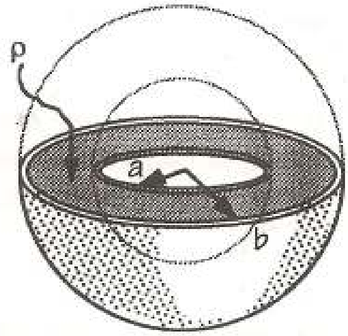
Observe que si $a = b$ la expresión se reduce a $R = \rho h/\pi a^2$ que corresponde a un conductor de sección transversal constante.

Respuesta:

$$\boxed{R = \frac{\rho h}{\pi ab}}$$

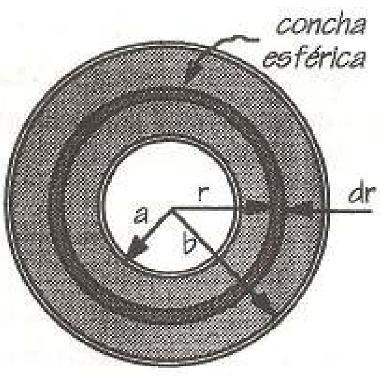
PR 6.12. *Resistencia de una concha esférica*

Determine la resistencia que ofrece al paso de la corriente radial un material de resistividad ρ colocado entre dos cascarones metálicos esféricos de radios a y b.



Solución: Para determinar la resistencia, consideramos como elemento infinitesimal, una concha esférica del material de radio r, espesor dr y área $4\pi r^2$. La resistencia de este elemento es:

$$dR = \rho\left(\frac{\text{longitud}}{\text{área}}\right) = \rho\left(\frac{dr}{4\pi r^2}\right)$$



De modo que para una sucesión de conchas en serie desde $r=a$ hasta $r = b$, la resistencia total será:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_a^b$$

Por lo tanto:

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

Respuesta:

$$\boxed{R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{b-a}{ab}\right)}$$

PR 6.13. *Capacitancia y Resistencia relacionadas*

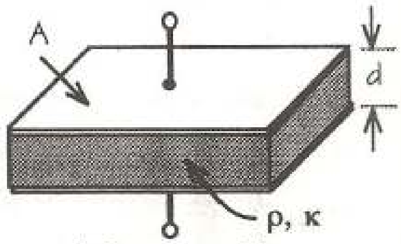
Existe una relación simple entre la resistencia R de un material de resistividad ρ, que ocupa el espacio entre dos electrodos y la capacitancia C que existiría entre los mismos electrodos si sustituimos el conductor por un material dieléctrico de constante dieléctrica κ:

$$RC = \kappa\varepsilon_0\rho$$

Verifique esta relación cuando los electrodos son: ***a)*** *Placas paralelas,* ***b)*** *Cilindros concéntricos,* ***c)*** *Esferas concéntricas.*

Solución: a) *Placas paralelas*: La resistencia de un bloque conductor de espesor d y área A, viene dada por:

$$R = \rho\,(d/A)$$



a) Placas paralelas

Por otra parte, en el capítulo anterior vimos que para un condensador de placas paralelas de área A, con un dieléctrico de espesor d y constante dieléctrica κ, la capacitancia es:

$$C = \kappa\varepsilon_0\,(A/d)$$

De modo que el producto RC es:

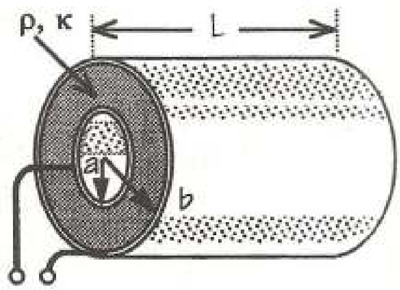
$$RC = (\rho\frac{d}{A})\,(\kappa\varepsilon_0\frac{A}{d}) = \rho\kappa\varepsilon_0$$

Respuesta:

$$\boxed{RC = \rho\kappa\varepsilon_0}$$

b) *Cilindros concéntricos*: La resistencia de un tubo cilíndrico hueco de resistividad ρ, de longitud L y radios a y b, viene dada por (PR-6.08):

$$R = \frac{\rho}{2\pi L}\ln(b/a)$$



b) Cilindros concéntricos

Por otra parte, vimos que la capacitancia de un condensador cilíndrico con dieléctrico de constante κ es:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\kappa L}{\ln(b/a)}$$

Por lo tanto, el producto de R con C es:

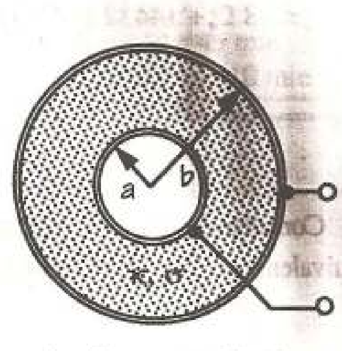
$$RC = [\frac{\rho}{2\pi L}\ln(b/a)][\frac{2\pi\varepsilon_0\kappa L}{\ln(b/a)}] = \rho\kappa\varepsilon_0$$

Respuesta:

$$\boxed{RC = \rho\kappa\varepsilon_0}$$

c) *Esferas concéntricas*: En el problema PR-6.12 demostramos que la resistencia de un conductor de resistividad ρ que ocupa el espacio entre dos esferas metálicas concéntricas de radios a y b es:

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$



c) esferas concéntricas

Por otra parte, vimos en el capítulo anterior que la capacitancia de un condensador esférico de radios a y b, con un dieléctrico de constante κ, es:

$$C = 4\pi\kappa\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

Efectuando el producto de R con C, se obtiene:

$$RC = \left[\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{b-a}{ab}\right)\right]\left[4\pi\kappa\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)\right] = \rho\kappa\varepsilon_0$$

Conclusión: en los tres casos se verifica la relación entre R y C.

Respuesta:

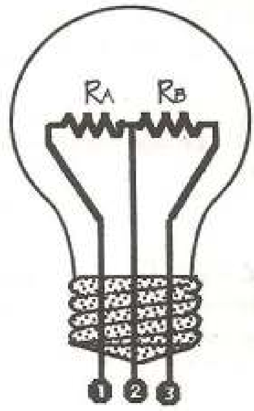
$$\boxed{RC = \rho\kappa\varepsilon_0}$$

PE-6.14. ***Varios brillos con un solo bombillo.***

Un bombillo de tres vías tiene dos filamentos de tungsteno, de resistencias $R_A = 48\ \Omega$ y $R_B = 144\ \Omega$; que están conectados a tres terminales, como lo muestra la figura.

Mediante interruptores externos (no mostrados) se pueden seleccionar pares de terminales y conectarlos a la red de 120 Voltios, para obtener diferentes iluminaciones.

¿Cuáles son los valores de las potencias que pueden ser obtenidos ?



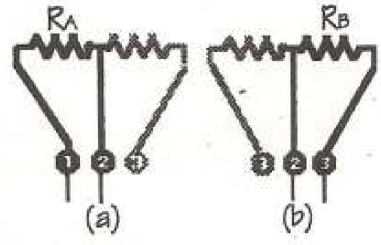
Solución: De acuerdo a los diagramas mostrados, se pueden obtener cuatro diferentes valores de potencia:

a) Conectando R_A solamente (48 Ω):

$$P_a = \frac{V^2}{R_A} = \frac{(120\ v)^2}{48\Omega} = 300\ W$$

b) Conectando R_B solamente (144 Ω):

$$P_b = \frac{V^2}{R_B} = \frac{(120\ v)^2}{144\Omega} = 100\ W$$

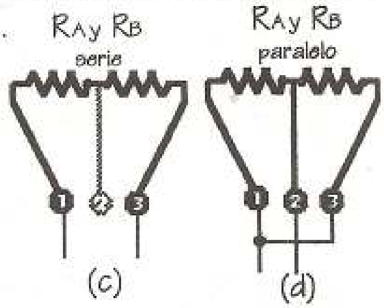


c) Conectando R_A en serie con R_B. La resistencia equivalente es: $R_s = 48\ \Omega + 144\ \Omega = 192\ \Omega$,

$$P_c = \frac{V^2}{R_{serie}} = \frac{(120\ v)^2}{192\ \Omega} = 75\ W$$

d) Conectando R_A en paralelo con R_B. La resistencia equivalente es: $R_p = (48\Omega \times 144\Omega)/(48\ \Omega + 144\ \Omega) = 36\ \Omega$,

$$P_d = \frac{V^2}{R_{par}} = \frac{(120\ v)^2}{36\ \Omega} = 400\ W$$

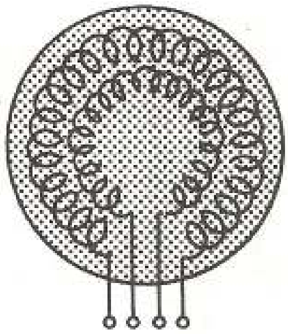


Respuesta:

$\boxed{75W, 100W, 300W\ y\ 400W.}$

PR 6.15. *¿ En cuanto tiempo hervirá el agua ?*

La hornilla de una cocina eléctrica tiene dos resistencias de forma tal que, mediante un interruptor (no mostrado) se pueden seleccionar cuatro diferentes tipos de calentamiento para los alimentos.
Cuando se conecta una sola resistencia a la red eléctrica, se observa que cierta cantidad de agua hierve en 15 minutos. Cuando se conecta la otra resistencia sola, se observa que a la misma cantidad de agua hierve en 30 minutos.
*¿En cuánto tiempo hervirá la misma cantidad de agua si las dos resistencias se conectan: **a)** en serie, **b)** en paralelo ?*



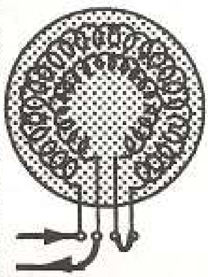
Solución: La potencia es el calor desarrollado por unidad de tiempo ($P = Q/t$). Usando la expresión $P = V^2/R$, podemos despejar el tiempo:

$$t = QR/V^2$$

a) Conexión Serie: Cuando las resistencias R_1 y R_2 están conectadas en serie, el tiempo de calentamiento es:

$$t_s = \left(\frac{Q}{V^2}\right)(R_1+R_2) = \left(\frac{Q}{V^2}\right)R_1 + \left(\frac{Q}{V^2}\right)R_2$$

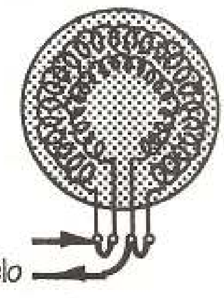
$$t_s = t_1 + t_2 = 15\text{min} + 30\text{min} = 45\text{ min}$$



a) Serie

a) Conexión Paralelo: Cuando las resistencias R_1 y R_2 están conectadas en paralelo, el tiempo de calentamiento es:

$$t_p = \frac{Q}{V^2}\left[\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right] = \frac{Q}{V^2}\left[\frac{(V^2t_1/Q)(V^2t_2/Q)}{(V^2t_1/Q) + (V^2t_2/Q)}\right]$$



b) Paralelo

Simplificando esta expresión, obtenemos :

$$t_p = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{(15min)(30min)}{(15min) + (30min)} = 10min$$

Respuesta:

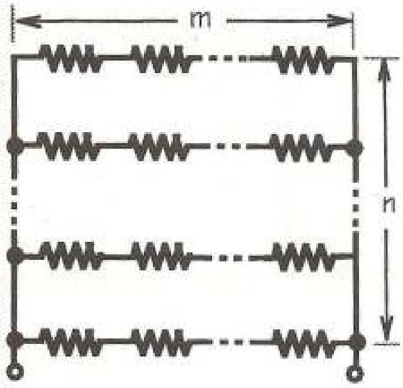
Serie: $t_s = 45$ min
Paralelo: $t_p = 10$ min

PR 6.16. Combinación de resistores que resisten

Se dispone de un cierto número de resistores de valor R, cada uno de los cuales puede disipar una potencia máxima P. Se desea obtener una combinación de estos resistores que tenga una resistencia equivalente igual a R y sea capaz de disipar al menos una potencia de 5P sin quemarse.

¿ Cuál sería el número mínimo de resistores a combinar ?

Solución: Si formamos grupos de m resistores de valor R en serie, la resistencia de cada grupo será mR. Si ahora conectamos n de estos grupos en paralelo, la resistencia total de la combinación serie-paralelo viene dada por:



$$\frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{mR} + \frac{1}{mR} + ... + \frac{1}{mR} = \frac{n}{mR}$$

Como se desea que R_{total} sea igual a R, debemos escoger n=m.

Tenemos así, n^2 resistores por los cuales pasa igual corriente y disipan igual potencia P. La potencia máxima total que puede ser disipada es:

$$P_{total} = n^2 P, \quad y \quad P_{total} \geq 5P$$

Por lo tanto, $n^2 \geq 5$. Como n debe ser un número entero, el menor número posible es $n = 3$. En conclusión, se requieren $3^2 = 9$ resistores.

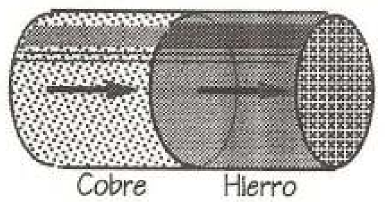
Respuesta:

9 resistores

PR 6.17. En la unión de metales se acumula carga.

Sean dos alambres metálicos diferentes que están soldados extremo con extremo y por los cuales fluye una corriente estacionaria de 1A. Los dos alambres son de igual diámetro, d=1mm y diferentes resistividades (Cobre y Hierro).

a) Determine los campos eléctricos en los dos metales.
b) Demuestre que en la unión de los dos metales se forma una densidad superficial de carga y determine su valor.



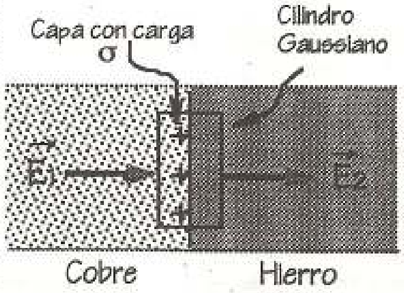
$\rho_{Cobre} = 1.77 \times 10^{-8}\ \Omega.m$

$\rho_{Hierro} = 1 \times 10^{-7}\ \Omega.m.$

Solución: a) En la situación estacionaria la densidad de corriente $J = i/(\frac{1}{4}\pi d^2)$, es constante e igual en cada alambre. Además está relacionada con el campo eléctrico: $\rho J = E$.
Luego:

$$E_1 = \frac{4\rho_1 i}{\pi d^2} = \frac{4(1{,}77\text{x}10^{-8}\Omega\cdot\text{m})(1\text{A})}{\pi(1\text{x}10^{-3}\text{m})^2} = 0{,}0225 \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{4\rho_2 i}{\pi d^2} = \frac{4(1\text{x}10^{-7}\Omega\cdot\text{m})(1\text{A})}{\pi(1\text{x}10^{-3}\text{m})^2} = 0{,}127 \text{ V/m}$$



b) Apliquemos la ley de Gauss a una superficie gaussiana en forma de cilindro de radio r, con tapas planas a cada lado de la unión de los alambres.

Como $\vec{E}_1$ apunta hacia adentro de la superficie y $\vec{E}_2$ hacia afuera, el flujo del campo eléctrico es:

$$\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = E_2\pi r^2 - E_1\pi r^2 = (E_2 - E_1)\pi r^2$$

De acuerdo a la ley de Gauss, el flujo debe ser igual a la carga neta encerrada, Q, dividida entre ε_o.

$$(E_2 - E_1)\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Por lo tanto, *debe haber en la interfaz una densidad superficial de carga* $\sigma = Q/\pi r^2$, cuyo valor es:

$$\sigma = \varepsilon_o(E_2 - E_1) = \varepsilon_o(\rho_2 - \rho_1)J = \varepsilon_o(\rho_2 - \rho_1)\left(\frac{4\,i}{\pi d^2}\right)$$

$$\sigma = \frac{(8{,}85\text{x}10^{-12})[(10 - 1{,}77)\text{x}10^{-8}]4(1)}{\pi(1\text{x}10^{-3})^2} = 9{,}27\text{x}10^{-13}\text{C/m}^2$$

Respuesta:

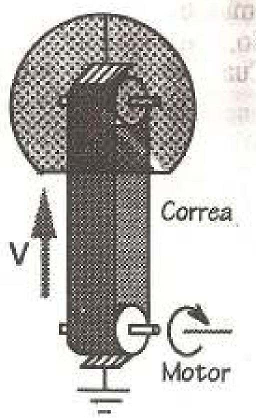
a) $E_1 = 0{,}0225$ V/m
$E_2 = 0{,}127$ V/m.
b) $\sigma = 9{,}27\text{x}10^{-13}$ C/m²

PROBLEMAS PARA RESOLVER

PP 6.01. *Transporte de carga en el Van der Graaff*

La correa de un generador de Van der Graaff tiene 10 cm de ancho, se mueve con una rapidez de 20 m/s, y transporta mecánicamente una densidad de carga superficial de 15 $\mu C/m^2$.

a) ¿ Qué corriente transporta ?
b) Si la diferencia de potencial entre la fuente de cargas y la cúpula es de 100 000 voltios, ¿ cuál es el valor de la potencia del motor que mueve la correa ?



Respuesta:

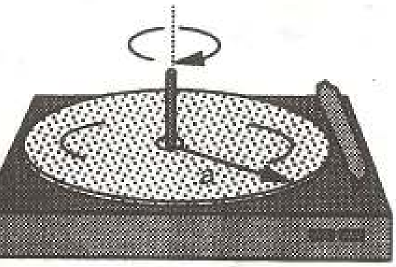
a) $i = 30\ \mu A$, b) $P = 3\ W$

Ayuda: En un intervalo Δt la correa avanza Δx , y al multiplicar éste por el ancho, se obtiene la carga que pasa en ese tiempo.

PP 6.02. *Corriente generada en un disco LP .*

Mientras un disco "long-play" de vinyl está rotando, se le pasa un trapo de manera que adquiere una carga uniforme con densidad superficial $\sigma = 6\ \mu C/m^2$. El disco tiene un radio a=15 cm y gira a 33 rev/minuto.

¿ Cuál es la corriente que pasa por una línea recta desde el centro hasta el borde ?



Respuesta:

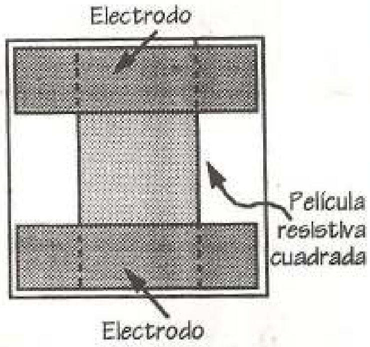
$$I = \frac{1}{2}\sigma\omega a^2 = 0{,}233\mu A$$

Ayuda: La carga entera del disco pasa a través de una línea radial durante un periodo de revolución.

PP 6.03. *Resistencia que no depende del tamaño del cuadrado*

Un experimentador deposita aluminio evaporado al vacío sobre una placa de vidrio, formando una película delgada. Para obtener una película cuadrada con electrodos a ambos lados, se protege una región cuadrada de manera que el aluminio se siga depositando a cada lado hasta formar una capa gruesa que sirva de terminales de conexión.

a) Demuestre que la resistencia de la película no depende de su tamaño, con tal sea un cuadrado.
b) ¿Cual debe ser el espesor de la película para obtener una resistencia de 5 Ω ?



Aluminio: $\rho = 2{,}75 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot m$

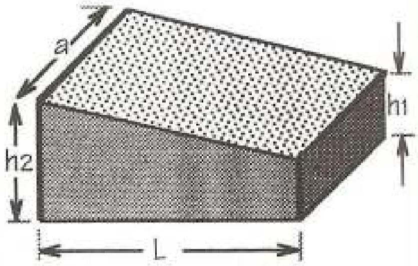
Respuesta:

a) $R = \rho/d$, siendo d el espesor.
b) $d = 5{,}5 \times 10^{-9}$m = 55 Å (Angstroms)

Ayuda: La resistencia depende de L/A, y el área transversal A, de la película es igual al espesor d, por el lado del cuadrado L, y este último se cancela.

PP 6.04. *Un bloque en forma de cuña*

Sea un bloque de material con resistividad uniforme que tiene la forma mostrada en la figura. Suponiendo que la diferencia entre las alturas h_1 y h_2 es pequeña, halle la resistencia entre las dos caras rectangulares verticales.



Respuesta:

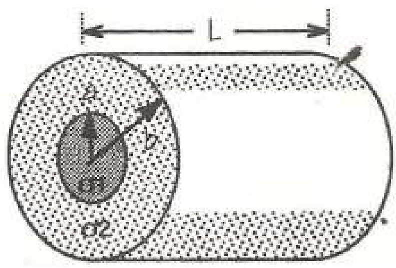
$$R = \frac{\rho L}{a(h_2 - h_1)} \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)$$

Ayuda: . Divida el bloque en tajadas de espesor dx y área variable. Sume (integre) las resistencias de las tajadas por estar en serie.

PP 6.05. *Cable de dos capas*

Un cable cilíndrico de longitud L consta de un conductor interior sólido de radio a y conductividad σ_1, rodeado por un conductor concéntrico hueco con radios a y b y conductividad σ_2.

Halle la resistencia entre las tapas planas extremas.



Respuesta:

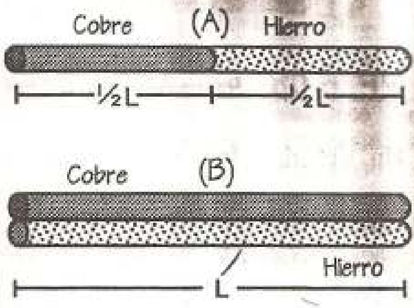
$$R = \frac{L}{\pi[\sigma_1 a^2 + \sigma_2(b^2-a^2)]}$$

Ayuda: En la dirección de la corriente, la sección de cada conductor es constante. Se comportan como dos resistencias de igual longitud, en paralelo.

PP 6.06. *¿Cuál de los dos alambres se calienta más?*

Sean dos alambres de metales diferentes, cobre y hierro, con igual sección transversal (1 mm^2). Los dos alambres se combinan para hacer dos conductores diferentes.
El conductor A consiste de dos barras de 50 cm conectadas extremo con extremo (en serie).
El conductor B consiste de dos barras de un metro de largo conectadas lateralmente (en paralelo).

a) ¿ Cuál es la resistencia de la combinación A ?
b) ¿ Cuál es la resistencia de la combinación B ?
c) ¿ En cuál de los dos metales es mayor la potencia disipada ?



Cobre: $\rho = 1{,}7\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$.
Hierro: $\rho = 10\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$.

Respuesta:

a) $R_A = 0{,}0585\ \Omega$, b) $R_B = 0{,}0145\ \Omega$.
c) En A la potencia es mayor en el alambre de hierro.
En B la potencia es mayor en el alambre de cobre.

Ayuda: Encuentre la resistencia de cada barra en términos de la resistividad y de las cantidades geométricas. Calcule la resistencia equivalente para cada combinación y encuentre como se distribuye la potencia en cada caso.

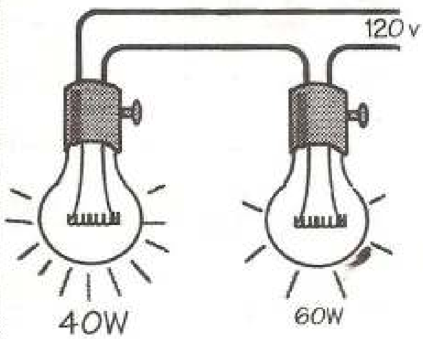
PP 6.07. *Un error involuntario*

Un estudiante se dispone a arreglar la instalación eléctrica de su casa y se equivoca, *conectando dos lámparas en serie* a la red de 120 V. Se sabe que los filamentos de los bombillos no son conductores óhmicos, siendo la corriente proporcional a la raíz cuadrada del voltaje aplicado.

$$I = kV^{1/2}$$

Donde k es una constante característica del bombillo. Suponga que uno de los bombillos es de 40W/120V y el otro de 60W/120V.

a) ¿ Cuál es el valor de la corriente en el circuito ?
b) ¿ Cuál será la nueva potencia eléctrica desarrollada en cada bombillo ?



¿ Cuál brillará más ?

Respuesta:

a) $i = 0{,}278$ A.

b) $P_{40w} = 23{,}0$ W, $P_{60w} = 10{,}2$ W.

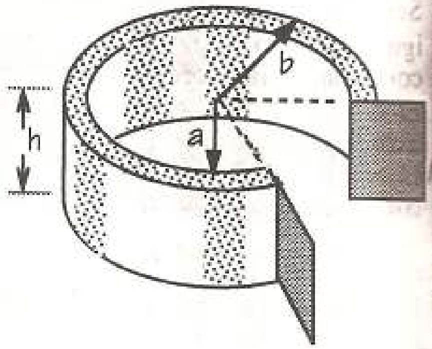
¡ El bombillo de 40 Watts brilla más que el de 60 Watts !, $P_{total} = 33{,}2$ W.

Ayuda: Combine las relaciones de potencia ($P=V^2/R$) y de voltaje ($V=IR$) y halle una expresión para la constante k de cada bombillo. Exprese la suma de los voltajes en términos de la corriente.

PP 6.08. *Resistencia de tres cuartos de toroide.*

Un material de conductividad σ tiene forma de toroide de sección rectangular constante de radios a y b y altura h. El toroide tiene un corte de 90° y sus caras planas se conectan a placas metálicas que sirven de electrodos.

¿ Cuál es la resistencia entre las dos placas ?



Respuesta:

$$R = \frac{3\pi}{2h\,\sigma \ln(b/a)}$$

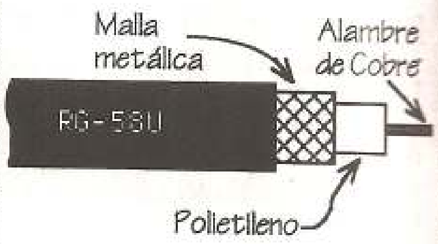
Ayuda: Seleccione una cinta cilíndrica de radio r y de espesor dr. El campo es uniforme en toda la cinta e igual a V dividido por su longitud. Exprese el diferencial de corriente en términos del voltaje e integre.

PP 6.09. *Corriente de fuga en un cable coaxial*

El cable coaxial tipo RG-58U consiste de un conductor interno cilíndrico de radio 0,81 mm rodeado por un aislante de polietileno de radio exterior 2,95 mm y un conductor externo formando una malla alrededor del aislante.

a) Determine la resistencia de un trozo de cable de 20 m.

b) Determine la corriente de "fuga", si la diferencia de potencial es de 100 v.



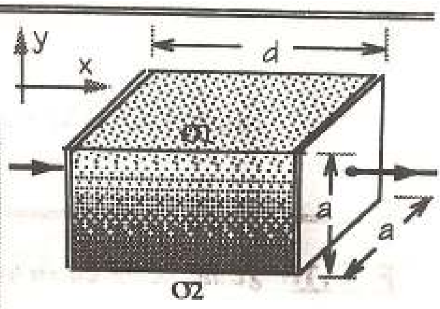
$\sigma = 6{,}25\text{x}10^{-12}\ \Omega^{-1}m^{-1}$

Respuesta:

a) $R = 1{,}65\text{x}10^{9}\ \Omega$, b) $i = 6{,}08\text{x}10^{-8}$ A.

Ayuda: Siga cualquiera de los dos procedimientos del problema PR-6.08. La expresión para la resistencia que se obtiene, es idéntica.

PR 6.10. *Conductividad que varía linealmente*



Entre dos placas metálicas planas existe un bloque de material de lados a x a x d, cuya conductividad varía uniformemente desde el valor σ_1 en el lado superior hasta σ_2 en lado inferior, como muestra la figura

¿ Cuál es la resistencia entre las dos placas cuadradas a x a?

Respuesta:

$$R = \frac{d}{a^2}\left(\frac{2}{(\sigma_1+\sigma_2)}\right)$$

Ayuda: Divida el dieléctrico en tajadas transversales a la corriente, de espesor dy y largo d. Exprese el elemento de corriente, dI en función de la conductividad σ(x) y del voltaje. Sume las corrientes elementales (Integral) y de allí halle R=V/i.

PP 6.11. *Conducción eléctrica y conducción de calor*

Un alambre recto de conductividad σ y área de sección transversal A se extiende a lo largo del eje x.

a) ¿ Cuál es la razón a la que fluye la carga, (dq/dt) en términos del gradiente de potencial (dV/dx) a lo largo del alambre?

b) Establezca una analogía con la ecuación de conducción del calor.

Respuesta:

a) Carga: $\frac{dq}{dt} = -\sigma A\left(\frac{dV}{dx}\right)$

b) Calor: $\frac{dQ}{dt} = -\kappa A\left(\frac{dT}{dx}\right)$, donde (dT/dx) = gradiente de temperatura y κ = conductividad térmica.

Ayuda: Escriba la corriente eléctrica en términos del campo eléctrico, el cual está relacionado a su vez, con el gradiente del potencial. Hay una analogía entre los dos mecanismos: La energía térmica dQ y la carga eléctrica dq son ambas transportadas por electrones libres en el conductor. Un buen conductor de calor es también un buen conductor de electricidad.

PP 6.12. *Circuito con elemento no óhmico*

Un diodo semiconductor, está conectado a una fuente de 11 Voltios en serie con una resistencia lineal R = 6Ω. Se sabe que el diodo no obedece la ley de Ohm y su relación voltaje-corriente está dada por:

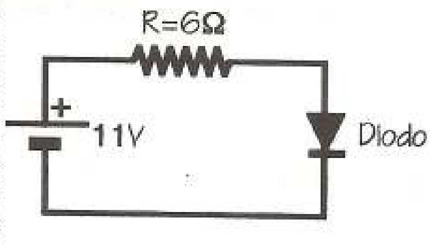
$$V = Ai + Bi^2$$

Donde los valores de las constantes son: A = 4Ω y B = 1Ω/A.

Determine:

a) La corriente en el circuito.

b) El voltaje en el diodo y el voltaje en la resistencia.



Respuesta:

a) $i = 1$ A, b) $V_D = 5$ V, $V_R = 6$ V.

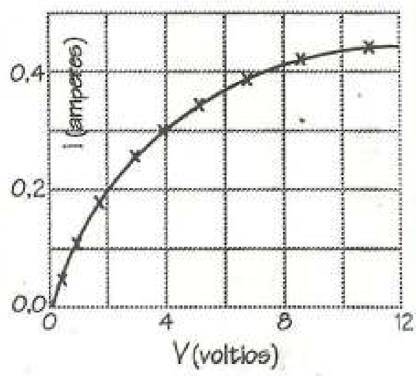
Ayuda: El voltaje de la batería es la suma del voltaje en la resistencia (iR)) y del voltaje en el diodo ($Ai + Bi^2$). Despejando i se obtiene una ecuación de segundo grado, una de cuya raíces es la solución para la corriente.

PP 6.13. *¿Cuál es la corriente en el bombillo?*

La figura muestra la curva característica de un cierto bombillo, es decir, la dependencia de la corriente (en Amperes) con el voltaje aplicado (en Voltios).

Suponga que este bombillo se conecta en serie con una resistencia lineal de 20 Ω a una fuente ideal de 10 Voltios.

a) ¿Cuál será el valor de la corriente en el bombillo ?
b) ¿Cuál será la potencia eléctrica desarrollada en el bombillo ?



Respuesta:

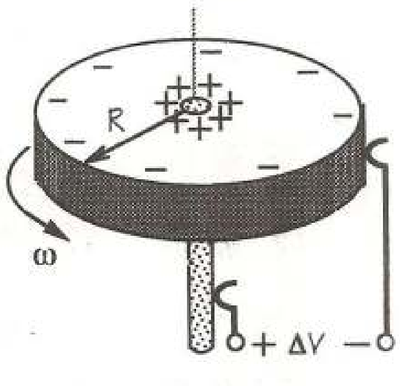
a) $I = 0{,}3$ A. **b)** $P = 1{,}2$ W.

Ayuda: El voltaje del bombillo está relacionado con la corriente mediante la expresión: $V = \varepsilon - iR$. Esta es la ecuación de una recta, y sus puntos de corte con los ejes del gráfico se obtienen usando los valores dados de ε y R. Trace esta recta y su intersección con la curva dada, permite establecer el punto de operación del bombillo.

PP 6.14. *Generando voltaje por bombeo centrífugo.*

Un disco metálico de radio R gira rápidamente en torno a su eje con velocidad angular, ω, constante.

Demuestre que se genera una diferencia de potencial entre el eje y la superficie del cilindro y determine una expresión para esta diferencia de potencial en términos de la masa m y la carga e del electrón.



Respuesta:

$$\Delta V = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}$$

Ayuda: . La fuerza centrífuga de marco no inercial acelera los electrones libres hacia la periferia. El flujo cesa cuando se acumula un número de electrones sobre los bordes, los que a su vez generan un campo E. En el marco no inercial, la fuerza eléctrica eE equilibra la fuerza centrífuga. Halle E(r) y de aquí la diferencia de potencial.

7

CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

Ahora que estamos familiarizados con los principios básicos de la corriente eléctrica, y la manera cómo los capacitores y resistencias influyen sobre el flujo de las cargas, aplicaremos estos conocimientos al estudio de circuitos. Los circuitos prácticos a menudo contienen gran cantidad de elementos resistivos, condensadores y bobinas, conectados en redes a las fuentes de energía, mediante alambres idealizados sin resistencia. Para analizar estas redes en forma sistemática, se usan las llamadas *reglas de Kirchhoff*, las cuales son consecuencia directa de las leyes de conservación de la carga y de conservación de la energía. En este capítulo analizaremos circuitos eléctricos de corriente directa (corriente que fluye en una sola dirección). Primero veremos los circuitos constituidos únicamente por baterías y resistenciass, en los cuales la corriente no varía con el tiempo. Luego pasaremos a considerar circuitos que contienen además, condensadores y en los cuales, la corriente es dependiente del tiempo.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos vinculados con:

- Fuerza electromotriz, resistencia interna y voltaje terminal
- Las reglas de Kirchhoff
- Circuitos resistivos de mallas múltiples
- Circuitos con resistencias y condensadores

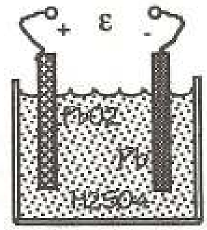
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

LA FUERZA ELECTROMOTRIZ

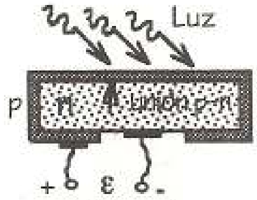
Para mantener una corriente en un circuito cerrado, es imprescindible el uso de una fuente de energía. La fuente de energía es conocida, históricamente, como fuente de fuerza electromotriz (FEM) y es cualquier dispositivo que convierta energía de origen no electrostático en energía eléctrica.

En una batería la energía proviene de reacciones químicas entre dos electrodos y un electrólito. En un generador ésta resulta de la acción de un campo magnético sobre cargas móviles. En una celda solar la energía proviene de la luz del sol.

La fuente de FEM aumenta la energía potencial de los portadores de carga, forzándolas a circular en el circuito. En una resistencia, la energía cinética es transformada en energía térmica debido a múltiples colisiones con la red.



Batería



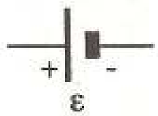
Celda solar

FEM Y DIFERENCIA DE POTENCIAL

El dispositivo de FEM realiza un trabajo dW para llevar una carga positiva dq desde el terminal negativo al positivo, por lo tanto, la fem "ε" representa el trabajo realizado por unidad de carga,

$$\varepsilon \equiv dW/dq$$

Es importante distinguir entre los conceptos de fem y diferencia de potencial. Una diferencia de potencial está asociada solamente con un campo electrostático (conservativo). En cambio, la fem realiza el trabajo mediante fuerzas exteriores asociadas con algún mecanismo *no-electrostático*.



Símbolo de una batería

Fuerza electromotriz

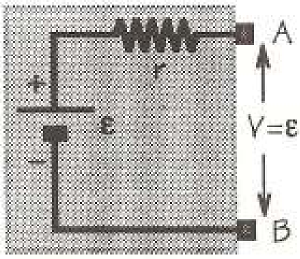
$$\boxed{\varepsilon \equiv \frac{dW}{dq}}$$

UNIDAD SI DE FEM: El Voltio ≡ 1 Joule/Coulomb.

$$1\,\text{Voltio} \equiv 1\,\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$$

BATERIA REAL Y SU RESISTENCIA INTERNA

Una fuente ideal podría mantener una diferencia de potencial constante entre sus terminales, sin importar el valor de la corriente, ($V = \varepsilon$). Sin embargo, toda fuente real siempre ofrece resistencia al movimiento interno de cargas y puede ser simulada como una combinación de una batería ideal en serie con dicha resistencia interna, r.



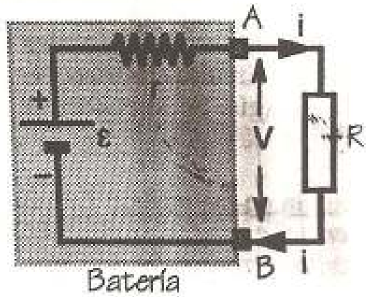
El voltaje entre los terminales de la batería real sería igual a su FEM ($V = \varepsilon$) únicamente si dichos terminales están abiertos.

Si a la batería se le conecta una resistencia externa, R, circulará una corriente i, y habrá una caída de potencial en la resistencia interna de la batería. Por lo tanto, el voltaje terminal entre A y B será menor:

$$V_{AB} = i\,R = \varepsilon - i\,r$$

La corriente en el circuito depende de ambas resistencias; la interna r, y la externa R:

$$i = \frac{\varepsilon}{R + r}$$



Al circular una corriente el voltaje terminal cae:

$$V_{AB} < \varepsilon$$

ANALIZANDO CIRCUITOS

Hagamos un recorrido por el circuito anterior, siguiendo la dirección de la corriente y partiendo del borne B de la batería, al cual asignamos el potencial cero.

Para una carga Q que entra a ese punto, la fuente de fem *eleva su potencial*, en ε (Voltios) aumentando así su energía en $Q\varepsilon$ (Joules).

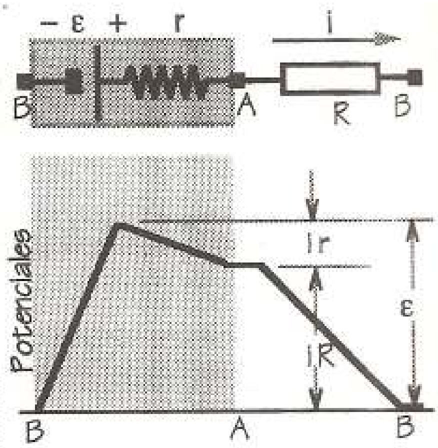
En la resistencia interna, r, de la batería (considerándola como si estuviera separada de la fem), la carga pierde energía potencial y cuando llega al borne A el *potencial ha caído* en una cantidad ir (voltios).

Los alambres de conexión no tienen resistencia y el potencial se mantiene constante hasta llegar a la resistencia externa R. En la resistencia, el *potencial cae* de nuevo, esta vez en una cantidad iR. A la salida de R, el potencial tiene un valor que se mantiene constante a lo largo del alambre y es igual al potencial del borne B.

De esta manera, después de haber completado el recorrido alrededor del circuito B→A→B, la carga regresa a su potencial electrostático original.

En conclusión, *en cualquier viaje completo alrededor del circuito, la suma algebraica de todas las subidas y caídas de potencial, es cero*:

$$\varepsilon - i\,R - i\,r = 0$$



Subidas y caídas de potencial en el circuito de la batería.

$$\varepsilon = i\,R + i\,r$$

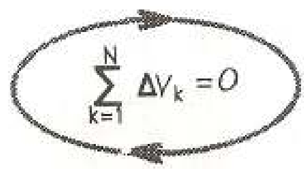
La suma de las subidas y caídas de potencial en el circuito cerrado es cero

$$\boxed{\Sigma V_i = 0}$$

REGLAS DE KIRCHHOFF

El resultado anterior se aplica a cualquier trayectoria cerrada en cualquier circuito eléctrico y es consecuencia de la conservación de la energía. Se le conoce como la regla de Kirchhoff de las *mallas*:

I. Regla de las mallas: *La suma algebraica de los cambios de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier circuito cerrado debe ser cero.*

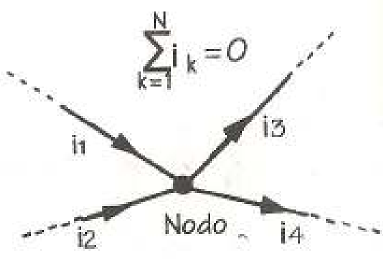


Regla de las Mallas

La segunda regla se refiere a la conservación de la carga en los *nodos* o puntos de unión de tres o más conductores:

II. *Regla de los nodos: Para cualquier nodo la suma algebraica de las corrientes debe ser cero.*

De no ser así, habría acumulación o desaparición de carga en el nodo y modificaría el campo eléctrico, lo cual estaría en desacuerdo con la suposición de estado estacionario.



Regla de los nodos

Para aplicar la regla de los nodos, el signo que se le asigna a una corriente que entra al nodo es opuesto al de una corriente que sale del mismo.

Para aplicar la regla de las mallas, los signos para los ΔV en los elementos individuales, dependen del sentido de recorrido elegido:

1. Si se recorre una resistencia en la dirección de la corriente, encontramos una "caída" de potencial (ΔV= - IR).

2. Si se recorre un resistencia en dirección contraria a la corriente, encontramos una "subida" de potencial (ΔV= + IR).

3. Si se recorre una fuente de FEM en dirección de su polaridad, de (+) a (-), encontramos una "caída" de potencial (ΔV= - ε).

4. Si se recorre una fuente de FEM en dirección de su polaridad de (-) a (+), encontramos una "subida" de potencial (ΔV= + ε).

CIRCUITOS DE MALLAS MULTIPLES

Resolver un circuito consiste en determinar ciertos parámetros incógnitas, tales como corrientes, voltajes o resistencias, cuando se conocen otros parámetros. Para ello se recomienda:

a. Asignar símbolos y sentidos arbitrarios a las corrientes en las diversas ramas.
b. Aplicar la regla de los nodos para obtener relaciones entre las corrientes en las uniones.
c. Aplicar la regla de las mallas a tantas mallas como sea necesario.
d. El número de ecuaciones independientes debe ser igual al número de incógnitas. Se resuelven las ecuaciones simultáneas para hallar las cantidades desconocidas.

En un circuito que tiene "n" nodos y "m" mallas, la regla de los nodos da (n - 1) ecuaciones independientes y la regla de las mallas da (m - 1) ecuaciones independientes.

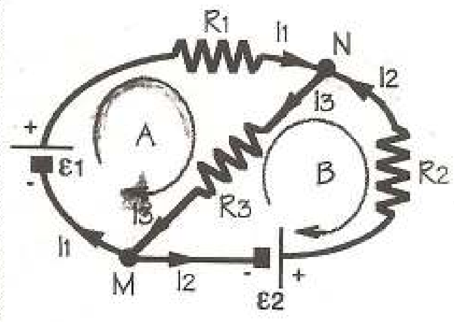
UN EJEMPLO: En el circuito mostrado supongamos que conocemos los valores de las fem y de las resistencias, y se desea hallar las corrientes. Los pasos serían:

a. Asignamos arbitrariamente los sentidos a las corrientes i_1, i_2 e i_3 en cada rama.

b. Aplicamos la regla de los nodos al nodo N: las corrientes i_1 e i_2 entran y las llamamos positivas, i_3 sale y la llamamos negativa. Se obtiene la ecuación (1). Si consideramos el otro nodo, M, no serviría de nada ya que conduce a la misma ecuación.

c. Escribimos la ecuación para las mallas adoptando el "sentido horario" de recorrido. Para la malla A resulta la ecuación (2). Para la malla B resulta la ecuación (3). Si consideramos una tercera malla (el circuito externo) arrojaría una ecuación que es combinación lineal de las dos anteriores.

d. Resolvemos el sistema de las tres ecuaciones independientes para hallar las tres incógnitas. Para ello, despejamos i_1 e i_2 de las ecuaciones (2) y (3) y las sustituimos en la ecuación (1), obteniéndose la ecuación (4). Se reordena esta expresión para despejar i_3. Finalmente, se pueden determinan las corrientes i_1 e i_2 por sustitución de i_3 en las ecuaciones (2) y (3).



$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_1 - I_1R_1 - I_3R_3 = 0 \qquad (2)$$

$$-\varepsilon_2 + I_3R_3 + I_2R_2 = 0 \qquad (3)$$

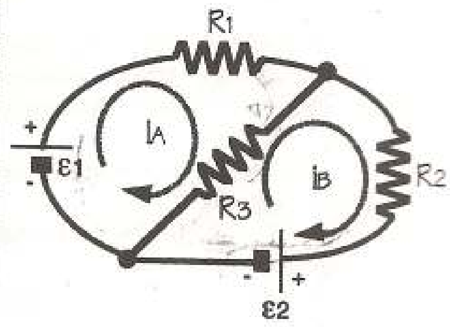
$$I_3 = \left[\frac{\varepsilon_1 - I_3R_3}{R_1}\right] + \left[\frac{\varepsilon_2 - I_3R_3}{R_2}\right] \qquad (4)$$

$$\boxed{I_3 = \frac{\varepsilon_1R_2 + \varepsilon_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}$$

Los circuitos sencillos requieren de pocas ecuaciones lineales simultáneas, las cuales pueden resolverse por métodos usuales de sustitución y eliminación de variables. Cuando hay un gran número de mallas, esto puede resultar sumamente tedioso y en tal caso se recomienda el *método de las corrientes circuitales*.

METODO DE CORRIENTES CIRCUITALES

Este método consiste en asignar corrientes independientes a cada malla. En el ejemplo mostrado, las corrientes circuitales i_A e i_B circulan independientemente en sus respectivas mallas en sentido horario.



En la <u>malla A</u>, la batería produce una subida de potencial $(+\varepsilon_1)$. La corriente i_A produce una "caída" de potencial total $-(R_1+R_3)i_A$, en tanto que en esa misma malla la corriente i_B produce una "subida" de potencial $+R_3 i_B$. La ecuación de la malla es:

$$+\varepsilon_1 - (R_1+R_3)i_A + R_3 i_B = 0 \qquad \text{Malla (A)}$$

Aplicando criterios similares para la malla B, se obtiene:

$$-\varepsilon_2 + R_3 i_A - (R_2+R_3)i_B = 0 \qquad \text{Malla (B)}$$

Note que la corriente que antes llamamos i_3 es ahora $(i_A - i_B)$. Esto asegura que se cumple automáticamente la regla de los nodos y el problema se reduce a resolver dos ecuaciones simultáneas (en lugar de tres).

$$-(R_1+R_3)i_A + R_3 i_B = -\varepsilon_1$$
$$+R_3 i_A - (R_2+R_3)i_B = +\varepsilon_2$$

Ecuación matricial:

$$[R][I]=[V]$$

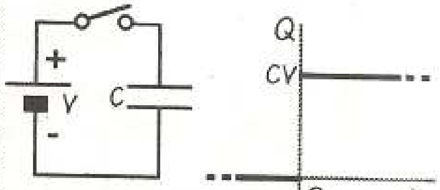
$$\begin{bmatrix} -(R_1+R_3) & +R_3 \\ +R_3 & -(R_2+R_3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

La ventaja de este método, es evidente en circuitos de muchas mallas, ya que conduce a ecuaciones matriciales simples que facilitan la solución en forma más eficiente.

CIRCUITOS RC

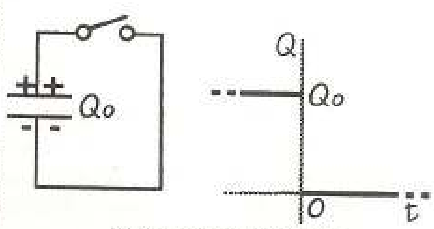
En nuestra discusión de los condensadores no se hicieron consideraciones de los efectos temporales en los procesos de carga y descarga.

Cuando un condensador es conectado directamente a una fuente "ideal", el condensador adquiere una carga $Q = CV$, en forma casi *instantánea*. (Fig. a)



a) Carga intantánea

De manera similar, si un condensador está inicialmente cargado y le corto-circuitamos sus terminales, la carga desaparece casi instantáneamente (Fig. b).

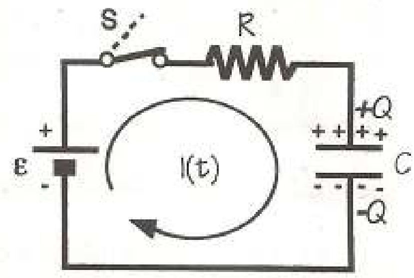


b) Descarga intantánea

La situación es diferente cuando hay *resistencias* en el circuito, ya que en cada instante hay caídas de potencial que regulan el proceso, haciendo que las corrientes varíen en forma transitoria.

CARGA DE UN CONDENSADOR

Supongamos que en $t = 0$ cerramos el interruptor. De acuerdo a la regla de Kirchhoff, la suma algebraica de los voltajes de la batería (ε), en la resistencia (iR) y en el condensador (Q/C), es cero:



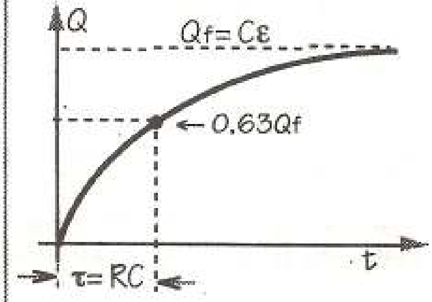
$$\varepsilon - iR - \frac{Q}{C} = 0$$

Como la corriente es $i = dQ/dt$, podemos reemplazarla en la ecuación:

$$\varepsilon - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

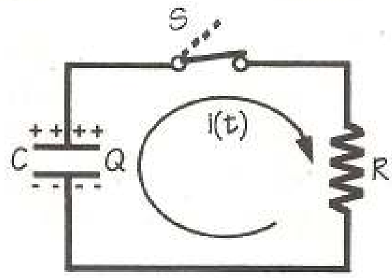
Esta ecuación diferencial de la carga Q, tiene como solución una función exponencial creciente:

$$\boxed{Q = C\varepsilon\,(1 - e^{-t/RC})}$$



DESCARGA DE UN CONDENSADOR

Si el condensador tiene carga inicial Q_0 y lo conectamos a una resistencia, la ecuación diferencial del circuito es, de acuerdo a Kirchhoff:



$$iR + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{ó} \quad R\left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{Q}{C} = 0$$

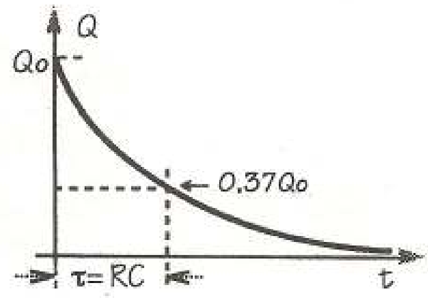
Esta ecuación diferencial es muy común en física, y expresa que la tasa de variación de una cantidad física (dQ/dt) es proporcional a la cantidad misma (Q). La integración es inmediata, obteniéndose una exponencial decreciente:

$$\boxed{Q = Q_0\, e^{-t/RC}}$$

La cantidad RC tiene dimensiones de tiempo y se denomina *constante de tiempo*:

$$\tau = RC \text{ (segundos)}$$

La constante de tiempo τ determina una escala temporal de la duración de los procesos de carga o descarga de los circuitos RC.



Carga en función del tiempo

VERIFICA TU COMPRENSION

PE-7.01. ***Una fuerza electromotriz es:***

a) Una fuerza de origen eléctrico.
b) Una fuerza no electrostática.
c) Un trabajo por unidad de tiempo.
d) Un trabajo por unidad de carga.
e) Una energía potencial electrostática.

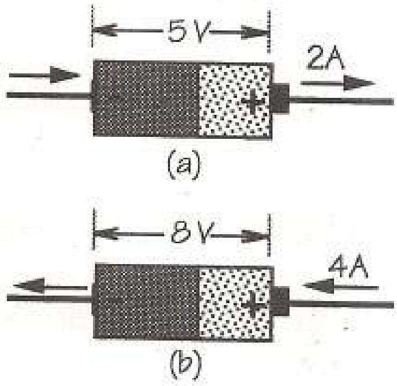
PE-7.02. ***¿ FEM y resistencia interna de la pila ?***

Cuando una corriente de 2A sale del borne positivo de una pila, la diferencia de potencial es 5 Voltios, (Fig. a).

Cuando en la misma pila entra una corriente de 4A al borne positivo, la diferencia de potencial es de 8 Voltios, (Fig. b).

¿ Cuáles son la fem y resistencia interna de la pila ?

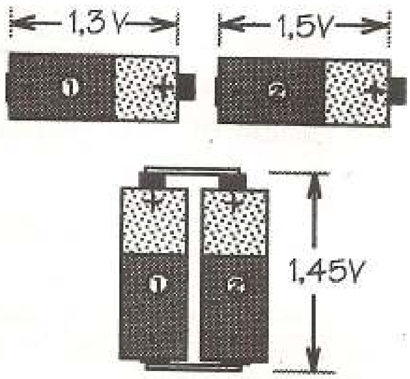
a) $\varepsilon = 8{,}0$ V, $r = 2{,}5\ \Omega$.
b) $\varepsilon = 7{,}5$ V, $r = 2{,}0\ \Omega$.
c) $\varepsilon = 7{,}0$ V, $r = 1{,}5\ \Omega$.
d) $\varepsilon = 6{,}5$ V, $r = 1{,}0\ \Omega$.
e) $\varepsilon = 6.0$ V, $r = 0{,}5\ \Omega$



PE-7.03. ***¿Cuál pila tiene mayor resistencia interna ?***

Se tienen dos pilas que han tenido diferente uso. Entre los terminales (abiertos) de una pila hay una diferencia de potencial V_1=1,3 Voltios y entre los terminales (abiertos) de la otra pila hay una diferencia de potencial V_2=1,5 Voltios.

Cuando se conectan las dos pilas en paralelo, como indica la figura, el voltaje entre los terminales comunes es 1,45 Voltios.



...lación entre las resistencias internas de las pilas es:

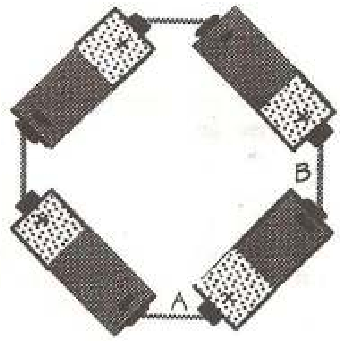
b) $r_1 = 2r_2$ **c)** $r_1 = 3r_2$ **d)** $r_2 = 2r_1$ **e)** $r_2 = 3r_1$

PE-7.04. *Circuito cerrado con puras pilas*

Cuatro pilas idénticas de FEM=1,5 Voltios y resistencias internas 1Ω, forman un circuito cerrado, de modo que el polo (+) de una pila está conectado al polo (-) de la siguiente.

Si medimos con un voltímetro a través de los polos (A) y (B) de una de las pilas ¿Cuál será la lectura del voltímetro ?

a) cero. **b)** 1,5 V. **c)** 3,0 V. **d)** 4,5 V. **e)** 6,0 V.

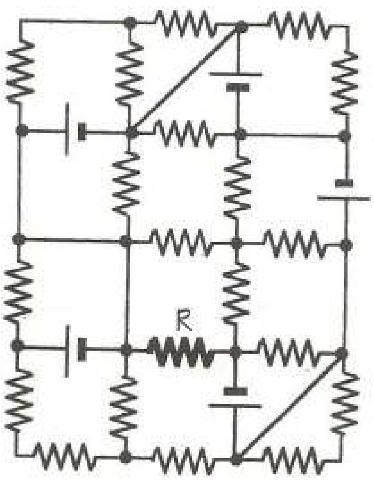


PE-7.05. *Kirchhoff al rescate*

En el circuito mostrado todas las baterías son idénticas, de resistencia despreciable y con fem de 1 Voltio. La resistencia R vale 1 Ω y el resto de las resistencias tienen un valor de 0,5 Ω. Se desprecia la resistencia de los alambres de conexión.

La corriente que circula por la resistencia R es:

a) cero
b) 1 A
c) 2 A
d) 3 A
e) 4 A.

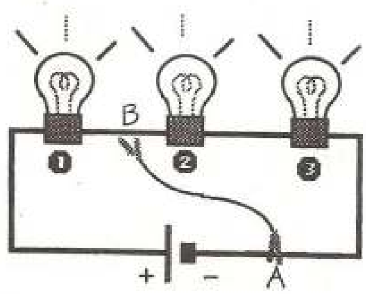


PE-7.06. *¡ Cuidado con quemar los bombillos !*

Tres bombillos idénticos se encuentran conectados en serie a una pila ideal (sin resistencia interna).

¿Qué sucederá al conectar un alambre de resistencia despreciable entre los puntos A y B ?

a) Los tres bombillos siguen brillando con igual intensidad.
b) Los tres bombillos brillan igual pero con menor intensidad.
c) Los tres bombillos se apagan.
d) El bombillo 1 brilla menos y los bombillos 2 y 3 brillan más.
e) El bombillo 1 brilla más y los bombillos 2 y 3 se apagan.

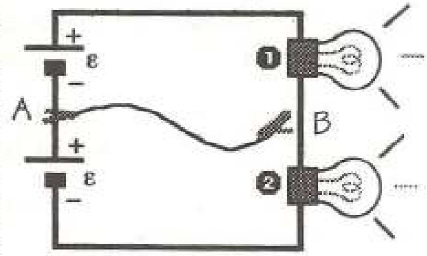


PE-7.07. *Dos pilas para dos bombillos*

Dos bombillos idénticos se encuentran conectados en serie a dos pilas ideales.

¿ Qué sucederá al conectar un alambre de resistencia despreciable entre los puntos A y B ?

a) Los dos bombillos siguen brillando igual que antes.
b) Los dos bombillos brillan igual pero con menor intensidad.
c) Los dos bombillos se apagan.
d) El bombillo 1 brilla menos y el bombillo 2 brilla más.
e) El bombillo 1 brilla más y el bombillo 2 brilla menos.

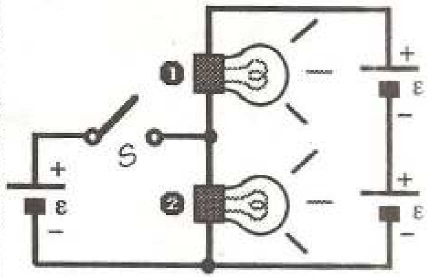


PE-7.08. *Una pila de refuerzo*

Dos bombillos idénticos se encuentran conectados en serie a dos pilas ideales idénticas.

¿ Qué sucederá al cerrar el interruptor S, con lo cual se conecta al bombillo 2, una pila adicional ?

a) Los dos bombillos siguen brillando igual que antes.
b) Los dos bombillos brillan con mayor intensidad que antes.
c) El bombillo 1 brilla igual que antes y el 2 brilla más.
d) El bombillo 1 brilla menos que antes y el 2 brilla más.
e) El bombillo 2 brilla más que antes y el 1 se apaga.

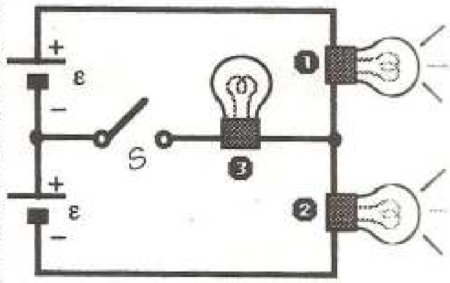


PE-7.09. *Intercalando un bombillo más.*

El circuito mostrado ha estado funcionando por un tiempo largo. Las dos pilas son idénticas y de resistencia despreciable, los tres bombillos son idénticos.

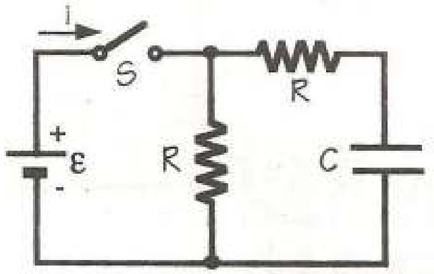
¿ Qué sucederá al cerrar el interruptor S ?

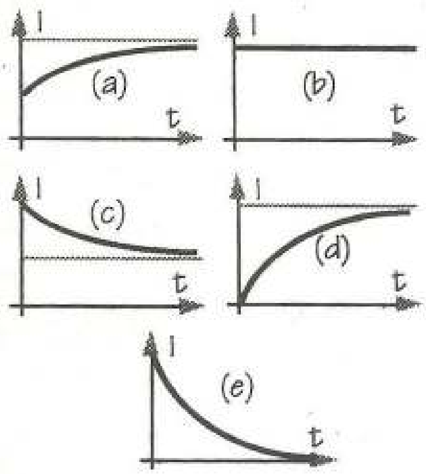
a) Los bombillos 1 y 2 brillan igual que antes y el bombillo 3 brilla más que ellos.
b) Los bombillos 1 y 2 brillan igual que antes y el bombillo 3 no prende.
e) El bombillo 3 prende y los bombillos 1 y 2 se apagan.
c) Los bombillos 2 y 3 brillan más que el bombillo 1.
d) Los bombillos 1 y 3 brillan más que el bombillo 2.



PE-7.10. *Corriente en la batería mientras se carga C.*

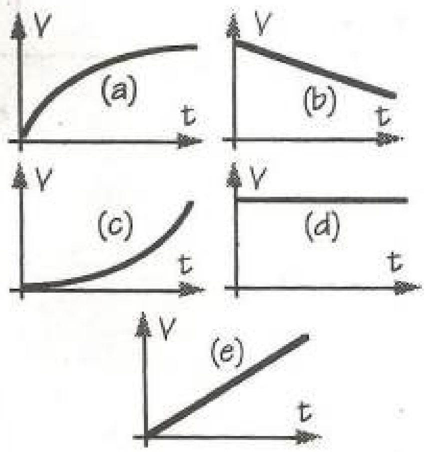
En el siguiente circuito, el condensador está inicialmente descargado y en t = 0 se cierra el interruptor.





¿ Cuál de los gráficos mostrados representa la corriente en la batería en función del tiempo ?

PE-7.11. *Carga de un condensador con I constante*

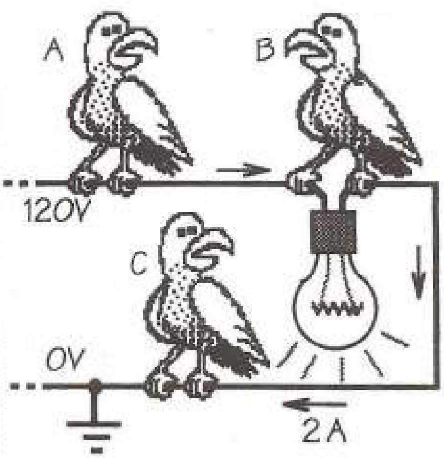


Suponga que se desea cargar un condensador manteniendo la corriente constante.

¿ Cuál de los siguientes gráficos representaría la diferencia de potencial a través del condensador en función del tiempo ?

PE-7.12. *Peligro de electrocución*

Un bombillo está conectado a la red de 120 voltios mediante una línea de alimentación hecha con alambres desnudos. Sobre los alambres desnudos se posan los tres loros A, B y C, mostrados en la figura.

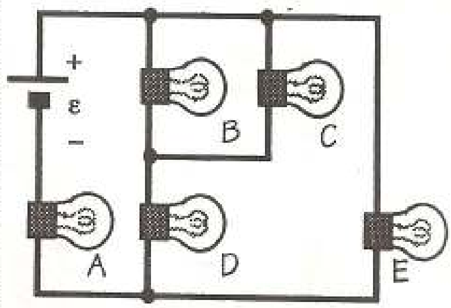


¿ Cuál de los loros está en peligro inminente de electrocutarse ?

a) Unicamente el loro A.
b) Unicamente el loro B.
c) Unicamente el loro C.
d) Los loros A y B.
e) Los tres loros.

PE-7.13. ***¿ Cuál brilla más, cuál brilla menos ?***

Cinco bombillos idénticos están conectados a una fuente como muestra la figura. Suponga que todos los bombillos presentan igual resistencia, independiente del voltaje aplicado.



¿ Cuál brilla más y cual brilla menos ?

a) Brilla más el A y brilla menos el D
b) Brilla más el E y brilla menos el B y el C
c) Brilla más el D y brilla menos el E
d) Brilla más el A y brilla menos el B y el C
e) Brilla más el B y brilla menos el A

Cap. 7: Respuestas

Pregunta	a	b	c	d	e
PE-7.01				✓	
PE-7.02					✓
PE-7.03			✓		
PE-7.04	✓				
PE-7.05			✓		
PE-7.06					✓
PE-7.07	✓				
PE-7.08	✓				
PE-7.09		✓			
PE-7.10			✓		
PE-7.11					✓
PE-7.12		✓			
PE-7.13				✓	

PR 7.01. ***Si no apagas la sirena te quedas sin batería***

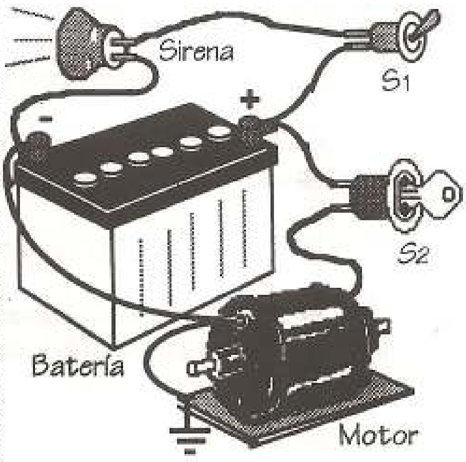
Cierta batería de automóvil tiene una FEM de 12 V y una carga inicial de 120 Amperes-hora. Suponiendo que la diferencia de potencial en sus terminales permanece constante hasta que se descarga completamente.

a) Determine la energía total utilizable.
b) ¿ Durante cuánto tiempo se puede alimentar la sirena de la alarma que opera a 12 V -100 W ?
c) ¿ Durante cuánto tiempo se puede alimentar el motor de arranque que opera a 12 V -120 A ?

Solución: a) La carga que circularía durante el tiempo Δt es $Q = i\,\Delta t$ y la energía química disponible de la batería es:

$$\Delta E = Q\varepsilon = (i\,\Delta t)\,\varepsilon$$

$$\Delta E = (120\text{ A})(1\text{h}\times 60\text{min/h})(60\text{s/min})(12\text{V}) = 5{,}18\times 10^{6}\text{ J.}$$



b) La potencia P (en Watts) es la razón a la cual se suministra energía, por lo tanto, cuando la batería alimenta únicamente a la sirena (S_1 cerrado), se tiene:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{Q\varepsilon}{P}$$

$$\Delta t = \frac{(120\text{ A}\cdot\text{h})(12\text{ V})}{100\text{ W}} = 14{,}4\text{ h.}$$

c) Cuando la batería está alimentando sólo al motor de arranque (S_2 cerrado), el máximo tiempo de operación es:

$$\Delta t = \frac{Q}{i} = \frac{(120\text{A}\cdot\text{h})}{120\text{ A}} = 1\text{ hora}$$

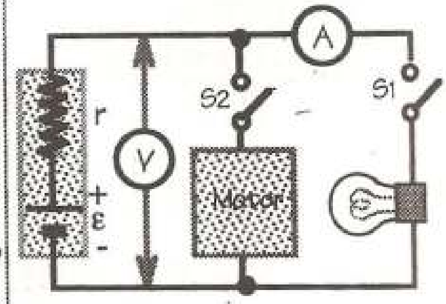
Respuesta:

a) $\Delta E = 5{,}18\times 10^{6}$ J.
b) $\Delta t = 14{,}4$ h.
c) $\Delta t = 1$ h.

PR 7.02. ***Al encender el arranque, las luces bajan***

Cuando se encienden las luces de un automóvil, la lectura de un amperímetro conectado en serie es 10 A y la de un voltímetro conectado en paralelo es 12 V (ver figura).
Cuando se pone en marcha el motor de arranque, la lectura del amperímetro disminuye a 8 A y las luces bajan su brillo.

Sabiendo que la resistencia interna de la batería es 0,05 Ω determine:
a) *La FEM de la batería.*
b) *La corriente en el motor de arranque cuando las luces están encendidas.*



$R_V = \infty$ y $R_A = 0$

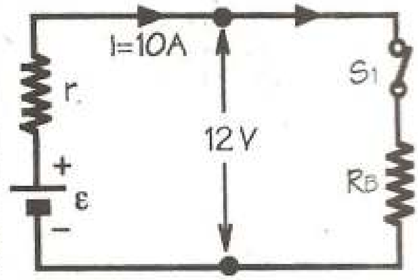
Solución: a) La fem de la batería se calcula a partir de la ecuación de Kirchhoff (Fig. a):

$$\varepsilon - i\,r - 12V = 0$$

$$\varepsilon = 12V + i\,r = 12V + (10\ A)(0{,}05\ \Omega) = 12{,}5\ V$$

a) Podemos calcular la resistencia del bombillo, conocidos el voltaje y la corriente:

$$R_B = 12V / 10A = 1{,}2\Omega$$



(Fig. a)

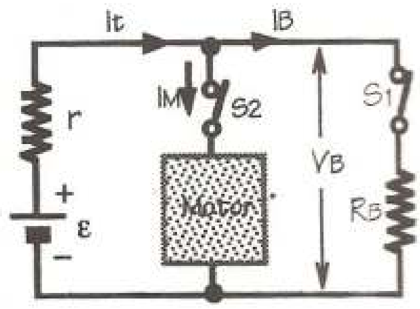
Considerando la situación mostrada en la Fig. b, podemos calcular primero el voltaje en el bombillo*

$$V_B = i_B R_B = (8A)(1{,}2\Omega) = 9{,}6\ V$$

El voltaje V_B es el mismo que el del motor de arranque. Para hallar la corriente total de la batería, i_t, escribimos la ecuación de la malla:

$$\varepsilon - i_t r - V_B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$i_t = \frac{\varepsilon - V_B}{r} = \frac{12{,}5V - 9{,}6V}{0{,}05\Omega} = 58\ A$$



(Fig. b)

Finalmente, la corriente I_M en el motor de arranque viene dada por:

$$I_M = I_t - I_B = 58\ A - 8\ A = 50\ A$$

Respuesta:

a) $\varepsilon = 12{,}5$ V
b) $I_A = 50$ A

* Hemos supuesto que la resistencia del bombillo no varía, lo cual no es necesariamente cierto, por ser éste un elemento no óhmico.

PR 7.03. Baterías en serie vs. baterías en paralelo

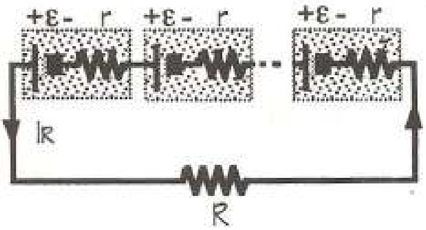
Un grupo de N baterías idénticas de FEM = ε y resistencia interna r, se conectan todas en paralelo o todas en serie y luego se conecta la respectiva combinación a través de una resistencia R.

a) Determine la corriente en R para la combinación serie.

b) Determine la corriente en R para la combinación paralelo.

c) Demuestre que darán la misma corriente si R = r.

Solución: a) *Cuando las baterías están en serie*, la corriente en la resistencia R es igual a la corriente en cada batería ($i_R = i_B$).



a) N baterías en serie

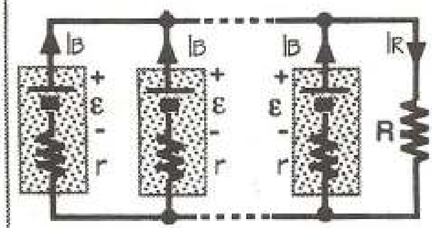
El voltaje V_R es la suma de las FEM de las baterías (Nε) menos la suma de las caídas de potencial en las resistencias internas:

$$V_R = i_R R = N\varepsilon - N(i_R r)$$

Despejando la corriente, tenemos:

$$i_R = \frac{\varepsilon}{[r + R/N]}$$

b) *Cuando las baterías están en paralelo* el voltaje $V_R = i_R R$ es igual al voltaje terminal en cada batería, o sea, la FEM menos la caída de potencial interna:



b) N baterías en paralelo

$$V_R = i_R R = \varepsilon - i_B r$$

La corriente i_R es la suma de todas las corrientes (i_B) de las N baterías:

$$i_R = N\, i_B$$

Eliminando de estas dos ecuaciones tenemos:

$$i_R = \frac{\varepsilon}{[R + r/N]}$$

c) Si comparamos las expresiones obtenidas para i_R se observa que la corriente sería igual, en ambas combinaciones, cuando la resistencia externa sea igual a la resistencia interna de las baterías (R = r).

Respuesta:

a) Serie:	$i_R = \dfrac{\varepsilon}{[r + R/N]}$
b) Paralelo:	$i_R = \dfrac{\varepsilon}{[R + r/N]}$

PR 7.04. Midiendo R con voltímetro y amperímetro.

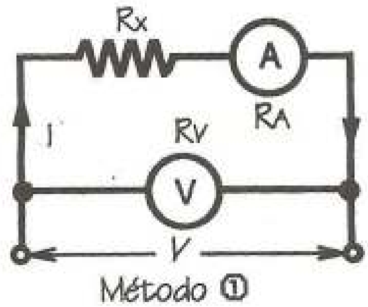
Para medir una resistencia R_X empleando un voltímetro y un amperímetro, hay dos maneras de conectar los medidores:

1. *El voltímetro a través de R_X y el amperímetro.*
2. *El voltímetro sólo a través de R_X.*

Debido a que los instrumentos tienen resistencias internas, (voltímetro R_V y amperímetro R_A) ambos métodos podrían dar valores inexactos.

Determine en cada caso la ecuación exacta para R_X en términos de la lectura, i, del amperímetro, y la lectura, V, del voltímetro. ¿Bajo cuáles condiciones es $V/i = R_X$?

Solución: *Método 1:* Si se conecta el amperímetro en serie con R_X, el voltaje que indica el voltímetro es la suma del voltaje en R_X y el voltaje en el amperímetro:



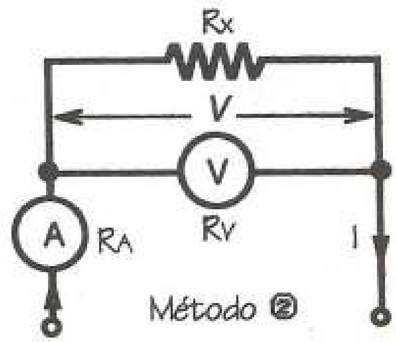
$$V = i\,R_X + i\,R_A$$

Despejando R_X:

$$R_x = \left(\frac{V}{i}\right) - R_A$$

Solamente cuando $R_A << R_X$ tendríamos $(V/i) = R_X$

Método 2: Si se conecta el voltímetro en paralelo con R_X, la resistencia equivalente está dada por:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_V}$$

El voltaje que indica el voltímetro es también el voltaje de la resistencia equivalente:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{iR_{eq}} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_V}\right)$$

Despejando, tenemos el inverso de R_X:

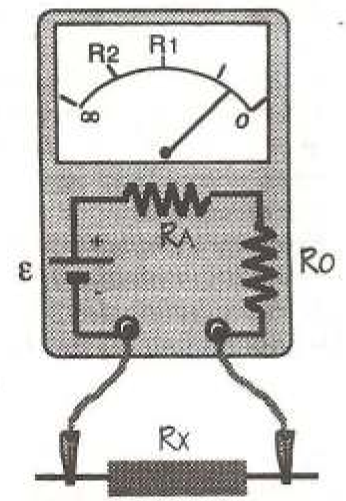
$$\frac{1}{R_x} = \left(\frac{i}{V}\right) - \frac{1}{R_V}$$

Solamente cuando $R_V >> R_X$ tendríamos $(V/i) = R_X$

Respuesta:

Método 1: $R_x = (V/i) - R_A$
Método 2: $1/R_x = (i/V) - 1/R_V$

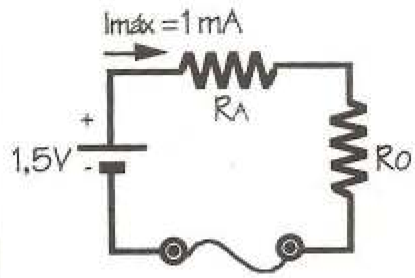
PR 7.05. *Un ohmímetro simple*



Se construye un ohmímetro conectando un amperímetro (escala de 0 a 1 mA) en serie con una batería (ε = 1,5 V) y una resistencia R_0. La resistencia R_0 es la de ajuste del cero, es decir, cuando se corto-circuitan los terminales de entrada se ajusta hasta obtener la desviación máxima de la aguja (cero Ω).

a) *¿ Cual es el valor de la resistencia incógnita R_x cuando la deflexión de la aguja es 50% de su máximo (R_1 en el dibujo) ?*
b) *¿ Cuál es el valor de la resistencia incógnita R_x cuando la deflexión de la aguja es 25% de su máximo (R_2 en el dibujo) ?*
c) *Si la batería tiene resistencia despreciable y la resistencia interna del amperímetro es 20Ω, ¿ cuál será el valor de R_0 ?*

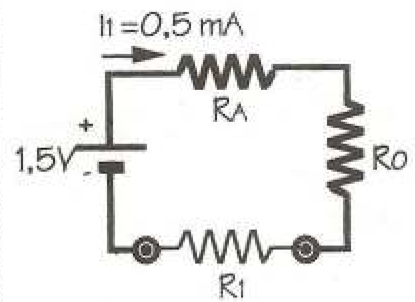
Solución: **a)** Cuando se corto-circuitan los terminales (R_x=0) la corriente es máxima (i = 1 mA):



$$I_{máx} = \frac{\varepsilon}{R_A+R_0} \Rightarrow (R_A+R_0) = \frac{\varepsilon}{I_{máx}} = \frac{1{,}5\ \text{V}}{1\text{mA}} = 1{,}5\ \text{k}\Omega$$

Donde R_A es la resistencia del amperímetro.

Cuando se inserta R_1 la corriente se reduce a la mitad, i = 0,5 mA, por lo tanto:



$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1+R_A+R_0} \Rightarrow R_1 = \frac{\varepsilon}{I_1} - (R_A+R_0)$$

$$R_1 = \frac{1{,}5\ \text{V}}{0{,}5\text{mA}} - 1{,}5\ \text{k}\Omega = 1{,}5\ \text{k}\Omega$$

b) Cuando la corriente es i = 0,25 mA, el valor de la resistencia correspondiente, R_2 es:

$$R_2 = \frac{\varepsilon}{I_2} - (R_A+R_0) = \frac{1{,}5\ \text{V}}{0{,}25\text{mA}} - 1{,}5\ \text{k}\Omega = 4{,}5\ \text{k}\Omega$$

Observe que la escala de resistencias no es lineal.

c) Si R_A = 20 Ω, la resistencia R_0 viene dada por:

$$(R_A+R_0) = 1{,}5\ \text{k}\Omega \Rightarrow R_0 = 1{,}48\ \text{k}\Omega$$

Respuesta:

a) R_1 =1,5 kΩ
b) R_2 =4,5 kΩ
c) R_0 =1,48 kΩ

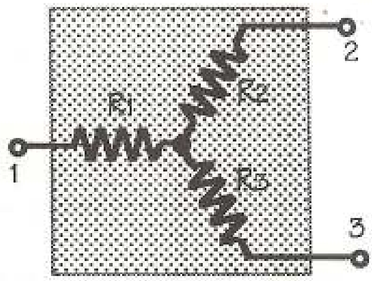
O.X.

PR 7.06. *Estrella en una caja negra*

En una caja negra hay tres resistencias conectados en forma de estrella. Como no hay manera de destapar la caja, y con el fin de determinar los valores de las resistencias, se realizaron mediciones entre cada par de terminales, obteniéndose los siguientes resultados:

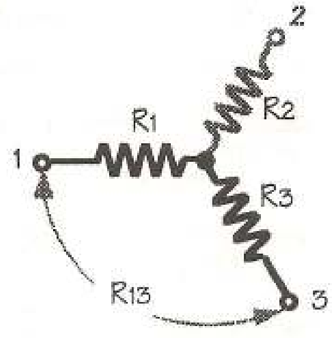
Entre los terminales 1 y 2, la resistencia es R_{12}
Entre los terminales 1 y 3, la resistencia es R_{13}
Entre los terminales 2 y 3, la resistencia es R_{23}

¿ Cuáles son los valores de R_1, R_2 *y* R_3 *?*



Solución: Cuando se mide entre cada par de terminales, lo que se obtiene es la suma de dos resistencias, por quedar éstas en serie (ya que el la tercera resistencia queda desconectado). Por lo tanto se obtienen tres ecuaciones simultáneas:

$$R_{12} = R_1 + R_2 \qquad (1)$$
$$R_{13} = R_1 + R_3 \qquad (2)$$
$$R_{23} = R_2 + R_3 \qquad (3)$$



$R_{13} = R_1 + R_3$.

Si queremos hallar R_1, primero combinamos las ecuaciones (2) y (3) para eliminar R_3:

$$(3) - (2) \quad \Rightarrow \quad R_{23} - R_{13} = R_2 - R_1 \qquad (4)$$

Luego combinamos la ecuación (4) con la (1) para eliminar R_2:

$$(4) - (1) \quad \Rightarrow \quad (R_{23} - R_{13}) - R_{12} = -2R_1$$

Por lo tanto:

$$R_1 = \frac{1}{2}[R_{12}+R_{13}-R_{23}]$$

Procediendo de manera similar, se obtienen R_2 y R_3:

$$R_2 = \frac{1}{2}[R_{12}+R_{23}-R_{13}]$$
$$R_3 = \frac{1}{2}[R_{13}+R_{23}-R_{12}]$$

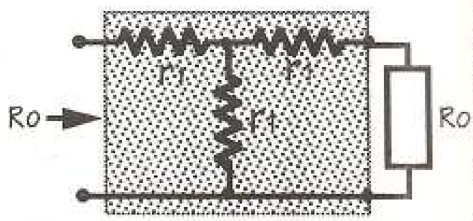
Respuesta:

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}[R_{12}+R_{13}-R_{23}] \\ R_2 &= \frac{1}{2}[R_{12}+R_{23}-R_{13}] \\ R_3 &= \frac{1}{2}[R_{13}+R_{23}-R_{12}] \end{aligned}}$$

PR 7.07. *Intercalar la caja no afecta la resistencia*

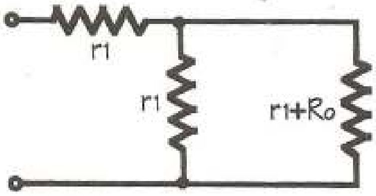
Cierto dispositivo tiene resistencia R_o, *y cuando se intercala una caja negra , la cual contiene tres resistencias idénticas en "T", como indica la figura, la resistencia equivalente sigue siendo* R_o.

¿ Cuál es el valor de cada resistencia de la caja ?



Solución: Para hallar la resistencia entre los terminales de entrada reducimos el circuito paso a paso.
La rama de la derecha, por estar R_0 en serie con r_1 es equivalente a (r_1+R_0), (Fig. 1). A su vez esta combinación queda en paralelo con la resistencia r_1 del medio y la resultante es:

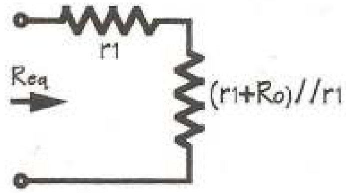
$$\frac{r_1(r_1+R_0)}{r_1+(r_1+R_0)}$$



(Fig. 1)

En el circuito de la Fig. 2, se muestra esta combinación en serie con la r_1 de la izquierda y la resistencia equivalente entre los terminales de entrada es:

$$R_{eq}=\frac{r_1(r_1+R_0)}{r_1+(r_1+R_0)}+r_1$$



(Fig. 2)

La condición $R_{eq}=R_0$ implica que:

$$R_0(2r_1+R_0)=r_1(r_1+R_0)+r_1(2r_1+R_0)$$

Agrupando términos, tenemos finalmente:

$$R_0^2=3r_1^2 \quad \Rightarrow \quad r_1=\frac{R_0}{\sqrt{3}}$$

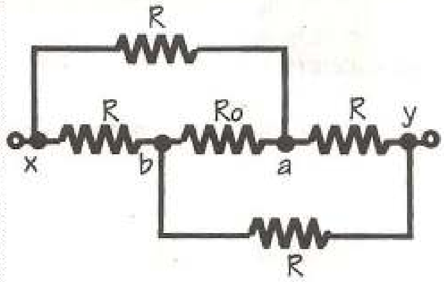
Respuesta:

$$\boxed{r_1=\frac{R_0}{\sqrt{3}}}$$

PR 7.08. ***¿ Cuál es la resistencia equivalente ?***

Determine la resistencia equivalente entre los terminales x y y del circuito mostrado.

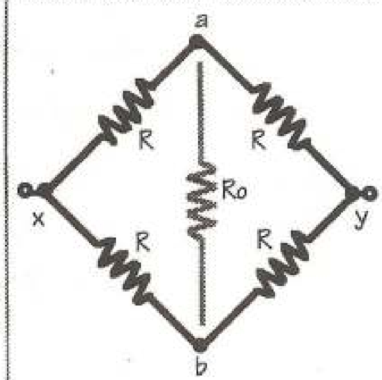
Todas las resistencias son de igual valor, R, excepto la del medio, que vale R_0.



Solución: Los alambres de conexión pueden ser re acomodados de manera tal que se aprecie la simetría del circuito respecto de la resistencia central, como muestra la figura.

Cuando se conecta una batería entre los terminales x y y, es evidente que debido a la simetría, los nodos a y b están al mismo potencial.

Por lo tanto, no fluye corriente en la resistencia R_0 y este puede ser eliminado, sin que se alteren las corrientes en el resto del circuito.



Al hacer esto, nos quedamos con las ramas superior e inferior, cada una con dos resistencias en serie (valor 2R). Las ramas a su vez están conectadas en paralelo. Por lo tanto:

$$R_{xy} = \frac{(2R)(2R)}{(2R)+(2R)} = R$$

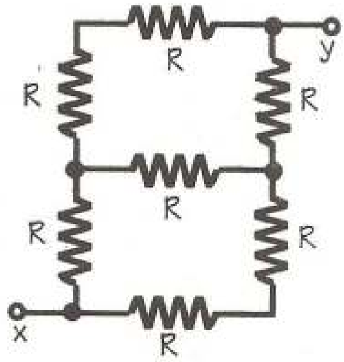
Respuesta:

$$\boxed{R_{xy} = R}$$

PR 7.09. ¿ Cuál es la resistencia equivalente ?

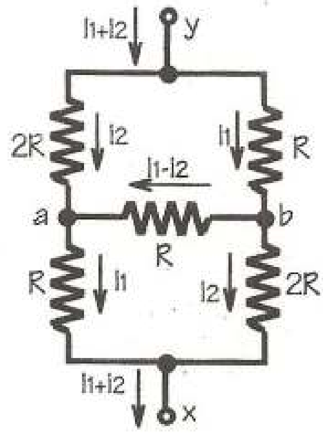
Determine la resistencia equivalente entre los terminales x y y del circuito mostrado.

Todas las resistencias son de igual valor, R.



Solución: Al resolver las dos ramas que tienen dos resistencias en serie cada una, el circuito queda como se muestra en la figura.

Debido a la simetría, la corriente en las resistencias R de las ramas de arriba y de abajo son iguales (i_1). Similarmente la corriente en las resistencias 2R de arriba y de abajo, también son iguales (i_2). De esta manera, la corriente en la resistencia central es ($i_1 - i_2$)



Aplicando Kirchhoff a la malla de arriba (ybay):

$$-(i_1)R - (i_1 - i_2)R + i_2(2R) = 0$$

Simplificando tenemos:

$$i_1 = (3/2)i_2$$

La diferencia de potencial ($V_y - V_x$) es la suma de las caídas de potencial en las dos resistencias de la izquierda (ruta $y \rightarrow a \rightarrow x$):

$$V_y - V_x = i_2(2R) + i_1(R) = i_2(2R) + (3/2)i_2R = (7/2)i_2R$$

De manera que la resistencia equivalente entre los terminales xy viene dada por:

$$R_{xy} = \frac{V_x - V_y}{I_1 + I_2} = \frac{(\frac{7}{2}I_2R)}{(\frac{3}{2}I_2)+I_2} = \frac{7}{5}R$$

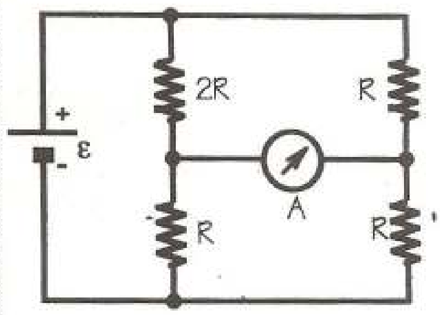
Respuesta:

$$\boxed{R_{xy} = \frac{7}{5}R}$$

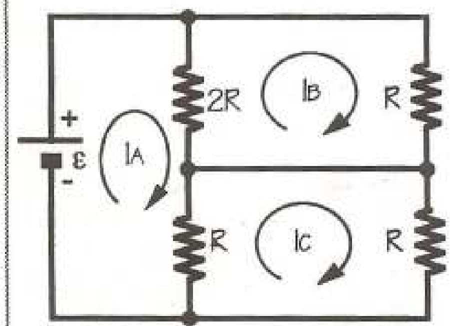
PR 7.10. ***¿ Cuál será la lectura del amperímetro ?***

En el circuito mostrado, tanto la batería como el amperímetro tienen resistencias despreciables.

¿ Cuál será la corriente que indicará el amperímetro en términos de la ε y de R?



Solución: Como el amperímetro no tiene resistencia, lo reemplazamos por un cortocircuito. Para hallar las corrientes usaremos el procedimiento de asignar (arbitrariamente) sentidos a las corrientes i_A, i_B, e i_C en las tres mallas. La corriente del amperímetro es la diferencia (i_B - i_C). Si recorremos cada malla en los sentidos indicados podemos escribir las ecuaciones de Kirchhoff:



Malla A: $\varepsilon - i_A(3R) + i_B(2R) + i_C(R) = 0$

Malla B: $+i_A(2R) - i_B(3R) - 0 = 0$

Malla C: $+i_A(R) - 0 - i_C(2R) = 0$

Reordenando las ecuaciones y resolviendo el sistema mediante determinantes (regla de Kramer), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 3R & -2R & -R \\ -2R & 3R & 0 \\ -R & 0 & 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i_B = \frac{\begin{vmatrix} 3R & \varepsilon & -R \\ -2R & 0 & 0 \\ -R & 0 & +2R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3R & -2R & -R \\ -2R & +3R & 0 \\ -R & 0 & +2R \end{vmatrix}} = \frac{4R^2\varepsilon}{18R^3-3R^3-8R^3} = +\frac{4\varepsilon}{7R}$$

$$i_C = \frac{\begin{vmatrix} 3R & -2R & \varepsilon \\ -2R & +3R & 0 \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3R & -2R & -R \\ -2R & +3R & 0 \\ -R & 0 & +2R \end{vmatrix}} = \frac{3R^2\varepsilon}{18R^3-3R^3-8R^3} = +\frac{3\varepsilon}{7R}$$

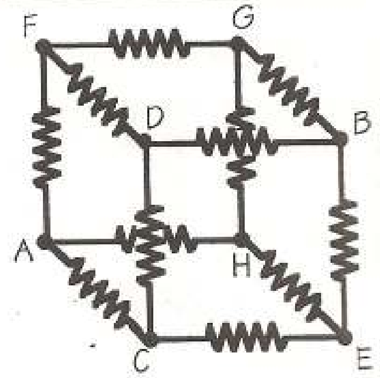
Finalmente, podemos determinar la corriente que pasa por el amperímetro:

$$i_{Amp} = i_B - i_C = \frac{4\varepsilon}{7R} - \frac{3\varepsilon}{7R} = \frac{\varepsilon}{7R}$$

Respuesta:

$$\boxed{i_{Amp} = \frac{\varepsilon}{7R}}$$

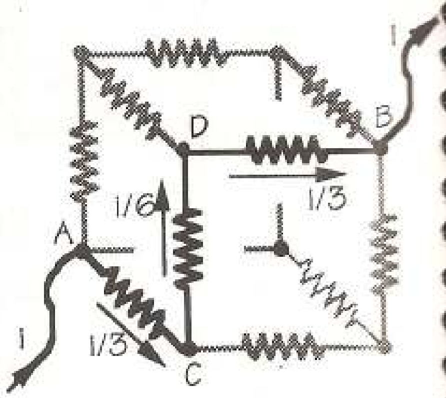
PR 7.11. Aprovechando la simetría del cubo



Doce alambres idénticos con resistencia R, se sueldan formando un cubo, con un alambre en cada arista.

¿ Cuál será la resistencia entre las esquinas opuestas de la diagonal A B del cuerpo del cubo?

Solución: Al aplicar una diferencia de potencial entre A y B, circula una corriente i que entra al cubo por la esquina A y sale por la esquina B. Debido a la simetría, esta corriente se divide en el punto A, en partes iguales (i/3) entre las tres aristas. .



Si consideramos la rama AC, la corriente(i/3) se ramifica a su vez en el punto C en dos partes iguales de valor (i/6). La corriente en CD se combina en el punto D con la corriente de igual valor (i/6) proveniente de la rama simétrica para sumar: (i/6) + (i/6) = (i/3) en la rama DB. Finalmente, las tres corrientes de valor (i/3) de las ramas simétricas concurren en el punto B para sumar: (i/3) + (i/3) + (i/3) = i.

Por otra parte, si recorremos el camino ACDB, la diferencia de potencial entre A y B es la suma de las diferencias de potenciales en las tres ramas consecutivas:

$$V_{AB}=V_{AC}+V_{CD}+V_{DB} = (\frac{i}{3})R + (\frac{i}{6})R + (\frac{i}{3})R = (\frac{5}{6}i)R$$

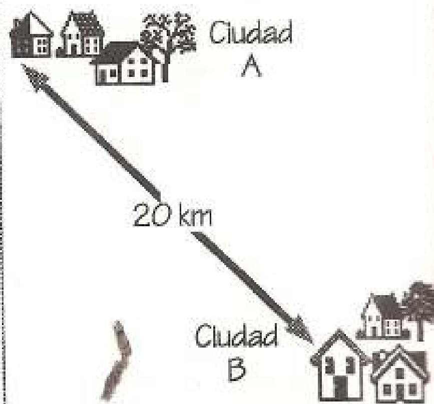
Por lo tanto, la resistencia entre A y B es:

$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{i} = (\frac{5}{6})R$$

Respuesta:

$$\boxed{R_{AB} = (\frac{5}{6})R}$$

PR 7.12. ¿Dónde está la avería del cable telefónico?



Se presenta una avería en un cable telefónico bifilar que conecta dos ciudades A y B, separadas por 20 km. Se sabe que la resistencia por unidad de longitud del cable es λ = 2 Ω/km, y se presume que en algún punto, la línea perdió aislación. A fin de determinar su ubicación se realizan las siguientes mediciones:

1 . Con la línea abierta en B, la resistencia en A es 50 Ω.

2. Si se corto-circuita en B, la resistencia en A es 40 Ω.
Halle el punto donde se encuentra la avería y el valor de la resistencia de aislamiento en dicho punto.

Solución: *Circuito 1:* La pérdida de aislamiento a cierta distancia X equivale a intercalar una resistencia R entre los dos alambres en ese punto.

Si los extremos B están abiertos, tenemos la resistencia de los dos tramos de longitud X de ida y vuelta de cable, en serie con R :

$$50 = 2\lambda X + R \qquad (1)$$

Circuito 2: Al cortocircuitar los extremos B, queda la resistencia R conectada en paralelo con el tramo de longitud 2(L- X), y a su vez esta combinación queda en serie con el tramo de longitud 2X:

$$40 = 2X\lambda + \frac{R[2\lambda(L - X)]}{R + [2\lambda(L - X)]} \qquad (2)$$

Tenemos así, un par de ecuaciones simultáneas con las dos incógnitas X y R.

Podemos despejar R de la ecuación (1) y sustituirla en la ecuación (2). Después de desarrollar y simplificar, nos queda una ecuación cuadrática en X:

$$(4\lambda^2)X^2 - (160\lambda)X + (2000 - 20\lambda L) = 0 \qquad (3)$$

Reemplazando los valores: $\lambda = 2\ \Omega$/km y L = 20 km, tenemos:

$$16X^2 - 320X + 1200 = 0 \qquad (4)$$

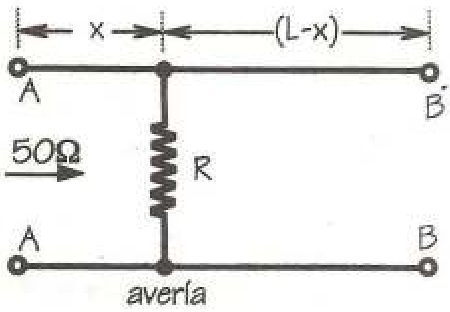
Las dos soluciones de esta ecuación son:

$$X = \frac{320 \pm \sqrt{320^2 - 4(16)1200}}{2x16} = \frac{320 \pm 160}{32} \rightarrow \begin{matrix} 15 \text{ km} \\ 5 \text{ km} \end{matrix}$$

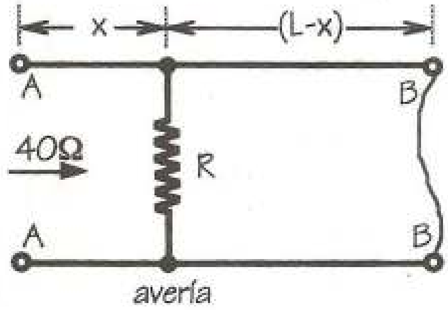
La primera raíz (X = 15 km) queda descartada ya que al sustituirla en la ecuación (1) arroja un valor para R de -10Ω (¡negativo!).

Por otra parte, al sustituir la raíz X = 5 km en la ecuación (1) resulta R = 30 Ω, lo cual sí tiene significado físico.

Concluimos entonces que la avería está a una distancia X = 5 km de la ciudad A y la resistencia de fuga de la línea es R = 30 Ω.



Circuito 1:
Terminales en B abiertos



Circuito 2:
Terminales en B corto-circuitados

Respuesta:

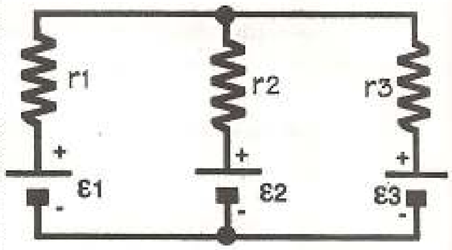
La fuga está a 5 km de A
R = 30Ω.

PR 7.13. *Balance energético*

En el circuito mostrado los valores de las fem y de las resistencias son los siguientes.

$$\varepsilon_1 = 9V. \quad \varepsilon_2 = 6V. \quad \varepsilon_3 = 2V.$$
$$r_1 = 2\Omega. \quad r_2 = 1\Omega. \quad r_3 = 1\Omega.$$

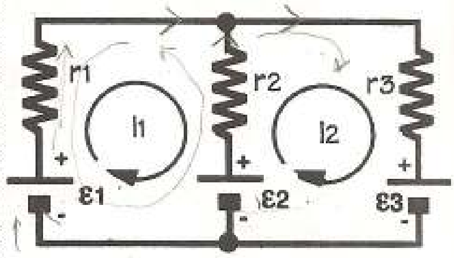
a) Calcule la corriente en cada resistencia.
b) Calcule las potencias en las resistencias y en las baterías.
c) Compruebe el balance energético.



Solución: a) Asignando las corrientes independientes, I_1 e I_2 y recorriendo las mallas en los sentidos indicados, obtenemos el par de ecuaciones de Kirchhoff:

Malla 1: $\varepsilon_1 - (r_1 + r_2)I_1 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0$

Malla 2: $\varepsilon_2 + r_2 I_1 - (r_2 + r_3)I_2 - \varepsilon_3 = 0$



Para hallar las corrientes I_1 e I_2, resolvemos las ecuaciones simultáneas usando la Regla de Kramer:

$$(r_1 + r_2)I_1 - r_2 I_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$
$$-r_2 I_1 + (r_2 + r_3)I_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$\begin{bmatrix} (r_1+r_2) & -r_2 \\ -r_2 & (r_2+r_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1-\varepsilon_2 \\ \varepsilon_2-\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1-\varepsilon_2 & -r_2 \\ \varepsilon_2-\varepsilon_3 & (r_2+r_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_1+r_2) & -r_2 \\ -r_2 & (r_2+r_3) \end{vmatrix}} = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(r_2+r_3) + r_2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{(r_1+r_2)(r_2+r_3) - r_2^2} = 2A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (r_1+r_2) & \varepsilon_1-\varepsilon_2 \\ -r_2 & \varepsilon_2-\varepsilon_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r_1+r_2) & -r_2 \\ -r_2 & (r_2+r_3) \end{vmatrix}} = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_3)(r_1+r_2) + r_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(r_1+r_2)(r_2+r_3) - r_2^2} = 3A$$

La corriente en la resistencia R_2 es:

$$I_3 = I_2 - I_1 = 3\text{ A} - 2\text{ A} = 1\text{ A}$$

b) Las potencias en las resistencias y en las baterías son:

	Gastadas	Generadas
$P_{r1} = I_1^2 r_1 = [2A]^2(2\Omega) = 8$ W		
$P_{r2} = I_3^2 r_2 = [1A]^2(1\Omega) = 1$ W		
$P_{r3} = I_2^2 r_3 = [3A]^2(1\Omega) = 9$ W		
$P_{\varepsilon1} = \varepsilon_1 I_1 = (9v)[2A] =$		18 W
$P_{\varepsilon2} = \varepsilon_2 I_3 = (6v)[1A] =$		6 W
$P_{\varepsilon3} = \varepsilon_3 I_2 = (2v)[3A] = 6$ W*		

c) Balance energético: $\sum P_{gastadas} = \underline{24\ W}$ $\sum P_{generadas} = \underline{24\ W}$

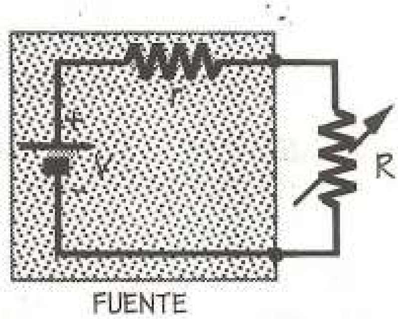
* Observe que la corriente i_2 entra al borne (+) de la batería ε_3 y por lo tanto, ésta "absorbe" energía de las otras dos baterías.

Respuesta:

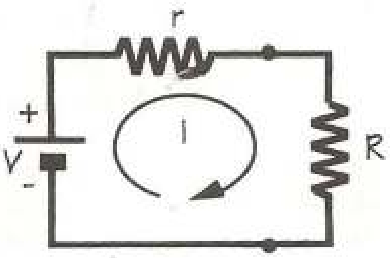
a) $i_1 = 2A$, $i_2 = 3A$, $i_3 = 1A$
b) $P_{r1} = 8W$, $P_{r2} = 1W$, $P_{r3} = 9W$
$P_{\varepsilon 1} = 18W$, $P_{\varepsilon 2} = 6W$, $P_{\varepsilon 3} = -6W$
c) P gastada = P generada

PR 7.14. *Máxima potencia con baja eficiencia*

Una fuente cuya fem es V y cuya resistencia interna es r se conecta a una resistencia externa R que puede ser variada.
a) Demuestre que la potencia suministrada a la resistencia externa será máxima cuando R = r.
b) La eficiencia del circuito es la fracción de la potencia generada por la fuente que es aprovechada en R. ¿ Cuál es la eficiencia cuando la potencia suministrada es máxima ?
c) Haga un gráfico de la potencia y la eficiencia en función de R/r.



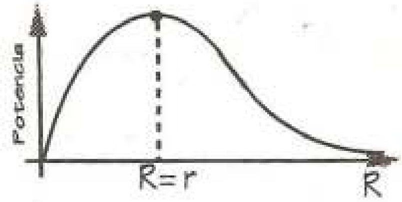
Solución: a) La corriente en el circuito es $I = V/(R + r)$; por lo tanto, la potencia suministrada a la resistencia externa es:



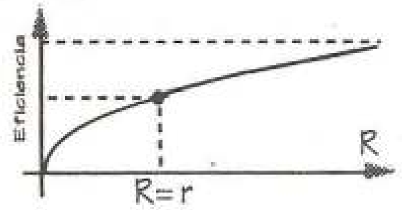
$$P = i^2 R = \frac{V^2 R}{(R + r)^2}$$

Según esta expresión $P \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow 0$ o también cuando $R \rightarrow \infty$. El valor de R que optimiza la potencia, debe ser aquel para el cual la derivada de P respecto de R sea nula:

$$0 = \frac{dP}{dR} = V^2\left[\frac{1}{(R + r)^2} - \frac{2R}{(R + r)^3}\right] = R^2\left[\frac{r - R}{(R + r)^3}\right]$$



La expresión se anula para R = r, por lo tanto queda demostrado que la potencia será máxima cuando el valor de la resistencia externa es igual al de la resistencia interna de la fuente,



b) La eficiencia es :

$$e = \frac{\text{Potencia aprovechada}}{\text{Potencia suministrada}} x100 = \frac{i^2 R}{i^2(R + r)} x100 = \frac{R}{(R + r)} x100$$

Se observa que cuando R = r, es decir cuando la potencia es máxima, entonces la eficiencia es apenas del 50%. Esto significa que la mitad de la potencia no es aprovechada y se desperdicia en la resistencia del generador.
La eficiencia tiende al 100% para $(R/r) \rightarrow \infty$.

Respuesta:

a) P máx. cuando R = r.
b) e = 50%

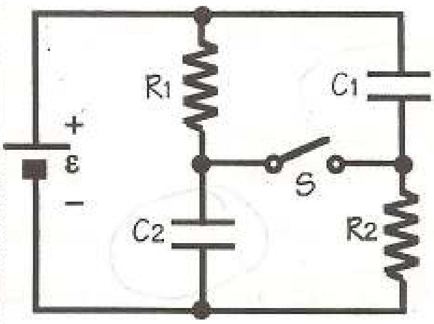
PR 7.15. ¿ Cuál es la carga en cada condensador ?

En el circuito mostrado determine las cargas en los condensadores en los siguientes casos:

a) El interruptor S ha estado abierto durante un tiempo largo.
b) Después de cerrar el interruptor S.

Suponga los valores numéricos:

$R_1=1k\Omega$, $R_2=2k\Omega$, $C_1=3\mu F$, $C_2=4\mu F$, $\varepsilon=6\ V$.

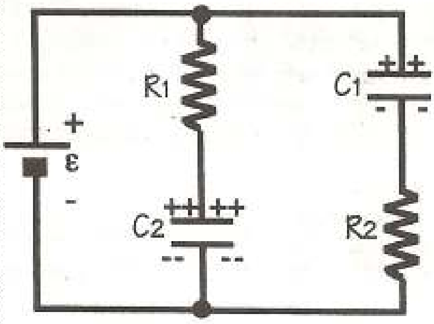


Solución: a) Con S abierto, los condensadores están completamente cargados y por las resistencias no fluye corriente (Circuito a).

Como no hay caída de potencial en las resistencias, el voltaje en cada condensador es igual al voltaje de la fuente: $V_{C1}=V_{C2}=\varepsilon$, por lo tanto:

$$Q_1 = C_1\varepsilon = (3\mu F)(6v) = 18\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2\varepsilon = (4\mu F)(6v) = 24\ \mu C$$



(circuito a)

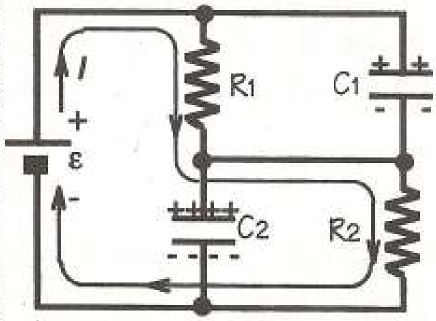
b) Después de cerrar el interruptor, al cabo de un tiempo los condensadores estarán completamente cargados y la única corriente que circula es en las resistencias (circuito b):

$$I = \varepsilon/(R_1+R_2)$$

Las caída de potencial en cada resistencia es:

$$V_1 = IR_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1+R_2}, \quad V_2 = IR_2 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2}$$

Estas diferencias de potencial son las mismas que en los respectivos condensadores, por estar en paralelo con las resistencias.



(circuito b)

Por lo tanto las cargas en los condensadores son:

$$Q_1 = C_1V_1 = \frac{\varepsilon R_1C_1}{R_1+R_2} = \frac{(6v)(1k\Omega)(3\mu F)}{(1k\Omega)+(2k\Omega)} = 6\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2V_2 = \frac{\varepsilon R_2C_2}{R_1+R_2} = \frac{(6v)(2k\Omega)(4\mu F)}{(1k\Omega)+(2k\Omega)} = 16\ \mu C$$

Respuesta:

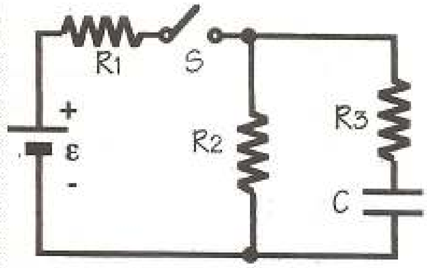
a) $Q_1 = 18\ \mu C$, $Q_2 = 24\ \mu C$
b) $Q_1 = 6\ \mu C$, $Q_2 = 16\ \mu C$

PR 7.16. Carga inicial y final del condensador

En el circuito mostrado todas las resistencias tienen igual valor, R. El condensador está inicialmente descargado y en $t = 0$ se cierra el interruptor.

a) Determine la corriente en cada resistencia en $t = 0$.

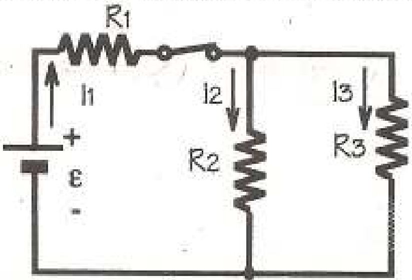
b) Determine la corriente en cada resistencia y la carga del condensador en $t = \infty$.



Solución: **a)** En el instante inicial $t = 0$ el condensador está descargado y su voltaje es cero. La situación en ese instante es como si el condensador fuera reemplazado por un alambre (fig.a).

La resistencia R_1 queda en serie con la combinación de R_2 en paralelo con R_3. Por lo tanto la corriente en R_1 (y en la batería) es:

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{\varepsilon}{R + \frac{RR}{R+R}} = \frac{2\,\varepsilon}{3R}$$



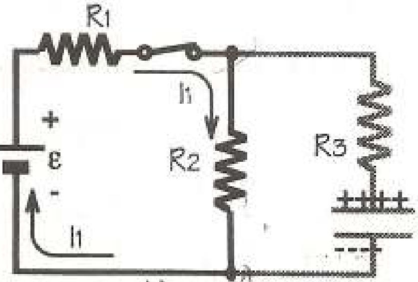
a) t=0

Esta corriente se divide por igual en R_2 y R_3:

$$i_2 = i_3 = \frac{1}{2} i_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

b) En la situación final, $t = \infty$, el condensador estará completamente cargado y la corriente en esa rama es cero ($i_3 = 0$). A los efectos de las corrientes, es como si esa rama estuviese desconectada. La corriente en R_1 es la misma que en R_2 y vale:

$$i_1 = i_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$$



b) t=∞

El voltaje en el condensador es el mismo que el de la resistencia R_2, $V_C = V_{R2} = \frac{1}{2}\varepsilon$, y la carga final del condensador es:

$$Q = \frac{\varepsilon}{2C}$$

Respuesta:

a) $i_1 = \frac{2\,\varepsilon}{3R}$, $i_2 = i_3 = \frac{1\,\varepsilon}{3R}$
b) $i_1 = i_2 = \frac{\varepsilon}{2R}$, $Q = \frac{\varepsilon}{2C}$

PR 7.17. Corrientes transitorias

En el circuito anterior todas las resistencias tienen igual valor, R. El condensador está inicialmente descargado y en $t = 0$ se cierra el interruptor. Determine para cualquier instante de tiempo desde $t = 0$ hasta $t = \infty$:

a) La carga del condensador.

b) Las corrientes en todas las resistencias.

c) Compruebe que las expresiones de las corrientes verifican los casos límites para $t = 0$ y $t = \infty$ obtenidas anteriormente.

$c = \frac{Q}{V}$

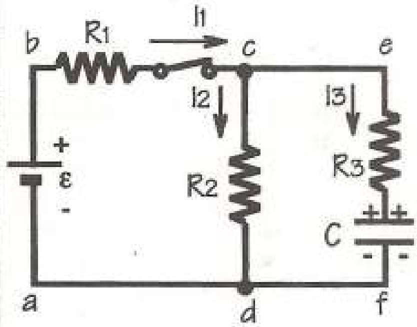
$Q = c$

Solución: a) Consideremos en un instante arbitrario, las corrientes i_1, i_2 e i_3. El condensador tendrá una cierta carga Q, su voltaje será (Q/C). Aplicando las reglas de Kirchhoff obtenemos:

Malla abcda: $\varepsilon - i_1R - i_2R = 0$ (1)

Malla cefdc: $-i_3R - (Q/C) + i_2R = 0$ (2)

Nodos c o d: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ (3)



Si despejamos i_1 de la ecuación (3) y la sustituimos en la ecuación (1), se tiene:

$$\varepsilon - 2i_2R - i_3R = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 = (\varepsilon - i_3R)/2R \qquad (4)$$

Sustituyendo esta expresión de i_2 en la ecuación (2), y tomando en cuenta que $i_3 = dQ/dt$; se obtiene, después de simplificar:

$$\frac{3R}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon}{2}$$

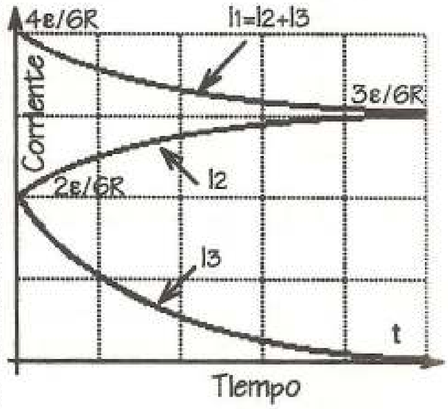
Esta es una ecuación diferencial del tipo:

$$a\frac{dx}{dt} + bx = c$$

Su solución general consta de dos partes: i) una solución particular que se obtiene conservando sólo el último término, $x_1=c/b$, más ii) una solución complementaria, para c=0: que es la función exponencial $x_2 = Ae^{-(b/a)t}$ siendo A una constante.

La solución para la carga en el condensador es por lo tanto:

$$Q = \frac{C\varepsilon}{2} + Ae^{-2t/3RC}$$



El valor de la constante A se obtiene de la condición Q = 0 para t = 0, es decir: $A = -C\varepsilon/2$. Por lo tanto, la solución para Q es:

$$Q = \frac{C\varepsilon}{2}[1 - e^{-2t/3RC}]$$

b) La corriente i_3 es la misma del condensador y se obtiene derivando la carga:

$$i_3 = \frac{dQ}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{3R}\right)e^{-2t/3RC}$$

Reemplazando i_3 en la ecuación (4), se obtiene la corriente i_2:

$$i_2 = \frac{\varepsilon}{2R} - \frac{i_3}{2} = \frac{\varepsilon}{2R} - \frac{\varepsilon}{6R}e^{-2t/3RC} = \frac{\varepsilon}{6R}[3 - e^{-2t/3RC}]$$

Finalmente, la corriente i_1 es la suma ($i_2 + i_3$),(ecuación 3):

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{6R}[3 + e^{-2t/3RC}]$$

c) Las expresiones de la carga Q y las corrientes i_1, i_2 e i_3 para $t = 0$ y $t = \infty$ 0, arrojan los mismos valores límites que habíamos obtenido en el problema anterior.

Respuesta:

a) $Q = \frac{C\varepsilon}{2}[1 - e^{-2t/3RC}]$

b) $i_1 = \frac{\varepsilon}{6R}[3 + e^{-2t/3RC}]$

$i_2 = \frac{\varepsilon}{6R}[3 - e^{-2t/3RC}]$

$i_3 = (\frac{\varepsilon}{3R})e^{-2t/3RC}$

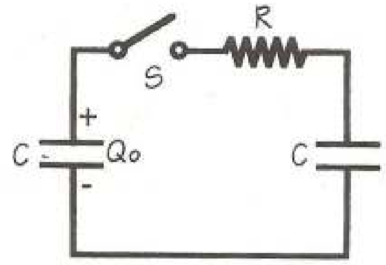
PR 7.18. ¡Se pierde la mitad de la energía !

Se tienen dos capacitores idénticos de capacitancia C, uno de los cuales tiene una carga inicial Q_0 y el otro está inicialmente descargado. Al cerrar el interruptor S los capacitores quedan conectados a través de una resistencia R.

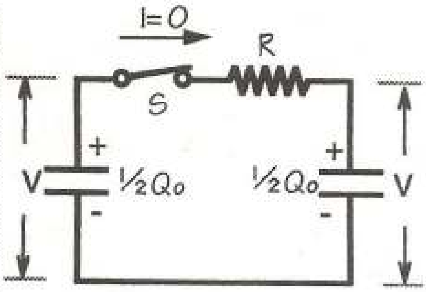
a) *¿ Cuál es la distribución final de las cargas ?*

b) *Calcule la diferencia entre la energía inicial y la energía final almacenada.*

c) *¿ Dónde fue la energía " perdida " ?*



Solución: a) La carga total Q_0 se conserva, y se distribuye de manera que al finalizar el proceso, los voltajes de los condensadores deben ser iguales para garantizar que la corriente en R sea cero. Por ser los capacitores idénticos, a cada uno le toca la misma carga de $Q_0/2$.



b) Inicialmente la energía está almacenada en uno de los condensadores:

$$E_{inicial} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

La energía final estará almacenada en los dos condensadores:

$$E_{final} = 2\frac{(Q_0/2)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{4C}$$

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = \frac{Q_0^2}{4C} - \frac{Q_0^2}{2C} = -\frac{Q_0^2}{4C}$$

c) La energía final es menor que la inicial y el 50% de la energía se transforma en energía térmica en R o en radiación electromagnética.

Respuesta:

a) $Q_1 = Q_2 = \pm Q_0/2$

b) $E_F - E_i = -Q_0^2/4C$

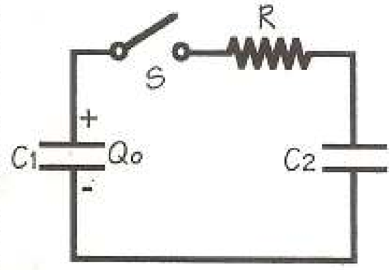
PR 7.19. *No importa el valor de R, se perderá el 50%*

Se tienen dos capacitores idénticos de capacitancia C, uno de los cuales tiene una carga inicial $\pm Q_0$ y el otro está inicialmente descargado. Al cerrar el interruptor S los capacitores quedan conectados a través de una resistencia R.

a) Determine la corriente en la resistencia en función del tiempo.

b) Calcule explícitamente la energía perdida por calentamiento Joule desde el instante inicial $t = 0$ hasta $t = \infty$.

c) ¿Depende la energía perdida del valor de la resistencia ?

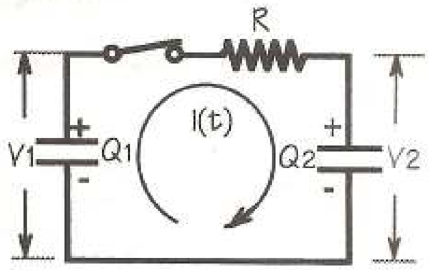


Solución: a) Cuando el interruptor está cerrado circula una corriente i, el condensador C_2 gana carga a expensas de C_1, por lo tanto:

$$i = -\frac{dQ_1}{dt} = +\frac{dQ_2}{dt} \qquad (1)$$

Por otra parte, en términos del voltaje en la resistencia, la corriente es:

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{Q_1/C - Q_2/C}{R} = \frac{Q_1 - Q_2}{RC} \qquad (2)$$



Reemplazando (2) en (1) obtenemos :

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{Q_1 - Q_2}{RC}, \qquad \frac{dQ_2}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2}{RC}$$

Restando estas dos expresiones obtenemos la ecuación:

$$\frac{d(Q_2 - Q_1)}{dt} = -\frac{2(Q_2 - Q_1)}{RC} \qquad (3)$$

Esta ecuación diferencial muestra que la tasa de variación temporal de la cantidad $(Q_2 - Q_1)$ es proporcional a la cantidad misma. Su solución es del tipo exponencial $(Q_2 - Q_1) = Ae^{Bt}$. Reemplazando esta expresión en la Ec. 3, obtenemos la constante B:

$$BAe^{Bt} = -2\frac{Ae^{Bt}}{RC} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{2}{RC}$$

La constante A se obtiene de las condiciones iniciales $Q_2(0) = 0$, $Q_1(0) = Q_0$. Por lo tanto $A = -Q_0$.

Sustituyendo A y B en la solución:

$$Q_2 - Q_1 = -Q_0 e^{-2t/RC}$$

De acuerdo a la Ec.(1) la corriente en función del tiempo es:

$$2i = \frac{dQ_2}{dt} - \frac{dQ_1}{dt} = \frac{d(Q_2-Q_1)}{dt} = \frac{2Q_0}{RC}e^{-2t/RC}$$

Por lo tanto:

$$i = \frac{Q_0}{RC}e^{-2t/RC}$$

Observe que la corriente decae con una constante de tiempo RC/2

b) Calculemos ahora la energía térmica total por efecto Joule en la resistencia:

$$E_R = \int_0^\infty Ri^2dt = \frac{RQ_0^2}{R^2C^2}\int_0^\infty e^{-4t/RC}dt = \frac{RQ_0^2}{R^2C^2}\left(\frac{RC}{4}\right) = \frac{Q_0^2}{4C}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

c) Si comparamos este resultado con el del problema anterior, vemos que la energía térmica en R coincide con la diferencia entre la energía disponible inicialmente y la que queda finalmente almacenada en los dos condensadores.

El 50% de la energía siempre se pierde, independientemente del valor de R.

¿ Que pasaría si se conectan los condensadores mediante alambres superconductores (R = 0), en cuyo caso no habría pérdidas por calentamiento ?. ¿ Dónde iría el 50% de la energía que "siempre" se transforma ?

Respuesta:

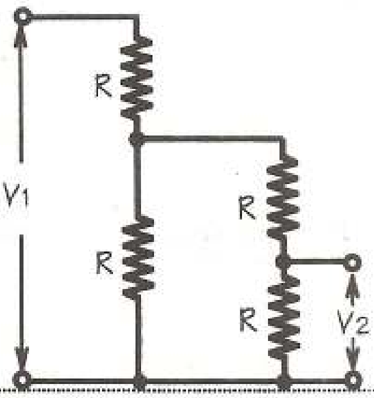
a) $i = (Q_0/RC)e^{-2t/RC}$
b) $E_R = Q_0^2/4C$, no depende de R.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

PP 7.01. *Doble divisor de voltaje*

El divisor de voltaje mostrado consiste de cuatro resistencias de igual valor, R.

Determine la relación entre el voltaje de salida, V_2 y el voltaje de entrada, V_1.



Respuesta:

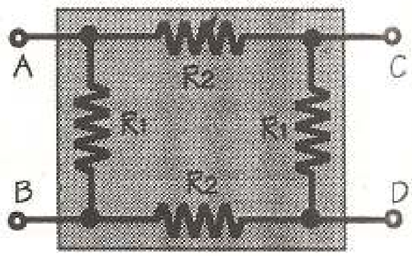
$$V_2 / V_1 = 1/5.$$

Ayuda: Conecte a la entrada una batería V1 y halle la resistencia equivalente (una combinación serie-paralelo-serie). La corriente de la batería se distribuye y un tercio va a la rama de V2. .

PP 7.02. *¿Cuáles son las resistencias de la caja ?*

En el interior de una caja negra hay cuatro resistores conectados como indica la figura. Para determinar los valores de las resistencias se conecta entre los terminales A y B una batería ideal de FEM =10 Voltios. Si entre los terminales C y D se conecta un voltímetro ideal, éste indica 5 Voltios. Si sustituimos el voltímetro por un amperímetro ideal este indica 1 mA.

¿ Cuáles son los valores de R_1 y R_2 ?



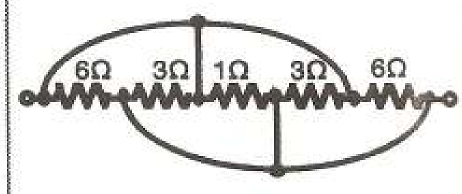
Respuesta:

$$R_1 = 10\ \mathrm{k}\Omega,\ R_2 = 5\ \mathrm{k}\Omega$$

Ayuda: Cuando se conecta el voltímetro ideal, el circuito queda con los terminales C-D abiertos. Cuando se conecta el amperímetro ideal el circuito queda con los terminales C-D corto-circuitados.

PP-7.03. *¿ Resistencia equivalente ?*

¿Cuál es la resistencia equivalente de la combinación de las cinco resistores mostrada en la figura ?



Respuesta:

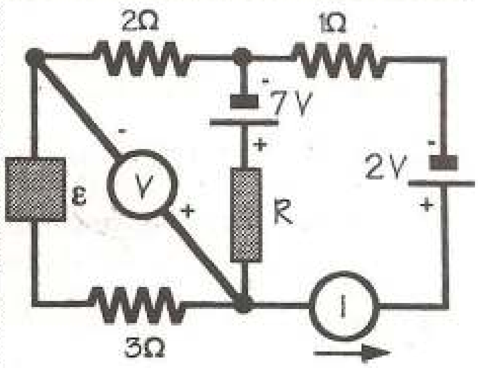
$$R_{eq} = 0,5\ \Omega$$

Ayuda: Identifique los terminales que son comunes a las diferentes resistencias. Todas las R están en una combinación sencilla.

PP 7.04. *FEM y resistencia desconocidas*

El circuito mostrado tiene dos elementos desconocidos: una batería ideal y un resistor.

Sabiendo que el amperímetro indica 3 A en el sentido indicado y el voltímetro indica 9 V con la polaridad mostrada, encuentre el valor de la FEM desconocida, ε y el valor de la resistencia R.



Respuesta:

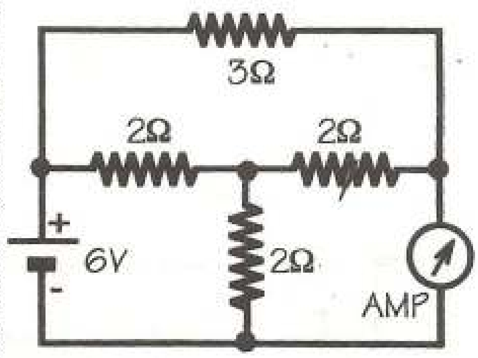
$$R = 2\ \Omega,\ \varepsilon = 15\ V$$

Ayuda: Halle la caída de potencial en la resistencia de 1Ω, luego determine la corriente en la de 2Ω y finalmente la corriente y el voltaje en R.

PP 7.05. *¿Cual será la lectura del amperímetro?*

En el circuito mostrado, tanto la batería como el amperímetro tienen resistencias despreciables.

Determine la corriente que indica el amperímetro.



Respuesta:

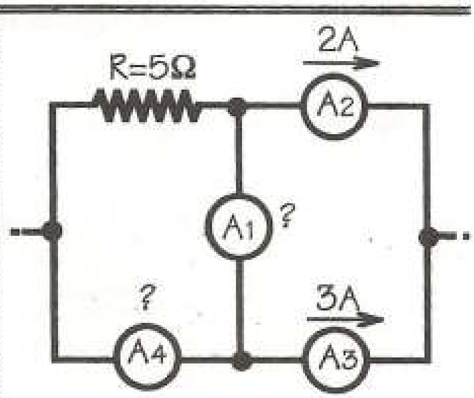
$$i = 3\ A$$

Ayuda: Resuelva el circuito visto desde la batería, el cual es una combinación paralelo / serie / paralelo. Halle la corriente en la batería, Luego esta corriente se distribuye de acuerdo a la resistencia de cada rama.

PP 7.06. *¿Qué indicarán los otros amperímetros?*

En el circuito mostrado los cuatro amperímetros son idénticos y tienen igual resistencia interna r, desconocida.
Sabemos que la lectura del amperímetro A_2 es 2 Amperes y que la del amperímetro A_3 es 3 Amperes.

a) ¿ Cuáles son las lecturas de los amperímetros A_1 y A_4 ?
b) ¿ Cuál es la resistencia interna r, de los amperímetros ?



Respuesta:

a) $I_1 = 1$ A, $I_4 = 4$ A
b) $r = 1\ \Omega$

Ayuda: Relacione los voltajes en A_1 A_2 y A_3, con ello se determina i_1. Luego determine I_R y de allí, i_4. Finalmente, relacionando V_R con V_1 y V_4, se determina r.

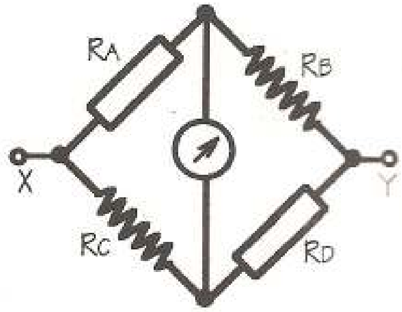
PP 7.07. *Circuito puente con elementos no lineales*

El circuito puente mostrado consiste de dos resistencias lineales idénticas $R_B = R_C = R$ y dos elementos resistivos no lineales R_A y R_D, los cuales son idénticos y su dependencia voltaje - corriente es:

$$V = ki^2$$

Siendo k una constante (en unidades V/A^2). El circuito está alimentado con una fuente de voltaje variable conectada entre los terminales X y Y.

¿ Cuál debe ser el valor de V_{XY} para que el galvanómetro indique cero corriente ?



Respuesta:

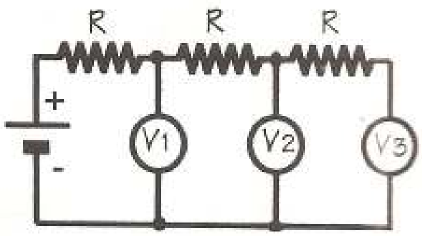
$$V_{XY} = 2R^2/k$$

Ayuda: Para $i_g = 0$, hay cero voltaje en el galvanómetro. Los voltajes en las resistencias y en los elementos no-lineales son idénticas. Las corrientes en cada rama también son iguales.

PP 7.08. *¿Cuál será la lectura del voltímetro V_2?*

En el circuito mostrado se tienen tres resistencias de igual valor, R y tres voltímetros idénticos de resistencias internas r, desconocidas. La lectura del primer voltímetro es $V_1 = 8$ Voltios y la del tercero es $V_3 = 2$ Voltios.

a) ¿Cuál es la lectura V_2 del segundo voltímetro?
b) ¿Cuál es la relación de las resistencias, r/R ?



Respuesta:

a) $V_2 = \frac{1}{2}[-V_3 + \sqrt{5V_3^2 + 4V_1V_3}\,] = 3{,}58$ V

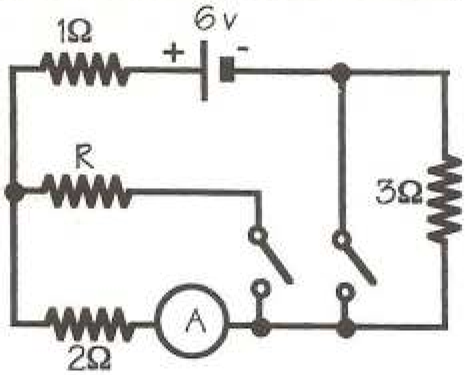
b) $r = 1{,}26R$

Ayuda: Escriba el voltaje de cada voltímetro en términos de sus respectivas corrientes. Relacionando V_2 con V_3 en la malla a la derecha y con V_1 en la malla de la izquierda y tomando en cuenta las relaciones entre las corrientes, se obtiene un par de ecuaciones. Al eliminar (R/r) se obtiene una ecuación cuadrática en V_2.

PP 7.09. *La lectura del amperímetro no debe variar.*

En el circuito mostrado, la lectura del amperímetro es la misma cuando ambos interruptores están abiertos que cuando ambos están cerrados.

¿ Cuál es el valor de la resistencia R ?



Respuesta:

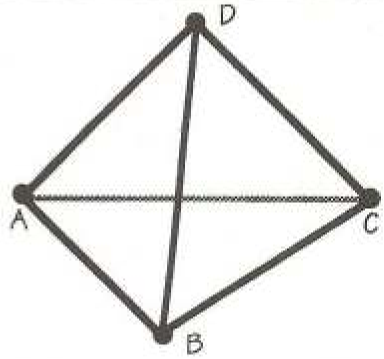
R= (2/3) Ω.

Ayuda: Determine el valor de la corriente en el amperímetro cuando los ambos interruptores están abiertos. Al cerrar los interruptores este valor de i (constante) permite hallar tanto la corriente como el voltaje en R.

PP 7.10. *Un tetraedro de Resistencias*

Seis alambres idénticos con resistencias iguales a R, se sueldan formando un tetraedro.

¿ Cuál es la resistencia equivalente entre dos vértices cualesquiera ?



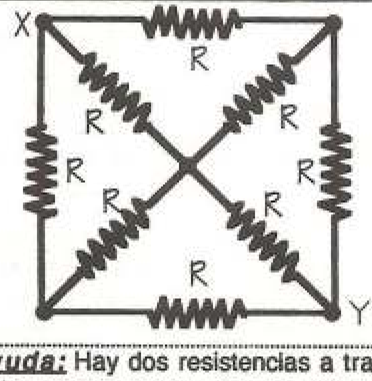
Respuesta:

Resistencia equivalente = ½R.

Ayuda: Al aplicar un voltaje entre los vértices A y B. La simetría indica que las tres corrientes que entran por A son las mismas que abandonan B. Esto significa que no hay corriente en la arista CD y puede eliminarse sin que se modifiquen las otras corrientes.

PP 7.11. *Aprovecha la simetría*

En la red mostrada determine la resistencia equivalente entre los X y Y ubicados en esquinas opuestas.



Respuesta:

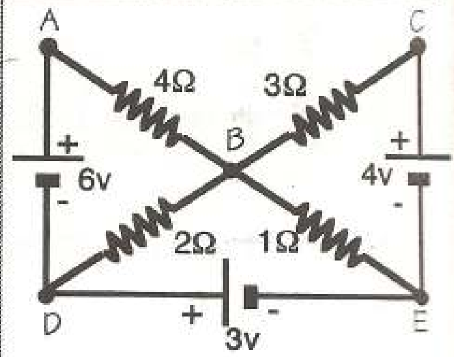
R_{XY}= 2R/3.

Ayuda: Hay dos resistencias a través de las cuales no hay ninguna diferencia de potencial cuando se conecte una batería entre X y Y. Omitiendo estas dos resistencias no se afecta las corrientes en las demás.

PP 7.12. *Kirchhoff en acción*

En el circuito mostrado determine:

a) La corriente (magnitud y sentido) en cada resistencia.
b) La diferencia de potencial entre los puntos A y C.



Respuesta:

a) $i_1 = 2{,}44$ A (B→E), $i_2 = 0{,}28$ A (D→B),
$i_3 = 0{,}52$ A (C→B), $i_4 = 1{,}64$ A (A→B)

b) $V_A - V_C = 5$ V.

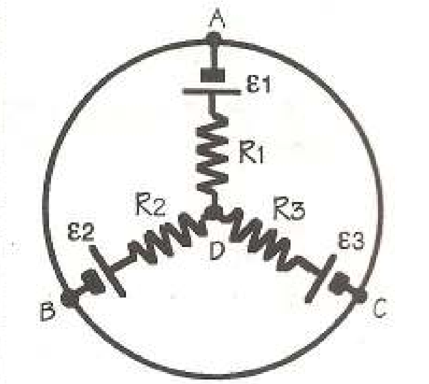
Ayuda: Suponga corrientes en cada una de las tres mallas ABDA, DBED y BCEB. Escriba y resuelva las ecuaciones de Kirchhoff. b) V_{AC} se puede expresar directamente en términos de las fem de las baterías en el circuito ADECA.

PP 7.13. *Balance energético en una rueda.*

En el circuito mostrado, las baterías son ideales y las fem y las resistencias tienen los siguientes valores:

$\varepsilon_1 = 13$ V, $\varepsilon_2 = 26$ V, $\varepsilon_3 = 39$ V
$R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$

Determine:
a) La corriente en cada una de las resistencias.
b) Compruebe el balance energético.



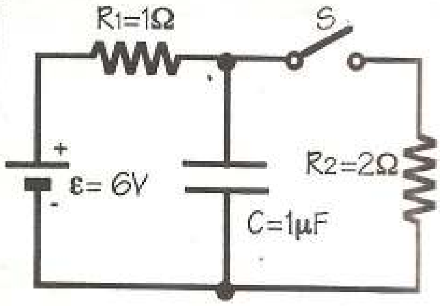
Respuesta:

a) $i_1 = 5$ A (D → A), $i_2 = 1$ A (B → D)
$i_3 = 4$ A (C → D)
b) Potencia gastada = Potencia generada = 182W

Ayuda: Escriba las ecuaciones de Kirchhoff para las corrientes independientes en las tres mallas y resuélvalas. Observe que una de las baterías absorbe energía de las otras dos.

PP 7.14. *¿Cuáles son los estados inicial y final.?*

En el siguiente circuito se cierra el interruptor S en el instante t=0.
Determine la corriente en cada resistencia y la carga en el condensador :
a) En el instante inicial (t = 0)
b) Después de haber transcurrido un tiempo suficientemente largo (t = ∞).



Respuesta:

a) $i_1 = 0, \quad i_2 = 3\text{ A}, \quad Q = 6\ \mu C$

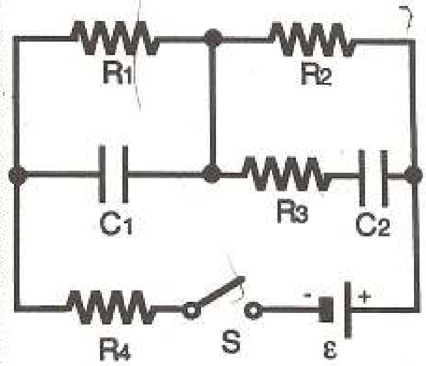
b) $i_1 = i_2 = 2\text{ A}, \quad Q = 4\ \mu C$

Ayuda: Inicialmente el condensador se encuentra cargado y su voltaje es igual al de la batería.

PP 7.15. *¿Cuáles son los estados inicial y final.?*

En el circuito mostrado suponga que los condensadores están inicialmente sin carga y se cierra el interruptor S en $t = 0$.

a) ¿ Cuál es la corriente que fluye por la batería en el instante inicial ?
b) ¿ Cuál es la corriente que fluye por la batería después de haber transcurrido un tiempo suficientemente largo ?
c) ¿ Cuáles son las cargas finales de los condensadores ?



Respuesta

a) $I(0) = \dfrac{\varepsilon(R_2+R_3)}{[R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4]}$ b) $I(\infty) = \dfrac{\varepsilon}{[R_1+R_2+R_4]}$

c) $Q_1 = \dfrac{\varepsilon R_1 C_1}{[R_1+R_2+R_4]}, \quad Q_2 = \dfrac{\varepsilon R_2 C_2}{[R_1+R_2+R_4]}$

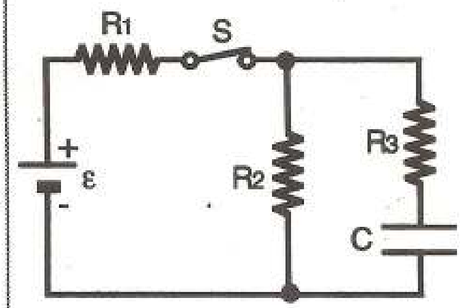
Ayuda: En t=0 los condensadores no tienen carga (V=0) y se comportan como cortocircuitos. Para un tiempo muy largo, los condensadores están cargados totalmente y se comportan como circuitos abiertos.

PP 7.16. *Descarga del condensador.*

En el circuito todas las resistencias tienen igual valor R. Suponga que el interruptor S ha estado cerrado por un tiempo suficientemente largo y el condensador está completamente cargado.

Si en el instante $t = 0$ se abre el interruptor determine la corriente en el resistor R_2 en función del tiempo:

a) Antes de cerrar el interruptor
b) Después de cerrar el interruptor.



Respuesta:

a) $V_2(t < 0) = \varepsilon/2R$

b) $V_2(t > 0) = (\varepsilon/4R)e^{-t/2RC}$

Ayuda: Para t< 0 no circula corriente por R3 y la corriente en R2 es la misma que en R1. El voltaje en C es igual al voltaje en R2. Esto permite hallar la carga inicial. Al abrir S el condensador se descarga a través de (R3+R2).