Análisis de Matrices Mal Condicionadas

Ejemplo con Octave

1 Definición de la Matriz A_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0001 & 1.0000 & 0.9999 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.9999 & 1.0000 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

Esta es una matriz 3×3 con coeficientes casi iguales, pero con ligeras variaciones. Este tipo de matrices puede ser mal condicionada, lo que significa que el sistema puede ser sensible a pequeños cambios, y los resultados podrían ser inestables o incorrectos.

2 Definición del Vector b

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

El vector b contiene los términos independientes del sistema de ecuaciones $A_1 \cdot x = b$, donde se busca encontrar el vector x.

3 Solución del Sistema $A_1 \cdot x = b$

Para resolver el sistema utilizamos Octave:

```
x1 = A1 \ b;
```

La solución obtenida es:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto indica que para este sistema, $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ es una solución exacta.

4 Definición de una Nueva Matriz A_2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 0.9999 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.9999 & 1.0000 & 1.0002 \end{bmatrix}$$

Aquí los cambios en los coeficientes son más marcados en comparación con A_1. Aunque el cambio parece pequeño, los sistemas mal condicionados son muy sensibles a estas variaciones.

5 Solución del Sistema $A_2 \cdot x = b$

Para A_2, resolvemos el sistema de la misma manera:

```
x2 = A2 \ b;
```

La solución obtenida es:

$$x_2 = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ 3.0000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A pesar de que solo cambiamos un decimal en un coeficiente, la solución cambió drásticamente.

6 Determinantes

Los determinantes de las matrices A_1 y A_2 se calculan con Octave:

```
det_A1 = det(A1);
det_A2 = det(A2);
```

Los resultados son:

- Determinante de A_1: 0 (matriz singular)
- Determinante de A_2: $\approx -1 \times 10^{-8}$ (cercano a ser singular, pero invertible)

7 Matriz Identidad con A_1

Multiplicamos A_1 por su inversa (que no existe al ser singular):

```
I1 = A1 * inv(A1);
```

La matriz resultante será una matriz de infinitos (Inf) confirmando que A_1 es singular.

8 Número de Condición

El número de condición se utiliza para medir la sensibilidad de las soluciones del sistema a pequeños cambios en la entrada:

```
cond_A1 = cond(A1);
cond_A2 = cond(A2);
```

- Número de condición de A_1: 1.4766×10^{17} (sistema extremadamente mal condicionado)
- Número de condición de A_2: 1.9392×10^{5} (también mal condicionado, pero más estable que A_1)

9 Conclusión

Los sistemas que involucran matrices mal condicionadas son muy sensibles a pequeñas variaciones en sus coeficientes, lo que puede llevar a soluciones muy diferentes, incluso cuando los cambios son mínimos.