

# Matemática Computacional

**Prof. MSc. Luis Gonzaga de Paulo**

# Grafos & Árvores

- Grafos
- Árvores Binárias
- Máquinas de Estados

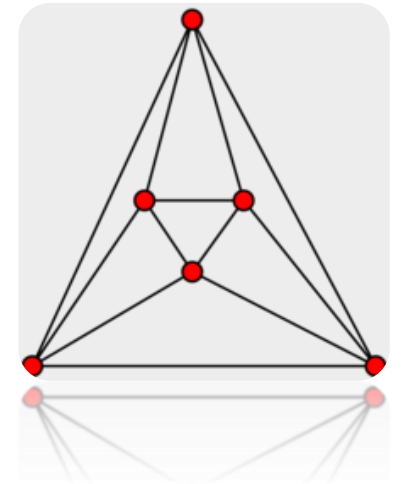
## **Você sabe responder?**

- Como orientar-se matematicamente em um mapa?
- O tempo pode ser calculado em um cronograma de projeto?
- Como o computador consegue listar palavras em ordem alfabética?
- O que acontece quando procuro um dado qualquer em uma base de dados?
- Em que é baseado o programa que comanda uma máquina ou um Robô?

# Grafos

Grafo é uma estrutura matemática de representação gráfica, utilizado para o estudo de relações entre os objetos ou elementos de um determinado conjunto. Os grafos são representados pela equação  $G(V,A)$  compostos de dois elementos:

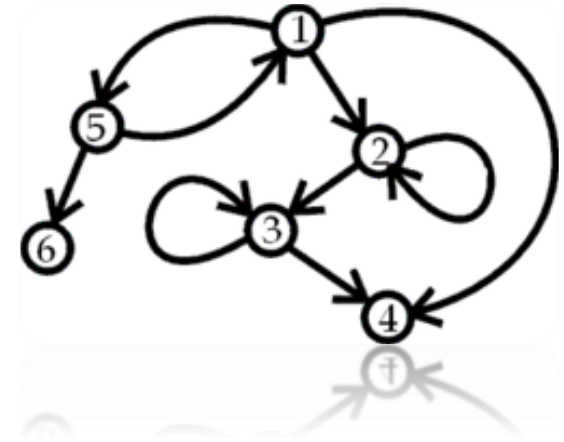
- Os vértices -  $V$ , que representam os objetos;
- As arestas -  $A$ , que representam as ligações, dependências ou caminhos entre os vértices;



# Grafos

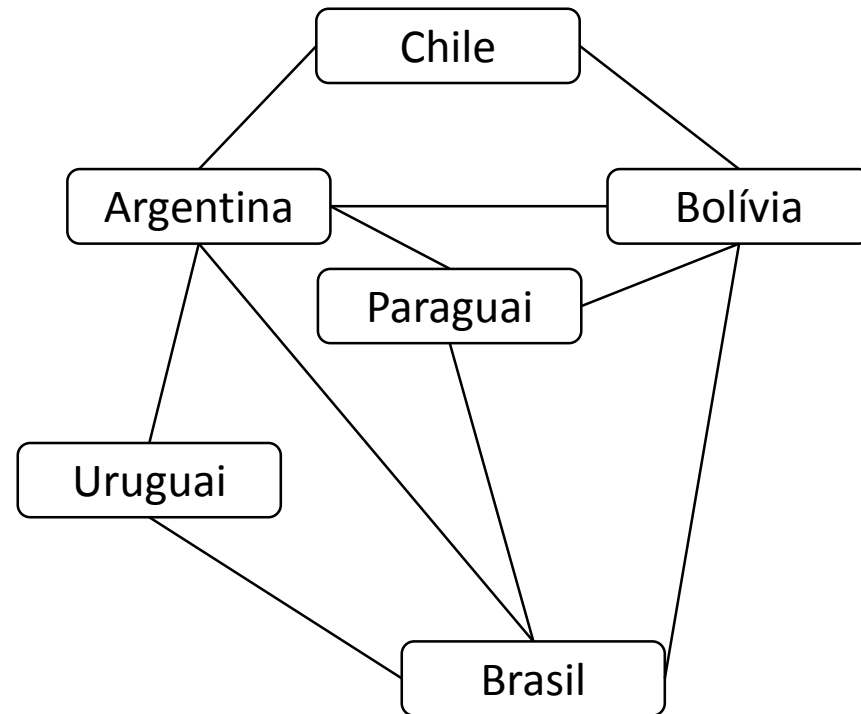
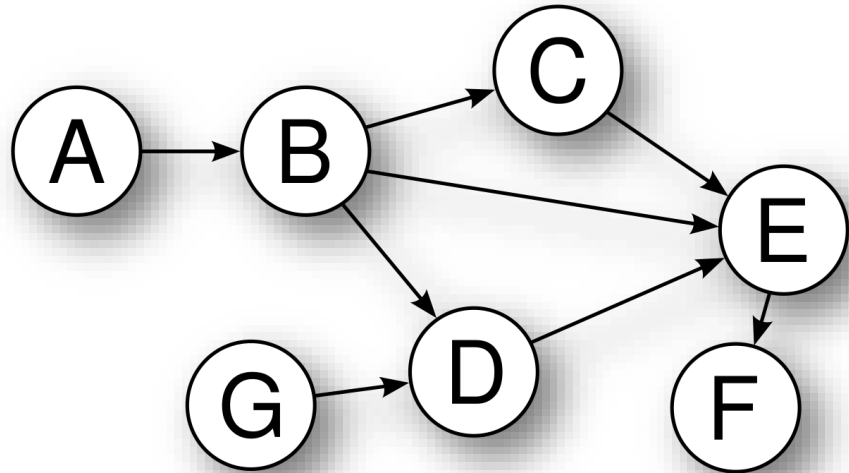
Em função de sua aplicação, os grafos podem ter as seguintes características:

- As arestas podem ter direção, representada por uma  $\rightarrow$ , caracterizando um grafo orientado (dirigido, direcionado ou dígrafo);
- Um vértice pode ser ligado a ele próprio, formando um laço (*loop*);
- As arestas podem receber rótulos ou ter um peso numérico associado;



# Grafos

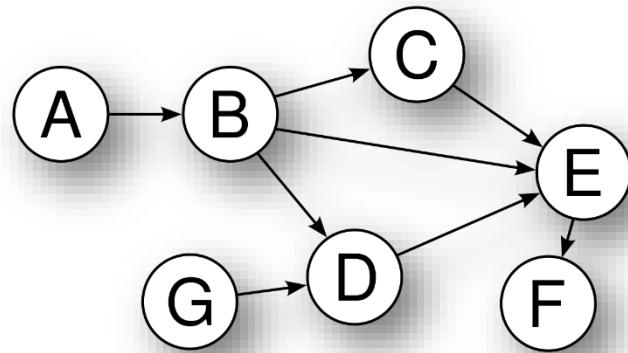
Exemplos:



# Grafos

$G$  é um grafo dirigido formado por  $(V, A)$  tal que:

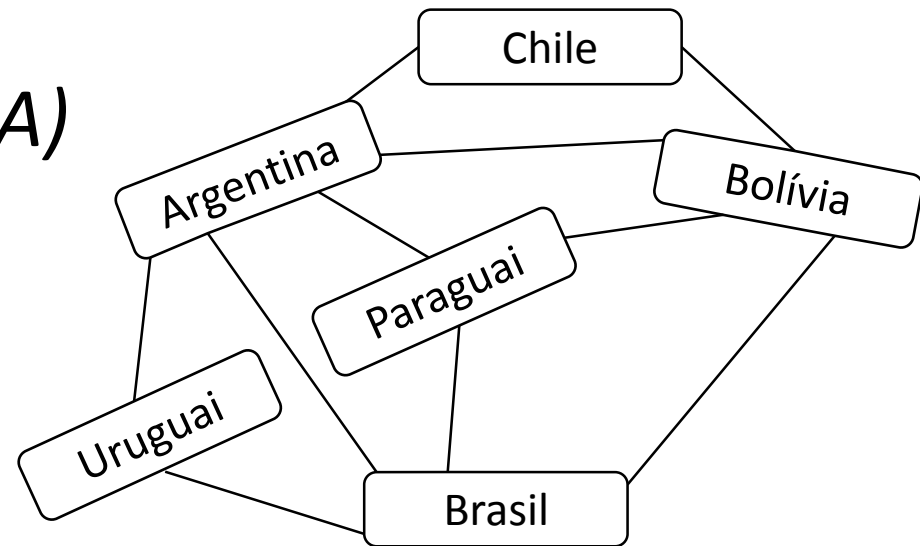
- $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$
- $A = \{(A,B), (B,C), (B,D), (B,E), (C,E), (D,E), (E,F), (G,D)\}$



# Grafos

$G$  é um grafo não dirigido formado por  $(V, A)$  onde:

- $V = \{\text{Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Paraguai, Uruguai}\}$
- $A = \{(\text{Argentina, Bolívia}), (\text{Argentina, Brasil}), (\text{Argentina, Chile}), (\text{Argentina, Paraguai}), (\text{Argentina, Uruguai}), (\text{Bolívia, Brasil}), (\text{Bolívia, Chile}), (\text{Bolívia, Paraguai}), (\text{Brasil, Paraguai}), (\text{Brasil, Uruguai})\}$

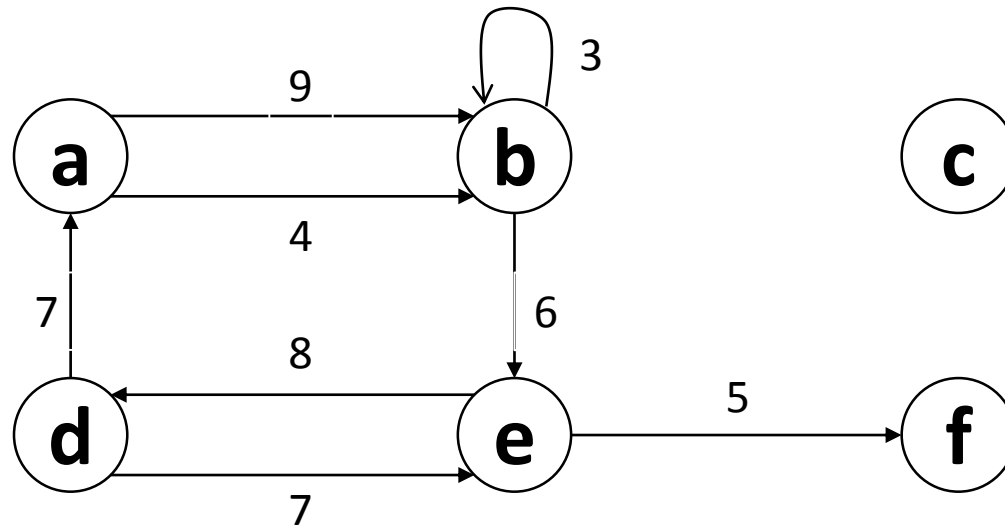




# Grafos

$G$  é um grafo dirigido rotulado formado por  $(V, A, \mathbf{N})$   
*tal que:*

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ;
- $A = \{(a,9,b), (a,4,b), (b,3,b), (b,6,e), (d,7,a), (d,7,e), (e,8,d), (e,5,f)\}$



# Grafos

Importante:

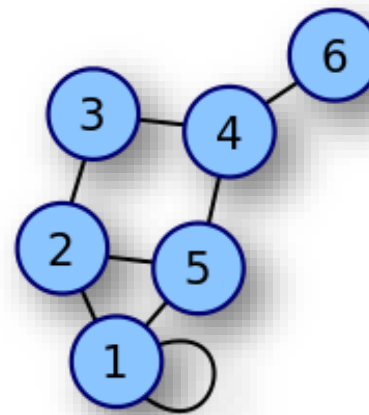
- Uma aresta conecta dois vértices, denominados incidentes à esta aresta;
- O número de arestas incidentes a um vértice determina a valência (ou grau) de um vértice;
- Loops são contados duas vezes;
- Vértices adjacentes são aqueles ligados por uma aresta.

# Grafos

Importante:

- Um grafo finito com  $n$  vértices é representado por sua matriz de adjacência: uma matriz  $n$ -por- $n$  cujo valor na linha  $i$  e coluna  $j$  fornece o número de arestas do  $i$ -ésimo ao  $j$ -ésimo vértices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Grafos

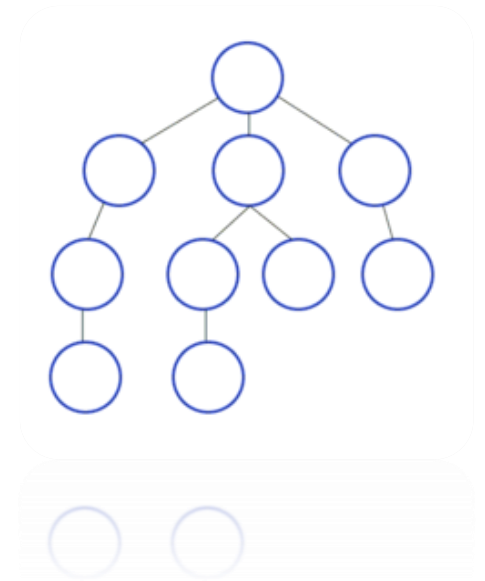
Importante:

- Um dígrafo contempla o grau de saída (o número de arestas saindo de um vértice) e o grau de entrada (o número de arestas entrando em um vértice);
- No dígrafo o grau de um vértice é igual à soma dos graus de saída e de entrada;

# Árvore

Uma ÁRVORE é um grafo conexo, isto é, existe um caminho entre dois quaisquer de seus vértices, e acíclico, ou seja, não permite ciclos. Por isso diz-se:

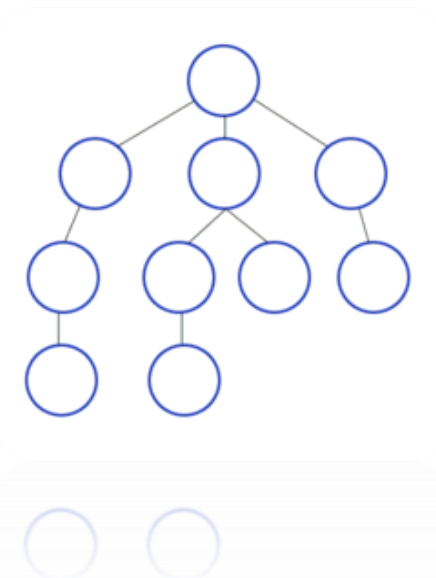
- Toda árvore é um grafo, mas nem todo grafo é uma árvore.
- Toda árvore é um grafo bipartido e planar.
- Todo grafo conexo possui pelo menos uma árvore de extensão associada, composta de todos os seus vértices e algumas de suas arestas.



# Árvore

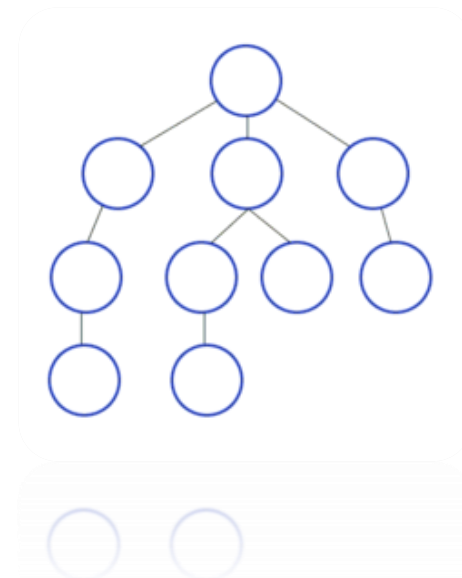
Pode-se considerar um grafo  $G$  com  $n$  vértices como uma árvore se:

- $G$  é conexo e há exatamente um caminho entre dois vértices quaisquer;
- $G$  é acíclico, e um simples ciclo é formado se qualquer aresta for adicionada a  $G$ ;
- $G$  é conexo, e deixará de ser conexo se qualquer aresta for removida de  $G$ ;
- $G$  é conexo, acíclico e tem  $n - 1$  arestas.



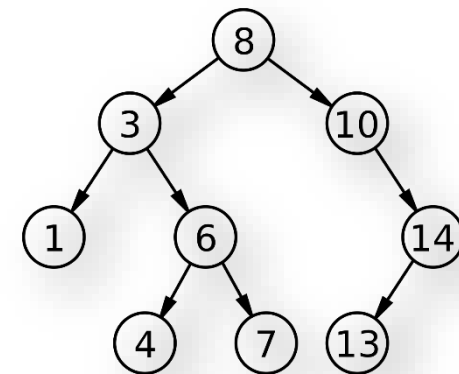
# Árvore

- Uma árvore é denominada enraizada se um vértice é escolhido como especial;
- Esse vértice é chamado **Raiz**;
- Uma árvore que não possui raiz é denominada livre;
- O número máximo de ramos em um elemento é chamado **Ordem** ou **Grau**.



# Árvore Binária

- Uma ÁRVORE BINÁRIA é definida como um grafo acíclico, conexo, dirigido e que cada nó não tem grau (ou ordem) maior que 2.
- Só existe um caminho entre dois nós distintos;
- Cada ramo da árvore é um vértice dirigido, sem peso, que parte do antecessor (pai) e vai ao sucessor (filho).

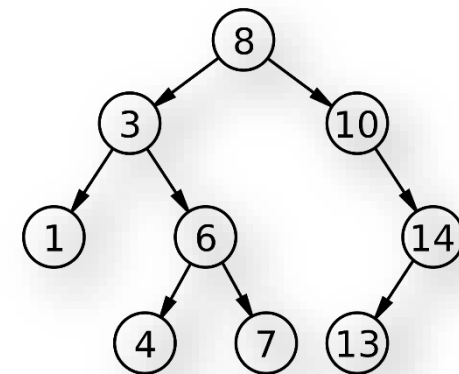




# Árvore Binária

A **profundidade** de um nó é a distância deste nó até a raiz.

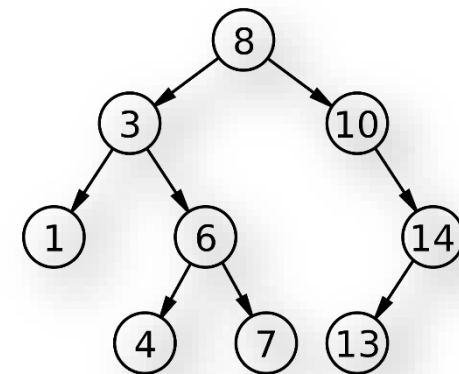
- Um conjunto de nós com a mesma profundidade é denominado nível da árvore.
- O nó de maior profundidade define a altura da árvore;
- Os nós de uma árvore binária possuem graus zero, um ou dois;
- Um nó de grau zero é denominado folha.



# Árvore Binária

A construção e o acesso aos elementos de uma árvore binária é uma operação recursiva.

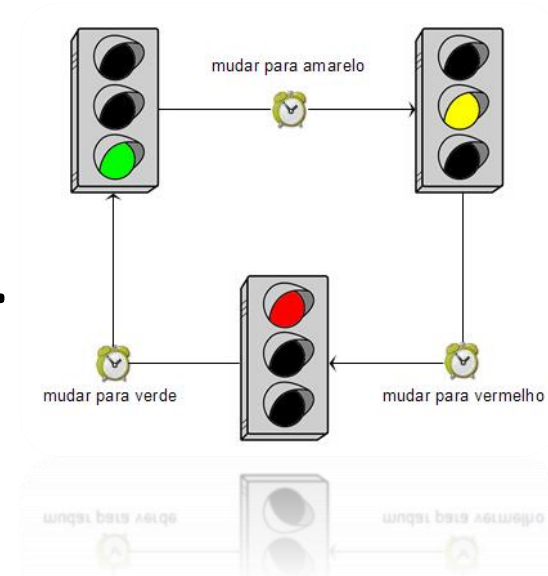
- Devido a isso, muitas operações sobre árvores binárias utilizam recursão;
- É o tipo de árvore mais utilizado na computação;
- A principal utilização de árvores binárias é a busca binária;



# Máquinas de Estados

Máquinas de estado são abstrações de processos ou equipamentos reais (mecânicos, eletrônicos, software). Também são conhecidas como **Autômatos**.

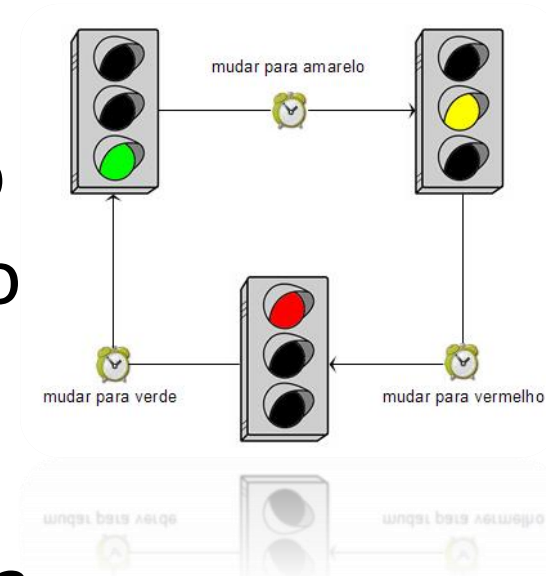
- *FSM* em Inglês: *Finite State Machine*;
- Permitem a modelagem de grande número de problemas;
- A máquina de estados possui vários estados, mas só pode estar em um estado por vez, denominado **Estado Atual**;



# Máquinas de Estados

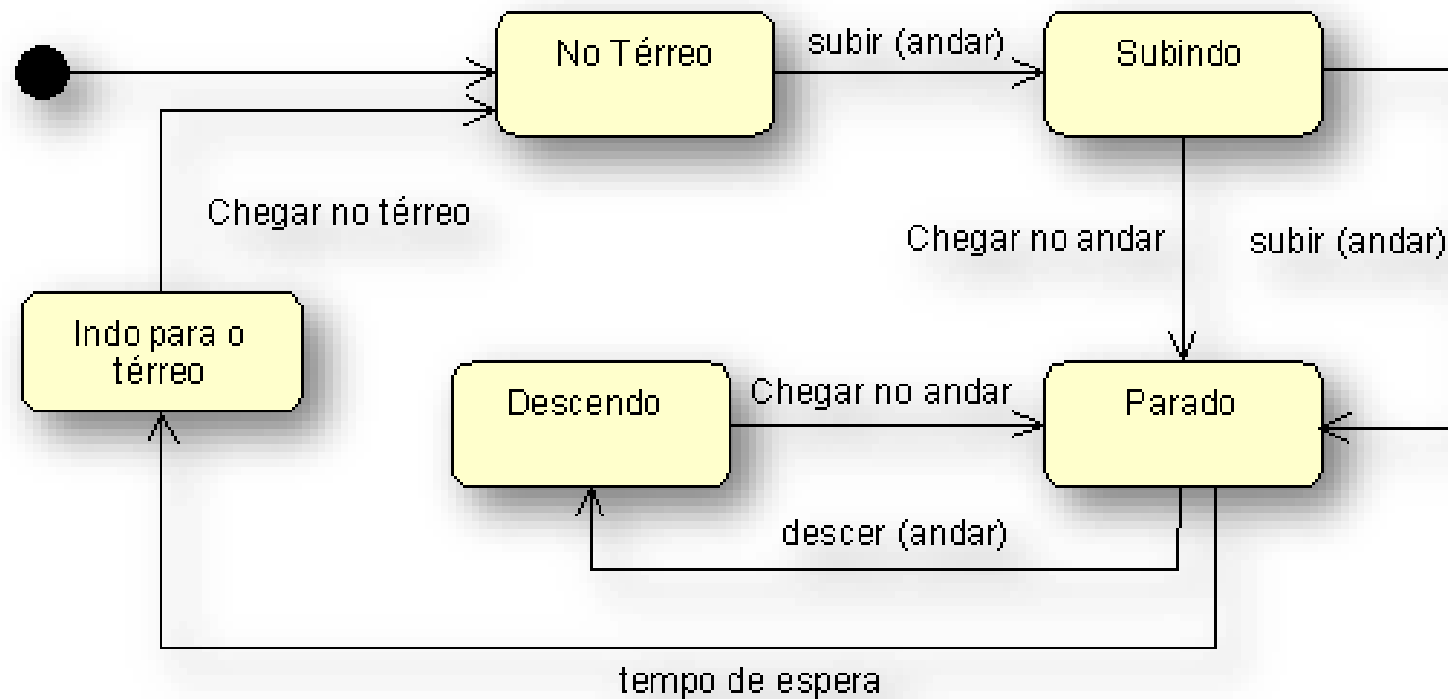
Características e funcionamento da FSM:

- Um estado armazena informações sobre o passado - reflete as mudanças desde a entrada neste estado até o momento presente;
- Uma transição indica uma mudança de estado - descrita por uma condição que precisa ser realizada para que a transição ocorra;
- Uma ação é a descrição de uma atividade que deve ser realizada para uma transição ou em função dela.



# Máquinas de Estados

Máquinas de estado podem ser representadas pelos **Diagramas de Estado:**



# Máquinas de Estados

Máquinas de estado podem ser representadas também pelas **Tabelas de Transição de Estado**.

- Tabelas podem representar uma de máquina finita de estados que contenha informações completas sobre as ações:

Tabela de Transição de Estados			
	Estado		
Condição	Estado A	Estado B	Estado C
1	...	...	...
2	...	Estado C	...
3	...	...	...

# Máquinas de Estados

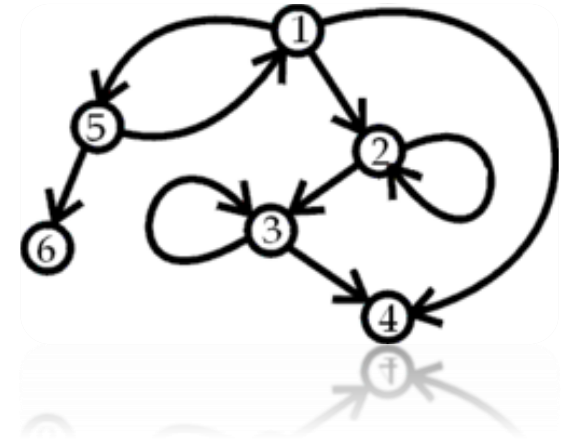
Existem dois tipos de Máquinas de estado:

- **Aceitadores/reconhecedores**, que produzem uma saída binária, dizendo **sim** ou **não** para responder se a entrada é aceita pela máquina ou não;
- **Transdutores**, que geram uma saída baseada em uma entrada e/ou um estado utilizando ações, e são utilizados para aplicações de controle.

# Aplicação

Grafos são bastante utilizados em:

- Ferramentas de Projeto (PERT/CPM);
- Referências topográficas / topológicas (Google Maps, Waze, GPS);
- Projeto e administração de Redes de computadores;
- Mapas de sites / Hyperlinks;

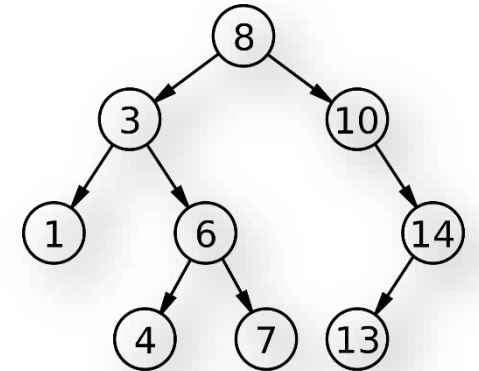




# Aplicação

Árvores binárias são utilizados frequentemente em:

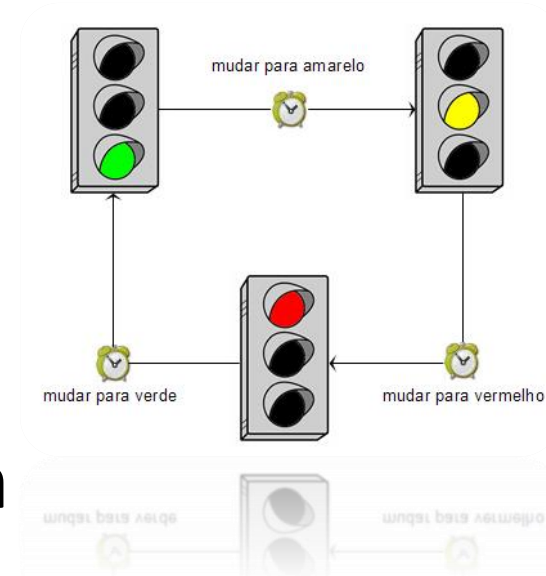
- Busca binária;
- Aplicações de armazenamento e recuperação de informações, como os bancos de dados;
- Processos decisórios sequenciais;
- Processos de ordenação e busca;



# Aplicação

Máquinas de Estado são amplamente utilizadas:

- Na modelagem do comportamento do aplicativo;
- No design de sistemas digitais (*hardware* e *software*)
- Na Engenharia de software, em compiladores e em protocolos de rede;
- No estudo da computação e das linguagens.



## Síntese

- Nesta aula foram apresentados os grafos, um modelo matemático de grande importância para a computação;
- Também foram revistos os conceitos e as características e operações das árvores binárias; um recurso muito utilizado em armazenamento e recuperação de informações;
- Finalmente foram apresentadas as máquinas de estado, uma formulação matemática para a simulação das máquinas e processos reais.