Matemática Computacional

Prof. MSc. Luis Gonzaga de Paulo

Probabilidade

- Probabilidade
- Eventos:
  - Complementares
  - Independentes
  - Mutuamente exclusivos
- União de eventos
- Probabilidade de evento complementar

Para pensar...

- É possível estimar a ocorrência de um evento aleatório?
- Pode-se usar a matemática para auxiliar na previsão de ocorrências deste tipo?
- O uso de estimativas pode ter um embasamento matemático?

PROBABILIDADE

- Probabilidade é a estimativa das chances de ocorrer um determinado evento;
- Ramo da matemática que trabalha com modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

PROBABILIDADE

- **Experimento aleatório** é um experimento que pode apresentar resultados diferentes quando repetido nas mesmas condições;

Por exemplo:

- Lançamento de um dado;
- Cara ou coroa de uma moeda;
- Sequência de cartas em um jogo com baralho;

PROBABILIDADE

- **Espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório;
- O espaço amostral geralmente é representado pela letra maiúscula “S” ou pela letra grega “Ω”. Ex.: S = {1,2,3,4,5,6};
- Um espaço amostral é denominado **equiprovável** quando todos os eventos ligados aos seus elementos têm a mesma chance de ocorrer;

PROBABILIDADE

- **Evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral;
- **Evento certo** é aquele que coincide com o espaço amostral;
- **Evento impossível** é aquele cuja ocorrência resulta em um conjunto vazio;
- **Eventos mutuamente exclusivos** são aqueles que não podem ocorrer ao mesmo tempo. Ex.: Cara e coroa no lançamento de uma moeda.

PROBABILIDADE

Exemplo: Lançar um dado e registrar os resultados.

- Espaço amostral:

  S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Evento A = a ocorrência de um número menor que 7 e maior que zero:

  A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- A = S , então o evento é **certo**.

PROBABILIDADE

Exemplo: Lançar um dado e registrar os resultados.

- Espaço amostral:

  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Evento B = a ocorrência de um número maior que 6.

  $B = \{\emptyset\}$

- Como não existe um número maior que 6 no dado, este evento é impossível.

PROBABILIDADE

Exemplo: Lançar um dado e registrar os resultados.

- Evento C = a ocorrência de um número par:

  $C = \{2, 4, 6\}$

- Evento D = a ocorrência de um número múltiplo de 3:

  $D = \{3, 6\}$

PROBABILIDADE

Exemplo: Lançar um dado e registrar os resultados.

- Evento E = a ocorrência de número par ou número múltiplo de 3.

  $E = C \cup D \quad \Rightarrow \quad E = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} \quad \Rightarrow$

  $E = \{2, 3, 4, 6\}$ → **União de eventos**

- Evento F = a ocorrência de número par e múltiplo de 3.

  $F = C \cap D \quad \Rightarrow \quad F = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} \quad \Rightarrow$

  $F = \{6\}$ → **Interseção de eventos**

PROBABILIDADE

Exemplo: Lançar um dado e registrar os resultados.

– Evento H = a ocorrência de um número ímpar:

$$H = \{1, 3, 5\}$$

Observação: C e H são chamados **eventos complementares**.

– $C \cap H = \varnothing$

– Quando a interseção de dois eventos resulta em um conjunto vazio, eles são chamados **eventos mutuamente exclusivos.**

EVENTO

A probabilidade da ocorrência de um evento é dada pela fórmula:

$$P\ (A) = \frac{número\ de\ elementos\ de\ A}{número\ de\ elementos\ de\ \Omega} \Rightarrow P\ (\mathrm{A}) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

onde:

A = Subconjunto do evento;

Ω = Espaço amostral.

EVENTO

Experimento aleatório do lançamento de um moeda perfeita. Qual a probabilidade de sair cara?

- Espaço amostral: Ω = $\{$cara, coroa$\}$ $\Rightarrow$ n(Ω) = 2;
- Evento A = $\{$cara$\}$ $\Rightarrow$ n(A) = 1;
- P (A) = $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ $\Rightarrow$ P (A) = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 0,50 = 50%

EVENTO

No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de ocorrer um número maior do que 4?

- Espaço amostral: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$;
- Evento $A = \{5,6\} \Rightarrow n(A) = 2$;
- $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$

EVENTO

No lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas e diferentes, qual é a probabilidade de serem obtidas:

a) Pelo menos 2 caras?

b) Exatamente 2 caras?

C = cara K = coroa

$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\} \Rightarrow$

$n(\Omega) = 8$

$A = \{CCC, CCK, CKC, KCC\} \Rightarrow n(A) = 4$

EVENTO

a) A = $\{$CCC, CCK, CKC, KCC$\}$ $\Rightarrow$ n(A) = 4

$$P\ (A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (A) = \frac{4}{8} \Rightarrow P\ (A) = \frac{1}{2} \Rightarrow 50\%$$

b) B = $\{$CCK, CKC, KCC$\}$ $\Rightarrow$ n(B) = 3

$$P\ (B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (B) = \frac{3}{8} \Rightarrow 0{,}375 \Rightarrow 37{,}5\%$$

EVENTO

Ao formar todos os números de 3 algarismos distintos trocando de posição os dígitos 7, 8 e 9, qual é a probabilidade de, escolhendo um número desses ao acaso, ele ser:

a) ímpar b) par? c) múltiplo de 6?

d) múltiplo de 4? e) maior que 780?

$$\Omega = \{789, 798, 879, 897, 978, 987\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$$

EVENTO

a) Ser ímpar $\Rightarrow$ A = $\{789, 879, 897, 987\}$

$\Rightarrow$ n(A) = 4

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{6} \Rightarrow 0{,}666... \Rightarrow \sim 66\%$$

b) Ser par $\Rightarrow$ B = $\{798, 978\}$ $\Rightarrow$ n(B) = 2

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} \Rightarrow 0{,}333... \Rightarrow \sim 33\%$$

EVENTO

c) Ser múltiplo de 6 $\Rightarrow$ C = $\{798, 978\}$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{6} \Rightarrow 0{,}333... \Rightarrow \sim 33\%$$

d) Evento D: ser múltiplo de 4 $\Rightarrow D = \varnothing \Rightarrow n(D) = 0$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(D) = \frac{0}{6} \Rightarrow 0 \Rightarrow 0\%$$

e) Evento E: ser maior que 780 $\Rightarrow E = \Omega \Rightarrow n(E) = 6$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(E) = \frac{6}{6} \Rightarrow 1 \Rightarrow 100\%$$

EVENTO

Considere-se todos os números naturais de 4 algarismos distintos que se pode formar com os algarismos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de sair um número que comece por 3 e termine por 7?

$$\_\ \_\ \_\ \_ \Rightarrow n(\Omega) = A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6x5x4x3x2!}{2!} = 360$$

$$3\ \_\ \_\ 7 \Rightarrow n(A) = A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4x3x2!}{2!} = 12$$

$$P\ (A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (A) = \frac{12}{360} \Rightarrow \frac{1}{30} \cong 0{,}033 \Rightarrow 3.33\%$$

EVENTO

Em um grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte e 5 gostam somente de leitura. CALCULE a probabilidade de, ao escolher aleatoriamente um desses jovens, ele:

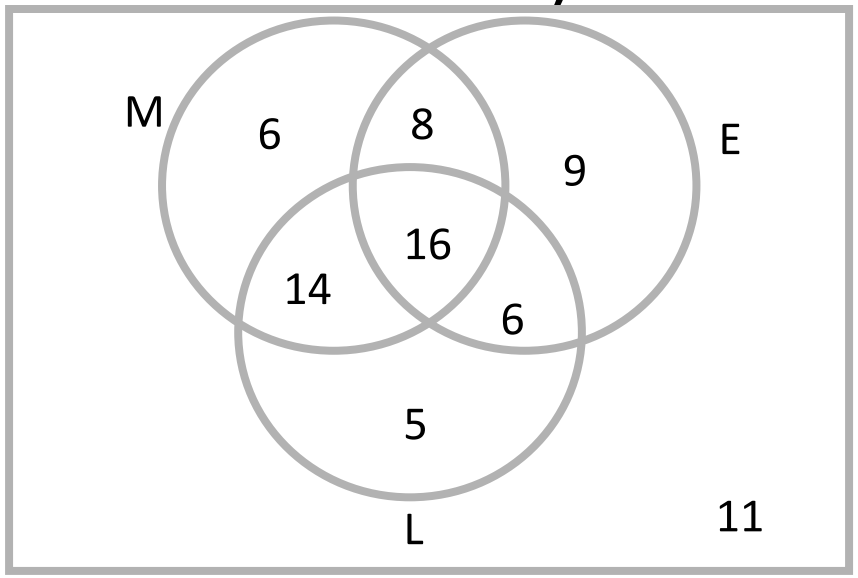
a) Gostar de música;

b) Não gostar de nenhuma dessas atividades.

EVENTO

$n(\Omega) = 75$

- Gostam de música: $6 + 8 + 16 + 14 = 44$
- Não gostam de nenhuma das atividades:
  $75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) = 75 - 64 = \mathbf{11}$



EVENTO

a) A probabilidade de gostar de música:

$$P\ (A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (A) = \frac{44}{75} \cong 0{,}58 \Rightarrow 58\%$$

b) A probabilidade de não gostar de nenhuma dessas atividades:

$$P\ (B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (B) = \frac{11}{75} \cong 0{,}14 \Rightarrow 14\%$$

EVENTOS COMPLEMENTARES

- A probabilidade de sucesso em um evento é denominada “p”;
- A probabilidade de insucesso em um evento denominada “q”;
- A totalidade dos eventos corresponde à soma destas possibilidades:

  $p + q = 1$ (100%)
- Diz-se então que p e q são complementares.

EVENTOS INDEPENDENTES

Dois eventos são independentes quando a realização ou não de um dos eventos não afeta a probabilidade de realização do outro e vice-versa.

Por exemplo:

– Lançando-se um mesmo dado duas vezes, qual a probabilidade de se obter o resultado 6 no segundo lançamento, sendo que no primeiro lançamento o resultado foi 2?

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Dizemos que dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a realização de um exclui a realização do outro. Por exemplo:

– No lançamento de uma moeda, um evento "cara", ao acontecer, exclui o evento "coroa".

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Nestes eventos a probabilidade de um ou outro acontecer é igual a soma da probabilidade que cada um deles se realize. Isto é:

$$P = P1 + P2$$

Por exemplo:

– Ao lançar um dado, a probabilidade de obter o número 2 ou o número 4 é:

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Considerando dois eventos *A* e *B* de um mesmo espaço amostral Ω e aplicando a **teoria dos conjuntos**, tem-se que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo os membros da equação por $n(\Omega)$:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$ ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

UNIÃO DE DOIS EVENTOS

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter o número 3 ou um número ímpar?

- Espaço amostral:

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

- Evento A (número 3):

  $A = \{3\} \Rightarrow n(A) = 1$

- Evento B (número ímpar):

  $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3$

UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Tem-se então que:

$$A \cap B = \{3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6}$$

UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que esta carta seja da cor vermelha ou uma Dama?

- $n(\Omega) = 52$;
- Evento A: a carta é vermelha $\Rightarrow n(A) = 26$;
- Evento B: a carta é uma Dama $\Rightarrow n(B) = 4$;
- $n(A \cap B) = 2$ (número de Damas Vermelhas);

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Calculando:

$$P(A \cup B) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{28}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{13} \cong 0{,}538 \Rightarrow 53{,}8\%$$

PROBABILIDADE DE EVENTO COMPLEMENTAR

A probabilidade de ocorrer o evento complementar de A, isto é, $\bar{A}$, é a probabilidade de não ocorrer o evento A, isto é, A = ∅.

Em função disso tem-se que:

$$A \cup \bar{A} = \Omega \qquad \text{e} \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Então,

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A})$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

PROBABILIDADE DE EVENTO COMPLEMENTAR

No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos e diferentes, qual a probabilidade de NÃO obter dois números cuja soma seja 5?

- Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} $\Rightarrow$ n(Ω) = 36;
- A = Evento “sair soma 5” $\Rightarrow$ A = {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)} $\Rightarrow$ n(A) = 4

PROBABILIDADE DE EVENTO COMPLEMENTAR

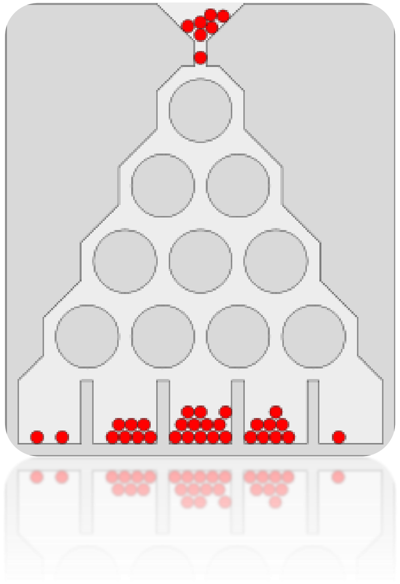
Calculando:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{9}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{8}{9}$$

Aplicação



Cálculos de probabilidade são largamente empregados no cotidiano, incluindo mas não se limitando as mais diversas atividades, tais como:

- Análise de riscos;
- Regulação de mercados;
- Confiabilidade: garantias e controle de qualidade;
- Seguros e cálculo atuarial;
- Definição de preços...

Síntese

- Nesta aula foram abordados os conceitos e a aplicação da probabilidade e dos eventos associados;
- Foram tratados também os tipos de eventos e suas inter-relações, com base na Teoria dos Conjuntos.