RACIOCÍNIO LÓGICO

AULA 6

Prof. André Roberto Guerra

CONVERSA INICIAL

Nesta aula, nosso assunto será o **Cálculo de Predicados**, também denominado *Cálculo dos Predicados de Primeira Ordem*. No tema inicial, serão apresentadas a tradução e a interpretação dos predicados, com ênfase para a formalização de argumentos.

No segundo tema, entrará em discussão a sintaxe do Cálculo de Predicados, com abordagem das fórmulas atômicas e das fórmulas bem formadas (fbf), para, em seguida, no terceiro tema, serem descritos os Diagramas de Venn.

Nos temas finais (quarto e quinto), a representação de proposições e dos enunciados categóricos será pontuada, com a validade dos argumentos utilizando os Diagramas de Venn, exemplos práticos e a resolução de exercícios.

TEMA 1 – TRADUÇÃO E INTERPRETAÇÃO

Nas linguagens de programação conhecidas como *procedurais* (Pascal e outras), os programas são elaborados para “dizer” ao computador a tarefa que deve ser realizada. Já em linguagens de programação conhecidas como *declarativas*, os programas reúnem uma série de dados e regras e a usam para gerar conclusões.

Esses programas são conhecidos como *sistemas especialistas* ou *sistemas baseados no conhecimento*, e simulam em muitos casos a ação de um ser humano (Coppin, 2017). As linguagens declarativas incluem predicados, quantificadores, conectivos lógicos e regras de inferência que fazem parte do Cálculo de Predicados (Abar, 2011).

Como apresentado por Abar (2011), existem vários tipos de argumentos que, apesar de válidos, não podem ser justificados com os recursos do Cálculo Proposicional.

Exemplos:

Todo amigo de Carlos é amigo de Jonas.

<u>Pedro não é amigo de Jonas.</u>

Logo, Pedro não é amigo de Carlos.

Todos os humanos são racionais.

<u>Alguns animais são humanos.</u>

Portanto, alguns animais são racionais.

A verificação da validade desses argumentos nos leva ao significado não só dos conectivos, mas também de expressões como “todo”, “nenhum”, “algum”, “pelo menos um” etc. (Abar, 2011).

Todo humano é mortal, ou seja, qualquer que seja $\boldsymbol{x}$ (do universo), se $\boldsymbol{x}$ é humano, então $\boldsymbol{x}$ é mortal:

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})) \rightarrow \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}))$$

Nenhum humano é vegetal, ou seja, qualquer que seja $\boldsymbol{x}$, se $\boldsymbol{x}$ é humano, então $\boldsymbol{x}$ não é vegetal:

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \sim \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}))$$

Pelo menos um humano é inteligente, ou seja, existe pelo menos um $\boldsymbol{x}$ em que $\boldsymbol{x}$ seja humano e $\boldsymbol{x}$ seja inteligente:

$$\exists \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})\big).$$

1.1 Formalização de argumentos

Utilizando a **lógica dos predicados**, o argumento

Sócrates é humano.

Todo humano é mortal.

Logo, Sócrates é mortal.

pode ser formalizado como:

$$\{\boldsymbol{humano}(\boldsymbol{socrates}), \forall \boldsymbol{X}[\boldsymbol{humano}(\boldsymbol{X}) \rightarrow \boldsymbol{mortal}(\boldsymbol{X})]\} \Rightarrow \boldsymbol{mortal}(\boldsymbol{socrates})$$

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})) \rightarrow \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})).$$

TEMA 2 – SINTAXE DO CÁLCULO DE PREDICADOS

Símbolos de cálculos de predicados podem representar variáveis, constantes, funções ou predicados. *Constantes* são nomes específicos de objetos ou propriedades no domínio do discurso universo de discurso.

O universo de discurso (*domínio de discurso* ou *domínio de quantificação*) é uma ferramenta analítica usada na lógica dedutiva, especialmente na lógica de predicados, que indica o conjunto relevante de entidades às quais os quantificadores se referem. Portanto, Paulo, folha, altura e azul são exemplos de símbolos de constantes bem formadas.

Símbolos de variáveis são usados para designar classes gerais, objetos ou propriedades no domínio do discurso (Pereira, [S.d.]). *Funções* denotam um mapeamento de um ou mais elementos de um conjunto (chamado de *domínio da função*) em um único elemento de outro conjunto (o *alcance da função*) (Pereira, [S.d.]).

Pereira ([S.d.]) pontua que os elementos do domínio de uma função e o alcance são objetos no mundo de discurso. Segundo o autor, todo símbolo de função tem uma associação de *aridade*, indicando o número de elementos do domínio mapeados em cada elemento do alcance.

Semelhante ao modo como **funções** são utilizadas em matemática, pode-se expressar um objeto que se relacione a outro de modo específico utilizando funções.

Exemplo:

Representar a sentença “minha mãe gosta de queijo”.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{eu}), \boldsymbol{queijo})$$

A função $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$ significa *a mãe de* $\boldsymbol{x}$.

Funções podem ter mais de um argumento, e, em geral, uma função com $\boldsymbol{n}$ argumentos é representada como:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2}, \boldsymbol{x3}, \ldots, \boldsymbol{xn}).$$

Uma **expressão** da função é um símbolo de função seguido de seus argumentos. Os argumentos são elementos do domínio de uma função, e o número de argumentos é a *aridade* desta. Os argumentos ficam dentro dos parênteses, separados por vírgulas.

Exemplo:

f(X,Y)

pai(david)

preço(apple)

As expressões citadas são **expressões bem formadas (EBF)**.

A lógica de predicados pode ser vista numa gramática sensível ao contexto, ou, mais tipicamente, livre de contexto. Em uma expressão da forma $(\forall \boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\big)$, a variável $\boldsymbol{x}$ é dita **ligada**, enquanto a variável $\boldsymbol{y}$ é dita **livre**.

Isso significa que a variável $\boldsymbol{y}$ pode ser substituída por qualquer outra variável, pois está livre, e a expressão ainda teria o mesmo significado, ao passo que se a variável $\boldsymbol{x}$ fosse substituída por alguma outra variável em $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, então o significado da expressão seria alterado:

$(\forall \boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}))$ **não é** equivalente a $(\forall \boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}))$, enquanto $(\forall \boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}))$ é.

Observe que uma variável pode ocorrer tanto ligada quanto livre em uma expressão, como em:

$$(\forall \boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \rightarrow (\exists \boldsymbol{y})\big(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\big)\right).$$

Nessa expressão, $\boldsymbol{x}$ é completamente ligada e $\boldsymbol{z}$ é completamente livre; $\boldsymbol{y}$ é livre na sua primeira ocorrência, mas é ligada em $(\exists \boldsymbol{y})\ (\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$. Observe que ambas as ocorrências de $\boldsymbol{y}$ são ligadas.

Esse tipo de alteração é chamado de *substituição*. É permitida a substituição de qualquer variável livre por outra variável livre.

2.1 Fórmulas atômicas

A linguagem do Cálculo de Predicados utiliza para representar frases de uma linguagem natural constantes, variáveis, predicados, símbolos de conectivos, quantificadores e parênteses. Esse tipo de cálculo dos predicados referenciado também é chamado de *lógica dos predicados de primeira ordem (LPPO)*.

Uma lógica de primeira ordem é aquela na qual os quantificadores ∀ e ∃ podem ser aplicados a objetos e **termos**, mas não a predicados e funções. A sintaxe de **LPPO** é assim definida:

Termo:

Uma constante é um **termo**.

Uma variável é um **termo**.

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2}, \boldsymbol{x3}, \ldots, \boldsymbol{xn})$ é um termo se $\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2}, \boldsymbol{x3}, \ldots, \boldsymbol{xn}$ forem todos termos.

Qualquer coisa que não atenda à descrição anterior não pode ser um termo.

Exemplo:

Não é um termo:

$$(\forall \boldsymbol{x})\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}).$$

Esse tipo de construção de sentença é denominado *fórmula bem formada* (fbf), definida em tópico específico a seguir. Em lógica, a expressão simbólica constituída de um predicado e seus termos chama-se *expressão atômica*.

Expressões atômicas são **fórmulas**. O conceito de expressão atômica é utilizado para definir, de maneira mais precisa, o conceito de fórmula. São as fórmulas mais simples do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem.

É uma letra predicativa, seguida por zero ou mais letras nominais ou variáveis. Uma fórmula atômica é uma expressão $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t1}, \dots, \boldsymbol{tn})$, em que $\boldsymbol{p}$ é um símbolo de predicado e $\boldsymbol{t1}, \dots, \boldsymbol{tn}$ são termos.

Nessas definições, $\boldsymbol{P}$ é um predicado, $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ são termos e α e β são fórmulas. Então:

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \dots, \boldsymbol{x_n})$

$(\sim\boldsymbol{\alpha})$,

$(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})$,

$(\boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta})$,

$(\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\beta})$,

$(\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow \boldsymbol{\beta})$

Se $\boldsymbol{\alpha}$ é uma fórmula e $\boldsymbol{x}$ uma variável, então $(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}$ e $(\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}$ são fórmulas.

Exemplo:

Todo amigo de Caio é amigo de José.

Pedro não é amigo de José.

Logo, Pedro não é amigo de Carlos.

$$(\forall \boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{j})\big)$$

$$\sim \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{j})$$

$$\sim\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{c})$$

em que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ significa que $\boldsymbol{x}$ é amigo de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{j}$ são constantes que representam Caio, Pedro e José.

2.2 Fórmulas bem formadas

Semelhante ao Cálculo Proposicional, nem toda sequência constituída de constantes, variáveis, predicados, símbolos de conectivos, quantificadores e parênteses é válida, isto é, representa uma frase da linguagem natural.

As sequências válidas são denominadas *fórmulas bem formadas (fbf)* – (*well formed formulas – wff*), ou simplesmente *fórmulas*.

Se $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ são fbf, então:

$(\sim\boldsymbol{P})$,

$(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$,

$(\boldsymbol{P} \lor \boldsymbol{Q})$,

$(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q})$,

$(\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q})$ também são.

Se $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ é uma fbf, então $\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ e $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ também são.

Seja $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \land \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, então são fbf:

$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \land \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$

$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \land \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}))$

$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \land \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}))$

$\exists \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \land \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big)$.

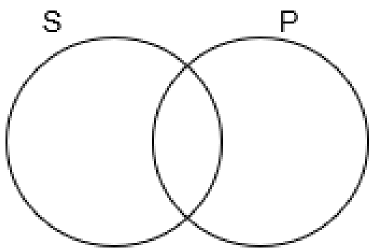
TEMA 3 – DIAGRAMAS DE VENN

As proposições categóricas podem ser representadas graficamente por meio de um esquema conhecido como *Diagrama de Venn*, utilizado pela primeira vez pelo matemático inglês John Venn, que viveu no século XIX.

Nos Diagramas de Venn, cada classe é representada por um círculo, rotulada com o nome da classe. Para representar a proposição que afirma que a classe não possui elementos, o interior do círculo é sombreado.

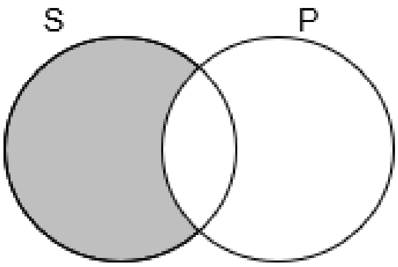
Para indicar que a classe possui pelo menos um elemento, um X é inserido no círculo. Para diagramar uma proposição categórica, são necessários dois círculos, pois esta faz referência a duas classes.

Então, para representar uma proposição que referencia dois predicados, “S” e “P”, são utilizados dois círculos que se interceptam, S e P:



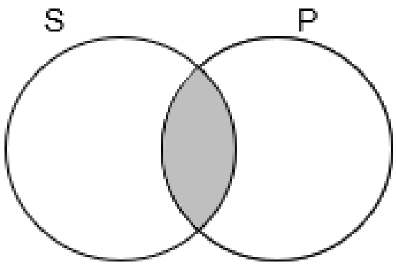
Assim, é possível indicar a forma de representação, segundo os Diagramas de Venn, de cada uma das proposições categóricas.

A proposição “todo S é P”, com a forma simbólica $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Sx} \rightarrow \boldsymbol{Px})$, é assim representada:



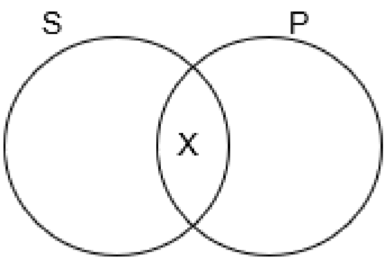
O sombreado em S indica que todos os elementos em S estão concentrados na interseção com P.

A proposição "nenhum S é P", com a forma simbólica $\forall x\ (Sx \rightarrow \neg Px)$, é assim representada:



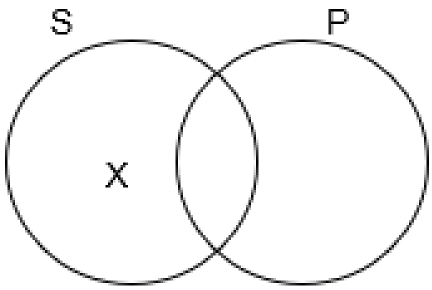
A interseção é sombreada, indicando que não existem elementos comuns entre S e P.

A proposição "algum S é P", com a forma simbólica $\exists x\ (Sx \wedge Px)$, é assim representada:



O **X** na interseção das classes indica o elemento que está tanto em S como em P.

A proposição "algum S não é P", com a forma simbólica $\exists x\ (Sx \wedge \neg Px)$, é assim representada:

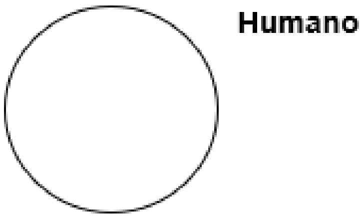


O elemento X é incluído em S, mas exterior à classe P.

TEMA 4 – REPRESENTAÇÃO DE PROPOSIÇÕES/ENUNCIADOS CATEGÓRICOS

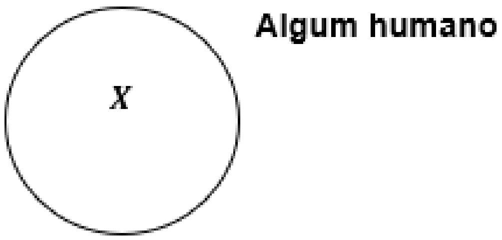
Este tema trata da representação gráfica das proposições e enunciados categóricos. Essa representação é uma forma de verificar a validade de um argumento, as interpretações dos enunciados categóricos.

Cada proposição é representada por um círculo com seu título. Cada círculo sem preenchimento representa ausência de informação sobre a proposição:



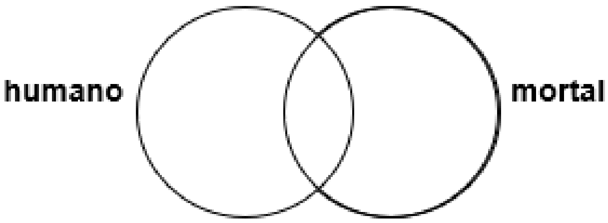
Círculo (ou parte) preenchido representa região **vazia** de elementos:

Para representar algum (pelo menos um) elemento na proposição, insere-se ***X*** no círculo (ou parte dele):



4.1 A representação gráfica de proposições/enunciados categóricos

São necessários dois círculos para representar uma proposição sobre dois predicados:



Universal afirmativo (conjuntivo) **-** (∀)

Sentença:

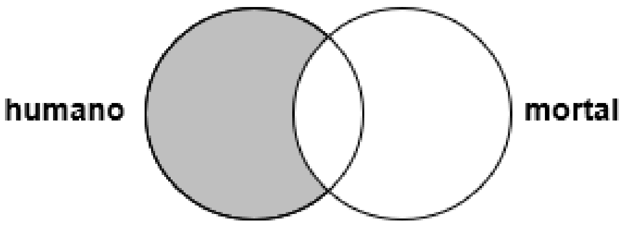
"todo humano é mortal"

Sintaxe:

$$\forall \boldsymbol{X}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}) \ \rightarrow \ \boldsymbol{m}(\boldsymbol{X})]$$

Semântica:

para todo $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{se}\ \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{h},\ \boldsymbol{ent}\text{ã}\boldsymbol{o}\ \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{m}$:



Universal negativo (disjuntivo) **-** (∀)

Sentença:

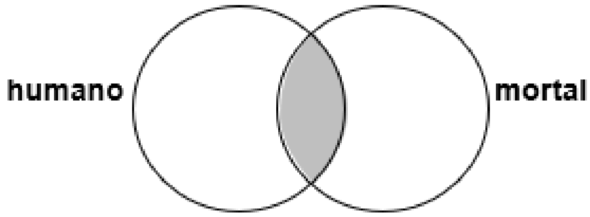
"nenhum humano é mortal"

Sintaxe:

$$\forall \boldsymbol{X}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}) \ \rightarrow \sim\boldsymbol{m}(\boldsymbol{X})]$$

Semântica:

para todo $\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{h},\ \boldsymbol{ent}\text{ã}\boldsymbol{o}\ \boldsymbol{X} \notin \boldsymbol{m}$:



Existencial afirmativo - (∃)

Sentença:

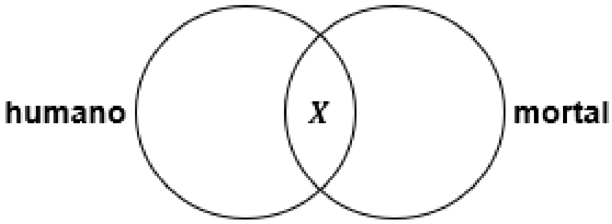
"alguns humanos são mortais"

Sintaxe:

$$\exists \boldsymbol{X}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}) \wedge \boldsymbol{m}(\boldsymbol{X})]$$

Semântica:

Existe $\boldsymbol{X}$, tal que $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{h}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{m}$:



Existencial negativo - (∃)

Sentença:

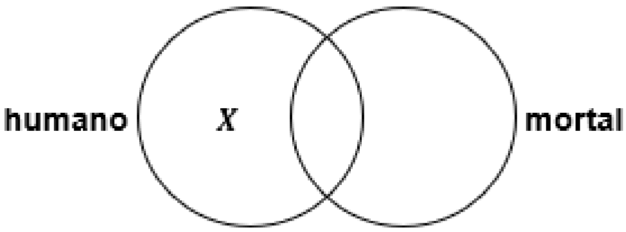
"alguns humanos não são mortais"

Sintaxe:

$$\exists \boldsymbol{X}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}) \wedge \sim \boldsymbol{m}(\boldsymbol{X})]$$

Semântica:

Existe $\boldsymbol{X}$**,** tal que $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{h}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{X} \notin \boldsymbol{m}$:



TEMA 5 – VALIDADE POR DIAGRAMAS DE VENN

Pinho (1999) define em sua obra que, para comprovar a validade ou a invalidade de um silogismo categórico utilizando os Diagramas de Venn, deve-se representar ambas as premissas em um único diagrama. Nesse caso, são requeridos três círculos que se interceptam, pois as duas premissas do silogismo incluem três predicados, ou três classes (Pinho, 1999).

O silogismo será válido se, e unicamente se, as duas premissas afirmarem em conjunto o que é dito pela conclusão, isto é, basta representar por meio de um Diagrama de Venn as duas premissas. Se o que se afirma na conclusão ficar também diagramado, o silogismo é válido; caso contrário, será inválido (Pinho, 1999).

Exemplo:

Tigres são animais ferozes.

Alguns tigres vivem na Índia.

Logo, alguns animais ferozes vivem na Índia.

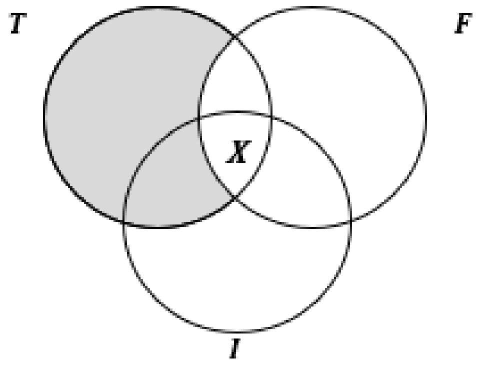
São representados por três círculos:

T para “tigres”

F para “animais ferozes”

I para “vivem na Índia”

A primeira premissa é da forma “todo T é F” e a segunda de “algum T é I”. Representação gráfica das premissas:



O argumento representado é **válido**.

Pinho (1999) complementa que a única possibilidade de incluir o X na interseção de T e I é incluí-lo também em F, o que representa “algum F é I”, que é o que afirma a conclusão, mostrando a validade do silogismo.

Exemplo:

Todos os humanos são mortais.

Sócrates é humano.

Logo, Sócrates é mortal.

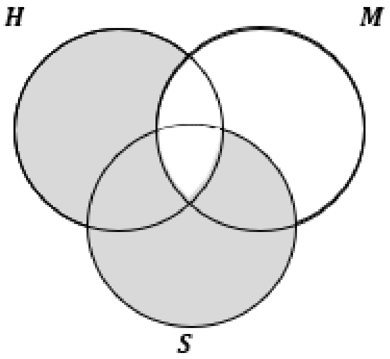
São representados por três círculos:

H para “humano”

M para “mortal”

S para “Sócrates”

A premissa “todos os humanos são mortais” é representada por “todo H é M” e “Sócrates é humano” equivale a “todo Sócrates é humano”, isto é, “todo S é H”. Representação gráfica das premissas:



O argumento representado é **válido**.

A única parte da classe **S** que não é vazia está incluída na classe **M**, afirmando que todo S é M, isto é, Sócrates é mortal, validando o argumento.

Exemplo:

Todos os cães são ferozes.

Alguns gatos são ferozes.

Logo, alguns gatos são cães.

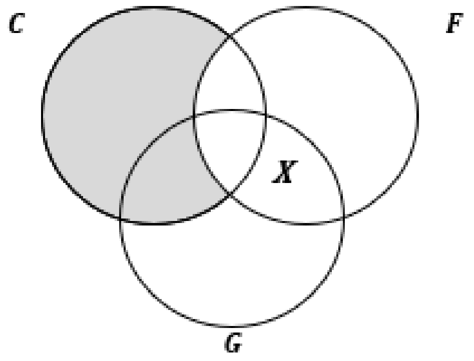
São representados por três círculos:

C para “cães”

F para “ferozes”

G para “gatos”

Para representar a segunda premissa, “alguns gatos são ferozes”, deve-se incluir um X na interseção entre G e F. Essa interseção tem duas regiões, uma interna a C e outra externa, e não é obrigatório inserir o X dentro de C. Representação gráfica das premissas:



Inserindo X na região externa a C, fica claro que é possível atender às duas premissas sem atender à conclusão. Portanto, o argumento é **inválido**.

FINALIZANDO

Nesta aula, foram apresentados os conteúdos que descrevem o **Cálculo de Predicados**, também denominado *Cálculo dos Predicados de Primeira Ordem*. No tema inicial, a tradução e a interpretação dos predicados foram abordadas, com ênfase na formalização de argumentos.

No segundo tema, focalizou-se a sintaxe do Cálculo de Predicados, apresentando as definições de **constantes**, **símbolos**, **funções** e **expressões**, bem como as expressões bem formadas (EBF). Também foram definidas as características das variáveis da expressão (**ligada** e/ou **livre**).

Na sequência do mesmo tema, foram abordadas as fórmulas atômicas e o cálculo dos predicados, também chamado de *lógica dos predicados de primeira ordem (LPPO)*, com a definição da sintaxe de **LPPO** e os **termos**, e, por fim, a apresentação das fórmulas bem formadas (fbf).

No terceiro tema, foram descritos os Diagramas de Venn. No quarto tema, os conteúdos referentes à representação de proposições e dos enunciados categóricos, e, para finalizar, discutiu-se no último tema a validade dos argumentos utilizando os Diagramas de Venn, com exemplos práticos e a resolução de exercícios.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P. **Noções de lógica matemática**. São Paulo: PUC-SP, 2011.

ARANHA, M. L. A.; MARTINS, M. H. P. **Filosofando**: introdução à filosofia. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2003.

COPPIN, B. **Inteligência artificial**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

DOPP, J. **Noções de lógica formal**. São Paulo: Herder, 1970.

LÓGICA de primeira ordem. **Wikipédia**, 31 ago. 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Lógica_de_primeira_ordem>. Acesso em: 3 dez. 2018.

LUGER, G. F. **Inteligência artificial**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

PEREIRA, S. L. **Lógica de predicados**. São Paulo: USP, [S.d.]. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~slago/IA-logicaDePredicados.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2018.

PINHO, A. A. **Introdução à lógica matemática**. Rio de Janeiro: 1999. Disponível em: <http://br.oocities.com/EJAABR/logica/Apostila_de_Logica.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2018.

TANENBAUM, A. S. **Organização estruturada de computadores**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2013.