

# **Matemática Computacional**

## **Aula 3: Noções Elementares**

**Professor Luis Gonzaga de Paulo**

## CONVERSA INICIAL

Oi, aluno(a). Tudo bem? Seja bem-vindo à terceira aula de Matemática Computacional. Nesta aula vamos abordar temas elementares à aplicação da matemática na computação... vamos, então, conhecer:

- os tipos de erros e os efeitos por eles causados
- a teoria dos conjuntos e as operações pertinentes
- as características e os usos dos vetores e das matrizes em computação
- a forma de realizar operações com esses elementos
- os vetores e as matrizes, suas características principais e as operações que podem ser realizadas

Confira a fala inicial do professor Luis Gonzaga. Acesse a versão online da aula.

## CONTEXTUALIZANDO

Que a matemática é essencial à computação nós já sabemos. Aliás, muito mais do que isto, sabemos que matemática é computação e vice-versa, não é mesmo? Nesta aula vamos tentar responder ou indicar os caminhos para pesquisar, pensar e responder algumas questões muito interessantes. Veja:

É possível que o computador cometa erros ou apresente resultados incorretos em cálculos? Ou devemos confiar totalmente nos resultados dos cálculos computacionais?

Como podemos validar os resultados obtidos pelos programas de computador? Se eles existem, como podemos evitar, identificar ou corrigir estes erros?

Como o computador é capaz de organizar e localizar as informações das quais necessitamos?

No vídeo a seguir, o professor Luis Gonzaga trata destas perguntas a que vamos começar a responder. Acesse a versão online da aula.

## TEMA 1: Erros

Os erros computacionais são decorrência de diversos fatores, como as questões sintáticas e semânticas da linguagem de programação, da formulação lógica ou aritmética ou até mesmo da falha da especificação. Porém, vamos nos ater aos erros decorrentes de problemas da modelagem da solução matemática adotada. Modelagem matemática é o conjunto de atividades, separadas em etapas, da solução de um problema real com o uso do computador. Confira este processo em formato de fluxograma:



O **levantamento de dados** atende à necessidade de pesquisa para entender o problema e suas causas, os fatores envolvidos e a contextualização do problema. A **construção do modelo matemático** implica em apresentar possíveis soluções ou abordagens do problema para a solução. A **escolha do método** contempla a análise das soluções propostas em termos de efetividade,

viabilidade, custo, tempos, etc., isto é, fatores objetivos e mensuráveis que, ponderados, vão determinar um ranking por meio do qual a solução mais bem classificada, geralmente, é escolhida para a **implementação computacional**, que é a formulação de algoritmos e a criação de programas de computador e a sua aplicação na resolução do problema. E, finalmente, é feita a **análise dos resultados**, comparando os resultados obtidos com os resultados esperados de acordo com o modelo e o método, e também com os parâmetros utilizados para a escolha do método.

Qualquer uma destas etapas pode ser comprometida com erros. Entretanto, para fins de estudo, vamos nos ater aos problemas da implementação, que apresenta desafios adicionais:

- **Erros de representação de números**, decorrentes do formato, sistema de numeração e tipo de dado utilizado
- **Erro no processamento das informações**, devido a erros de parâmetros ou dados fornecidos, precisão do cálculo, algoritmo, modelo ou capacidade computacional inadequados
- **Limitações da precisão**, causadas pelo tipo de dado, restrições do hardware ou software ou tempo de processamento
- **Necessidade de arredondamento**, devido à limitação de espaço de armazenamento ou exibição
- **Ponto de parada nos cálculos**, para aqueles cálculos cuja recorrência, periodicidade ou recursividade tendem ao infinito. Isso significa que, em determinado momento, os cálculos têm que ser interrompidos, embora o resultado ainda não tenha sido obtido por completo

Os **erros de representação** podem ocorrer devido à forma como os números são armazenados na memória ou exibidos, seja na entrada de dados ou durante os cálculos, e acontecem no tratamento de números irracionais, cujo valor exato não é conhecido. É o caso do número Pi ( $\pi$ ), cujo cálculo já atingiu 13,3 bilhões de casas decimais. Também podem ocorrer com os cálculos com os números racionais, que em sua representação, exigem infinitos dígitos – no caso de uma dízima periódica – como  $1/3$  ou  $2/3$ , por exemplo; e no caso do arredondamento ou truncamento, devido à utilização do sistema de numeração binário, cuja quantidade de dígitos para a representação é limitada, como 8 bits, 16 bits, 32 bits, etc.

Os computadores representam os números reais com a aritmética de ponto flutuante formulada por **F[ $\beta$ ,  $t$ ,  $-p$ ,  $p$ ]** no seguinte formato:

$$\pm (0, d_1 d_2 \dots d_t) \beta^e$$

No qual  $\beta$  é a base com que o computador opera (geralmente 2, binária),  $t$  é o número de dígitos  $d$  na mantissa, e o  $e$  representa o expoente no intervalo (negativo e positivo, ou seja, de  $-p$  até  $+p$ ).

Por exemplo, dado o sistema de representação **F[10, 3, -5, 5]**, que significa  $\beta = 10$ ,  $t = 3$  e  $e \in [-5, 5]$  temos então:

- O menor número, em valores absolutos (**m**), é  $0,100 \cdot 10^{-5}$ , ou seja,  $10^{-6}$
- O maior número, em valores absolutos (**M**), é  $0,999 \cdot 10^5$ , ou seja, 99900

Neste sistema, dado um número  $x = 235,89$ , isto é,  $x = 0,23589 \cdot 10^3$ , o mesmo será representado como  $0,235 \cdot 10^3$ , caso a opção seja o truncamento ou corte, ou  $0,236 \cdot 10^3$ , caso a opção seja o arredondamento. Neste mesmo sistema F[10, 3, -5, 5], o número 0,0000000234, ou seja  $0,234 \cdot 10^{-7}$ , não seria representado, ocasionando um **erro de underflow**, pois o expoente é menor que -5.

### *Erro de underflow*

Ocorre quando a precisão adotada é insuficiente para representar o número na mantissa. O resultado é o arredondamento para o valor zero (0), impactando no resultado, porém sem interromper o cálculo, a menos que o número seja o denominador de uma fração ou o divisor de uma operação de divisão.

O valor seria “transformado” em zero. Já o número 678000000, isto é,  $0,678 \cdot 10^9$ , não seria reconhecido, gerando um **erro de overflow**, pois o expoente é maior que 5.

### *Erro de overflow*

Ocorre quando o intervalo do expoente não comporta o número, gerando um “estouro” que, geralmente, implica em interrupção do processo de cálculo que, não sendo devidamente tratado, pode interromper até mesmo a execução de um programa.

Quanto à sua representação, o erro pode ser **absoluto** ou **relativo**. Um erro absoluto é a diferença entre o valor exato do número  $x$  e o seu valor aproximado  $\bar{x}$  (calculado):

$$EA = x - \bar{x}$$

Já um erro relativo é a proporção entre o erro absoluto e o valor aproximado, e geralmente é expresso em percentual:

$$ER = \frac{EA}{\bar{x}} = \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}$$

### Atividade recomendada

Para fixar estes conceitos, resolva a lista de exercícios sobre erros, disponível em Material Complementar da disciplina, no UNIVIRTUS.

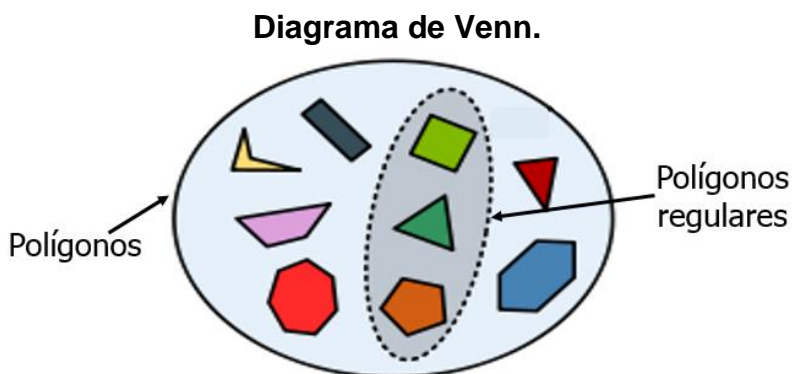
No vídeo a seguir, o professor Luis Gonzaga trata do tema que estamos estudando. Acesse a versão online da aula.

## TEMA 2: Conjuntos

Os conjuntos são tipos de coleções de objetos (elementos ou membros) com características comuns. Normalmente os conjuntos são representados por uma letra maiúscula e os elementos são expressos entre chaves. Por exemplo:

- O conjunto das vogais minúsculas  $V = \{a, e, i, o, u\}$
- O conjunto dos estados da região Sul  $E = \{PR, SC, RS\}$
- O conjunto dos dígitos do sistema binário de numeração  $D = \{0, 1\}$

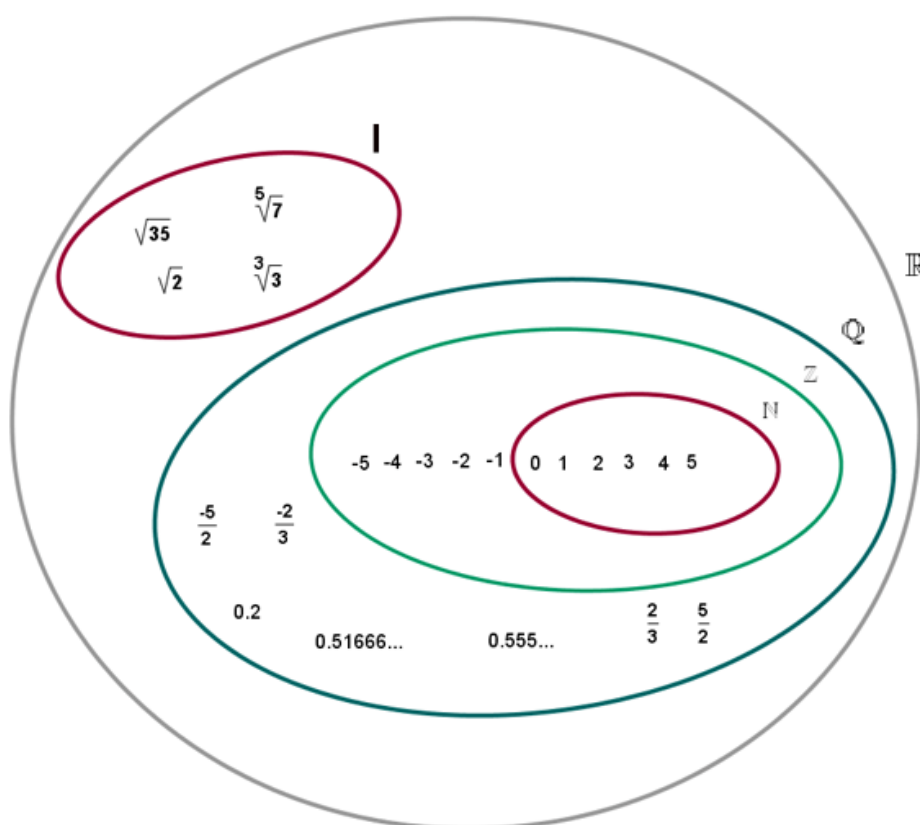
Conjuntos também podem ser representados na forma gráfica pelo Diagrama de Venn, a seguir:



Um conjunto que não possui elementos é denominado conjunto vazio, e é representado por  $\emptyset = \{\}$ . Já os conjuntos infinitos são aqueles com uma quantidade ilimitada de elementos. São exemplos de conjuntos deste tipo os seguintes conjuntos:

- Os números naturais (inteiros não negativos) **N**
- Os números inteiros **Z**
- Os números reais **R**
- Os números racionais **Q**
- Os números irracionais **I**
- Os números complexos **C**

### Os conjuntos dos números.





Uma outra forma de expressar o conjunto é expressando seu conteúdo, como por exemplo,  $\{x \mid P(x)\}$ . Ou seja, “**o conjunto de elementos x que satisfaz a propriedade P**”, ou x em função de P. Também podemos usar a expressão no formato  $\{x \mid x \in A \text{ e } P(x)\}$ , isto é, “**o conjunto de elementos x que pertencem ao conjunto A e satisfazem a propriedade P**”. Por exemplo:

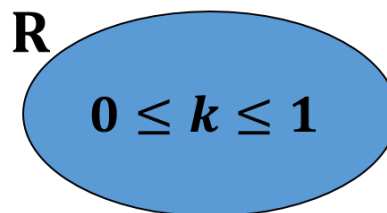
- O conjunto dos números naturais ímpares:

$$\{k \mid k = 2n + 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$$

- O conjunto dos números reais entre 0 e 1 (inclusive):

$$\{k \in \mathbb{R} \mid 0 \leq k \leq 1\}$$

**Conjunto dos números Reais de 0 a 1.**



## Operações e relações entre conjuntos

As operações entre elementos de conjuntos e os próprios conjuntos são muito utilizadas em computação, em especial no tratamento de dados e nos bancos de dados. E são regidas pelas regras e representações apresentadas a seguir. Consideremos dois conjuntos A e B, sendo  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$ . Então são válidas as seguintes relações:

- $A, B \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$
- $A \cup B \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B \rightarrow \{2, 3\}$
- $A - B \rightarrow \{0, 1\}$
- $B - A \rightarrow \{4\}$

- $A \cup \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$
- $A \cap \mathbf{N} \rightarrow A$
- $A - \mathbf{N} = \emptyset$
- $\mathbf{N} - A = \{k \mid k \in \mathbf{N} \text{ e } k > 3\}$

### Leitura recomendada

Leia o capítulo 1 do livro “Tópicos de Matemática Aplicada”. Acesse a versão online da aula.

Leia também os capítulos 2 e 3 do livro “Teoria dos Números e Teoria dos Conjuntos”. Para tanto, acesse a Biblioteca Virtual, pelo UNICO, e pesquise pela obra. E para testar seu aprendizado, resolva os exercícios propostos!



No vídeo a seguir, o professor Luis Gonzaga trata do tema que estamos estudando. Acesse a versão online da aula.

### TEMA 3: Vetores

Vetores são conjuntos, arranjos ou listas de valores com características comuns, organizados por sua posição sequencial e acessados por meio de uma chave ou índice. Compõem elementos de dados essenciais à solução de problemas e à organização de dados. É bom não confundir esta denominação com os segmentos de reta da geometria, embora estes elementos guardem semelhanças entre si.

Vetores são também estrutura de dados homogêneas, isto é, que contém somente dados de um mesmo tipo. Um exemplo típico de vetor é uma cadeia ou sequência de caracteres – ou *string* – que, em linguagem C, é um tipo de dado e uma lista de caracteres, ou seja, um vetor.

#### Um vetor de caracteres alfabéticos.



Os vetores são estruturas de dados lineares e estáticos, compostos por um número finito de elementos de um único tipo. São semelhantes às outras estruturas de dados como listas, filas, pilhas ou árvores. Em linguagens de programação, os vetores correspondem a variáveis múltiplas de uma única dimensão. O acesso aos elementos é muito rápido, porém, a inclusão ou exclusão de elementos intermediários deve ser criteriosa para evitar perda de dados.

Veja os seguintes exemplos de vetores, e compare a representação com a de conjuntos.

- **Nome = {João, Maria, Pedro, José, Antônio}:**

Posição	Conteúdo
1	João
2	Maria
3	Pedro
4	José
5	Antônio

- **Idade = {35, 46, 27, 52, 81}:**

Posição	Conteúdo
1	35
2	46
3	27
4	52
5	81

Para os exemplos dados, podemos representar os elementos individualmente, acessando-os pelo índice, isto é, pela posição que ocupam no Vetor, como mostrado a seguir:

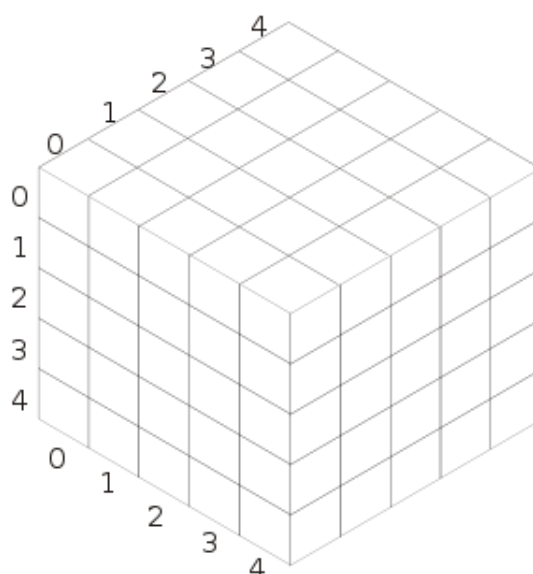
- Nome [1] = João
- Idade [1] = 35
- Nome [2] = Maria
- Idade [2] = 46
- Nome [5] = Antônio
- Idade [5] = 81

Apesar da semelhança da representação e dos conceitos, algumas das operações com vetores são bem diferentes das operações com os conjuntos.

## TEMA 4: Matrizes

No ambiente de computação, as matrizes são arranjos de duas ou mais dimensões contendo dados de características comuns, organizados por sua posição e, tal como os vetores, acessados por meio de chaves ou índices. As matrizes compõem elementos de dados essenciais à solução de problemas, especialmente em computação gráfica e resolução de cálculos em geral. As matrizes também fazem parte das estruturas de dados homogêneas, e podemos considerá-las como arranjos de vetores, sendo que cada vetor compõe uma dimensão da matriz.

### Uma matriz de três dimensões.



Assim como os vetores, as matrizes são estruturas de dados lineares e estáticos, compostas por um número finito de elementos de um único tipo. Nas linguagens de programação, correspondem a variáveis de múltiplas dimensões, nos quais o acesso aos elementos é feito através dos índices ou chaves para cada dimensão. Um dos usos mais expressivo das matrizes é observado nas aplicações de planilhas de dados, como o Microsoft Excel.

Elementos de imagens como desenhos, fotografias e filmes também são compostos por matrizes multidimensionais, assim como a tela do computador que você está usando neste momento, na qual cada minúsculo ponto (ou pixel) representa um elemento com várias dimensões, tais como cor e intensidade luminosa ou brilho.

Como exemplo, vamos considerar uma matriz denominada Pessoas, formada por duas dimensões, sendo 3 colunas x 5 linhas, e compor seus elementos como na figura a seguir:

**Uma matriz de cinco linhas por três colunas.**

LINHAS	COLUNAS		
	1	2	3
1	João	35	Advogado
2	Maria	46	Professora
3	Pedro	27	Arquiteto
4	José	52	Cafeicultor
5	Antônio	81	Mestre de obras

Os elementos desta matriz podem ser representados e identificados (acessados) da seguinte maneira:

- Pessoa [1,1] = João
- Pessoa [1,2] = 35
- Pessoa [2,1] = Maria
- Pessoa [2,2] = 46
- Pessoa [2,3] = Professora
- Pessoa [3,3] = Arquiteto
- Pessoa [5,1] = Antônio
- Pessoa [5,2] = 81

No vídeo a seguir, o professor Luis Gonzaga trata do tema que estamos estudando. Acesse a versão online da aula.

## TROCANDO IDEIAS

Acesse o Fórum “Noções Elementares” e troque ideias com seus colegas de turma sobre os assuntos desta aula. Use os questionamentos a seguir como guia para as discussões:

Como é possível evitar os erros e quais são as possíveis consequências dos erros (alguns apresentados nessa aula) em ambientes computacionais?

Que tipo de aplicação os conjuntos podem ter em computação? Você tem exemplos disso?

Onde são utilizados os vetores e as matrizes? E com que finalidade?

## NA PRÁTICA

Vejamos algumas das aplicações possíveis para os elementos apresentados nessa aula. Procure identificar em seu ambiente de trabalho, estudo e lazer, os elementos que utilizam os conteúdos dos temas apresentados. Acesse a versão online da aula.

## SÍNTESE

Nesta aula foram apresentados os erros decorrentes do uso de computadores para realização de cálculos. Também abordamos os conceitos e as características e operações inerentes ao uso dos conjuntos, e vimos as estruturas de dados baseadas em vetores e matrizes, suas características e alguns de seus possíveis usos.

Confira a fala final do professor Luis Gonzaga. Acesse a versão online da aula.

## Referências

MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P., ROCHA, A. **Tópicos de Matemática Aplicada**. Curitiba: Intersaberes, 2013.

LEITE, A. E., CASTANHEIRA, N. P. **Teoria dos Números e Teoria dos Conjuntos**. Curitiba: Intersaberes, 2014.