Matemática Computacional

Aula 5

Prof. Luís Gonzaga de Paulo

CONVERSA INICIAL

Em determinadas situações é necessário tomar uma decisão ou arbitrar uma resposta com base em uma expectativa, o famoso “palpite” ou “chute”, pois estamos tratando de eventos ou ocorrências ditas aleatórias.

Mas será que existe uma fundamentação matemática para isto? É o que pretendemos responder nesta aula, então, acesse a videoaula introdutória, disponível no material *on-line*!

CONTEXTUALIZANDO

Em nossa realidade existem ocorrências ou fatos que ocorrem ao acaso, sem uma causa aparente ou de forma aleatória. Sejam os números sorteados pela Mega Sena, as cartas do baralho dispensadas a um jogador de pôquer ou o número de vezes que se consegue o valor 7 ao se lançar dois dados. Nós chamamos essas ocorrências de **eventos aleatórios**, que têm muito mais importância para a computação do que aferir a própria sorte. Mas seria possível estimar a ocorrência de um evento aleatório?

Poderíamos usar a matemática para auxiliar na previsão de ocorrências deste tipo? E o uso de estimativas pode ter um embasamento matemático?

Para entender quão prováveis – ou improváveis – são essas ocorrências, estudaremos, agora, a **probabilidade**. Assista ao vídeo correspondente, acessando o material *on-line*!

PESQUISE

Probabilidade

A **probabilidade** pode ser definida como a estimativa das chances de ocorrer um determinado evento ou fato. Também se trata de uma área ou ramo da matemática que trabalha com modelos para estudar experimentos, ocorrências, fenômenos ou **eventos aleatórios**, isto é, aqueles em que não há certeza quanto às possibilidades de serem prováveis ou improváveis de ocorrerem.

Os eventos aleatórios podem ser naturais, como um desastre, um raio, um tsunami ou podem ser provocados pelo homem. Neste caso podem tratar-se de um **experimento aleatório**, isto é, um experimento realizado pelo homem que pode apresentar resultados diferentes quando repetido exatamente sob as mesmas condições.

Como exemplo de eventos aleatórios podemos citar as seguintes situações:

- O lançamento de um dado;
- O jogo de cara ou coroa de uma moeda;
- A sequência de cartas dispensadas aos jogadores em um jogo com baralho;
- Os sorteios dos números das loterias.

Todos esses experimentos podem produzir um determinado número de resultados, dentro de suas possibilidades e impossibilidades, ao que denominamos espaço amostral, que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. O espaço amostral é geralmente representado pela letra maiúscula "**S**" ou pela letra grega ômega (**Ω**).

Por exemplo, o espaço amostral dos números resultantes do lançamento de um dado é:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Um espaço amostral é denominado **equiprovável** quando todos os eventos ligados aos seus elementos têm a mesma chance – isto é, a mesma probabilidade – de ocorrer. No exemplo citado, a probabilidade de ocorrer um número no intervalo de 1 a 6 é a mesma, não importando quantas vezes seja lançado o dado. Portanto, trata-se de um espaço amostral equiprovável.

Já um **evento** é qualquer subconjunto – inclusive unitário – do espaço amostral.

Um **evento certo** é aquele que coincide com o espaço amostral.

Já um **evento impossível** é aquele cuja ocorrência resulta em um conjunto vazio.

E os **eventos mutuamente exclusivos** são aqueles que não podem ocorrer ao mesmo tempo, como por exemplo a ocorrência de cara e coroa em um único lançamento de uma moeda.

Consideremos o lançamento de um dado e o registro dos resultados obtidos. Neste caso, o espaço amostral é representado por:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Agora vamos supor um evento **A** descrito pela ocorrência de um número no intervalo de 1 a 6 ao lançarmos o dado. O conjunto de elementos do evento é representado assim:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Logo, A = S. Então, podemos concluir que o evento **A** é um **evento certo**. Isto quer dizer que, ao lançarmos um dado, haverá sempre uma probabilidade de que ocorra um número entre 1 e 6, inclusive, exibido na face do dado que ficará voltada para cima. Esta probabilidade é idêntica para cada um dos seis números, isto é, **equiprovável**.

Observe este outro exemplo, no qual lançaremos um dado e registraremos os números apresentados. Também neste caso, o espaço amostral seria assim representado:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Então selecionamos um evento **B** como sendo a ocorrência de um número maior que 6:

$$B = \{\emptyset\}$$

Explicando: como não existe um número maior que 6 no dado, então este evento é impossível. Então vamos imaginar um outro exemplo, ainda com base no processo de lançar um dado e registrar os resultados obtidos.

Seja o evento **C** a ocorrência de um número par, assim representado:

$$C = \{2, 4, 6\}$$

Seja mais um evento, o evento **D**, que se refere à ocorrência de um número múltiplo de 3. Deste modo:

$$D = \{3, 6\}$$

Ainda temos os eventos **E** e **F**. O evento **E** é a ocorrência de número par **ou** número múltiplo de 3, assim representado:

$$E = C \cup D \Rightarrow E = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} \Rightarrow E = \{2, 3, 4, 6\}$$

Nessa circunstância dizemos que há uma união de eventos, no caso, a união dos eventos **C** e **D**. E se consideremos o evento **F** como sendo a ocorrência de um número que seja par e, ao mesmo tempo, múltiplo de 3, teremos:

$$F = C \cap D \Rightarrow F = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} \Rightarrow F = \{6\}$$

Assim, teremos então uma interseção de eventos, no caso, a interseção dos eventos **C** e **D**. E finalmente vamos imaginar o evento **H** como sendo a ocorrência de um número ímpar, e representa-lo deste modo:

$$H = \{1, 3, 5\}$$

Isto faz com que os eventos **C** e **H** sejam chamados de eventos complementares, ou seja:

$$C \cap H = \varnothing$$

Quando a interseção de dois eventos resulta em um conjunto vazio, eles são chamados **eventos mutuamente exclusivos**, pois a ocorrência de um implica na impossibilidade da ocorrência do outro.

Façamos, agora, uma leitura dos itens 5.1 e 5.2 do livro “Matemática discreta para ciência da computação”; do capítulo 2 do livro “Probabilidade e Estatística para engenharia e ciências” e da Unidade 4 do livro “Matemática e Estatística”, que fazem parte da bibliografia da disciplina e estão disponíveis no Portal ÚNICO!

http://unico.facinter.br/

Agora, vamos assistir à videoaula na qual o professor Luís Gonzaga fala mais sobre probabilidades. Acesse o material *on-line*!

Eventos

Como já vimos, os **eventos** são subconjuntos ou elementos do espaço amostral Ω (ou S) de um experimento aleatório. A probabilidade da ocorrência de um evento **A**, que identificamos por **P(A)** (lê-se Probabilidade de A) é dada pela seguinte fórmula:

$$P(A) = \frac{\textit{número de elementos de } A}{\textit{número de elementos de } \Omega}$$

Ou seja,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Onde:

A é o subconjunto que representa o evento

Ω é o espaço amostral.

Vamos, então, a um experimento aleatório que consiste no lançamento de uma moeda perfeita, isto é, uma moeda que possua cara e coroa e não tenha nenhuma deformação que venha a interferir no resultado. Então, qual a probabilidade de se obter uma cara?

O **espaço amostral** Ω é composto dos elementos $\{$cara, coroa$\}$, logo, o número de elementos **n(Ω) = 2**. O **evento A** tem como elemento $\{$cara$\}$, então temos que o número de elementos **n(A) = 1**. Desse modo, nossa equação da probabilidade de A:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

É estabelecida desta forma:

$$P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow 0{,}50$$

Ou seja, no lançamento de uma moeda há 50% de chance de que ocorra uma cara.

Vamos, então, a mais um exemplo: o lançamento de um dado perfeito (isto é, sem alterações que impactem no resultado). Qual é a probabilidade de ocorrer um número maior do que 4?

Neste exemplo o espaço amostral **Ω = $\{$1, 2, 3, 4, 5, 6$\}$**, ou seja, **n(Ω) = 6**. Para o evento arbitrado – um número maior do que 4 – as ocorrências possíveis do evento **A = $\{$5, 6$\}$**, logo **n(A) = 2**. Desta forma temos que:

$$\text{P (A)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \text{P (A)} = \frac{2}{6} \Rightarrow \text{P (A)} = \frac{1}{3}$$

Em um outro caso, tratando-se do lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas e diferentes, qual é a probabilidade de serem obtidas pelo menos 2 caras (Evento A) ou exatamente 2 caras (Evento B)?

Primeiramente vamos assumir que C = cara e K = coroa. Então, o espaço amostral decorrente dos três lançamentos distintos é assim representado:

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\}$$

Logo,

$$n(\Omega) = 8$$

Para o evento A temos que:

$$A = \{CCC, CCK, CKC, KCC\}$$

Então,

$$n(A) = 4$$

Para o evento **B**, temos que

$$B = \{CCK, CKC, KCC\}$$

Logo,

$$n(B) = 3$$

A partir disso, podemos resolver a probabilidade. Para o primeiro evento, onde A = $\{$CCC, CCK, CKC, KCC$\}$ e n(A) = 4, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow 0,5 \text{ ou } 50\%$$

Para o segundo evento, onde B = $\{$CCK, CKC, KCC$\}$ e n(B) = 3, temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8} \Rightarrow 0,375 \text{ ou } 37,5\%$$

Vamos, agora, escolher um novo tipo de evento, um arranjo. Ao formar todos os números de 3 algarismos distintos, apenas trocando de posição os dígitos 7, 8 e 9, qual é a probabilidade de, escolhendo um número desses ao acaso, ele ser:

a. Um número ímpar?

b. Um número par?

c. Um múltiplo de 6?

d. Um múltiplo de 4?

e. Um número maior que 780?

Comecemos por estabelecer o espaço amostral Ω = $\{$789, 798, 879, 897, 978, 987$\}$, e, portanto, n(Ω) = 6.

Agora, vamos à resolução:

a. A probabilidade do número escolhido ser ímpar tem A = $\{$789, 879, 897, 987$\}$ e, portanto, n(A) = 4. Assim,

$$P\ (A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (A) = \frac{4}{6} \Rightarrow 0{,}666...$$

Ou seja, aproximadamente 66%.

b. A probabilidade do número escolhido ser par é dada por B = $\{$798, 978$\}$, por conseguinte n(B) = 2. Deste modo,

$$P\ (B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (B) = \frac{2}{6} \Rightarrow 0{,}333...$$

Ou seja, cerca de 33%.

c. A probabilidade do número escolhido ser múltiplo de 6 tem C = $\{$798, 978$\}$ e n(C) = 2, logo,

$$P\ (C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (C) = \frac{2}{6} \Rightarrow 0{,}333...$$

Neste caso também é cerca de 33%.

d. A probabilidade do número escolhido ser um múltiplo de 4 é dada por D=∅, portanto n(D) = 0. Confirmando então,

$$P\ (D) = \frac{\boldsymbol{n(D)}}{\boldsymbol{n(\Omega)}} \Rightarrow P\ (D) = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{6}} \Rightarrow 0$$

Ou seja, nenhuma possibilidade, isto é 0%.

e. A probabilidade do número escolhido ser maior que 780 tem E = Ω e n(E) = 6. Logo,

$$P\ (E) = \frac{\boldsymbol{n(E)}}{\boldsymbol{n(\Omega)}} \Rightarrow P\ (E) = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{6}} \Rightarrow 1 \Rightarrow 100\%$$

Ou seja, o evento E é um **evento certo**!

Vamos avaliar um evento que considere todos os números naturais de quatro dígitos distintos que se pode formar com os algarismos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de obter um número que comece por 3 e termine por 7?

Aqui temos uma probabilidade baseada em um arranjo de quatro números em seis possíveis. Neste caso, o espaço amostral é definido pela razão entre o fatorial do número de elementos possíveis e o fatorial da diferença entre este e o número de elementos do arranjo. Sendo assim, temos:

$$n(\Omega) = A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

Considerando tais valores, temos então,

$$\frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

Isto é, o espaço amostral comporta 360 elementos, ou seja, n(Ω) = 360.

Para o evento escolhido temos um arranjo de dois números em quatro possíveis, isto é,

$$n(A) = A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

Ou seja, 12 eventos possíveis.

Aplicando o método de resolução apresentado, temos

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{12}{360} \Rightarrow \frac{1}{30} \cong 0{,}033$$

Isso quer dizer que a probabilidade de sair um número que comece por 3 e termine por 7 é de **3,33%**.

Vamos, agora, abordar eventos que implicam na **interseção** entre outros eventos. Consideremos um grupo composto de 75 jovens, dos quais 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 deles curtem música e esporte, enquanto 30 gostam de música e leitura e 22 gostam de esporte e leitura. Entretanto, 6 gostam somente de música, 9 gostam somente de esporte e 5 gostam somente de leitura. Devemos avaliar a probabilidade de, ao escolher aleatoriamente um jovem desse grupo, que ele:

a. Goste de música;

b. Não goste de nenhuma dessas coisas.

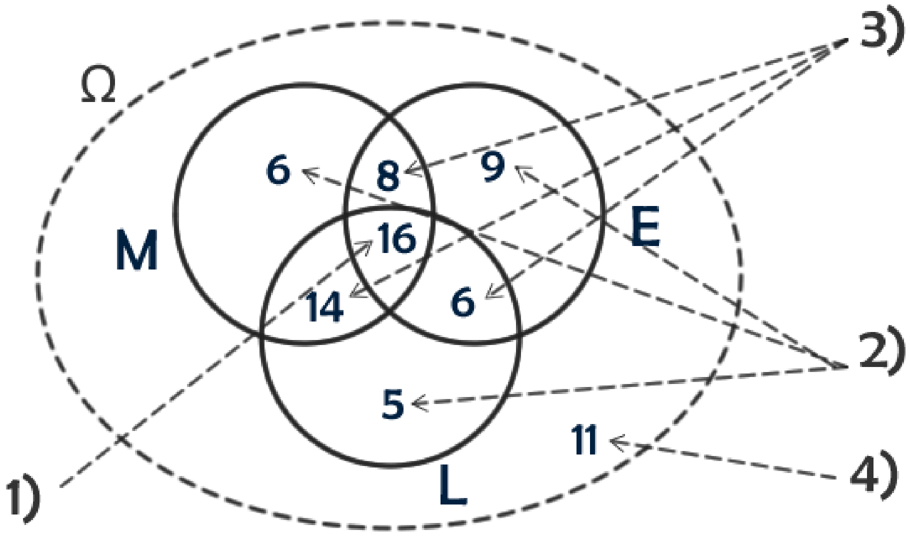
Pelo enunciado apresentado, obtemos que o espaço amostral $n(\Omega) = 75$. Já o evento “gosta de música” pode ser calculado da seguinte maneira:

$$6 + 8 + 16 + 14 = 44$$

E enquanto que os que não gostam de nenhuma das atividades:

$$75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) = 75 - 64 = 11$$

A pergunta é: como chegamos a esses números? É mágica ou chute? Não é nem uma coisa nem outra, mas a aplicação da lógica e um pouco de visão sobre diagramas de Venn, como mostrado a seguir:



Trata-se de extrair as informações do enunciado e distribuí-las de acordo com a teoria dos conjuntos com a devida combinação de uniões e interseções. O passo a passo para isto é:

1. Começamos pela interseção mais central, que trata dos 16 jovens que curtem as três coisas.

2. Depois, vamos ao outro extremo e incluímos os que gostam de apenas uma das coisas: 6 gostam somente de música, já 9 gostam somente de esporte e 5 gostam somente de leitura;

3. Então consideramos os que gostam de duas dessas coisas – com o cuidado de descontar os 16 que já contados no primeiro passo. Assim, dos 24 que curtem música e esporte sobram 8. Dos 30 que gostam de música e leitura sobram 14 e dos 22 gostam de esporte e leitura restam 6. Somando todos estes que possuem gosto por ao menos uma das coisas, temos então a quantidade de 64 jovens;

4. Finalmente calculamos aqueles que nao gostam de nenhuma dessas coisas, subtraindo do espaço amostral Ω o resultado obtido no item 3. Temos então 75 – 64 = 11.

Pronto! Agora temos condições de responder às questões propostas calculando de acordo com o processo estabelecido até aqui:

a. A probabilidade de gostar de música:

$$P\ (A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (A) = \frac{44}{75} \cong 0{,}58 \Rightarrow 58\%$$

b. A probabilidade de não gostar de nenhuma dessas atividades:

$$P\ (B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P\ (B) = \frac{11}{75} \cong 0{,}14 \Rightarrow 14\%$$

Vamos reforçar o conteúdo que aprendemos nesta aula. Como? Assistindo à videoaula referente a este tema, que está disponível no material *on-line*!

Eventos Complementares

Reforçando o que já vimos, vamos retomar, neste tema, o assunto **eventos complementares**.

Considerando que a probabilidade de sucesso em um evento é geralmente denominada "**p**", e a probabilidade de insucesso em um evento, por sua vez, é geralmente denominada “**q**”, a totalidade dos eventos corresponde à soma destas possibilidades, isto é:

$$\boxed{p + q = 1\ (100\%)}$$

Dizemos então que **p** e **q** são **complementares**.

Vamos fixar melhor a ideia de eventos complementares assistindo à videoaula referente a este tema, que está disponível no material *on-line*!

Eventos Independentes

Considera-se que dois eventos são **independentes** quando a realização de um dos eventos não afeta a probabilidade de realização do outro e vice-versa.

Por exemplo, lançando o mesmo dado duas vezes, qual a probabilidade de se obter o resultado 6 no segundo lançamento, sendo que no primeiro lançamento o resultado foi 2?

As ocorrências em questão, apesar da grande similaridade, não guardam nenhuma relação entre si e por si só não são capazes de influenciar uma à outra.

Eventos Mutuamente Exclusivos

Dizemos que dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a realização de um exclui a realização do outro.

Por exemplo: no lançamento de uma moeda, um evento "cara", ao acontecer, exclui automaticamente o evento "coroa".

Nestes tipos de eventos a probabilidade de um ou outro acontecer é igual a soma da probabilidade que cada um deles se realize. Isto é:

$$P = P1 + P2$$

Por exemplo: ao lançar um dado, a probabilidade de obter o número 2 <u>ou</u> o número 4 é:

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

União de eventos

Considerando dois eventos **A** e **B** de um mesmo espaço amostral Ω e aplicando a **teoria dos conjuntos**, tem-se que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo os membros da equação por $n(\Omega)$:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter o número 3 ou um número ímpar? O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, logo $n(\Omega) = 6$. Considerando o evento A (obter o número 3):

$$A = \{3\} \Rightarrow n(A) = 1$$

E quanto ao evento B (número ímpar), temos que:

$$B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3$$

Tem-se então que:

$$A \cap B = \{3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$$

Então o $n(A \cap B) = 1$, portanto, se

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$$

Então temos que:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

E, por conseguinte,

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6}$$

Mais um exemplo: retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que esta carta seja da cor vermelha ou uma Dama?

A partir do enunciado temos que $n(\Omega) = 52$. Para o evento A, a carta é vermelha, podemos inferir que **n(A) = 26**.

Para o evento B, a carta é uma Dama, temos que **n(B) = 4**.

Analisando a interseção concluímos que:

$n(A \cap B) = 2$ (número de Damas Vermelhas no baralho)

Com base na fórmula de cálculo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$$

Temos que:

$$P(A \cup B) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{28}{52}$$

Então,

$$P(A \cup B) = \frac{7}{13} \cong 0{,}538 \rightarrow 53{,}8\%$$

Com a videoaula referente a este tema, que está disponível no material *on-line* ficará mais fácil de você compreender. Então, vamos à explicação do professor Luís Gonzaga!

Probabilidade de Evento Complementar

A probabilidade de ocorrer o evento complementar de A, isto é, $\overline{A}$, é igual à probabilidade de não ocorrer o evento A, isto é, A = ∅. Em função disso, podemos afirmar que:

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

E também que:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Então,

$$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A})$$

Logo,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos e diferentes, qual a probabilidade de NÃO obter dois números cuja soma seja 5?

Começamos pela identificação do espaço amostral:

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Desta forma, **n(Ω) = 36**.

Paro o evento A, isto é, "sair soma 5", temos que:

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

Então:

$$n(A) = 4$$

Agora podemos calcular:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Então:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{9}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{8}{9}$$

Vamos finalizar este tema assistindo à videoaula do professor Luís Gonzaga sobre Probabilidade de Eventos Complementares. Acesse o material *on-line*!

NA PRÁTICA

Cálculos de probabilidade são largamente empregados no cotidiano, incluindo – mas não se limitando – às mais diversas atividades, tais como:

- Análise de riscos
- Regulação de mercados
- Confiabilidade: garantias e controle de qualidade
- Seguros e cálculo atuarial

- Definição de preços

Porém, uma das mais comuns aplicações da probabilidade – e razão da sua transformação em ciência – é sua aplicação nos jogos, inclusive naqueles chamados “jogos de azar”.

No site de loterias da Caixa Econômica Federal encontramos diversas opções de jogos, e lá são apresentadas também as probabilidades de acerto de cada um dos prêmios oferecidos. Apresentamos então um desafio: com base no que aprendemos, faça uma validação dessas probabilidades e comprove (ou conteste) os valores apresentados. Apresente os resultados obtidos e discuta-os com os colegas no fórum “Probabilidade” da sala da disciplina no UNIVIRTUS.

www.loterias.caixa.gov.br

Saiba mais sobre a aplicação da probabilidade assistindo à videoaula que está disponível no material *on-line*!

SÍNTESE

Nossa quinta aula está chegando ao fim.

Nela, abordamos os conceitos e a aplicação da probabilidade e dos eventos a ela associados. Também tratamos dos tipos de eventos e suas inter-relações, com base na **Teoria dos Conjuntos**.

Vamos recapitular o que aprendemos nesta aula? Acesse o material *on-line*!

Referências

BONAFINI, F. C. **Matemática e estatística**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

STEIN, C.; DRYSDALE R. L.; e BOGART, K. **Matemática discreta para Ciência da Computação**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

WALPOLE, R. E.; MYERS, R. H.; MYERS, S. L.; YE, K. **Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências**. 8. Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.