

# Matemática Computacional

**Prof. MSc. Luis Gonzaga de Paulo**

# Noções elementares

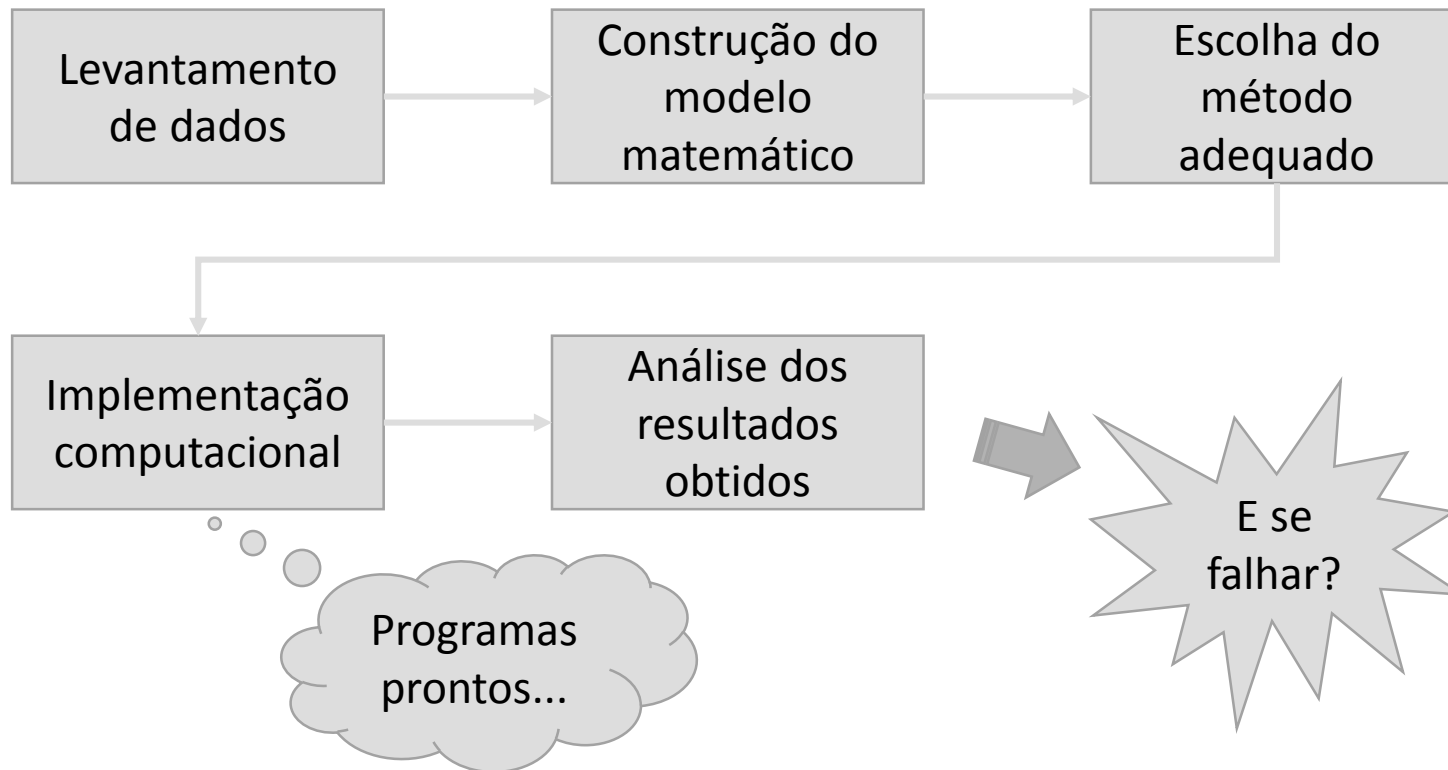
- Erros
- Conjuntos
- Vetores
- Matrizes

## **Você sabe responder?**

- É possível que o computador apresente resultados incorretos em alguns cálculos?
- Devemos confiar totalmente nos resultados dos cálculos computacionais?
- Como podemos validar os resultados obtidos?
- Como evitar, identificar ou corrigir os erros?
- O computador é capaz de organizar e localizar as informações das quais necessitamos?

# Erros

Etapas da solução de um problema real com o uso do computador:



# Erros

Qualquer etapa é passível de erro, porém a implementação apresenta desafios adicionais:

- Erros de representação de números;
- Erro no processamento das informações;
- Limitações da precisão;
- Necessidade de arredondamento;
- Ponto de parada nos cálculos.

# Erros

Erros de representação podem ocorrer com:

- Números irracionais, cujo valor exato não é conhecido, como é o caso do número  $\pi$ ;
- Números racionais, que em sua representação exigem infinitos dígitos, como  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{2}{3}$ , por exemplo;
- O arredondamento ou truncamento devido à utilização do sistema de numeração binário com uma quantidade limitada de dígitos;

## Erros

Os computadores representam os números reais com a aritmética de ponto flutuante  $F[\beta, t, -p, p]$  no seguinte formato:

$$\pm (0, d_1 d_2 \dots d_t) \beta^e$$

sendo:

- $\beta$  é a base na qual o computador opera (geralmente 2);
- $t$  é o número de dígitos na mantissa
- $e$  representa o expoente no intervalo  $(-p, p)$ ;

## Erros

Por exemplo, no sistema  $F[10, 3, -5, 5]$  ou  $\beta = 10, t = 3$  e  $e \in [-5, 5]$  temos:

- O menor número em valores absolutos ( $m$ ) é  $0,100 \cdot 10^{-5}$ , ou seja,  $10^{-6}$ ;
- O maior número em valores absolutos ( $M$ ) é  $0,999 \cdot 10^5$ , ou seja, 99900;
- Neste sistema, o número  $x = 235,89 = 0,23589 \cdot 10^3$  será representado como  $0,235 \cdot 10^3$  (truncamento) ou  $0,236 \cdot 10^3$  (arredondamento);



## Erros

Neste mesmo sistema  $F[10, 3, -5, 5]$ :

- O número  $0,234 \cdot 10^{-7}$  não seria representado, ocasionando um erro de *underflow*, pois o expoente é menor que -5;
- O número  $0,678 \cdot 10^9$  não seria reconhecido, gerando um erro de *overflow*, pois o expoente é maior que 5;

# Erros

O erro pode ser absoluto ou relativo.

- **Erro absoluto** é a diferença entre o valor exato do número  $x$  e o seu valor aproximado  $\bar{x}$  (calculado):

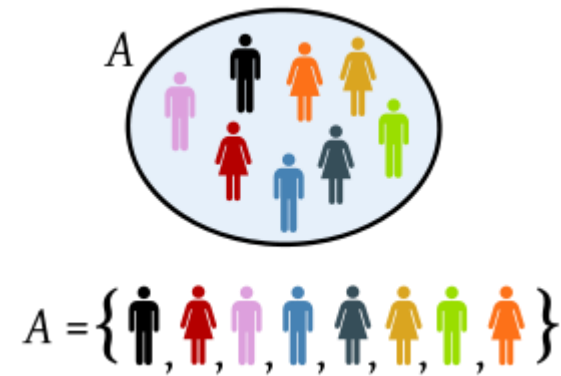
$$EA = x - \bar{x} ;$$

- **Erro relativo** é a proporção entre o erro absoluto e o valor aproximado:

$$ER = \frac{EA}{\bar{x}} = \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}$$

# Conjuntos

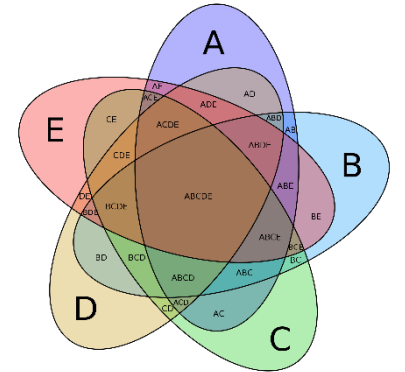
- Conjuntos são coleções de objetos (elementos ou membros) com características comuns
- Normalmente são representados por uma letra maiúscula e os elementos são expressos entre chaves;
- Também podem ser representados na forma gráfica pelo diagrama de Venn;



# Conjuntos

Exemplos:

- O conjunto das letras do alfabeto  
 $A = \{A, B, C, D... Z\}$
- O conjunto dos números decimais  
 $D = \{0, 1, 2, 3...9\}$
- O conjunto dos meses do ano  
 $M = \{\text{Janeiro, Fevereiro, Março... Dezembro}\}$

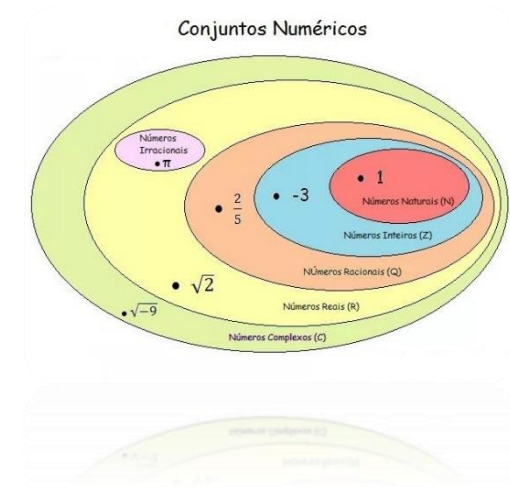


# Conjuntos

O conjunto que não possui elementos é denominado conjunto vazio:  $\emptyset = \{\}$ . Existem também os conjuntos infinitos, com quantidade ilimitada de elementos.

Dentre estes merecem especial atenção:

- Números naturais (inteiros não negativos) **N**;
- Números inteiros **Z**;
- Números reais **R**;
- Números racionais **Q**;
- Números irracionais **I**;
- Números complexos **C**;



# Conjuntos

Outra forma de expressar o conjunto é

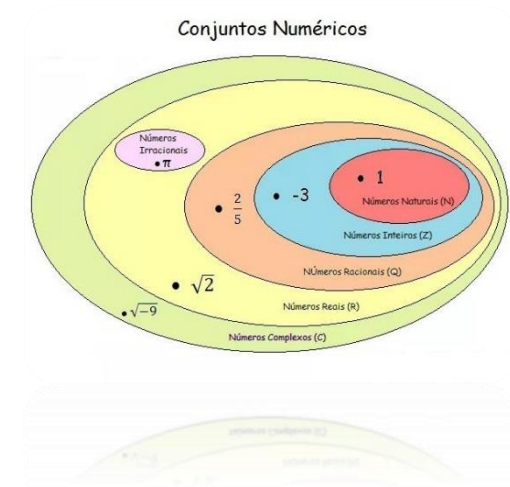
$$\{x \mid P(x)\}$$

- Ou seja, o conjunto de elementos  $x$  que satisfaz a propriedade  $P$ ;

Também usa-se a expressão

$$\{x \mid x \in A \text{ e } P(x)\}$$

- Isto é: o conjunto de elementos  $x$  que pertencem ao conjunto  $A$  e satisfazem a propriedade  $P$ ;



# Conjuntos

Exemplos:

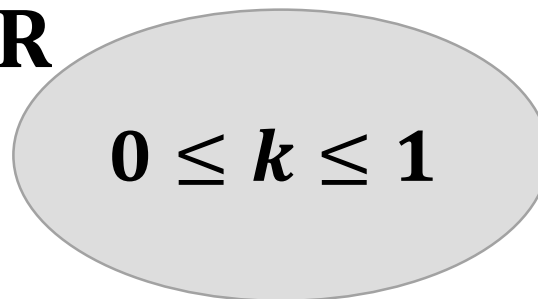
- O conjunto dos números naturais ímpares:

$$\{ k \mid k = 2n + 1 \text{ e } n \in \mathbf{N} \}$$

- O conjunto dos números reais entre 0 e 1 (inclusive):

$$\{ k \in \mathbf{R} \mid 0 \leq k \leq 1 \}$$

**R**



# Conjuntos

Relações entre elementos e conjuntos:

- $x \in A \rightarrow$  o elemento  $x$  pertence ao conjunto  $A$ ;
- $x \notin A \rightarrow$  o elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ ;
- $A \subset B \rightarrow$  o conjunto  $A$  está contido no conjunto  $B$ ;
- $A \supset B \rightarrow$  o conjunto  $A$  contém o conjunto  $B$ ;
- $A \cup B \rightarrow \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$ ;
- $A \cap B \rightarrow \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$ ;
- $A - B \rightarrow \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$ ;



# Conjuntos

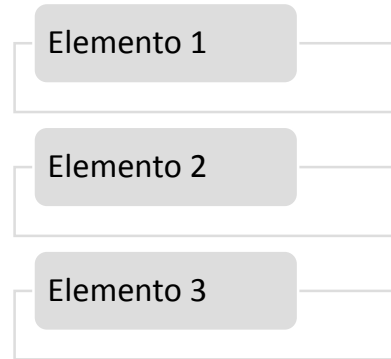
Seja  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$ , então:

- $A, B \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{Q}$
- $A \cup B \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\};$
- $A \cap B \rightarrow \{2, 3\};$
- $A - B \rightarrow \{0, 1\};$
- $B - A \rightarrow \{4\};$
- $A \cup \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N};$
- $A \cap \mathbf{N} \rightarrow A;$
- $A - \mathbf{N} = \emptyset$
- $\mathbf{N} - A = \{k \mid k \in \mathbf{N} \text{ e } k < 4\};$



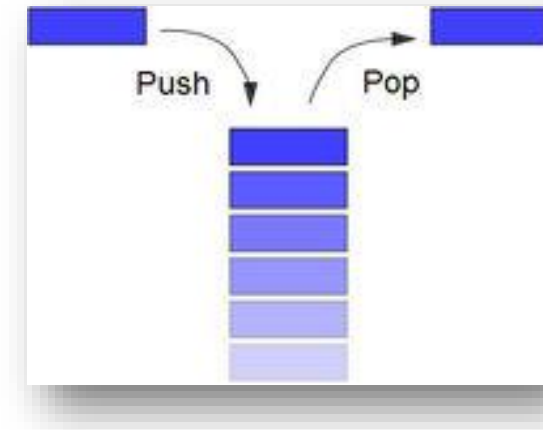
# Vetores

- Em computação, vetores são arranjos ou listas de valores com características comuns, organizados por sua posição e acessados por meio de uma chave ou índice;
- Compõem elementos de dados essenciais à solução de problemas;
- São também denominados estrutura de dados homogêneas.



# Vetores

- Os vetores são estruturas de dados lineares e estáticos, compostos por um número finito de elementos de um único tipo;
- São semelhantes à outras estruturas de dados como listas, filas, pilhas ou árvores;
- Em linguagens de programação correspondem à variáveis múltiplas de uma única dimensão;
- O acesso aos elementos é muito rápido, porém a inclusão ou exclusão de elementos intermediários deve ser criteriosa.



# Vetores

Exemplos:

- Nome = {João, Maria, Pedro, José, Antônio};
- Idade = {35, 46, 27, 52, 81}
- Nome [1] = João;
- Idade [1] = 35;
- Nome [2] = Maria;
- Idade [2] = 46;
- Nome [5] = Antônio;
- Idade [5] = 81;

Posição	Conteúdo
1	João
2	Maria
3	Pedro
4	José
5	Antônio

Posição	Conteúdo
1	35
2	46
3	27
4	52
5	81

# Matrizes

- Em computação, matrizes são arranjos de duas ou mais dimensões contendo dados de características comuns, organizados por sua posição e acessados por meio de chaves ou índices;
- Compõem elementos de dados essenciais à solução de problemas, e são essenciais em computação gráfica e cálculos em geral;
- Também fazem parte das estruturas de dados homogêneas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

# Matrizes

- Assim como os vetores, as matrizes são estruturas de dados lineares e estáticos, compostas por um número finito de elementos de um único tipo;
- Em linguagens de programação correspondem à variáveis de múltiplas dimensões;
- O acesso aos elementos é feito através dos índices ou chaves para cada dimensão;
- Um uso expressivo das matrizes é observado nas aplicações de planilhas de dados, como o Microsoft Excel.



# Matrizes

Exemplo:

- Pessoa [1,1] = João;
- Pessoa [1,2] = 35;
- Pessoa [2,1] = Maria;
- Pessoa [2,2] = 46;
- Pessoa [2,3] = Professora;
- Pessoa [3,3] = Arquiteto;
- Pessoa [5,1] = Antônio;
- Pessoa [5,2] = 81;

Pessoa	Colunas		
Linhas	1	2	3
1	João	35	Advogado
2	Maria	46	Professora
3	Pedro	27	Arquiteto
4	José	52	Cafeicultor
5	Antônio	81	Mestre de Obras



# Aplicação

## Erros:

- É importante conhecer as possibilidades de erro para evitá-las ou tratá-las devidamente;
- Erros podem impactar o resultado de operações simples e inviabilizar o resultado;
- Antecipar-se aos erros nos cálculos é uma boa forma de garantir a segurança da informação.

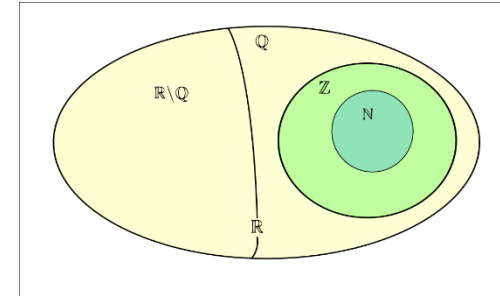




# Aplicação

## Conjuntos:

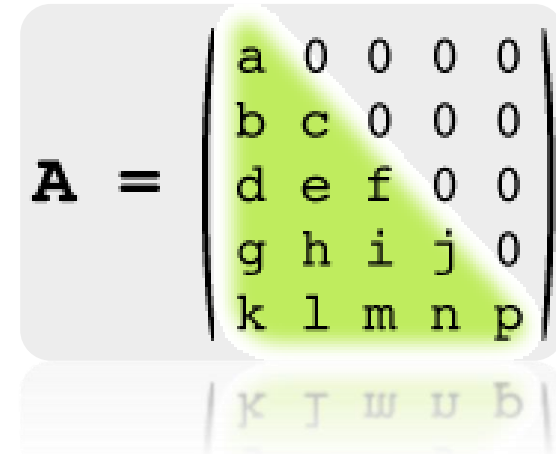
- Agrupamentos são essenciais no processamento das informações pelo computador;
- Conjuntos de dados compõem as informações, os arquivos e os bancos de dados, e as regras para manipular estes conjuntos são baseadas nas mesmas operações apresentadas;
- A Teoria dos Conjuntos e a Teoria dos Números são essenciais para a solução da maioria dos problemas matemáticos e computacionais;



# Aplicação

## Vetores e Matrizes:

- Estruturas de dados elementares na organização e na apresentação das informações;
- Permitem a construção e a execução de cálculos complexos e a manipulação de grandes volumes de dados em memória;
- São intensivamente utilizados em computação em geral, especialmente em finanças e computação gráfica.


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 0 \\ g & h & i & j & 0 \\ k & l & m & n & p \end{pmatrix}$$

## Síntese

- Nesta aula foram apresentados os erros decorrentes do uso de computadores para realização de cálculos;
- Também foram revistos os conceitos e as características e operações inerentes ao uso dos conjuntos;
- Também foram apresentadas as estruturas de dados baseadas em vetores e matrizes.