RACIOCÍNIO LÓGICO

AULA 4

Prof. André Roberto Guerra

CONVERSA INICIAL

Nesta aula, são apresentadas as relações e o método dedutivo, iniciando-se pela diferença entre operação e relação, para em seguida se apresentar e definir a relação da implicação lógica e a relação da equivalência lógica.

A álgebra das proposições é apresentada no tema seguinte e finaliza-se com o método dedutivo.

Utilizam-se definições e conceitos dos termos e símbolos que compõem a lógica proposicional e o cálculo das sentenças/proposições, permitindo a validação da resposta encontrada, além das propriedades semânticas básicas da lógica proposicional (LP), que possibilitam simplificar ainda mais a solução de complexos cálculos proposicionais.

TEMA 1 – DIFERENÇA ENTRE OPERAÇÃO E RELAÇÃO

1.1 Diferença entre os símbolos de operação implicação e de relação implicação

Os símbolos → e ⇒ são distintos, pois o símbolo → (condicional ou implicação) indica uma operação lógica.

Já o símbolo ⇒ indica uma **relação**; em que todas as avaliações possíveis de uma **operação condicional** entre $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ $(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q})$ resultam em $\boldsymbol{V}$ (tautologia).

Ex.: a condicional $\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ é tautologia. Logo, $\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{T}$

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

1.2 Diferença entre os símbolos de operação da bi-implicação e de relação equivalência

Os símbolos ↔ e ⇔ são distintos, pois o símbolo ↔ (bicondicional ou bi-implicação) indica uma operação lógica.

Já o símbolo $\Leftrightarrow$ indica uma **relação**; em que todas as avaliações possíveis de uma **operação bicondicional** entre $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ $(\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q})$ resultam em $\boldsymbol{V}$ (tautologia).

Ex.: a bicondicional $\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$ é tautologia. Logo, $\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$ é tautologia (**equivalência lógica**).

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

TEMA 2 – IMPLICAÇÃO LÓGICA

A definição do termo *implicação lógica* é o início do tema. Segundo o dicionário *Michaelis*, **implicar** significa: originar, produzir como consequência, ser causa de, como no exemplo: “uma filosofia definitiva implicaria a imobilidade do pensamento humano”, frase de Antero de Quental citada no dicionário.

Outra definição é que a **implicação lógica** entre $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ (duas fórmulas proposicionais quaisquer), nessa ordem, ocorre se, e somente se, a implicação (condicional →) entre elas gerar uma **tautologia**, lembrando que os símbolos → e ⇒ são distintos, pois **“→” condicional** é o resultado de uma **operação lógica**.

Ex.: considerando as proposições $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$, pode-se obter uma nova proposição expressa por $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$.

Já a **implicação lógica** estabelece uma **relação**.

Ex.: a **condicional** $\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ é tautologia. Logo, $\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{T}$ – o que é comprovado pela tabela-verdade.

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Em outras palavras, uma proposição composta $\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \ldots)$ **implica** uma proposição composta $\boldsymbol{Q}\ (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \ldots)$ se em **qualquer** linha da tabela-verdade de $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ **NÃO** ocorrer de $\boldsymbol{P}$ ser $\boldsymbol{V}$ (verdadeira) e $\boldsymbol{Q}$ ser $\boldsymbol{F}$ (falsa).

$P \Rightarrow Q$ ocorre **sempre** que os valores de seus conectivos forem **V** (verdadeiros).

Em síntese, a condição necessária e suficiente para que uma **implicação lógica** qualquer representada por $P \Rightarrow Q$ seja válida (verdadeira) é que a **proposição condicional** $P\ (p, q, r\ \dots) \rightarrow Q\ (p, q, r\ \dots)$ seja uma **tautologia**.

Ex.: verificar se $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ é válida. Para isso, basta construir a tabela-verdade da proposição $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ e observar o resultado.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

O conjunto-resposta da tabela-verdade da proposição $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma **tautologia**. Sendo assim, $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ **é válido** (**verdadeiro**).

Ex.: verificar se $p \rightarrow q \Rightarrow p \leftrightarrow q$ é válida. Para isso, basta construir a tabela-verdade da proposição $p \rightarrow q \rightarrow p \leftrightarrow q$ e observar o resultado.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q \rightarrow p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

O conjunto-resposta da tabela-verdade da proposição $p \rightarrow q \rightarrow p \leftrightarrow q$ **não** é **tautologia**. Sendo assim, $p \rightarrow q \Rightarrow p \leftrightarrow q$ **não é válido** (é **falso**).

2.1 Propriedades: implicações imediatas

Sejam: P: $P\ (p, q, r\ \dots)$, Q: $Q\ (p, q, r\ \dots)$ e R: $R\ (p, q, r\ \dots)$. As seguintes propriedades valem para as relações de implicação lógica:

- **reflexiva**: qualquer proposição P implica a própria proposição P $P \Rightarrow P$;
- transitiva: se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$.

Deve-se verificar a tabela-verdade para $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

p	q	r	$p \to q$	$\wedge$	$q \to r$	$\to$	$(p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

2.2 Implicações lógicas notáveis

São ora apresentadas algumas implicações notáveis. Elas serão muito úteis na aplicação do método dedutivo (em simplificações).

Adição (AD)

$p \Rightarrow p \vee q$

$q \Rightarrow p \vee q$

Ocorre com o conectivo *ou*. Se qualquer operando for verdadeiro, a disjunção é verdadeira. Ex.:

"Se eu vou, então eu vou ou ele vai."

"Se ele vai, então eu vou ou ele vai."

Simplificação (Simp)

$p \wedge q \Rightarrow p$

$p \wedge q \Rightarrow q$

Ocorre com o conectivo *e*. Quando a conjunção é verdadeira, ambos os operandos são verdadeiros. Ex.:

"Se eu vou e ele vai, então eu vou."

"Se eu vou e ele vai, então ele vai."

Simplificação disjuntiva (Simpd)

$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \Rightarrow p$

Quando as proposições ocorrem de forma contraditória com o conectivo *ou*. Ex.:

"Eu vou ou ele vai e eu vou ou ele não vai. Logo, eu vou."

Absorção (ABS)

$(p \to q) \Rightarrow (p \to p \wedge q)$

Dada uma condicional, pode-se deduzir uma outra condicional que tem como antecedente o mesmo antecedente da primeira condicional e, como consequente, a conjunção *e* das proposições que integram a primeira condicional. Ex.:

"Se eu vou, então ele vai. Logo, se e eu vou, então eu vou e ele vai."

Silogismo disjuntivo (SD)

$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \sim\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$

$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \sim\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p}$

Silogismo é um argumento constituído de três proposições declarativas que se conectam de tal modo que, com base nas duas primeiras, chamadas de *premissas*, é possível deduzir uma conclusão.

Se uma disjunção é verdadeira e um dos operandos é falso, o outro tem que ser verdadeiro. Ex.:

"Eu vou ou ele vai. Eu não vou. Logo, ele vai."

"Eu vou ou ele vai. Ele não vai. Logo, eu vou."

Silogismo hipotético (SH)

$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}) \Rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r})$

O silogismo hipotético se baseia na propriedade de transitividade da implicação. Se o consequente de uma implicação coincide com o antecedente de uma segunda implicação, então o consequente da primeira implica o consequente da segunda. Ex.:

"Se eu vou, então ele vai. Se ele vai, então ela vai. Logo, se eu vou, então ela vai."

***Modus ponens* (MP)**

$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$

Modus ponens, em latim, significa *a maneira que afirma afirmando*, que constitui a eliminação de uma implicação.

Se o antecedente de uma condicional é verdadeiro, então o consequente tem que ser verdadeiro também. Ex.:

"Se eu vou, ele vai. Eu vou. Logo, ele vai."

Não confundir com as falácias

Falácia da afirmação do consequente:

$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p}$

Ex.: "Se eu vou, ele vai. Ele vai. Logo, eu vou."

Falácia da negação do antecedente:

$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \sim\boldsymbol{p} \rightarrow \sim\boldsymbol{q}$

Ex.: "Se eu vou, ele vai. Eu não vou. Logo, ele não vai."

***Modus tollens* (MT)**

$(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

Modus tollens, em latim, significa *modo que nega*; nesse caso, a negação do consequente que nega o antecedente da implicação.

Contradizendo o consequente de uma condicional verdadeira, conclui-se pela contradição do antecedente. É também chamado de *contradição do consequente*. Ex.:

"Se eu vou, ele vai. Ele não vai. Logo, eu não vou."

Dilema construtivo (DC)

$(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r) \ \Rightarrow \ q \vee s$

Tem como base a regra do **MP**. É uma disjunção que contém dois antecedentes e dois consequentes. Sendo a disjunção dos precedentes verdadeira, conclui-se pela veracidade da disjunção dos consequentes. Ex.:

"Se eu vou, ele vai. Se fulano vai, sicrano vai. Eu vou ou fulano vai. Logo, ela vai ou sicrano vai."

Dilema destrutivo (DD)

$(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

O dilema destrutivo tem como base a regra do **MT**. É uma disjunção que contém a contradição dos dois consequentes de dois antecedentes. Sendo a disjunção das negações dos consequentes verdadeira, conclui-se pela veracidade da disjunção das negações dos antecedentes. Ex.:

"Se eu vou, ele vai. Se fulano vai, sicrano vai. Ele não vai ou sicrano não vai. Logo, eu não vou ou fulano não vai."

2.3 Proposições associadas a uma condicional

Dada a condicional $p \to q$, definem-se três proposições condicionais associadas a ela:

- Proposição recíproca de $p \to q$: $q \to p$
- Proposição inversa de $p \to q$: $\sim p \to \sim q$
- Proposição contrapositiva de $p \to q$: $\sim q \to \sim p$

Em relação às definições anteriores, as seguintes propriedades são válidas:

- A condicional $p \to q$ e a contrapositiva $\sim q \to \sim p$ são equivalentes.
- A recíproca $q \to p$ e a inversa $\sim p \to \sim q$ são equivalentes.

TEMA 3 – EQUIVALÊNCIA LÓGICA

A definição do termo *equivalência lógica* é o início do tema. Segundo o dicionário *Michaelis*, *equivalência* significa: igualdade de valor, correspondência.

Outra definição é: A **equivalência lógica** entre $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ (duas fórmulas proposicionais quaisquer), nessa ordem, ocorre se, e somente se, a bi-implicação (bicondicional ↔) entre elas gerar uma **tautologia**.

É importante lembrar que os símbolos ↔ e ⇔ são distintos, pois ↔ **bicondicional** é o resultado de uma **operação lógica**.

Já a **equivalência lógica** ⇔ estabelece uma **relação**.

Duas proposições são logicamente equivalentes (ou **equivalentes**) quando ambas apresentam os **mesmos valores lógicos**. Ou, ainda, são logicamente equivalentes (ou **equivalentes**) quando o conjunto-resposta de suas tabelas-verdade são iguais.

Em síntese, a condição necessária e suficiente para que uma **equivalência lógica** qualquer representada por $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ seja válida (verdadeira) é que a sua **proposição bicondicional** correspondente $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ for uma **tautologia**.

Ex.: a **bicondicional** $\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$ é uma equivalência. Logo, $\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$ é **tautologia**.

p	q	$\sim q$	$p \wedge\sim q$	$\sim (p \wedge\sim q)$	$p \rightarrow q$	$\sim(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

3.1 Propriedades: equivalências imediatas

Sejam: $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \dots)$, $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q}\,(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \dots)$ e $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \dots)$. As seguintes propriedades valem para as relações de equivalência lógica:

- **Reflexiva**: $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$.
- **Simétrica**: se $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$, então $\boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$.
- **Transitiva**: se $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}$, então $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}$.

Deve-se verificar tabela-verdade para $(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \leftrightarrow \boldsymbol{r}) \rightarrow (\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{r})$.

3.2 Equivalências lógicas notáveis

Ora são apresentadas algumas equivalências lógicas notáveis. Elas serão muito úteis na aplicação do método dedutivo (nas simplificações).

Dupla negação (DN)

$\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \sim(\sim\boldsymbol{p})$

A dupla negação de uma proposição equivale a sua afirmação. Ex.:

“Eu vou se, e somente se, for falso que eu não vou.”

“Eu vou se, e somente se, não for verdade que eu não vou.”

Equivalência tautológica (ET)

$\boldsymbol{p} \vee \sim\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{V})$ é uma tautologia. Ex.:

“Eu vou ou eu não vou se, e somente se, isso for verdade.”

Equivalência contraditória (EC)

$\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{C}\ (\boldsymbol{F})$ é uma contradição. Ex.:

“Eu vou e eu não vou se, e somente se, isso for falso.”

Idempotência (ID)

$\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{p}$ e

$\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}$

são uma tautologia. Ex.:

“Eu vou se, e somente se, eu vou e eu vou."

“Eu vou se, e somente se, eu vou ou eu vou."

Comutação (COM)

$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p})$

$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p})$

$(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{q} \leftrightarrow \boldsymbol{p})$

Operandos de disjunções, conjunções ou bicondicionais podem ser comutados para simplificação. Ex.:

“Eu vou ou ele vai se, e somente se, ele vai ou eu vou.”

“Eu vou e ele vai se, e somente se, ele vai e eu vou.”

“Eu vou se e somente se ele vai se, e somente se, ele vai se e somente se eu vou.”

Associação (Assoc)

$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$

Elementos de disjunções e conjunções podem ser agrupados. Ex.:

“Eu vou ou ele vai ou ela vai se, e somente se, eu vou ou ele vai ou ela vai.”

“Eu vou e ele vai e ela vai se, e somente se, eu vou e ele vai e ela vai.”

Distribuição (Dist)

$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$

$\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r})$

Uma disjunção pode se distribuir em uma conjunção. Uma conjunção pode se distribuir em uma disjunção. Ex.:

“Eu vou ou ele vai e ela vai se, se somente se, eu vou ou ele vai e eu vou ou ela vai.”

“Eu vou e ele vai ou ela vai se, se somente se, eu vou e ele vai ou eu vou e ela vai.”

Contraposição ou transposição (Trans)

$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{q} \rightarrow \sim\boldsymbol{p}$

$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{q} \leftrightarrow \sim\boldsymbol{p}$

$(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{p} \leftrightarrow \sim\boldsymbol{q})$

Os membros de uma condicional ou bicondicional podem ser transpostos se precedidos de uma negação. Ex.:

“Se eu vou, então ele vai se, se somente se, se ele não vai, então eu não vou.”

“Eu vou se e somente se ele vai se, e somente se, ele não vai se e somente se eu não vou.”

Implicação material (IMPL)

$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

Mostra-se a equivalência entre uma condicional e uma disjunção. Ex.:

“Se eu vou, então ele vai se, se somente se, se eu não vou ou ele vai.”

Equivalência (Equiv)

$(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\sim\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q})$

Mostra-se a equivalência entre uma bicondicional e uma disjunção. Ex.:

“Eu vou se e somente se ele vai se, e somente se, eu vou e ele vai ou eu não vou e ele não vai.”

Equivalência material (Equiv)

$(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p})$

Mostra-se a equivalência entre uma bicondicional e uma conjunção de condicionais. Ex.:

"Eu vou se e somente se ele vai se, e somente se, se eu vou, então ele vai e, se ele vai, então eu vou."

Exportação/importação (EXP/IMP)

$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})$

Uma parte do antecedente de uma condicional pode passar para o consequente, por meio da troca de conectivos. Ex.:

"Se eu vou e ele vai, então ela vai se, e somente se, se eu vou; então, se ele vai, então ela vai."

De Morgan (DM)

$\sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{p} \vee \sim\boldsymbol{q}$

$\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow \sim\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}$

É possível definir a conjunção com base na negação e na disjunção, ou a disjunção com base na negação e na conjunção. Ex.:

"É falso que eu vou e ele vai se, e somente se, se eu não ou ele não vai."

"É falso que eu vou ou ele vai se, e somente se, se eu não e ele não vai."

TEMA 4 – ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

Após se utilizar as definições e conceitos dos termos e símbolos que compõem a lógica proposicional e o cálculo das sentenças/proposições, permitindo a validação da resposta encontrada, além das propriedades semânticas básicas da lógica proposicional, que por sua vez possibilitam simplificar ainda mais a solução de complexos cálculos proposicionais, agora serão definidas as regras e métodos a serem usados na simplificação das proposições, com o objetivo principal de redução de código.

Segundo o dicionário *Michaelis*, *álgebra* é a parte da matemática elementar que generaliza a aritmética, introduzindo variáveis que representam os números e simplificando e resolvendo, por meio de fórmulas, problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos.

Contudo, mesmo com uma definição formal, o mais importante significado da álgebra é a coerência na escrita das proposições simples, pois, como define Tanenbaum (2013), autor de vários livros-referência em computação, **computador** é uma máquina para solucionar problemas por intermédio da execução de instruções (programas) escritas(os) em linguagem específica. O mesmo autor define **programa** como o que é responsável por transmitir as instruções. Isto é, uma sequência de instruções descritivas de execução.

Portanto, a álgebra proposicional é ferramenta muito importante, pois com ela pode-se operar sobre proposições, utilizando-se de implicações e equivalências **notáveis**.

Uma aplicação apresentada como exemplo é a simplificação de códigos computacionais, pois, quanto mais simples o código, mais simples ele será compreendido e assim poderá ser executado mais rapidamente.

Conceito definido e apresentado no início da disciplina, "**proposição**: sentenças declarativas afirmativas que tenham sentido em afirmar que sejam verdadeiras ou falsas".

A álgebra das proposições basicamente consiste em aplicar equivalências lógicas, agrupadas na forma de propriedades, nas diversas operações lógicas, com o intuito de modificar proposições compostas visando a sua simplificação.

Um conjunto de propriedades das operações lógicas é apresentado a seguir, em que **RE X** = **regras de equivalência**, onde *X* é o número da regra.

Negação

- **RE 1.** Dupla negação $\sim(\sim \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$

Conjunção

- **RE 2.** Idempotência $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$
- **RE 3.** Comutativa $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p}$
- **RE 4.** Associativa $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} + \wedge \boldsymbol{r})$
- **RE 5.** Elemento neutro (V) $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{V} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$
- **RE 6.** Elemento absorvente (F) $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{F} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$
- **RE 7.** Equivalência contraditória $\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$

Disjunção

- **RE 8.** Idempotência $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$
- **RE 9.** Comutativa $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}$
- **RE 10.** Associativa $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$
- **RE 11.** Elemento neutro (F) $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{F} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$
- **RE 12.** Elemento absorvente (V) $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{V} \Leftrightarrow \boldsymbol{V}$
- **RE 13.** Equivalência tautológica $\boldsymbol{p} \vee \sim\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{V}$

Conjunção e disjunção

- **RE 14.** Distributiva $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- **RE 15.** Absorção $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- **RE 16.** Leis de Morgan $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Condicional

- **RE 17.** Implicação material $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
- **RE 18.** Contraposição (transposição) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
- **RE 19.** Negação $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Bicondicional

- **RE 20.** Comutativa $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$
- **RE 21.** Associativa $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$
- **RE 22.** Equivalência $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
- **RE 23.** Equivalência material $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- **RE 24.** Contraposição (transposição) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim q \leftrightarrow \sim p \Leftrightarrow \sim p \leftrightarrow \sim q$
- **RE 25.** Negação $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

TEMA 5 – MÉTODO DEDUTIVO

O **método dedutivo** também é um método para demonstração de implicações e equivalências, utilizando propriedades, leis e regras.

No **método dedutivo**, as equivalências relativas desempenham um papel importante nas equivalências lógicas. As proposições (simples ou compostas) podem ser substituídas por P, Q, R, T, C, em que T é **tautologia** e C é **contradição**.

O método dedutivo utiliza as **implicações** e as **equivalências notáveis** apresentadas e é também chamado de **regras de inferência**.

A sua validade pode ser verificada pela construção de tabelas-verdade de cada argumento.

5.1 Validade de argumentos

O objetivo principal da lógica dedutiva é verificar se um argumento (premissas e conclusão) é estruturado de forma tal que, independentemente dos valores lógicos das proposições simples envolvidas, a veracidade das premissas implica sempre a veracidade da conclusão.

O argumento válido é denominado *silogismo*. É o argumento formado por uma ou mais premissas e sua respectiva conclusão.

O estudo dos argumentos lógicos verifica se eles são válidos ou inválidos. Um argumento é válido (ou ainda *legítimo* ou *bem construído*) quando sua conclusão é uma consequência obrigatória do seu conjunto de premissas.

As premissas e a conclusão podem ser visivelmente falsas (e até absurdas!) e o argumento, ainda assim, será considerado válido. Isso pode ocorrer porque, na lógica, o estudo dos argumentos não leva em conta a verdade ou a falsidade das premissas que compõem o argumento, mas tão somente a sua validade.

Assim, de uma forma geral, sendo $\boldsymbol{P_k}\colon \boldsymbol{P_k}\,(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \ldots)$, $\boldsymbol{k = 1, 2, n}$ e $\boldsymbol{Q}\colon \boldsymbol{Q}\ (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \ldots)$, a lógica (dedutiva) verifica se $\boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{P_n} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ é uma tautologia, isto é, se pode-se escrever $\boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{P_n} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ (implicação lógica), validando-se o argumento.

Portanto, a validade (ou não) de um argumento depende apenas da sua forma e não do seu conteúdo ou da verdade ou falsidade das proposições que o integram.

Até este ponto, foram utilizadas tabelas-verdade para fazer essa verificação. Entretanto, quando há muitas proposições compondo o argumento, o número de tabelas-verdade cresce exponencialmente ($\boldsymbol{2^n}$ linhas).

O método dedutivo fornece um procedimento que permite a validação de um argumento sem a necessidade de se construir tabelas-verdade. O método dedutivo se baseia em dois tipos básicos de formas de dedução: as **regras de inferência**, que nada mais são que implicações lógicas; e as **regras de equivalência**, que nada mais são que equivalências lógicas, já apresentadas agrupadas como propriedades dos conectivos na álgebra das proposições.

5.2 Aplicação

A seguir, a descrição de um processo para aplicar o método dedutivo na validação de um argumento.

Passo 1

Colocar o argumento na forma simbólica. Seja o seguinte argumento:

"Se os preços sobem, então a inflação é inevitável. Os preços sobem e a economia se descontrola. Logo, a inflação é inevitável."

Proposições simples:

$\boldsymbol{p}$: "Os preços sobem."

$\boldsymbol{q}$: "A inflação é inevitável."

$\boldsymbol{r}$: "A economia se descontrola."

Argumento:

$(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{q}$

Passo 2

Tabelar as premissas, numerando-as, e separá-las das deduções e da conclusão usando uma linha horizontal.

1. $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}$
2. $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}$

____

\- -

Passo 3

Iniciar o processo dedutivo aplicando as regras de dedução (inferência ou equivalência). Numerar cada dedução sequencialmente e indicar os operandos (enunciados precedentes: premissas ou deduções intermediárias) e a regra de dedução aplicada a eles para obter a dedução, conforme as duas tabelas de regras anteriores (de inferências e equivalências).

Indicar a conclusão com *C*.

1. $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}$		
2. $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}$	Operandos	Regra de dedução
3. $\boldsymbol{P}$	2	SIMP
C. $\boldsymbol{Q}$	1,3	MP

Ex.: simplificar $(\boldsymbol{p} \to (\sim\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q})$:

1. $(\boldsymbol{p} \to (\sim\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q})$

2. $\boldsymbol{p} \to (\sim\sim\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

3. $\sim\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

4. $(\sim\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}) \vee (\sim\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

5. $\boldsymbol{T} \vee (\sim\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

C. $\boldsymbol{T}$

A implicação do exemplo anterior representa uma **tautologia**, pois a propriedade distributiva gera $(\sim\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{p})$, ou seja, ela é obrigatoriamente forçada a gerar um valor verdadeiro. Ao juntar-se com o operador ∨ (*ou*), ela obriga a proposição formada a gerar um valor verdadeiro na resolução.

Caso a proposição fosse $\boldsymbol{T} \land (\sim\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q})$, então o valor lógico seria $(\sim\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q})$, pois o valor, mesmo que falso, juntado com $(\sim\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q})$, será $(\sim\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q})$.

Ex.: **aula prática 2**.

Demonstre que os argumentos são válidos, utilizando as tabelas-verdade e as regras de inferência. Se o programa é eficiente, ele executará rapidamente. O programa é eficiente ou tem um erro. O programa não executa rapidamente. Portanto, o programa tem um erro.

FINALIZANDO

Foram apresentadas nesta aula as implicações e as equivalências lógicas, cujas definições envolvem conceitos anteriormente definidos e apresentados: tabela-verdade, classificação de fórmulas da lógica proposicional (tautologia, contradição e contingência) e novos conectivos, como $\rightarrow$ (implicação/condicional); $\Rightarrow$ (implicação lógica); $\leftrightarrow$ (bi-implicação); $\Leftrightarrow$ (equivalência lógica).

Foram também apresentadas a álgebra das proposições e suas definições; as implicações notáveis, exemplificando-se sua utilização; e as principais equivalências (notáveis), concluindo-se com o método dedutivo e sua aplicação.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P. **Noções de lógica matemática**. São Paulo: Ed. PUC-SP, 2011.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE A. E. **Raciocínio lógico e lógica quantitativa**. Curitiba: InterSaberes, 2017. (Série Desmistificando a Matemática, 6).

COPPIN, B. **Inteligência artificial**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

LUGER, G. F. **Inteligência artificial**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

TANENBAUM, A. S. **Organização estruturada de computadores**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2013.