Axiomas são sentenças ditas verdadeiras, sem ser estabelecida dentro do sistema a validade da mesma.

Já Teoremas são as sentenças estabelecidas a partir dos axiomas, portanto, neste caso a validade da sentença deve ser verificada. Denomina-se de prova o processo de elaboração dos teoremas.

A elaboração de uma sentença baseada em outra é o processo de dedução e o elemento deduzido é o consequente. Isto leva a outro ponto, relacionado com o método de prova que trata as premissas de uma prova, onde as mesmas devem ser todas verdadeiras e através de demonstrações passo a passo chega-se à conclusão (ou consequente) verdadeira.

Quando é construída uma certa teoria seguindo estritamente estas definições, tem-se o método dedutivo.

Logo, as teorias elaboradas desta maneira são denominadas teorias dedutivas.

A Teoria Dedutiva relaciona a definição de uma teoria através da definição de axiomas e teoremas, sendo que a partir dos axiomas é possível comprovar que certas sentenças pertencem a esta teoria. Quando se têm sentenças que não podem ser deduzidas a partir dos axiomas, utiliza-se o método de prova por interpretação, que consiste em demonstrar que uma determinada sentença não é provada baseada nos axiomas de uma dada teoria, mas que apesar disso é verdadeira na Teoria.

Todos os teoremas provados através de um determinado sistema axiomático permanecem válidos para qualquer interpretação de um sistema.

Estas características do método dedutivo demonstram a possibilidade de "economizar" passos no raciocínio de um certo problema.

A aplicação do método dedutivo proporciona os resultados esperados apenas se todas definições e provas preenchem completamente suas tarefas, ou seja, se as definições trazem um significado de todos os termos definidos e se as provas convencem da correção (validade) de todos teoremas provados.

Observa-se a importância das regras da lógica serem aplicadas durante as provas, para assim, fornecer uma prova completa descrevendo todos os passos seguidos.

Texto extraído do artigo: “Um Editor de Provas para a Lógica Proposicional”. Escrito por Gleifer V. Alves, Graçaliz P. Dimuro e Antônio C. R. Costa da Escola de Informática - Universidade Católica de Pelotas.

Disponível em: http://www.gracalizdimuro.com/wp-content/uploads/2011/10/a171.pdf

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

A álgebra das proposições é utilizada para reduzir/modificar expressões compostas, ou seja, também são conhecidas como propriedades.

Como descobrir se a propriedade aplicada está correta?

Basta desenvolver a tabela verdade de todas as proposições empregadas na proposição composta, ou seja, todas as proposições devem ser equivalências lógicas. (símbolo $\Leftrightarrow$)

Sejam as proposições p, q, então, define-se:

p ^ (q v r) $\Leftrightarrow$ (p ^ q) v (p ^ r)

p v (q ^ r) $\Leftrightarrow$ (p v q) ^ (p v r)

~(p ^ q) $\Leftrightarrow$ ~p v ~q

~(p v q) $\Leftrightarrow$ ~p ^ ~q

P → q $\Leftrightarrow$ ~p v q

~(p → q) $\Leftrightarrow$ ~(~p v q) $\Leftrightarrow$ p ^ ~q

p ^ (q ^ r) $\Leftrightarrow$ (p ^ q) ^ r

p v (q v r) $\Leftrightarrow$ (p v q) v r

p ↔ q $\Leftrightarrow$ (p ↔ q) ^ (q → p)

~(p ↔ q) $\Leftrightarrow$ (p ^ ~q) v (~p ^ q)

p ↔ q $\Leftrightarrow$ (~p v q) ^ (~q v p)

MÉTODO DEDUTIVO

Problema:

O Número de linhas cresce muito rapidamente, à medida que aumenta o número de proposições simples envolvidas no argumento. Com 10 proposições a tabela terá 1024 linhas e com 11 são 2048.

O Método dedutivo também é um método para demonstração de implicações e equivalências, utilizando das propriedades, leis e regras.

No método dedutivo, as equivalências relativas desempenham um papel importante nas equivalências lógicas. As proposições (simples ou compostas) podem ser substituídas por P,Q,R,T,C(Tautológica, Contradição).

Exemplo 1:

(p → (~p → q) ⇔

p → (~~p v q) ⇔

~p v (p v q) ⇔

(~p v p) v (~p v q) ⇔

T v (~p v q) ⇔

T

A implicação acima representa uma tautologia, pois a propriedade distributiva gera (~p v p), ou seja, ela é obrigatoriamente forçada a gerar um valor verdadeiro.

Se p:f, então p:v. Se p:v, então p:v.

Ao juntar-se com o operador v (OU), ela obriga a proposição formada a gerar um valor verdadeiro na resolução.

Caso a proposição fosse T ^ (~p v q), então, o valor lógico é igual a (~p v q), pois, o valor mesmo que falso, juntado com (~p v q) será (~p v q).

Exemplo 2: Mostrar equivalências: (p → q) ^ (p → ~q)

(p → q) ^ (p → ~q) ⇔

(~p v q) ^ (~p v ~q) ⇔

(~p ^ ~p) v (q v ~q) ⇔

~p v C ⇔

~p

Exemplo 3: Regra da Simplificação

Simplifique a Implicação: P ^ Q ⇒ P

P ^ Q → P	CONDICIONAL
~(P ^ Q) v P	De MORGAN
(~P v ~Q) v P	ASSOCIATIVIDADE
(~P v P) v ~Q	TAUTOLOGIA
V v ~Q	
V	

Exemplo 4: Modus Tollens

$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$

$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q$	CONDICIONAL
$(\sim P \vee Q) \wedge \sim Q$	DISTRIBUTIVIDADE
$(\sim P \vee \sim Q) \vee (Q \wedge \sim Q)$	CONTRADIÇÃO
$(\sim P \vee \sim Q)$	SIMPLIFICAÇÃO

$\sim P$

$\sim P \Rightarrow \sim P$

Exemplo 5: Modus Tollens

$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$

$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q$	CONDICIONAL
$(\sim P \vee Q) \wedge \sim Q$	DISTRIBUTIVIDADE
$(\sim P \vee \sim Q) \vee (Q \wedge \sim Q)$	CONTRADIÇÃO

$(\sim P \vee \sim Q)$

$(\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim P$

$\sim(\sim P \vee \sim Q) \vee \sim P$

$P \vee Q \vee \sim P$

$P \vee \sim P \vee Q$

$V \vee Q$

Argumentos Válidos Fundamentais

- Os argumentos válidos abaixo, são conhecidos como argumentos fundamentais:

  (a) Adição (AD)

  (i) $p \Rightarrow p \vee q$ (ii) $p \Rightarrow q \vee p$;

  (b) Simplificação (SIMP)

  (i) $p \wedge q \Rightarrow p$ (ii) $p \wedge q \Rightarrow q$;

  (c) Conjunção (CONJ)

  (i) $p, q \Rightarrow p \wedge q$ (ii) $p, q \Rightarrow q \wedge p$;

  (d) Absorção (ABS)

  $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \wedge q)$;

  (e) Modus ponens (MP)

  $p \rightarrow q, p \Rightarrow q$;

  (f) Modus tollens (MT)

  $p \rightarrow q, \sim q \Rightarrow \sim p$;

Argumentos Válidos Fundamentais

(g) Silogismo disjuntivo (SD)

(i) $p \vee q, \sim p \Rightarrow q$ (ii) $p \vee q, \sim q \Rightarrow p$;

(h) Silogismo hipotético (SH)

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$;

(i) Dilema construtivo (DC)

$p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \Rightarrow q \vee s$;

(j) Dilema destrutivo (DD)

$p \rightarrow q, r \rightarrow s, \sim q \vee \sim s \Rightarrow \sim p \vee \sim r$;

A validade dos dez argumentos pode ser verificada (faça isso) através da construção das tabelas-verdade de cada argumento. Os dez argumentos válidos fundamentais acima são também chamados de “regras de inferência”.

Podemos mostrar a validade de um argumento através da Construção de tabelas-verdade ou utilizando as regras de inferência.

Exemplo: Mostre que os argumentos abaixo são válidos, utilizando tabela-verdade e as regras de inferência:

(a)

- Se o programa é eficiente, ele executará rapidamente.
- O programa é eficiente ou tem um erro.
- O programa não executa rapidamente.

Portanto o programa tem um erro;

- Inicialmente, vamos traduzir o argumento para linguagem simbólica. Consideremos as proposições simples p: O programa é eficiente, q: O programa executa rápido e r: O programa tem um erro.
- Temos então, na linguagem simbólica, as premissas $p \rightarrow q$, $p \vee r$, $\sim q$ e a conclusão r, ou seja,

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q) \Rightarrow r$$

Validade mediante tabela-verdade

$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q) \Rightarrow r$							
p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \vee r$	$\sim q$		r
V	V	V	V	V	F		V
V	V	F	V	V	F		F
V	F	V	F	V	V		V
V	F	F	F	V	V		F
F	V	V	V	V	F		V
F	V	F	V	F	F		F
F	F	V	V	V	V		V
F	F	F	V	F	V		F

Validade mediante regras de inferência

As premissas são

(1) $p \rightarrow q$

(2) $p \vee r$

(3) $\sim q$

---

(4) $\sim p$ 1,3 (MT), ou seja, modus tollens nas premissas (1) e (3)

(5) r 2,4 (SD), ou seja, silogismo disjuntivo nas premissas (2) e (4);

Portanto, podemos concluir a proposição "r" das premissas (1), (2) e (3), ou seja, o argumento é válido.

(b)

- Se Graham está no campo de golfe, então Harvey está de serviço no hospital e Ives deve ter mudado sua política.
- Harvey não está de serviço no hospital.

  Portanto, Graham não está no campo de golfe;

Inicialmente, vamos traduzir o argumento para linguagem simbólica.

Consideremos as proposições simples

p: Graham está no campo de golfe, q: Harvey está de serviço no hospital, e r: Ives mudou sua política.

Temos então, na linguagem simbólica, as premissas $p \rightarrow (q \wedge r)$, $\sim q$ e a conclusão $\sim p$, ou seja,

$$(p \rightarrow (q \wedge r) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

Validade mediante tabela-verdade

$(p \rightarrow (q \land r) \land \sim q \Rightarrow \sim p$							
p	q	r	$q \land r$	$p \rightarrow (q \land r)$	~q		~p
V	V	V	V	V	F		F
V	V	F	F	F	F		F
V	F	V	F	F	V		F
V	F	F	F	F	V		F
F	V	V	V	V	F		V
F	V	F	F	V	F		V
F	F	V	F	V	V		V
F	F	F	F	V	V		V

Validade mediante regras de inferência

As premissas são

(1) $p \rightarrow q \land R$

(2) $\sim q$

(3) $\sim q \lor \sim r$ 2 (AD), ou seja, adição na premissa (2);

---

(4) $\sim(q \land r)$ 3 (De Morgan), ou seja, lei de De Morgan da disjunção na premissa (3);

(5) $\sim p$ 1,4 (MT), ou seja, modus tollens nas premissas (1) e (4)

Portanto podemos concluir a proposição "~p" das premissas (1) e (2), ou seja, o argumento é válido