RACIOCÍNIO LÓGICO

AULA 3

Prof. André Roberto Guerra

CONVERSA INICIAL

O roteiro proposto contempla, nesta aula, as fórmulas proposicionais especiais.

Serão apresentadas as propriedades semânticas básicas da lógica proposicional (LP): tautologia, contradição e contingência, concluindo com as relações entre as propriedades semânticas.

Definidos os termos e símbolos que compõem a lógica proposicional e o cálculo das sentenças (proposições), permitindo a validação da resposta encontrada, tem-se agora as propriedades semânticas básicas da lógica proposicional (LP), que permitem simplificar ainda mais a solução de complexos cálculos proposicionais.

Objetivos de acordo com a taxonomia de Bloom revisada	Propriedades semânticas Tautologia, contradição e contingência
	Objetivos Específicos

TEMA 1 – FÓRMULAS PROPOSICIONAIS ESPECIAIS

1.1 Interpretação de uma fórmula

Uma interpretação de uma fórmula é o valor lógico resultante de seu cálculo considerando um conjunto de valores lógicos para as suas proposições constituintes.

Se a fórmula for representada por $\boldsymbol{P}$, sua interpretação é dada por $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{P}]$.

Ex.: interpretação de uma fórmula.

Seja a fórmula $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$: $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$.

São possíveis então $\mathbf{2^3} = \mathbf{8}$ interpretações para esta fórmula:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})] &= \boldsymbol{V}\\
\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V},\boldsymbol{F})] &= \boldsymbol{V}\\
\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{F},\boldsymbol{V})] &= \boldsymbol{V}\\
\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{F},\boldsymbol{F})] &= \boldsymbol{F}\\
\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})] &= \boldsymbol{V}\\
\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{V},\boldsymbol{F})] &= \boldsymbol{F}\\
\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F},\boldsymbol{V})] &= \boldsymbol{V}
\end{aligned}
$$

$I[A(F,F,F)] = F$

p	q	r	$p \wedge q \vee r$
V	V	V	V V
V	V	F	V V
V	F	V	F V
V	F	F	F F
F	V	V	F V
F	V	F	F F
F	F	V	F V
F	F	F	F F

TEMA 2 – TAUTOLOGIA

Tendo como base a definição inicial, *tautologia* é toda proposição composta cujo *conjunto resposta* da *tabela-verdade* é formado em sua totalidade por V (verdadeiro).

Em outros termos, é toda proposição composta $\boldsymbol{P(p,q,r,\ldots)}$ cujo valor lógico é sempre V(verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes (variáveis) $\boldsymbol{p,q,r,\ldots}$

Uma fórmula proposicional $\boldsymbol{A}$ é uma tautologia (proposição tautológica/ proposição logicamente verdadeira), se, e somente se, o único valor lógico resultante de sua interpretação é o $\boldsymbol{V}$ (verdadeiro), independente dos valores lógicos dos componentes da fórmula. $\boldsymbol{I[A] = V}$"

É imediato que as proposições $\boldsymbol{p \rightarrow p}$ e $\boldsymbol{p \leftrightarrow p}$ são tautológicas (princípio de identidade para as proposições)

Ex.: A proposição "$\boldsymbol{\sim(p \wedge \sim p)}$" (princípio da não contradição) é tautologia, conforme ilustra a sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Portanto, dizer que *uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro*

A proposição "$\boldsymbol{p \vee \sim p}$" (princípio do terceiro excluído) é tautologia, como comprovado na tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$

V	**F**	**V**
F	**V**	**V**

Portanto, o conceito de que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é válido.

A proposição $\boldsymbol{P(p,q)}: \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \vee \sim\boldsymbol{p} \vee \sim\boldsymbol{q}$ é uma tautologia, pois $\boldsymbol{I[P] = V}$ sempre

p	**q**	$\boldsymbol{p \wedge q \vee \sim p \vee \sim q}$
V	**V**	**V V F V F**
V	**F**	**F F F V V**
F	**V**	**F V V V F**
F	**F**	**F V V V V**

Uma fórmula A é satisfazível, se, e somente se, os valores do seu conjunto resposta são V (verdade). Portanto, tautologia também é satisfazível.

TEMA 3 – CONTRADIÇÃO

Seguindo o princípio da definição básica, *contradição* é toda proposição composta cujo conjunto resposta da tabela-verdade é formado em sua totalidade por F (falso).

Em outros termos, é toda proposição composta $\boldsymbol{P(p,q,r,\dots)}$ cujo valor lógico é sempre F (falso), quaisquer sejam os valores lógicos das proposições simples componentes (variáveis) $\boldsymbol{p,q,r,}\dots$

Uma fórmula proposicional $\boldsymbol{A}$ é uma contradição, (proposição contraválida / proposição logicamente falsa), se, e somente se, o único valor lógico resultante de sua interpretação é o $\boldsymbol{F}$ (falso), independente dos valores lógicos dos componentes da fórmula. Para toda interpretação $\boldsymbol{I[A] = F}$

Como a tautologia é sempre verdadeira (V), a negação de uma tautologia é sempre falsa (F), ou seja, é uma contradição, e vice-versa.

Ex.: a proposição "$p \wedge \sim p$"

p	**~p**	$\boldsymbol{(p \wedge \sim p)}$
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**

Portanto, dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

A proposição $P(p,q): (p \rightarrow q) \wedge p \wedge \sim q$ é uma contradição, pois $I[P] = F$ como comprovado na tabela-verdade:

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \sim q$
V	V	V V F F
V	F	F F F V
F	V	V F F F
F	F	V F F V

Uma fórmula A é *insatisfazível* (insatisfatível) ou *falsificável*, se, e somente se, os valores do seu conjunto resposta são F (falsos). A contradição também é falsificável.

TEMA 4 – CONTINGÊNCIA

Concluindo as definições das propriedades semânticas básicas da Lógica Proposicional (LP), uma fórmula A é uma contingência se, e somente se, os valores do seu conjunto resposta são diferentes entre si

Em outros termos, é toda proposição composta $P(p,q,r,\ldots)$ cujo valor lógico é alternado entre V (verdadeiro) e F (falso), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes (variáveis) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \ldots$

Uma fórmula proposicional $\boldsymbol{A}$ é uma contingência (proposição contingente / indeterminação) se, e somente se, entre os valores lógicos resultantes de sua interpretação existe pelo menos um $\boldsymbol{F}$ (falso) e ou $\boldsymbol{V}$ (verdadeiro).

Pelo menos uma $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{V}$ e ao menos uma $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{F}$

Simplificando, *contingência* é toda proposição composta cujo conjunto resposta:

- não é tautologia e;
- não é contradição

A proposição $P(p,q): (p \rightarrow q) \wedge q \vee p$ é uma contingência, como comprovado na tabela-verdade

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \vee p$
V	V	V F F V
V	F	F F V V

F	V	V	F F F
F	F	V	V V V

TEMA 5 – PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL

5.1 Fórmulas proposicionais especiais – Propriedades semânticas

A semântica é o estudo da relação entre as expressões e o que elas representam (significado).

Na lógica proposicional, está associada à atribuição de valores lógicos (V ou F) a fórmulas proposicionais, que podem ter significados na análise lógica.

Nesse sentido, as seguintes fórmulas especiais constituem também propriedades semânticas em relação a uma fórmula proposicional $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p1}, \boldsymbol{p2}, \ldots, \boldsymbol{pn})$.

5.1.1 Tautologia

Qualquer interpretação da fórmula proposicional é verdade, $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{V}$ para qualquer combinação de valores lógicos para $(\boldsymbol{p1}, \boldsymbol{p2}, \ldots, \boldsymbol{pn})$. É uma fórmula **válida**.

5.1.2 Contradição

Qualquer interpretação da fórmula proposicional é falsa, $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{F}$ para qualquer combinação de valores lógicos para $(\boldsymbol{p1}, \boldsymbol{p2}, \ldots, \boldsymbol{pn})$. **Não é** uma fórmula **válida**.

5.1.3 Contingência

Há interpretações verdadeiras e falsas da fórmula proposicional, $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{V}$ para algumas combinações de valores lógicos de $(\boldsymbol{p1}, \boldsymbol{p2}, \ldots, \boldsymbol{pn})$ e $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{F}$ para outras combinações.

Não é uma fórmula **válida**.

5.1.4 Satisfazibilidade

Uma fórmula proposicional é satisfazível (ou satisfatível / consistente) se existe ao menos uma interpretação que seja V (verdadeira), ou seja, $\boldsymbol{I[P] = V}$ para ao menos uma combinação de valores lógicos para $(\boldsymbol{p1}, \boldsymbol{p2}, \ldots, \boldsymbol{pn})$.

Consequentemente, uma fórmula proposicional é insatisfazível quando qualquer interpretação é falsa $\boldsymbol{I[P] = F}$.

Se uma fórmula é satisfazível em qualquer interpretação, então ela é uma tautologia.

5.1.5 Falseabilidade

Uma fórmula proposicional é falsificável (insatisfazível ou insatisfatível / inconsistente) se existe ao menos uma interpretação $\boldsymbol{F}$ (falsa), ou seja, $\boldsymbol{I[P] = F}$ para ao menos uma combinação de valores lógicos para $(\boldsymbol{p1}, \boldsymbol{p2}, \ldots, \boldsymbol{pn})$.

Se uma fórmula é insatisfazível em qualquer interpretação, então ela é uma contradição.

5.2 Relações entre as propriedades semânticas

- Toda fórmula válida (tautologia) é satisfazível
- Toda fórmula contraditória (insatisfazível) é falsificável
- Uma fórmula não pode ser satisfazível e contraditória
- Uma fórmula não pode ser uma tautologia e falsificável
- Se A é uma tautologia, então $\sim A$ é contraditória
- Se A é contraditória, então, $\sim A$ é uma tautologia
- Se A é satisfazível, então $\sim A$ é falsificável, e vice-versa

Há fórmulas que são tanto satisfazíveis quanto falsificáveis, i.e., são *contingências* ou *fórmulas indeterminadas*

A classificação de fórmulas extensas não é um processo trivial.

Um dos grandes desafios da computação é encontrar métodos (algoritmos) eficientes para decidir se uma fórmula é:

- satisfazível – falsificável
- contradição – tautologia

5.3 Validade e invalidade

Os métodos de dedução apresentados são capazes de mostrar a validade de um argumento, através do cálculo proposicional, que, com base nas premissas, produz uma série de conclusões parciais, até chegar à conclusão final do argumento.

Esse processo, no entanto, não serve para provar a invalidade de um argumento; de fato, se, durante o processo de dedução, não chegar à conclusão, não é possível inferir que não é possível obter tal conclusão.

Portanto, para mostrar a invalidade de um argumento, é necessário outro método. Um argumento é, na verdade, uma operação de condicionamento.

Se o argumento for válido, essa condicional é tautológica, isto é, é verdadeira para qualquer combinação possível de valores lógicos das proposições que constituem o argumento; se, no entanto, existir pelo menos uma combinação de valores lógicos das proposições que torne a condicional falsa, o argumento é inválido.

A condição para uma condicional ser falsa é: quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Mas, em um argumento, o antecedente é uma conjunção de premissas, e o consequente é a conclusão; então, para que o antecedente seja verdadeiro, é necessário que todas as premissas sejam verdadeiras, e para que o consequente seja falso, é necessário que a conclusão seja falsa.

Então, para mostrar que um argumento é inválido, é suficiente encontrar uma combinação de valores lógicos para as proposições simples envolvidas, de forma que torne cada premissa verdadeira, e a conclusão falsa.

Ex.: Considere o seguinte argumento:

“Se José comprar ações e o mercado baixar, ele perderá seu dinheiro.

O mercado não vai baixar.

Logo, ou José compra ações ou perderá seu dinheiro.”

Para que a especificação seja *válida (consistente)*, deve ser *satisfazível* em alguma interpretação.

Sejam as proposições simples:

p: “José comprar ações”

q: “O mercado baixar”

$\boldsymbol{r}$: “José perder dinheiro”

Aplicando à especificação acima, simbolicamente, o argumento fica representado por:

“**Se** José comprar ações **e** o mercado baixar, ele perderá seu dinheiro” $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}$

“O mercado **não** vai baixar” $\sim\boldsymbol{q}$

“Logo, José compra ações **ou** perderá seu dinheiro.” $\vdash \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}$

A proposição correspondente a esta especificação é, portanto, a seguinte:

$$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r} \ \wedge \ \sim\boldsymbol{q} \ \vdash \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}$$

A tabela verdade para esta proposição é mostrada a seguir.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}$		$\wedge$	$\sim\boldsymbol{q}$	$\Rightarrow$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F

Quando $\boldsymbol{VL}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{VL}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{VL}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V}$, tem-se o abaixo.

“**Se** José comprar ações **e** o mercado baixar, ele perderá seu dinheiro”

$$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \rightarrow \boldsymbol{V} \ = \boldsymbol{V}$$

“O mercado **não** vai baixar”

$$\sim\boldsymbol{q} = \sim\boldsymbol{F} \ = \boldsymbol{V}$$

“Logo, José compra ações **ou** perderá seu dinheiro.” $\vdash \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}$

Isto é, todas as frases formam proposições $\boldsymbol{V}$ (verdadeiras), de forma que não há contradição entre elas. Assim, essa especificação é *consistente*.

Um outro exemplo. Considere o argumento:

“Ou estudo ou trabalho ou vou à praia;

se estudo sou aprovado;

não trabalho.

Logo, sou aprovado.”

Para que a especificação seja *válida (consistente)*, deve ser *satisfazível* em alguma interpretação.

Sejam as proposições simples:

$\boldsymbol{p}$: “estudo”

$\boldsymbol{q}$: “trabalho”

$\boldsymbol{r}$: “vou à praia”

$\boldsymbol{s}$: “sou aprovado”

Aplicando à especificação acima, simbolicamente, o argumento fica representado por:

“estudo **ou** trabalho **ou** vou à praia” $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$

“**se** estudo sou aprovado” $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{s}$

“**não** trabalho” $\sim\boldsymbol{q}$

“Logo, sou aprovado” $\vdash \boldsymbol{s}$

A proposição correspondente a esta especificação é, portanto, a seguinte:

$$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{s} \wedge \sim\boldsymbol{q} \ \vdash \boldsymbol{s}$$

A tabela verdade para essa proposição é mostrada a seguir.

p	q	r	s	$p \vee q \vee r$		$\wedge$	$p \rightarrow s$	$\wedge$	$\sim q$	$\Rightarrow$	s
V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	V	F	V	V	F	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F

Quando $\boldsymbol{VL(p) = F}$ e $\boldsymbol{VL(q) = F}$ e $\boldsymbol{VL(r) = V}$ e $\boldsymbol{VL(s) = F}$, tem-se como a seguir.

“estudo **ou** trabalho **ou** vou à praia” $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{V} \ = \boldsymbol{V}$

"**se** estudo sou aprovado" $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{s}$

$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{s} = \boldsymbol{F} \rightarrow \boldsymbol{F} \ = \boldsymbol{V}$

"**não** trabalho" $\sim\boldsymbol{q}$

$\sim\boldsymbol{q} = \sim\boldsymbol{F} \ = \boldsymbol{V}$

"Logo, sou aprovado" $\vdash \boldsymbol{s}$

$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{F} \ = \boldsymbol{F}$

Isto é, na linha destacada há uma combinação de valores que satisfazem a condição de **invalidade**. O argumento é, portanto, **inválido**.

Se não for possível atribuir valores verdade aos enunciados simples dos componentes de argumento, de modo que suas premissas se tornem verdadeiras e sua conclusão falsa, então o argumento é válido.

Ex.: Satisfazibilidade e consistência de especificação.

Seja a seguinte especificação:

"Uma mensagem é armazenada no *buffer* ou ela é transmitida para um *site* vizinho. Uma mensagem não é armazenada no *buffer*. Se a mensagem é armazenada no *buffer*, então é transmitida para um site vizinho."

Para que a especificação seja *consistente*, deve ser *satisfazível* em alguma interpretação.

Sejam as proposições simples:

$\boldsymbol{p}$: "Uma mensagem é armazenada no buffer."

$\boldsymbol{q}$: "Uma mensagem é transmitida para um site vizinho."

Aplicando à especificação acima, tem-se o abaixo.

"Uma mensagem é armazenada no *buffer* **ou** ela é transmitida para um *site* vizinho." $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

"Uma mensagem **não** é armazenada no *buffer*." $\sim\boldsymbol{p}$

"**Se** a mensagem é armazenada no buffer, **então** é transmitida para um site vizinho" $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$

A proposição correspondente a esta especificação é, portanto, a seguinte:

$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \sim\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$.

A tabela verdade para esta proposição é mostrada abaixo.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$	$\wedge$	$\sim\boldsymbol{p}$	$\wedge$	$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$

V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V

Quando $VL(p) = F$ e $VL(q) = V$, tem-se o abaixo.

"Uma mensagem não é armazenada no *buffer* ou ela é transmitida para um *site* vizinho."

$p \vee q = F \vee V = V$

"Uma mensagem é armazenada no *buffer*."

$\sim p = \sim F = V$

"Se a mensagem não é armazenada no *buffer*, então é transmitida para um *site* vizinho"

$p \rightarrow q = F \rightarrow V = V$

Ou seja, todas as frases formam proposições V (verdadeiras), de forma que não há contradição entre elas.

Assim, essa especificação é *consistente*.

Ex.: Se adicionar a seguinte proposição: "Uma mensagem não é transmitida para um site vizinho." ao exemplo anterior, ela continuaria consistente?

"Uma mensagem **não** é transmitida para um *site* vizinho."

$\sim q$

A proposição correspondente a esta especificação é, portanto, a seguinte:

$(p \vee q) \wedge \sim p \wedge (p \rightarrow q) \wedge \sim q$

A tabela verdade para esta proposição é mostrada a seguir.

p	q	$(p \vee q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\wedge$	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$\sim q$
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	V

Ou seja, em nenhuma das frases são formadas proposições V (verdadeiras), de forma que *não há* tautologia entre elas.

Assim, essa especificação é *inconsistente*.

Resumindo, temos as seguintes situações na dedução de um argumento:

Um argumento é válido quando:

- o conjunto de premissas é contraditório.
- a conclusão é uma tautologia.
- a conclusão pode ser deduzida das premissas.

Um argumento é inválido quando:

- existe pelo menos um conjunto de valores para as proposições simples que tornam as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

Portanto, dado um argumento, para provar a sua validade ou invalidade, devemos chegar a uma das conclusões acima.

FINALIZANDO

Nesta aula foram apresentados os conteúdos que descrevem as Propriedades semânticas básicas da lógica proposicional (LP):

- Tautologia
- Contradição
- Contingência
- Satisfazível
- Falsificável

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P. **Noções de lógica matemática**. São Paulo: PUCSP, 2011.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE A. E. **Raciocínio lógico e lógica quantitativa**. Curitiba: InterSaberes, 2017. (Série Desmistificando a Matemática, 6).

COPPIN, B. **Inteligência artificial**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

LUGER, G. F. **Inteligência artificial**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2013.