Engenharia da Computação

Matemática Computacional 1

Luis Gonzaga de Paulo

Conversa Inicial

A história dos números antecede e se mistura com a história da escrita e a necessidade de contar, de expressar quantidades e, posteriormente, de controlar e fazer negócios. Desde a pré-história foi registrada a ocorrência de maneiras rudimentares de expressar quantidades e registrar grandezas, tais como rebanhos de animais, colheitas e membros de um grupo ou família.

Essa necessidade evoluiu com a civilização e com a urbanização. Com o advento do computador e a era da informação, conhecer os números, os novos sistemas de numeração que foram incorporados ao cotidiano e as operações de conversão entre esses sistemas passou a ser um imperativo para os que atuam nessa indústria. São esses assuntos que se pretende apresentar e desenvolver nesta aula.

Para começar, acesse o *link* a seguir e assista a um interessante vídeo que mostra de forma didática e bem-humorada a história dos números: https://www.youtube.com/watch?v=ZWZKJb06CTU

Contextualizando

O computador nos acompanha diariamente. Apesar de, muitas vezes, não nos darmos conta disso, seu funcionamento depende de inúmeros cálculos, que são realizados a cada solicitação enviada. Sabendo disso, é comum surgirem dúvidas, como:

- Que tipo de cálculo o computador é capaz de fazer e como ele os realiza?
- Como ele armazena, trata e diferencia os números, as letras, os símbolos gráficos, os sons e as imagens?

Certamente você já ouvir falar do bit e do byte e provavelmente sabe descrevê-los ou falar a que estão relacionados. Mas o que são, realmente? Quais os limites que seu uso impõe ao computador, em termos de processamento e armazenamento de informações?

Essas questões nos levam a procurar respostas que podem ser encontradas a partir do estudo dos Sistemas de Numeração, que é o objeto desta aula.

No vídeo disponível no material *on-line*, o professor Luis faz uma contextualização a respeito dos sistemas numéricos. Confira!

Pesquise

Tema 1 – Sistema de Numeração Decimal

O sistema de numeração decimal é o mais conhecido e utilizado, devido certamente ao fato de utilizarmos os dez dedos das mãos para aprender a contar e a fazer contas. Sua origem remonta à pré-história, e o registro dos números antecede à origem da escrita.

A representação dos números como conhecemos é denominada indo-arábica (ou hindu-árabe), pois foi desenvolvida pelos Hindus e levada ao ocidente (Europa) pelos Árabes, por volta do séc. VII DC.

O sistema de numeração decimal é o sistema numérico padrão para a representação de quantidades e o mais comum na comunicação entre as pessoas. A base do sistema (β) é 10, o que define o conjunto de símbolos – algarismos ou números – utilizado pelo sistema é composto dos seguintes símbolos: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

O sistema é **posicional**, isto é, o valor real de um algarismo é proporcional à sua posição, que é contada da direita para a esquerda e começa de zero. A posição representa, de fato, um expoente da base do sistema (β = 10). Veja a seguir um exemplo de representação decimal:

Sistema de Numeração Decimal

$$(153)_{10} = (1x10^2) + (5x10^1) + (3x10^0)$$

$$(32{,}37)_{10} = (3x10^1) + (2x10^0) + (3x10^{-1}) + (7x10^{-2})$$

Nesses exemplos, nota-se a mudança do valor de cada dígito em função da posição que ocupa: No número 153, por exemplo:

- **1**: 1 unidade na posição 2 representa o valor 1 x 10^2, isto é, 100 ou uma centena.
- **5**: 5 unidades na posição 1 representam o valor 5 x 10^1, isto é, 50.
- **3**: 3 unidades na posição 0 representam o valor 3 x 10^0, isto é, 3.

Uma curiosidade sobre o sistema de numeração decimal diz respeito ao formato dos dígitos. Originalmente, segundo consta, no desenho de cada número é encontrado a respectiva quantidade de ângulos. O desenho do número 1, por exemplo, tem apenas um ângulo:

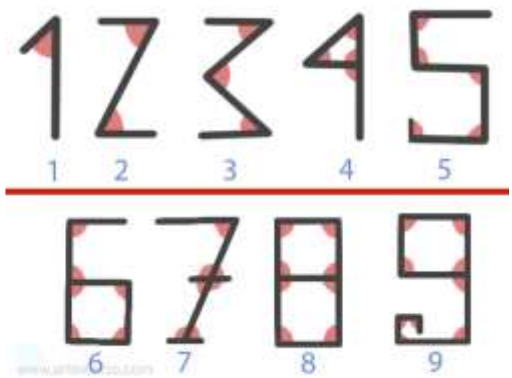


Imagem disponível em: <http://arteevicio.com/curiosidade/a-forma-dos-numeros/>.

No vídeo disponível no material *on-line*, o professor Luis vai aprofundar um pouco mais o estudo a respeito do Sistema de Numeração Decimal. Acompanhe com atenção!

Tema 2 – Sistema de Numeração Octal

O Sistema de Numeração Octal é mais adaptado à computação, tendo sido utilizado largamente como alternativa ao Sistema de Numeração Binário durante as primeiras eras da computação digital. Por isso é comum verificar seu uso em sistemas de computação e linguagens de programação das primeiras gerações.

Ele foi, durante muito tempo, o padrão para a programação em linguagem de máquina e também para a comunicação entre computadores, tanto na forma serial quanto na forma paralela, utilizando os oito bits (razão da sua base octal). Foi sendo paulatinamente substituído pelo sistema hexadecimal.

Acessando o *link* a seguir você confere um vídeo didático e esclarecedor sobre esse sistema e sua organização. Confira!

https://youtu.be/M-kt7jhPzW8

A base do sistema (β) é 8, que também define o conjunto de símbolos, algarismos ou números utilizados pelo sistema: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Ele também é posicional, isto é, o valor real de um algarismo é proporcional à sua posição, que, como já sabemos, é contada da direita para a esquerda e começa no zero.

A posição representa o expoente da base do sistema (β = 8). Usando o mesmo exemplo do Sistema de Numeração Decimal, temos:

Sistema de Numeração Octal

$$(153)_8 = (1x8^2)+(5x8^1)+(3x8^0) = 64 + 40 + 3 = (107)_{10};$$

$$(32{,}37)_8 = (3x8^1)+ (2x8^0)+(3x8^{-1})+(7x8^{-2}) \rightarrow$$
$$24 + 2 + 0{,}375 + 0{,}109375 = (26{,}484375)_{10}$$

Tema 3 – Sistema de Numeração Binário

O Sistema de Numeração Binário é o padrão dos computadores, devido à vinculação direta com o funcionamento dos circuitos eletrônicos digitais, que utilizam a representação de sinais digitais: ligado/desligado, aceso/apagado, presente/ausente, alto/baixo, verdadeiro/falso etc.

É utilizado para o armazenamento, a manipulação e a troca de informações entre computadores e dispositivos digitais, pois permite que a informação seja validada e conferida, uma vez que os valores são apenas dois e bem distintos. A base do sistema (β) é 2, com um conjunto reduzido de símbolos: N = {0, 1}.

O sistema binário, como os demais já vistos, também é posicional, isto é, o valor real de um algarismo é proporcional à sua posição, que é contada da direita para a esquerda e começa de zero. A posição representa, assim, um expoente da base do sistema (β = 2). Veja o exemplo:

Representação do sistema binário

$$(1001)_2 = (1x2^3) + (0x2^2) + (0x2^1) + (1x2^0) \rightarrow 8+0+0+1 = (9)_{10}$$

$$(10{,}11)_2 = (1x2^1) + (0x2^0) + (1x2^{-1}) + (1x2^{-2}) \rightarrow 2+0+0{,}5+0{,}25 = (2{,}75)_{10}$$

Importante:

- O nome "bit" vem da contração de *Binary digIT* e corresponde à menor quantidade de informação que um computador digital consegue tratar: é um único dígito binário. Portanto, o valor do bit só pode ser 0 (zero) ou 1 (um);
- Já o byte é um conjunto de oito bits, também chamado de octeto ou palavra (*word*), os quais podem representar 256 valores no intervalo de 00000000_2 (ou 0_{10}) a 11111111_2 (ou 255_{10});
- No uso de expoentes negativos, sabemos que o valor de um número elevado a expoente negativo é o inverso deste número elevado ao mesmo expoente positivo, como segue:

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

No vídeo disponível no material *on-line*, o professor Luis vai falar mais sobre o Sistema de Numeração Binário. Confira com atenção!

Tema 4 – Sistema de Numeração Hexadecimal

O Sistema de Numeração Hexadecimal é uma alternativa ao sistema binário e, por isso, o mais utilizado nas linguagens de programação em geral, especialmente nas de primeira a terceira geração. Também é utilizado para as referências a endereços de memória, endereços de rede, identificação de cor e de caracteres em interfaces para aplicações *web* etc.

A base do sistema (β) é 16, com um conjunto estendido de símbolos: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Os valores em hexadecimal geralmente são identificados com 0xNNNN, NNNNh ou #NNNN, onde "N" é um dígito hexadecimal.

Confira a seguir os dígitos alfabéticos do Sistema Hexadecimal.

$$A_{16} = 10_{10} \quad B_{16} = 11_{10} \quad C_{16} = 12_{10}$$
$$D_{16} = 13_{10} \quad E_{16} = 14_{10} \quad F_{16} = 15_{10}$$

O sistema hexadecimal, assim como os demais já vistos, também é posicional: o valor real de um algarismo é proporcional à sua posição, que é contada da direita para a esquerda e começa no zero. A posição representa um expoente da base do sistema (β = 16), utilizada para a conversão para o Sistema Decimal, como no exemplo:

Representação do Sistema Hexadecimal

$$(\mathrm{CF5})_{16} = (\mathrm{C}x16^2) + (\mathrm{F}x16^1) + (5x16^0) \rightarrow$$
$$3072 + 240 + 5 = 3317_{10};$$

$$(32{,}37)_{16} = (3x16^1) + (2x16^0) + (3x16^{-1}) + (7x16^{-2}) \rightarrow$$
$$48 + 2 + 0{,}1875 + 0{,}02734375 = 50{,}21484375_{10}$$

No vídeo disponível no material *on-line*, o professor Luis vai falar um pouco mais sobre o Sistema de Numeração Hexadecimal. Acompanhe com atenção!

Tema 5 – Conversão de base

Como utilizamos normalmente o sistema decimal para expressarmos valores e quantidade, é comum haver a necessidade de:

- Converter números expressos em outros sistemas para o sistema decimal;
- Converter números do sistema decimal para outros sistemas;
- Converter números expressos nos demais sistemas entre si para a realização de operações ou identificação de representações.

Mas como realizar a conversão de uma base β qualquer para outra base β? É isso que veremos nesse tema!

O processo de conversão está sujeito às limitações da representação e do cálculo e às restrições do ambiente computacional, o que pode ocasionar erros, resultados inexatos e imprecisões.

A conversão de uma base β qualquer para a base 10 é feita pela fatoração do número, como já foi mostrado na apresentação dos sistemas de numeração e demonstrado a seguir:

Fatoração de um número na conversão para a base 10

$$\boxed{(abc,de)_\beta = (a.\beta^2 + b.\beta^1 + c.\beta^0 + d.\beta^{-1} + e.\beta^{-2})_{10}}$$

Onde ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** e ***e*** são dígitos do sistema de base β, e o expoentes de β correspondem às posições de cada dígito, partindo do zero.

Convém ressaltar que as posições à esquerda da vírgula aumentam à medida que o dígito se desloca à esquerda, partindo de 0 (zero), e as posições à direita da vírgula diminuem à medida em que o dígito se desloca à direita, sendo o valor do expoente negativo. Veja nos exemplos a seguir:

Conversão de uma base β para a base 10

$$(101{,}1)_2 = (1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 + 1.2^{-1})_{10} = (5{,}5)_{10}$$

$$(27{,}4)_8 = (2.8^1 + 7.8^0 + 4.8^{-1})_{10} = (23{,}5)_{10}$$

$$(1A,B)_{16} = (1.16^1 + 10.16^0 + 11.16^{-1})_{10} = (26{,}6875)_{10}$$

A conversão da base 10 para uma base β é feita da seguinte forma:

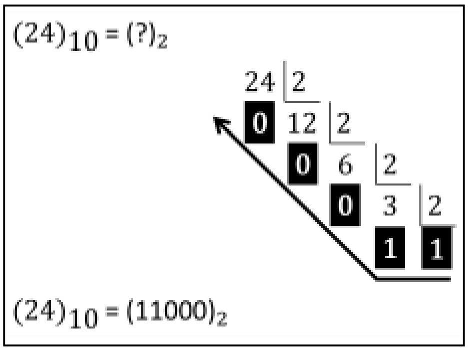
- **Parte inteira:** através de divisões sucessivas do número na base 10 pela base β até que o quociente seja menor que β.
- **Parte decimal:** através de multiplicações sucessivas até que se obtenha uma unidade (um) inteira, sendo que a cada multiplicação é descartada a parte inteira.

A seguir, você vai conferir, por meio de exemplos, como realizar essas conversões, começando pela parte inteira. Acompanhe com atenção!

Conversão decimal para binário

O número 24 na base 10 (decimal) representa qual número na base 2 (binária)?

Para resolver essa questão, é necessário dividir o número 24 pela base 2 (para qual se quer converter) até chegar a um valor que não seja mais divisível por 2. O resultado será formado unindo o último quociente ao resto de cada uma das demais divisões, como você pode ver a seguir:



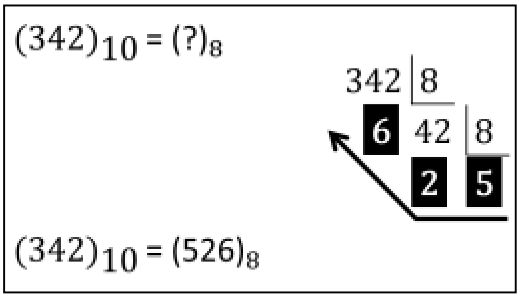
Ou seja, 24 decimal representa 11000 binário.

Lembrando que se lê um um zero zero zero, não onze mil.

Conversão de decimal para octal

O número 342 na base 10 (decimal) representa qual número na base 8 (octal)?

Para encontrar a solução, é necessário dividir o número 342 por 8 até chegar em um resultado que não seja mais divisível por oito. Da mesma forma, o número na base octal é formado unindo o último quociente ao resto das demais operações, na ordem em que está a seta:



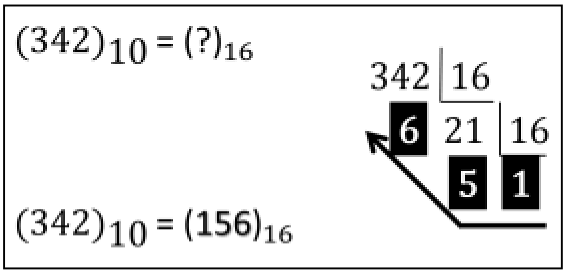
Ou seja, 342 decimal representa 526 octal.

Lembrando que se lê cinco dois meia, não quinhentos e vinte e seis

Conversão de decimal para hexadecimal

O número 342 na base decimal representa qual número na base hexadecimal?

Novamente, deve-se dividir o número 342 pela base, que no caso é 16, até chegar a um valor que não seja mais divisível pela base. Feito isso, é preciso unir o último quociente ao resto das demais operações (na ordem em que está a seta) para encontrar o resultado na base 16:



Ou seja, 342 decimal representa 156 hexadecimal.

Lembrando que se lê um cinco meia, não cento e cinquenta e seis.

Conversão da parte decimal

Para fazer a conversão da parte decimal (<1) de um número da base 10 para uma base "β" qualquer, é necessário realizar multiplicações sucessivas da parte decimal por "β" até a obtenção de uma unidade (1), **removendo a parte inteira a cada iteração**.

O número 0,828125 na base decimal representa qual número na base binária?

Para encontrar o resultado, é necessário multiplicar esse número por 2, que é a base para qual ele será convertido, até que se chegue ao número 1.

$$
\begin{aligned}
&(0{,}828125)_{10} = (?)_2 \\
&0{,}828125 \times 2 = \mathbf{1}{,}65625 \\
&0{,}65625 \times 2 = \mathbf{1}{,}3125 \\
&0{,}3125 \times 2 = \mathbf{0}{,}625 \\
&0{,}625 \times 2 = \mathbf{1}{,}25 \\
&0{,}25 \times 2 = \mathbf{0}{,}50 \\
&0{,}50 \times 2 = \mathbf{1} \\
&(0{,}828125)_{10} = (\mathbf{0{,}110101})_2
\end{aligned}
$$

Repare que a cada nova multiplicação, foi ignorado o número inteiro, considerando apenas o que está à direita da vírgula.

Para formar o número na base binária, deve-se unir os números inteiros do resultado de cada uma das operações, na ordem que indica a seta.

$$
\begin{aligned}
&(0{,}828125)_{10} = (?)_2 \\
&0{,}828125 \times 2 = \mathbf{1}{,}65625 \\
&0{,}65625 \times 2 = \mathbf{1}{,}3125 \\
&0{,}3125 \times 2 = \mathbf{0}{,}625 \\
&0{,}625 \times 2 = \mathbf{1}{,}25 \\
&0{,}25 \times 2 = \mathbf{0}{,}50 \\
&0{,}50 \times 2 = \mathbf{1} \\
&(0{,}828125)_{10} = (\mathbf{0{,}110101})_2
\end{aligned}
$$

Como o resultado é um número decimal, é necessário inserir o zero antes da vírgula.

Ou seja, 0,828125 decimal é igual a 0,110101 binário.

Conversão direta

Pode-se optar por fazer a conversão pela substituição direta em quatro situações:

Octal ⇆ Binário   Hexadecimal ⇆ Binário

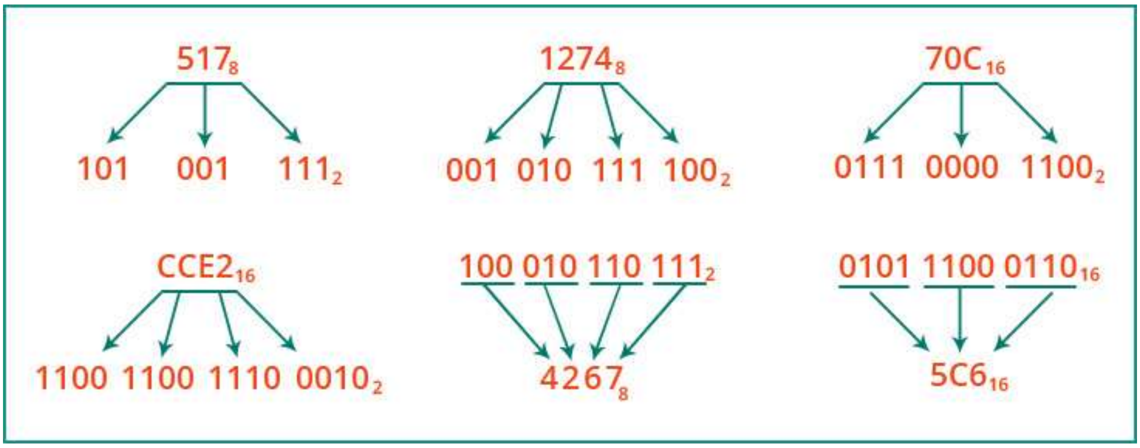
Isso se deve ao fato de que as bases desses sistemas (oito para octal e dezesseis para hexadecimal) são potências de dois e podem ser representadas por conjuntos de dígitos de tamanho determinado, isto é, três dígitos binários para cada dígito octal (já que $2^3 = 8$) e quatro dígitos binários para cada dígito hexadecimal (já que $2^4 = 16$).

3 dígitos binários – 1 dígito octal
↓
$2^3 = 8$

4 dígitos binários – 1 dígito hexadecimal
↓
$2^4 = 16$

Nos exemplos a seguir, cada digito de forma individual foi representado na base para qual se quer converter:

Conversão direta entre binário e octal / hexadecimal



Acessando o material on-line você confere um vídeo em que o professor Luis traz mais informações sobre a conversão de base, inclusive por meio da resolução de alguns exemplos. Confira!

Tema 6 – Erros

No processo de conversão entre sistemas podem ocorrer erros, os quais são classificados basicamente em dois tipos:

- **De precisão**: decorrem da limitação da quantidade de dígitos para representar o número, a qual é geralmente predefinida principalmente em função da utilização do sistema binário. Esta ocorrência é típica no caso das variáveis em programas de computador.
- **De exatidão:** decorrem da aproximação, do arredondamento ou da ocorrência de dízimas periódicas, as quais requerem uma interrupção abrupta ou forçada da representação.

Embora possa parecer a mesma coisa, a diferença entre esses dois tipos de erros implica consequências distintas no ambiente computacional.

O limite de precisão implica erros de truncamento e afeta especialmente os números irracionais, com o número π (Pi), que geralmente é expresso com duas casas decimais, como 3,14. Entretanto as calculadoras em geral o representam com oito decimais, no valor 3,1415926, o qual é satisfatório para maioria dos cálculos.

Em cálculos mais complexos, pode-se utilizar uma maior precisão, como a representação do Pi com cinquenta e duas casas decimais, por exemplo:

$$\pi \cong 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058$$

Precisões maiores são obtidas com algoritmos computacionais específicos, havendo relatos do cálculo de Pi com trilhões de dígitos.

Os erros podem ser expressos de duas formas, como você confere na próxima página:

O erro **absoluto** é a diferença entre o valor real e a forma na qual foi expresso. Tomando o exemplo dado do valor de Pi, e denominando *x* o valor de Pi com oito casas decimais e $\bar{x}$ o valor de Pi com dois decimais, pode-se expressar o erro absoluto pela fórmula:

$$EA_x = x - \bar{x}$$

Neste caso: 3,1415926 - 3.14 = 0,0015926

É claro que se trata apenas de um exemplo, pois o valor real de Pi é algo ainda desconhecido.

Já o **erro relativo** é a razão entre o erro absoluto *EA* e o valor real *x*, isto é:

$$ER_x = \frac{EA_x}{x}$$

Ou também:

$$ER_x = \frac{x - \bar{x}}{x}$$

Com os valores do exemplo dado:

$$ER_x = \frac{3{,}1415926 - 3.14}{3{,}1415926} \longrightarrow ER_x = 5 \times 10^{-4} \text{ ou } 0{,}05\%$$

Trocando Ideias

Agora pense a respeito e discuta as seguintes questões com seus colegas de turma, através do fórum “Sistemas de Numeração”:

1. Qual dos sistemas apresentados é o mais importante e por quê?
2. Dos processos de conversão de base apresentados, qual é o mais difícil? E qual é o mais fácil? Você conhece outras formas de fazer isso? Então compartilhe!
3. Já foi possível imaginar como o computador realiza determinadas operações? Quais?

Dê sua opinião e veja o que seus colegas têm a dizer, esse é o momento de compartilhar dúvidas e conhecimento, não deixe de participar!

Na Prática

O conhecimento dos sistemas numéricos é essencial para a utilização dos recursos computacionais e também para o entendimento do funcionamento dos computadores. Embora grande parte dos processos apresentados sejam feitos por meio do *software* e do *hardware*, o conhecimento acerca deles e o domínio das técnicas apresentadas é de grande valia para o desempenho das atividades na área de tecnologia da informação.

No vídeo disponível no material *on-line*, o professor Luis fala um pouco mais sobre a aplicabilidade do que vimos até aqui. Confira!

Uma necessidade constante das atividades ligadas às ciências da computação é o uso de determinados valores em sistemas de numeração distintos. Tendo o domínio deles, é possível agilizar e simplificar os processos de conversão.

Sabendo disso, propomos a você que elabore uma tabela de conversão dos valores em decimal para os demais sistemas. Na página a seguir você confere ela pronta, com os valores predefinidos. Basta que você faça a impressão e encontre os valores solicitados!

Tabela de Conversão entre Sistemas

DECIMAL	BINÁRIO	OCTAL	HEXADECIMAL
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
10^{-6}			
10^{-5}			
10^{-4}			
10^{-3}			
10^{-2}			
10^{-1}			
10			
10^{2}			
10^{3}			
10^{4}			
10^{5}			
10^{6}			
10^{7}			
10^{8}			
10^{9}			

Síntese

Chegamos ao fim de nossa primeira aula!

Nesse encontro foram apresentados os principais sistemas de numeração utilizados no ambiente computacional: o decimal, utilizado diariamente pela população em geral, o binário (padrão dos computadores digitais), o octal e o hexadecimal. Vimos também os métodos de conversão entre os sistemas e o que fazer quando ocorrem erros durante esse processo.

Estamos apenas começando, então é importante que você não fique com dúvidas. Reveja os pontos mais importantes e faça a atividade proposta. Somente o treino leva à perfeição, não é mesmo?

Antes de finalizar, que tal ver um vídeo com os comentários finais do professor Luis? Acesse o material *on-line* e confira!

Referências

MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P., ROCHA, A. **Tópicos de Matemática Aplicada**. Curitiba: Intersaberes, 2013.

LEITE, A. E.; CASTANHEIRA, N. P. **Teoria dos Números e Teoria dos Conjuntos**. Curitiba: Intersaberes, 2014.

GUIMARÃES, C. H. C. **Sistemas de Numeração** – Aplicação em Computadores Digitais. Rio de Janeiro: Interciência, 2014.

WIKIPEDIA. Sistema de Numeração. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_numeração>. Acesso em: 25 jan. 2016.

WIKIPEDIA. Teoria dos erros. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_erros>. Acesso em: 25 jan. 2016.