Construção de Tabelas Verdade.

Vimos que, dada uma expressão proposicional, e dados os valores lógicos das proposições simples que a compõe, podemos, com a ordem de precedência, calcular o valor lógico da expressão dada; no entanto, estaremos interessados, muitas vezes, no conjunto de valores lógicos que a expressão pode assumir, para quaisquer valores lógicos das proposições componentes.

Vejamos um exemplo. Considere a expressão proposicional

$\mathbf{p \vee q \rightarrow p \wedge q}$

Anteriormente, construímos uma pequena tabela para determinar o valor lógico da expressão, a partir dos valores lógicos dos componentes; agora, vamos ampliar aquela tabela, para incluir cada combinação dos valores lógicos dos componentes.

Na expressão, existem apenas duas proposições componentes, p e q; como cada uma pode ser verdadeira ou falsa, temos quatro possibilidades: p e q ambas verdadeiras, p verdadeira e q falsa, p falsa e q verdadeira, ou, finalmente, p e q ambas falsas.

Tendo obtido também a ordem de precedência das operações, nossa tabela assume a forma:

p	**q**		$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{p \wedge q}$	$\mathbf{p \vee q \rightarrow p \wedge q}$
V	V		V	V	V
V	F		V	F	F
F	V		V	F	F
F	F		F	F	V

Uma tabela como essa, na qual são apresentados todos os valores verdade possíveis de uma proposição composta, para cada combinação dos valores verdade das proposições componentes, é chamada Tabela Verdade da proposição composta.

Cada linha da Tabela corresponde a uma possível combinação dos valores lógicos das proposições componentes; como são dois os valores lógicos, existem, para n componentes, 2^n combinações possíveis. Portanto, a Tabela Verdade de uma expressão proposicional tem 2^n linhas, alem do cabeçalho.

Observe que a Tabela Verdade possui dois tipos de colunas: colunas para as proposições componentes (onde são distribuídos os valores V e F de forma a incluir cada possível combinação) e colunas para as operações (onde os valores V e F são obtidos pela definição das operações); assim, se a expressão possui n componentes e m operações, a Tabela terá m + n colunas.

Para determinar unicamente a Tabela Verdade, podemos estabelecer certas convenções para sua construção:

A. Para as colunas:
   1. Dispor as proposições componentes em ordem alfabética.
   2. Dispor as operações na ordem de precedência determinada pelo Algoritmo Ordem de Precedência (Com Parênteses, se for o caso).

B. Para as linhas
   1. Alternar V e F para a coluna do último componente.
   2. Alternar V V e F F para a coluna do penúltimo componente.
   3. Alternar V V V V e F F F F para a coluna do antepenúltimo componente.
   4. Prosseguir dessa forma, se houver mais componentes, sempre dobrando o numero de V's e F's para cada coluna à esquerda.

Para exemplificar, considere a expressão proposicional,

$(p \rightarrow q) \vee \neg ((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$

A precedência das operações é dada por:

$$\underset{1}{(p \rightarrow q)} \underset{6}{\vee} \underset{5}{\neg} ((p \underset{2}{\leftrightarrow} r) \underset{4}{\rightarrow} \underset{3}{\neg} r)$$

A Tabela Verdade assume o aspecto:

p	q	r		p→q	p↔r	¬r	(p↔r) →¬r	¬((p ↔ r)→¬r)	(p → q)∨¬ ((p ↔ r) → ¬r)
V	V	V		V	V	F	F	V	V
V	V	F		V	F	V	V	F	V
V	F	V		F	V	F	F	V	V
V	F	F		F	F	V	V	F	F
F	V	V		V	F	F	V	F	V
F	V	F		V	V	V	V	F	V
F	F	V		V	F	F	V	F	V
F	F	F		V	V	V	V	F	V

A atribuição de valores lógicos aos componentes simples de uma proposição composta é chamada uma interpretação dessa proposição. Assim, uma proposição com n componentes simples distintos admitirá 2^n interpretações.

4. Equivalência Lógica.

De acordo com os valores lógicos que as proposições compostas assumem, em suas possíveis interpretações, elas podem ser classificadas em vários tipos:

- se a expressão assume sempre o valor V, em qualquer interpretação, é chamada uma **tautologia**, ou uma expressão válida; são exemplos de tautologias:

  $p \vee \neg p$
  $\neg (p \wedge \neg p)$

- se a expressão assume o valor V em alguma interpretação, é dita satisfatível, ou consistente; evidentemente, as tautologias são exemplos de expressões satisfatíveis; outros exemplos são:

  $p \rightarrow \neg p$ (assume V quando p é falso)
  $p \vee q$ (assume V quando p ou q for verdadeiro)

- se a expressão assume sempre o valor F, em qualquer interpretação, é chamada uma contradição, ou uma expressão insatisfatível, ou inconsistente. São exemplos de contradições:

  $p \wedge \neg p$
  $\neg (p \vee \neg p)$

- se a expressão assume o valor F em alguma interpretação, é chamada uma expressão inválida; claramente, as contradições são, também, expressões inválidas; outras expressões inválidas são:

  $p \wedge q$ (assume F quando p for falso)
  $\neg p$ (assume F quando p for verdadeiro)

Alguns autores atribuem o nome genérico de contingências, ou expressões contingentes, às expressões satisfatíveis e inválidas.
Uma expressão proposicional da forma bicondicional $p \leftrightarrow q$ que é, também, uma tautologia, é chamada uma equivalência (ou equivalência lógica). As proposições p e q são ditas equivalentes, e escrevemos $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$.

Por exemplo, a expressão $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ é uma equivalência. Veja sua Tabela Verdade:

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{\neg q}$	$\mathbf{\neg p}$	$\mathbf{\neg q \rightarrow \neg p}$	$\mathbf{(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p}$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Escrevemos, então, $\mathbf{p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p}$

Decorre imediatamente da definição que, se duas proposições são equivalentes, então possuem a mesma Tabela Verdade, e, reciprocamente, se duas proposições têm a mesma Tabela Verdade, são equivalentes. De fato, uma bicondicional é V se e somente se seus componentes têm os mesmos valores lógicos; como a expressão também é uma tautologia, é V em todos os casos; isto é, seus componentes têm o mesmo valor lógico em todos os casos, ou seja, têm a mesma Tabela Verdade.

Decorre ainda da definição que todas as tautologias, bem como todas as contradições, são equivalentes entre si.

Podemos mostrar também que a relação de equivalência possui as propriedades:

Reflexiva: $\mathbf{p \Leftrightarrow p}$
Simétrica: **Se** $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ **então** $\mathbf{q \Leftrightarrow p}$
Transitiva: **Se** $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ **e** $\mathbf{q \Leftrightarrow r}$ **então** $\mathbf{p \Leftrightarrow r}$

Listamos abaixo algumas das equivalência mais importantes (e úteis) da Lógica; cada uma delas pode ser provada, simplesmente mostrando que a bicondicional correspondente é uma tautologia, bastando, para isso, construir sua Tabela Verdade.

Em termos textuais, duas proposições são equivalentes quando traduzem a mesma idéia, diferindo apenas a forma de apresentar essa idéia. Apresentamos abaixo algumas das principais eqüivalências da Lógica, exemplificando textualmente algumas:

Leis da Comutatividade
$\mathbf{p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p}$
$\mathbf{p \vee q \Leftrightarrow q \vee p}$

Exemplo: “Fui ao teatro ou ao cinema” eqüivale a “Fui ao cinema ou ao teatro”

Leis da Associatividade
$\mathbf{(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)}$
$\mathbf{(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)}$

Leis da Distributividade
$\mathbf{p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$
$\mathbf{p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$

Leis de De Morgan
$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Exemplo: “É falso que João tenha ido ao cinema e ao teatro” eqüivale a “Ou João não foi ao cinema ou não foi ao teatro”

Leis da Idempotência
$p \wedge p \Leftrightarrow p$
$p \vee p \Leftrightarrow p$

Lei da Dupla Negação
$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$

Lei da Condicional
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Exemplo: “Se continuar chovendo, o rio vai transbordar” eqüivale a “Ou pára de chover ou o rio vai transbordar”

Lei da Bicondicional
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Exemplo: “Um numero é divisível por 10 se e somente se terminar por zero” eqüivale a “Se um numero terminar por zero, então é múltiplo de 10, e, se for múltiplo de 10, então termina por zero”; também eqüivale a “Ou o número é múltiplo de 10 e termina em zero, ou não é múltiplo de 10 e não termina em zero”

Lei da Contraposição
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Exemplo: “Se João estudar, será aprovado” eqüivale a “Se João não estudar, não será aprovado”

Lei da Absorção
$p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

Lei de Clavius
$\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

Lei da Refutação por Absurdo
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

Lei do Dilema
$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \Leftrightarrow q$

Exemplo: “Se eu for aprovado, vou viajar, e, se não for, também vou” eqüivale a “vou viajar”

Lei da Demonstração por Absurdo (onde F é uma contradição)
$p \wedge \neg q \rightarrow F \Leftrightarrow p \rightarrow q$

Lei de Exportação - Importação
$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r$

O conceito de equivalência nos permite mostrar ainda que são suficientes as operações de negação e uma das duas, conjunção ou disjunção, para representar qualquer expressão proposicional. Para isso, necessitamos das seguintes eqüivalências:

a) Eliminando o bicondicional: $\mathbf{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)}$
b) Eliminando o condicional: $\mathbf{p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q}$
c) Escrevendo a disjunção em termos de conjunção: $\mathbf{p \vee q \Leftrightarrow \neg (\neg p \wedge \neg q)}$
d) Escrevendo a conjunção em termos de disjunção: $\mathbf{p \wedge q \Leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)}$

Veja o seguinte exemplo: escrever a proposição $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg p$ em termos de negação e disjunção:

Eliminando o condicional:

$$\mathbf{\neg (p \leftrightarrow q) \vee \neg p}$$

Eliminando o bicondicional:

$$\mathbf{\neg [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee \neg p}$$

Escrevendo a conjunção em termos de disjunção:

$$\mathbf{\neg [\neg (\neg p \vee \neg q) \vee \neg (p \vee q)] \vee \neg p}$$

5. Inferência Lógica.

Uma inferência lógica, ou, simplesmente uma inferência, é uma tautologia da forma $p \rightarrow q$; a proposição p é chamada antecedente, e q, conseqüente da implicação. As inferências lógicas, ou regras de inferência, são representadas por $\mathbf{p \Rightarrow q}$.

Da definição decorre imediatamente que $\mathbf{p \Rightarrow q}$, se e somente se, o conseqüente q assumir o valor lógico V, sempre que o antecedente p assumir esse valor.

De fato, para que a condicional seja verdadeira, essa condição é necessária, pois, se o conseqüente for falso com o antecedente verdadeiro, a condicional não é verdadeira. Por outro lado, a condição também é suficiente, pois, quando o antecedente é falso, a condicional é verdadeira, não importando o valor lógico do conseqüente.

As regras de inferência são, na verdade, formas válidas de raciocínio, isto é, são formas que nos permitem concluir o conseqüente, uma vez que consideremos o antecedente verdadeiro; em termos textuais, costumamos utilizar o termo “logo” (ou seus sinônimos: portanto, em conseqüência, etc) para caracterizar as Regras de Inferência; a expressão $p \Rightarrow q$ pode então ser lida: p; logo, q.

É possível mostrar que as regras de inferência têm as seguintes propriedades:

Reflexiva: $\mathbf{p \Rightarrow p}$
Transitiva: **Se** $\mathbf{p \Rightarrow q}$ **e** $\mathbf{q \Rightarrow r}$**, então** $\mathbf{p \Rightarrow r}$

Listamos abaixo algumas das regras de inferência mais importantes da Lógica; da mesma forma que no caso das eqüivalências, cada uma delas pode ser provada, bastando para isso construir a Tabela Verdade da condicional correspondente; se a condicional for tautológica, será uma inferência.

Vamos exemplificar com a regra de inferência conhecida por Modus Ponens:

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

São exemplos de regras de inferência:

Regra da Adição
$p \Rightarrow p \vee q$

Exemplo: "Vou ao cinema; logo vou ao cinema ou ao teatro"

Regra da Simplificação
$p \wedge q \Rightarrow p$

Exemplo: "Fui ao cinema e ao teatro; logo fui ao cinema"

Regra da Simplificação Disjuntiva
$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Rightarrow p$

Exemplo: "Ou estudo ou trabalho; ou estudo ou não trabalho; logo, estudo"

Regra da Absorção
$p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \wedge q)$

Exemplo: "Se trabalho, ganho dinheiro; logo, se trabalho, trabalho e ganho dinheiro"

Regra do Silogismo Hipotético (ou Condicional)
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

Exemplo: "Se trabalho, ganho dinheiro, e, se ganho dinheiro, vou viajar; logo, se trabalho, vou viajar"

Regra do Silogismo Disjuntivo (ou Alternativo)
$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

Exemplo: "Ou trabalho ou estudo; não trabalho; logo, estudo"

Regra do Silogismo Conjuntivo (ou Incompatibilidade)
$\neg (p \wedge q) \wedge q \Rightarrow \neg p$

Exemplo: "É falso que eu estudo e trabalho; eu trabalho; logo, não estudo"

Dilema Construtivo
$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$

Exemplo: "Se vou à festa, fico cansado; se vejo televisão, durmo; ou vou à festa ou fico vendo televisão; logo, ou fico cansado ou durmo"

Dilema Destrutivo
$(p \to q) \land (r \to s) \land (\neg q \lor \neg s) \Rightarrow \neg p \lor \neg r$

Exemplo: “Se vou à festa, fico cansado; se vejo televisão, durmo; ou não fico cansado ou não vou dormir; logo, ou não vou à festa ou não vejo televisão”

Regra da Inconsistência (de uma contradição se conclui qualquer proposição)
$(p \land \neg p) \Rightarrow q$

Exemplo: “O avião está voando; o avião não está voando; logo, eu sou o Rei da Inglaterra”

Modus Ponens
$(p \to q) \land p \Rightarrow q$

Exemplo: “Se ganhar na Loteria, fico rico; ganhei na Loteria; logo, fiquei rico”

Modus Tollens
$(p \to q) \land \neg q \Rightarrow \neg p$

Exemplo: “Se ganhar na Loteria, fico rico; não fiquei rico; logo não ganhei na Loteria”

Regra da Atenuação
$p \to q \Rightarrow p \to q \lor r$

Exemplo: “Se eu ganhar na Loteria, fico rico; logo, se eu ganhar na Loteria, fico rico e vou viajar”

Regra da Retorsão
$\neg p \to p \Rightarrow p$

Exemplo: “Se eu não trabalhar, trabalho; logo, trabalho”.