

Guía

Lógica Proposicional

Tema III: Cuantificadores

1.7.2. CUANTIFICADORES

Los cuantificadores permiten afirmaciones sobre colecciones enteras de objetos en lugar de tener que enumerar los objetos por su nombre.

1.7.2.1. CUANTIFICADOR UNIVERSAL.

En una gran mayoría de situaciones matemáticas es interesante considerar la posibilidad de que el conjunto de verdad de una función proposicional sea la totalidad de los elementos del **conjunto universo**, llamado también **conjunto referencial** (que se simboliza por ***U*** o ***R*** respectivamente), este se simboliza como $\forall x$ que se lee: “*para todo x*”, “*todo x*”, “*para cada x*” o “*cada x*” y se llama **cuantificador universal**. En este caso la proposición se simboliza como $(\forall x \in U) P(x)$, que se lee: “para todo *x* elemento de ***U***, se cumple *P(x)*”, y si el dominio de la variable está sobreentendido, se escribe simplemente $(\forall x) P(x)$, que se puede leer como: “*para todo x P(x)*”, “*para cada x P(x)*” o bien “*para cualquier x P(x)*”.

Ejemplo ilustrativo 1: Se considera el enunciado “todos los tigres son mamíferos”. El enunciado establece que “si es tigre”, entonces “es mamífero”. El enlace entre los dos predicados se puede establecer con el cuantificador universal, una variable del conjunto universo, una representación en variables de los dos predicados que intervienen en el enunciado y el conectivo condicional (\rightarrow). Sea ***U*** = Conjunto de los animales salvajes; y sea *x* la variable que representa un elemento cualquiera del dominio; entonces el enunciado se puede escribir como: “Si *x* es tigre, entonces *x* es mamífero”. Luego como esta expresión es verdadera para todo elemento del dominio se utiliza el cuantificador universal y se escribe: “Para todo *x*, si *x* es tigre, entonces *x* es mamífero”. Si se simbolizan los predicados como *T(x)*: *x* es tigre y *M(x)*: *x* es mamífero y, además, se introducen el símbolo del cuantificador universal y el del condicional, entonces la el enunciado “todos los tigres son mamíferos” se representa con la fórmula $\forall x (T(x) \rightarrow M(x))$.

Ejemplo ilustrativo 2: En matemáticas se consideran proposiciones como:

A. $P(x): \forall x \in \mathbf{R}, (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, que en efecto, es una identidad verdadera para todo número real x . Luego, la proposición es verdadera.

B. $Q(x): \forall x \in \mathbf{R}, x \leq 3$, que no es verdadera para todo número real x . Por ejemplo $q(5): 5 \leq 3$ es falsa. Por lo tanto, la proposición es falsa.

1.7.2.2. CUANTIFICADOR EXISTENCIAL.

En muchas otras situaciones matemáticas es importante considerar la posibilidad de que el conjunto de verdad de una función proposicional contenga al menos un elemento del universo \mathbf{U} ; es decir, el conjunto de verdad no es el conjunto vacío. Esto se simboliza como $\exists x$ que se lee: “*para algún x* ”, “*existe x* ” o “*existe al menos un x tal que*” y se llama **cuantificador existencial**. La proposición se escribe como $(\exists x \in \mathbf{U}) P(x)$, o bien $(\exists x) P(x)$ si el dominio de la variable está sobreentendido y que se lee como: “*para algún x $P(x)$* ”, “*existe x tal que $P(x)$* ” o “*existe al menos un x tal que $P(x)$* ” o bien “*hay un x tal que $P(x)$* ”.

Ejemplo ilustrativo 1: Se considera el enunciado “existe al menos un tigre que es devorador de hombres” significa que significa que un animal salvaje tiene las propiedades de “ser tigre” y “ser devorador de hombre”. Si se utiliza la variable x para denotar tal animal salvaje, entonces el enunciado se puede escribir como “Existe al menos un x tal que x es tigre y x es devorador de hombres”. Ahora si se simbolizan los dos predicados como $T(x)$: x es tigre y $D(x)$: x es devorador de hombres y se introducen los símbolos del cuantificador existencial y de la conjunción, entonces el enunciado “existe al menos un tigre que es devorador de hombres” queda representado por la fórmula $\exists x (T(x) \wedge D(x))$.

Ejemplo ilustrativo 2: Ejemplos de este cuantificador en matemáticas se tienen en las proposiciones:

A. $P(x): \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x - 4 = 0$, que es una ecuación y que sólo es verdadera para los valores -4 y 1 ; es decir estos son los dos únicos reales que satisfacen la ecuación. Por lo tanto, la proposición es verdadera.

B. $Q(x): \exists x \in \mathbf{R}, x = x + 1$, no existe un número real tal que sumado con 1 se obtenga el mismo real. En consecuencia, la proposición es falsa.

Observe que mientras que el cuantificador universal utiliza la implicación, el cuantificador existencial naturalmente utiliza la conjunción.

1.7.2.3. Valor de verdad de funciones proposicionales con cuantificadores.

Cuando una función proposicional se precede de un cuantificador, ésta se convierte en una proposición simple, y por lo tanto, tiene un valor de verdad determinado. Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera si y solo si el conjunto universo de la variable es igual al conjunto de verdad de la función proposicional. Por lo tanto, el cuantificador universal $\forall x$ afirma que un enunciado es verdadero para todos los valores de la variable $x \in \mathbf{U}$.

Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera si y sólo si el universo de la variable no es vacío. Por lo tanto, el cuantificador existencial, $\exists x$, afirma que un enunciado es verdadero para al menos un valor de la variable $x \in \mathbf{U}$.

Ejemplo ilustrativo: A continuación se establece el valor de verdad de las siguientes proposiciones que contienen un cuantificador:

A. $(\forall x \in \mathbf{R}) x - 5 = 12$ (F)

B. $(\forall x \in \mathbf{R}) (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ (V)

C. $(\exists x \in \mathbf{R}) x^2 + 1 = 0$ (F)

D. Todas las aves vuelan. (F)

E. $(\exists x \in \mathbf{R}), x \leq 3$. (V)

1.7.2.4. Negación de funciones proposicionales con cuantificadores.

Para analizar la negación de funciones proposicionales que contienen cuantificadores, es conveniente introducir el cuadro de oposición de la Lógica Tradicional que presentaba cuatro tipos fundamentales de enunciados que se conocen como *proposiciones categóricas*. Desde tiempos de Aristóteles, interesó examinar ciertas relaciones lógicas existentes entre estos cuatro tipos de *proposiciones categóricas*.

Definición. Una **proposición categórica** es una proposición que relaciona dos clases, o categorías. Las dos clases, en cualquier proposición categórica, se colocan en una relación de sujeto-predicado. Así, **proposición categórica** es una proposición que afirma o niega que una clase o categoría sujeto, S , está contenida, totalmente o en parte, en una clase predicado, P .

En primer lugar, veamos las cuatro formas de proposiciones categóricas que se han empleado tradicionalmente y que son importantes en la lógica matemática, a saber:

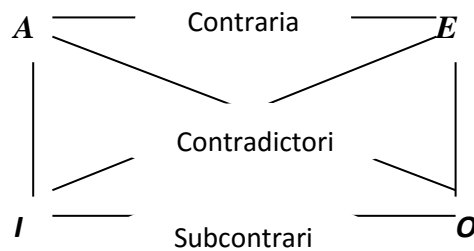
Todo S es P	A	Universal afirmativo	$\forall x$	$P(x)$
Ningún S es P	E	Universal negativo	$\forall x$	$\neg P(x)$
Algún S es P	I	Particular afirmativo	$\exists x$	$P(x)$
Algún S no es P	O	Particular negativo	$\exists x$	$\neg P(x)$

En las formas anteriores, S significa un sujeto del cual se afirma o niega algo, y P es el predicado, esto es, lo que se dice del sujeto. Las dos primeras proposiciones son universales, siendo la primera afirmativa y la segunda negativa. Las dos últimas son particulares, siendo la primera afirmativa y la segunda negativa. Las vocales A , E , I y O provienen de los verbos latinos **A**ffirmo y n**E**g**O**.

Ejemplo ilustrativo:

A. Todos los hombres son mortales	<i>A</i>	Universal afirmativo
B. Ningún hombre es mortal	<i>E</i>	Universal negativo
C. Algún hombre es mortal	<i>I</i>	Particular afirmativo
D. Algún hombre no es mortal	<i>O</i>	Particular negativo

Enseguida se muestra el cuadro de oposición que se elaboró desde Aristóteles y la Lógica Tradicional en el que quedaron reflejadas las relaciones entre estos cuatro modelos básicos de *proposiciones categóricas*:



La distinción entre proposiciones afirmativas y negativas se llama **distinción** (u **oposición**) **de cualidad**, en tanto que la distinción



Lógica Proposicional

entre universales y particulares se denomina **distinción** (u **oposición**) **de cantidad**. **A** y **E** son **contrarias**, y las proposiciones contrarias se definen como aquellos pares de proposiciones universales que difieren en cualidad. **I** y **O** son **subcontrarias**, y se definen como aquellos pares de proposiciones particulares que difieren en cualidad. **A** y **E** son, respectivamente, las **contradictorias** de **O** e **I**, difiriendo tanto en cantidad como en cualidad.

Se ha presentado este breve análisis con el fin de mostrar que en la lógica matemática, la negación de cualquier forma de las cuatro proposiciones clásicas es sencillamente su contradictoria. Se establece:

La negación de una función proposicional con un cuantificador universal es equivalente a la negación de la misma función proposicional, precedida por el cuantificador existencial, y viceversa.

Simbólicamente se puede escribir:

$$\neg [(\forall x \in U) P(x)] \equiv (\exists x \in U) [\neg P(x)]$$

Esta proposición se lee: “No es verdad que para todo $x \in U$, $P(x)$ es verdadero”, y es equivalente a “Existe un $x \in U$ tal que $P(x)$ es falso”.

Lógica Proposicional

En igual forma se escribe:

$$\neg [(\exists x \in U) P(x)] \equiv (\forall x \in U) [\neg P(x)]$$

La anterior proposición se lee: “No es verdad que existe un $x \in U$, tal que $P(x)$ es verdadero”, y es equivalente a “Para todo $x \in U$, $P(x)$ es falso”.

La siguiente tabla proporciona algunas de las negaciones comunes con cuantificadores:

Proposición	Negación
Todos...	Algunos...no
Algunos...	Ningún... (Todos...no)
Algunos...no	Todos...
Ningún...	Algunos...



Ejemplo ilustrativo 1: Escribir la negación de cada una de las siguientes proposiciones:

- A. Todos los números primos son impares. (F)
- B. Algunos profesores son malos.
- C. $(\exists x \in \mathbf{R})$ tal que $x^2 < 0$ (F)
- D. $(\forall x \in \mathbf{R}), x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$ (V)

Solución:

- A. Algunos números primos no son impares. (V)
- B. Todos los profesores no son malos.
- C. $(\forall x \in \mathbf{R}), x^2 < 0$, o bien $(\forall x \in \mathbf{R}), x^2 \geq 0$ (V)
- D. $(\exists x \in \mathbf{R})$ tal que $x^2 - 49 \neq (x + 7)(x - 7)$ (F)



Ejemplo ilustrativo 2: Determinar la negación de cada uno de los siguientes enunciados en símbolos y en palabras:

- A. Algunos estudiantes no prestan atención a la clase.
- B. Hay estudiantes que prestan atención a la clase.
- C. Ningún estudiante presta atención a la clase.

Solución:

Se considera la siguiente simbolización:

$P(x)$: x presta atención a la clase.

A. Algunos estudiantes no prestan atención a la clase.

Simbolización: $\exists x (\neg P(x))$

Negación: $\neg[\exists x (\neg P(x))] \equiv \forall x P(x)$

Negación en palabras: Todos los estudiantes prestan atención a la clase.

B. Hay estudiantes que prestan atención a la clase.

Lógica Proposicional

Simbolización: $\exists x P(x)$

Negación: $\neg[\exists x P(x)] \equiv \forall x [\neg P(x)]$

Negación en palabras: Todos los estudiantes no prestan atención a la clase.

C. Ningún estudiante presta atención a la clase.

Simbolización: $\forall x (\neg P(x))$

Negación: $\neg[\forall x (\neg P(x))] \equiv \exists x P(x)$

Negación en palabras: Algunos estudiantes prestan atención a la clase.

Una variable x que se introduce en una expresión lógica por un cuantificador está unida al más cercano cuantificador envolvente. Una variable se dice que es una variable libre si no está unido a un cuantificador. Similarmente en un bloque de lenguaje de programación estructurado, una variable en una expresión lógica se refiere al más cercano cuantificador dentro de cuyo ámbito este parece.

Ejemplo 1: Escribir en símbolos el enunciado “Todo ser humano tiene una madre”.

Solución: Se reescribe la proposición como: “Para todo ser humano, ese ser humano tiene una madre”. Se introduce la variable x y se consideran las proposiciones: $H(x)$: x es un ser humano y $M(x)$ x tiene una madre, el dominio de x consiste en el conjunto de todos los seres vivos. Entonces el enunciado se lee como: “Para todo ser humano x , x tiene una madre”, entonces se simboliza como: $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$.

Ejemplo 2: Escribir en símbolos el enunciado “Cada estudiante del curso de Lógica está estudiando Precálculo”.

Solución: Se reescribe la proposición como: “Para todo estudiante del curso de Lógica, ese estudiante está estudiando Precálculo”. Se introduce la variable x y se considera la proposición: $P(x)$: x está estudiando Precálculo. Si el dominio de x consiste en el conjunto de los estudiantes del curso de Lógica, entonces el enunciado se simboliza como $\forall x P(x)$. Pero si el dominio es el conjunto de los estudiantes de la universidad, es necesario introducir la proposición $L(x)$: x es un estudiante del curso de Lógica. De esta forma el enunciado se expresa como:

“Para todo estudiante x , si x es un estudiante del curso de Lógica, entonces x está estudiando Precálculo”. Entonces el enunciado se simboliza como: $\forall x(L(x) \rightarrow P(x))$.

Ejemplo 3: Escribir en símbolos el enunciado “Algún estudiante del curso de Lógica habla Inglés”.

Solución: Se reescribe la proposición como: “Existe algún estudiante del curso de Lógica que habla Inglés”. Se introduce la variable x y se considera la proposición: $I(x)$: x habla Inglés. Si el dominio de x consiste en el conjunto de los estudiantes del curso de Lógica, entonces el enunciado se simboliza como $\exists x I(x)$. Pero si el dominio es el conjunto de los estudiantes de la universidad, es necesario

introducir la proposición $L(x)$: x es un estudiante del curso de Lógica. De esta forma el enunciado se expresa como:

“Existe algún estudiante x , tal que x es un estudiante del curso de Lógica y x habla Inglés”. Entonces el enunciado se simboliza como:
 $\exists x(L(x) \wedge I(x))$.

Ejemplo 4: Escribir en palabras el enunciado que representa la fórmula: $\exists x (Gato(x) \wedge \forall x (Negro(x)))$, donde el dominio consiste en el conjunto de todos los animales.

Solución: Aquí, la variable x en $Negro(x)$ está universalmente cuantificada, mientras que toda la expresión está antecedita por el cuantificador existencial. La expresión implica que “existen gatos y todos son de color negro”.