Universidad de San Buenaventura
Cali

Guía

Lógica Proposicional

Tema II: Operadores Lógicos

LA CONJUNCIÓN

DEFINICIÓN. La Conjunción.

Sean p y q dos variables proposicionales, entonces la proposición compuesta "*p* y *q*", que se simboliza como $\boldsymbol{p \wedge q}$, se denomina la ***conjunción*** de p y q o ***proposición conjuntiva*** de p y q. La conjunción de p y q sólo es verdadera si p y q son ambas verdaderas, en cualquier otro caso es falsa.

Ejemplo ilustrativo: Se consideran los siguientes casos:

1. Sean las proposiciones p: Los peces nadan. (V) y q: Los peces respiran por branquias. (V)

$p \wedge q$: Los peces nadan y respiran por branquias. (V)

2. Sean las proposiciones p: La naranja es un cítrico. (V) y q: El banano es una legumbre. (F)

$p \wedge q$: La naranja es un cítrico y el banano una legumbre. (F)

3. Sean las proposiciones p: $\sqrt{2}$ es un entero. (F) y q: $\sqrt{2}$ es un irracional. (V)

$p \wedge q$: $\sqrt{2}$ es un entero e irracional. (F)

4. Sean las proposiciones p: ¼ > ½. (F) y q: $\sqrt{9} = -3$ (F)

$p \wedge q$: ¼ > ½ y $\sqrt{9} = -3$. (F)

Así que se define $p \wedge q$ con la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Algunas proposiciones equivalentes a la proposición conjuntiva $p \wedge q$ son:

1. p y q
2. p pero q
3. p también q
4. p además q
5. p aunque q
6. p sin embargo q

LA DISYUNCIÓN

El conectivo lógico ***o*** tiene un significado ambiguo en el lenguaje cotidiano, como puede verse en los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo ilustrativo 1. Dadas las proposiciones: *p*: *Tengo un billete de* $10 000 *en mi billetera* y *q*: *Tengo un billete de* $20 000 *en mi billetera.*

Al enlazarlas con el operador ***o*** se tiene la proposición compuesta:

Tengo un billete de $10 000 ***o*** *uno de* $20 000 *en mi billetera*

En este caso, parece afirmarse que por lo menos una de las proposiciones es verdadera, pero también ambas pueden ser verdaderas. Aquí se ilustra el uso del conectivo ***o*** que se denomina ***o* incluyente** y se denota por $\vee$.

Ejemplo ilustrativo 2. Dadas las proposiciones: *p*: Es *de día* y *q*: *Es de noche*

Entonces en la proposición compuesta:

O es de día o es de noche

una y sólo una de las proposiciones componentes es verdadera, y no ambas. En este caso, el uso del conectivo ***o*** se llama ***o* excluyente** y se denota por $\underline{\vee}$.

En el lenguaje natural, la *disyunción inclusiva* se puede diferenciar de la *exclusiva* o *excluyente*, puesto que en la primera se encuentra una "o" en medio de las dos proposiciones simples que la componen. Mientras que en la segunda, se encuentra una "o" antes de la primera proposición y otra en medio de las dos proposiciones simples que la componen.

1.3.1. Disyunción Incluyente

DEFINICIÓN. La Disyunción incluyente.

Sean p y q dos variables proposicionales, entonces la proposición compuesta "*p o q*", que se simboliza como $p \vee q$, se denomina la ***disyunción*** de p y q o ***proposición disyuntiva*** de p y q. En este caso, el sentido que se emplea es el inclusivo; esto es, la disyunción es falsa sólo si ambas proposiciones componentes son falsas. La ***o incluyente*** usualmente se expresa en el lenguaje formal como ***y/o***.

Ejemplo ilustrativo: Dadas las proposiciones: p: Juan es estudiante y q: Juan tiene 15 años. Se hallará la proposición disyuntiva de p y q, y se analizará las posibilidades de su veracidad:

$p \vee q$: Juan es estudiante o tiene 15 años.

1. Si p es verdadera y q es verdadera, entonces la proposición compuesta $p \vee q$ es verdadera.
2. Si p es verdadera y q es falsa, entonces la proposición compuesta $p \vee q$ sigue siendo verdadera.
3. Si p es falsa y q es verdadera, entonces la proposición compuesta $p \vee q$, también es verdadera.

4. Si p es falsa y q es falsa, entonces la proposición compuesta $p \vee q$, en este caso, es falsa.

Así que se define $p \vee q$ con la siguiente tabla de verdad:

p	***q***	$\boldsymbol{p \vee q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción Excluyente

DEFINICIÓN. La Disyunción Excluyente.

Dadas las variables proposicionales *p* y *q*, la proposición disyuntiva excluyente de *p* y *q*, que se simboliza como $p \veebar q$ sólo es verdadera si, y solo si lo es cualquiera de las dos proposiciones componentes pero **no** ambas.

La tabla de verdad de la ***o* excluyente** es la siguiente:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo ilustrativo: Se consideran las proposiciones p: Juan está en Bogotá y q: Juan está en Cali.

Se procede a hallar la proposición disyuntiva excluyente de p y q, y se analizará las posibilidades de su veracidad:

$p \veebar q$: **O** Juan está en Bogotá **o** en Cali.

La proposición anterior también se puede expresar como:

$p \veebar q$: Juan está en Bogotá ***o*** en Cali, ***pero no*** en ***ambas*** ciudades.

Es evidente que las dos proposiciones no pueden ser verdaderas simultáneamente, es decir, la veracidad de una de ellas excluye la otra, por lo tanto, si p y q son verdaderas, la proposición compuesta $p \veebar q$ es falsa. Análogamente si las dos proposiciones p y q son falsas, la proposición compuesta $p \veebar q$ es falsa. Sólo es verdadera en el caso de que una de ellas lo sea.

LA NEGACIÓN

DEFINICIÓN. La Negación.

Si p representa una variable proposicional, la proposición compuesta ***no p***, que se simboliza $\sim p$ ó $\neg p$, se llama ***proposición negativa*** o ***negación de p***.

Dada una proposición simple p, la proposición *negación de* p toma el valor de verdad opuesto de la proposición simple u original; esto es: si p es verdadera, $\neg p$ es falsa, y si p es falsa, $\neg p$ es verdadera. La tabla de verdad es la siguiente:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplo ilustrativo: Dada la proposición p: Pedro está en la clase de matemáticas.

Entonces la negación de p se puede hacer de las siguientes maneras:

$\neg p$: Pedro *no* está en la clase de matemáticas

$\neg p$: *Es falso que* Pedro está en la clase de matemáticas

$\neg p$: *No es cierto que* Pedro esté en la clase de matemáticas

Algunas proposiciones equivalentes a la negación de la proposición p son:

1. No p.
2. Es falso que p.

3. No es cierto que *p*.

EL CONDICIONAL

DEFINICIÓN. El Condicional.

Sean p y q dos variables proposicionales, entonces la proposición compuesta "***si p entonces q***" , que se simboliza como $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ se denomina ***proposición condicional***; p se llama ***antecedente*** o ***hipótesis***, y q se denomina ***consecuente***, ***tesis*** o ***conclusión***.

Ejemplo ilustrativo: Juan le dice a su esposa: "*si me gano la lotería, entonces te compro un carro*"; en este enunciado se tienen las proposiciones simples: *p:* me gano la lotería y *q*: te compro un carro.

Si cumple su promesa se admitirá que la proposición es verdadera, si la incumple se admitirá que es falsa. Por lo tanto, se tienen cuatro posibilidades:

1. Juan se gana la lotería (V) y le compra el carro a su mujer (V); en este caso, cumple su promesa, por tanto, la proposición es verdadera.
2. Juan se gana la lotería (V), pero no le compra el carro a su mujer (F); en este caso, incumple su promesa; por ende, la proposición es falsa.

3. Juan no se gana la lotería (F), pero le compra el carro a su esposa (V); cumpliendo su promesa, por lo tanto, la proposición es verdadera.

4. Juan no se gana la lotería (F), y no le compra el carro a su esposa (F); por lo tanto, no rompe su promesa y la proposición es verdadera.

La proposición $p \to q$ es falsa sólo cuando p es verdadera y q es falsa. La tabla de verdad que define el condicional es la siguiente:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las proposiciones condicionales son muy importantes en matemáticas y geometría, y existen varias maneras de enunciar $p \to q$. Algunas proposiciones equivalentes muy usuales son:

1. Si p, entonces q

2. $p \to q$

3. q si p

4. p sólo si q

5. Si p, q

6. Si p también q

7. p es suficiente para q

8. Una condición suficiente para q es p

9. q es necesario para p

10. Una condición necesaria para p es q

11. q con la condición de que p

12. q cuando p

13. q siempre que p

14. q cada vez que p

15. p implica q

16. q se deduce de p

Ejemplo ilustrativo: Se consideran las proposiciones simples:

p: El astro es una estrella y q: El astro tiene luz propia

La proposición $p \rightarrow q$ se representa con cualquiera de los siguientes enunciados condicionales:

- **Si** el astro es una estrella, **entonces** tiene luz propia.
- El astro es una estrella, **solo si** tiene luz propia.
- El astro tiene luz propia, **si** es una estrella.
- **Es necesario** que el astro tenga luz propia para que sea una estrella.
- **Es suficiente** que el astro sea una estrella para que tenga luz propia.
- El astro tiene luz propia **cuando** sea una estrella.
- El astro es una estrella **implica** que tiene luz propia.

- El astro tiene luz propia **se deduce de** ser una estrella.

Proposiciones relacionadas con el condicional: Recíproca, Inversa y Contrarrecíproca.

El condicional de dos proposiciones difiere de la conjunción y de la disyunción de las dos en que este no tiene conmutatividad. Es decir, $p \wedge q$ es equivalente a $q \wedge p$ y $p \vee q$ equivalente a $q \vee p$; pero $p \rightarrow q$ *no es equivalente a* $q \rightarrow p$. Esta última proposición, $q \rightarrow p$, es llamada la recíproca o conversa de $p \rightarrow q$. Muchas de las falacias más comunes del pensamiento surgen de una confusión de una proposición condicional con su recíproca o conversa.

DEFINICIÓN. Recíproca, Inversa y Contrarrecíproca.

Dada la proposición condicional $p \rightarrow q$, se definen las siguientes proposiciones:

i. La ***recíproca***: $q \rightarrow p$

ii. La ***inversa***: $\neg p \rightarrow \neg q$

iii. La ***contrarrecíproca*** (o ***contrapositiva***): $\neg q \rightarrow \neg p$

Las tablas de verdad del condicional de las proposiciones p y q y los otros tres condicionales definidos: recíproca, inversa (recíproca de la contrarrecíroca o contrapositiva) y la contrarrecíproca (o contrapositiva) se presentan en la siguiente tabla de verdad:

Proposiciones		Condicional	Recíproca del condicional	Inversa o recíproca de la contrarrecíproca	Contrarrecíproca
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Ejemplo ilustrativo: Dadas las proposiciones *p*: Las plantas fabrican su propio alimento y *q:* Las plantas generan oxígeno.

Entonces el condicional, su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca, son:

- *Condicional*, $p \to q$: Si las plantas fabrican su propio alimento, entonces generan oxígeno.
- *Recíproca*, $q \to p$: Si las plantas generan oxígeno, entonces fabrican su propio alimento.
- *Inversa*, $\neg p \to \neg q$: Si las plantas no fabrican su propio alimento, entonces no generan oxígeno.
- *Contrarrecíproca*, $\neg q \to \neg p$: Si las plantas no generan oxígeno, entonces no fabrican su propio alimento.

EL BICONDICIONAL

Una proposición $p \to q$ y su recíproca $q \to p$ no tiene los mismos valores de verdad. Sin embargo, suele suceder que se combinen en una sola proposición: "*$p \to q$ y también $q \to p$*". En este caso, se escribe "*p si y sólo si q*", que se simboliza $p \leftrightarrow q$, y al conectivo se le llama ***bicondicional***. Por lo tanto, para determinar los valores de verdad de la proposición bicondicional, se debe construir la tabla de verdad de la conjunción:

$$(p \to q) \wedge (q \to p)$$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Finalmente, se puede establecer la siguiente definición:

Definición. El Bicondicional.

Sean p y q dos variables proposicionales, entonces la proposición compuesta "***p si y sólo si q***", que se simboliza como $\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$, se llama ***el bicondicional*** de p y q, y es usual abreviarlo "***ssi***".

La tabla de verdad que define el ***bicondicional*** es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo ilustrativo: Al expresar los siguientes enunciados verdaderos:

$p \rightarrow q$: Si un polígono tiene cuatro lados, entonces es un cuadrilátero.

$q \rightarrow p$: Si un polígono es un cuadrilátero, entonces tiene cuatro lados.

en una sola proposición bicondicional ($p \leftrightarrow q$) se tiene:

Un polígono es un cuadrilátero ***sí y sólo*** *si* tiene cuatro lados.

Las proposiciones condicionales son muy importantes en matemáticas y geometría; existen varias maneras de enunciar $p \leftrightarrow q$, las cuales tienen el mismo significado:

1. p si y sólo si q
2. q si y sólo si p
3. Si p, entonces q, y recíprocamente
4. Si q, entonces p, y recíprocamente
5. p es una condición necesaria y suficiente para q
6. q es una condición necesaria y suficiente para p

7. p equivalente con q

8. q equivalente con p

Por lo general, en matemáticas y geometría toda *definición* es una proposición de la forma "…*si y solo si*…" mediante la cual se trata de exponer de manera unívoca y con precisión la comprensión de un concepto o término o dicción o –si consta de dos o más palabras– de una expresión o locución. Se alude a determinar, por escrito u oralmente, de modo claro y exacto, las cualidades esenciales del tema implicado. (Tomado de Wikipedia.org).

Ejemplo ilustrativo: Algunos ejemplos de definiciones muy importantes en este curso son:

Definición. Número Primo.

Un entero positivo es *primo* si y sólo si tiene exactamente dos divisores positivos: 1 y el mismo entero

Definición. Divisor o múltiplo.

Sean a, $b \in \mathbf{Z}$ con $a \neq 0$, *a divide* a b si y sólo si existe número entero c tal que tal que $b = a{\cdot}c$.

En esta la última definición se puede establecer que “si *a divide* a *b*”, también se dice que “*a* es un *factor* de *b*” o que “*a* es *divisor* de *b*”, o bien que “*b* es un *múltiplo* de *a*” o “*b* es *divisible* por *a*”.

La definición de un concepto en términos de condición suficiente y necesaria establece condiciones de inclusión y exclusión en el conjunto de los elementos caracterizados por el concepto. Así en la segunda definición de divisibilidad en el conjunto de los enteros si $a = 3$ y $b = 12$ se tiene que 3 *divide* a 12 porque existe el entero 4 tal que tal que $12 = 3 \times 4$. También se puede decir que 3 es un *factor* de 12 o que 3 es *divisor* de 12, o bien que 12 es un *múltiplo* de 3 o 12 es *divisible* por 3. Si $b = 12$ se tiene que a puede tomar del conjunto de los números enteros (**Z**) exactamente los valores 1, –1, 2, – 2, 3, – 3, 4, –4, 6, –6, 12, –12, que corresponden a los divisores de 12. Así, $a = 5$ no es un divisor de 12, porque no existe un entero c tal que $12 = 5 \cdot c$.

La siguiente tabla muestra un resumen de todos los conectivos lógicos básicos definidos:

Conectivo	Símbolo	Definición	Escritura
Conjunción	$\wedge$	"y"	$p \wedge q$
Disyunción (Inclusiva)	$\vee$	"o"	$p \vee q$
Negación	$\neg$	"No". "Es falso que …"	$\neg p$
Condicional	$\rightarrow$	"Si ... entonces ..."	$p \rightarrow q$
Bicondicional	$\leftrightarrow$	"... si y solo si ..."	$p \leftrightarrow q$