



Guía Árboles

Tema II: Representación de Árboles



Árboles

El árbol es un grafo no dirigido conectado con circuitos no simples; además, no contiene arcos múltiples, con la propiedad de que hay un único camino simple entre cada par de vértices, teniendo el siguiente teorema:

Teorema 1. “Un grafo no dirigido es un árbol si y solo si hay un camino simple único entre cualesquiera dos de sus vértices”.

Conforme los siguientes grafos, ¿cuál de ellos es del tipo de árboles?

Ejemplo:

¿Cuáles de los grafos de la figura 6.2 son árboles?

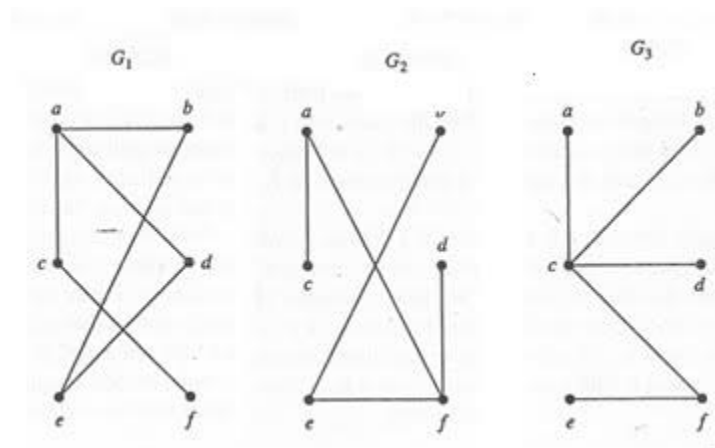


Fig. 6.2 Grafo 1,2 y 3

Si se observan los siguientes grafos, se concluye que el grafo G_1 no es un árbol porque se observa un circuito simple, pero los grafos G_2 Y G_3 son de árboles, porque están conectados con circuitos no simples.

Como se sabe, existen grafos que no tienen conexión y podría existir confusión el pensar que un árbol es un grafo conectado que tiene circuitos no simples, pero es importante mencionar que existen árboles del tipo que contienen circuitos no simples que no necesariamente están conectados, y esos árboles reciben el nombre de bosques, cuya



Árboles

característica es que cada uno de sus componentes conectados es un árbol.

Los árboles son mostrados a continuación:

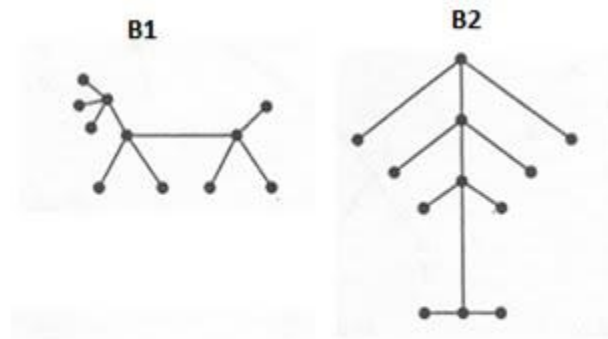


Fig. 6.3 Bosques B1 y B2

En gran parte de las aplicaciones de árboles, se designa a un vértice particular del árbol como la raíz, por lo que se puede asignar una dirección a cada arco, debido que hay un camino único de la raíz a cada vértice del grafo dirigiéndose cada arco alejándose de la raíz, conforme lo enunciado en el teorema 1, en el apartado 6.1.2, por lo tanto es un grafo de árbol con raíz, esto es simplemente el árbol que junto con su raíz forman un grafo y en caso que fuesen diferentes los vértices como raíz, se producen diferentes árboles con raíz.

A continuación se muestra un grafo de árbol con raíz:

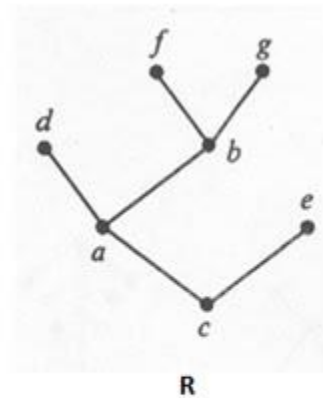


Fig. 6.4 Grafo de árbol con raíz R

De acuerdo a lo anterior se muestran los árboles con raíz en donde a y c son las raíces correspondientes del grafo R.

Lo usual es elaborar un grafo de árbol con raíz en la parte superior del grafo, en donde las flechas muestran la dirección de los arcos, como se muestra en la siguiente figura:

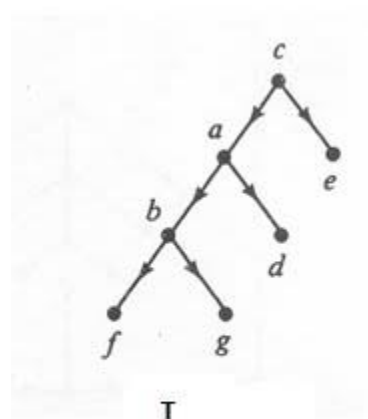


Fig. 6.5 Grafo F de árbol con raíz c



Árboles

En el apartado 6.1.1 se elaboró un árbol genealógico con el propósito de familiarizarse con la terminología, que es de origen genealógico y botánico.

Observe el siguiente grafo:

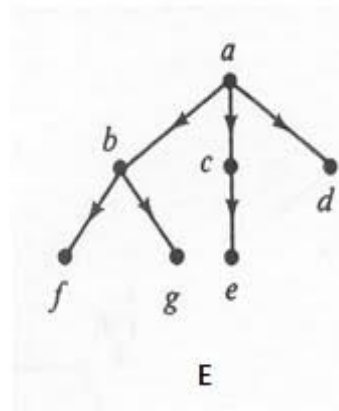


Fig. 6.6 Grafo Árbol E

En esta figura se deduce que E es un árbol con raíz a, se observa que los padres son b, c y d y, a su vez, don hermanos, f y g son hijos de b; además, e es hijo de c.

Otro ejemplo: si se supone que A es un árbol con raíz, si v es un vértice en A diferente de la raíz, el padre de v es el único vértice u tal que hay un arco dirigido de u a v. Cuando u es el padre de v, v es llamado un hijo de u. Los vértices con el mismo padre son llamados hermanos. Los ancestros de un vértice diferente de la raíz son los vértices en el grafo de la raíz a ese vértice, excluyendo el vértice mismo e incluyendo a la raíz. Los descendientes de un vértice v son aquellos vértices que tienen a v como ancestro. Un vértice de un árbol es llamado hoja si no tiene hijos. Los vértices que tienen hijos son llamados vértices internos. La raíz es un vértice interno a menos que sea el único vértice del grafo, en ese caso es una hoja. Si a es un vértice en un árbol, el subárbol con a como raíz, es el



Árboles

subgrafo del árbol que consiste de a y sus descendientes y todos los arcos incidentes en estos descendientes.

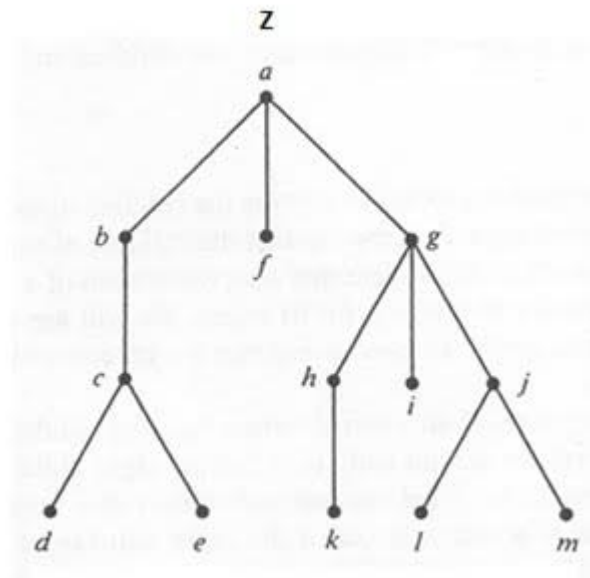


Fig. 6.7 Árbol Z con raíz

Observa la siguiente figura:

En este árbol Z, la raíz está en el vértice a ; el padre de c es b y su descendencia es b y e ; los hermanos de i son h y j , quienes son hijos de g ; además, se pueden observar todos los ancestros de m ; y también se observa que en este árbol con raíz existe otro subárbol con raíz en el vértice g , si se hace un acercamiento en esta parte se percibe lo siguiente:

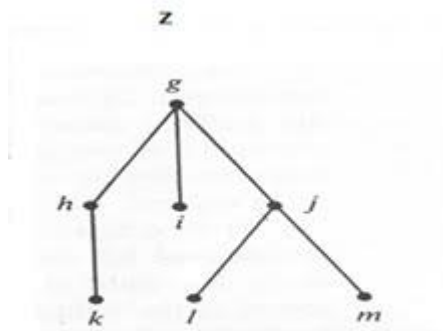


Fig. 6.8 Sub árbol con raíz en g

El padre es g , los hijos son h, i, j y los descendientes de j son l y m , y el descendiente de h es k .



Árboles

También existe un árbol con raíz, de nombre m-ario, que consiste en que cada vértice interno no tiene más de m hijos, y el árbol m-ario completo consiste si cada vértice tiene exactamente m hijos y un árbol m-ario con cuando $m=2$ es llamado árbol binario.

Conforme lo visto anteriormente se distinguirán los diferentes tipos de grafos:

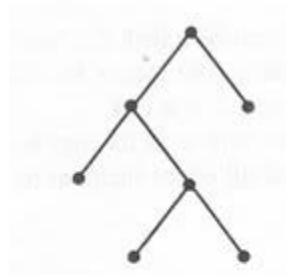


Fig. 6.9 árbol

Este grafo representa un árbol binario completo porque cada uno de sus vértices internos tiene un hijo.

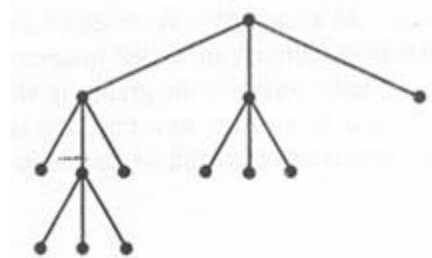


Fig. 6.10 árbol

En esta figura se representa un árbol, árbol 3-ario, completo porque cada uno de

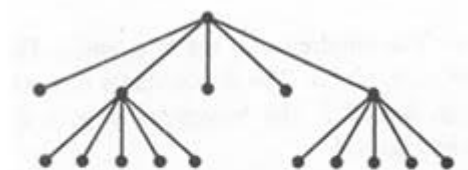


Fig. 6.11 árbol

sus vértices internos tiene tres hijos.



Árboles

Este es un árbol 5-ario completo porque cada vértice interno tiene 5 hijos.

Este grafo representa un árbol m-ario completo para alguna m , porque algunos de sus vértices internos tienen dos hijos y otros tienen tres hijos.

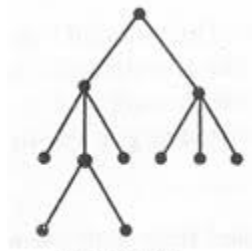


Fig. 6.12

También existe el caso de un árbol con raíz ordenado debido que los hijos de cada vértice interno están ordenados, y estos se expresan en el grafo de tal forma que los hijos de cada vértice interno se representan en orden de izquierda a derecha. Si el árbol con raíz ordenado tiene un vértice interno del cual emanan dos hijos, el primero se nombra hijo izquierdo y el segundo es llamado hijo derecho.