



Guía Árboles

Tema I: Propiedades de los Árboles

Árboles:

Un grafo conectado que contiene circuitos no simples se llama árbol. En el año de 1857 Arthur Cayley, matemático inglés, los empleó para contabilizar componente químicos, no obstante, es importante señalar que no solo es una herramienta de la química sino que se han utilizado en diversas áreas, por ejemplo, conforme el propio interés de la materia encaminado hacia las ciencias de la computación, se utiliza para la construcción de las redes.

Definición. Sea A un grafo. A recibe el nombre de árbol sí y sólo si:

- A es conexo.
- A no contiene circuitos.

Ejemplos:



Definición. Sea A un árbol. Un vértice de grado 1 se llama una hoja. Un vértice de grado mayor que 1 se llama rama.

De las definiciones anteriores se desprenden las siguientes propiedades:

- Existe una trayectoria única entre dos vértices cualesquiera de un árbol.
- El número de vértices es mayor en 1 al número de aristas.
- Un árbol con dos o más vértices tiene al menos dos hojas.

Ejemplo

Un grupo de ajedrecistas que luchan por un campeonato. Cada ajedrecista tiene una única oportunidad para enfrentar al campeón vigente, y que el perdedor de cualquier encuentro será eliminado de la contienda.

- Sea $A = (V, E)$ un grafo no dirigido donde los vértices de V representan los ajedrecistas y las aristas de E representan los encuentros.
- Sea $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 \}$

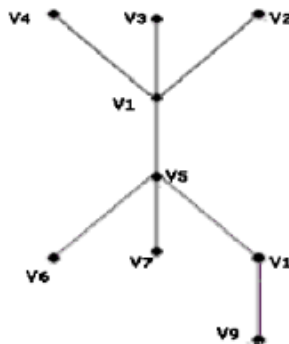
Al inicio, v_1 es el campeón vigente y que se dan los siguientes encuentros:

- v_1 venció a v_2 , v_3 y v_4 y pierde con v_5 .
- v_5 venció a v_6 y v_7 y pierde con v_8 .
- v_8 pierde con v_9 .

El árbol que detalla esta situación, es el siguiente:



Árboles



Los vértices $v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9$ son hojas.
Los vértices v_1, v_5, v_8 son ramas.

Definición. Sea G un grafo dirigido. Se dice que G es un árbol dirigido si se convierte en un árbol cuando se ignoran las direcciones de sus aristas.

Definición. Un árbol con raíz es un árbol dirigido que posee exactamente un vértice cuyo grado de entrada es 0 y los grados de entrada de todos los demás vértices es 1.

El vértice con grado de entrada 0 se llama raíz de árbol. Un vértice cuyo grado de salida es 0 se llama hoja. Un vértice cuyo grado de salida es diferente de 0 se llama rama.

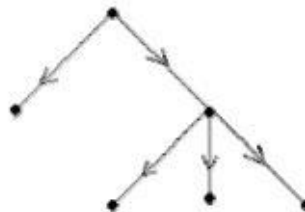
Definición. Sea v_i una rama de un árbol con raíz. Se dice que V_k es un hijo de V_i si existe una arista dirigida de V_i a V_k , además se dice que v_i es padre de V_k .

En un árbol con raíz se dice que los vértices son hermanos si son hijos del mismo vértice.

Ejemplo

Un hombre que tiene dos hijos, de los cuales uno no tiene hijos y el otro tiene tres hijos.

Solución

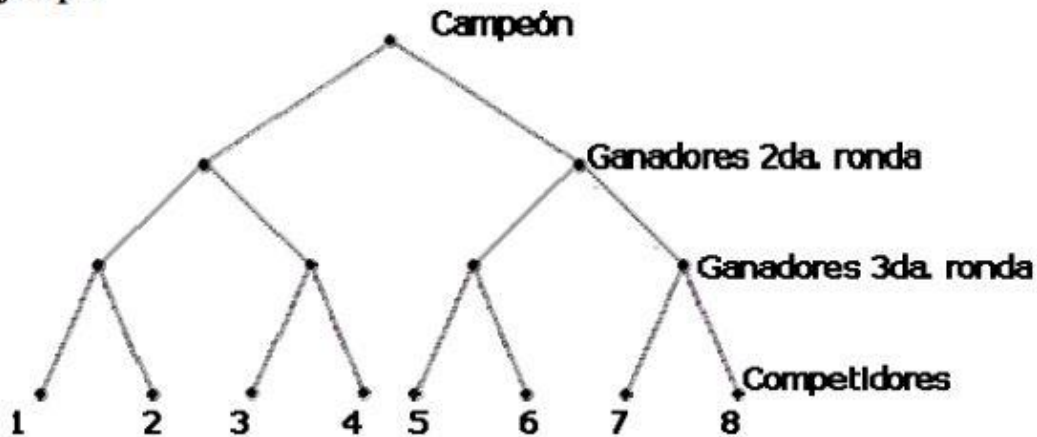




Árboles

Definición. Sea A un árbol con raíz. Se dice que A es un árbol binario si cada rama tiene exactamente dos hijos.

Ejemplo



- El árbol anterior muestra el número de encuentros en un torneo de eliminación simple con 8 competidores.
- Se juegan un total 7 encuentros a saber:
- Cuatro encuentros en la primera ronda.
- Dos encuentros en la segunda ronda.
- El encuentro final.
- En total son 7 encuentros.

En este árbol binario, las hojas representan a los competidores en el torneo y las ramas a los ganadores de los encuentros o, equivalentemente los encuentros jugados en el torneo.

Si se llama r el número de ramas y h el número de hojas en un árbol binario, se puede demostrar que:

$$r = h - 1.$$



Árboles

Si un grafo tiene un vértice U_0 que solo contiene una diferente de $U_0 - U_1$ (a sí mismo) entonces es un árbol



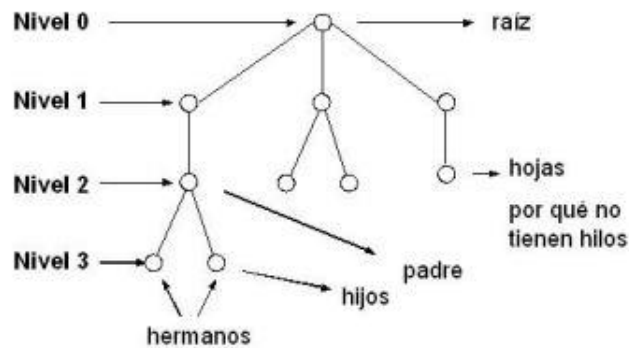
árbol



no es árbol

este vértice tiene dos trayectorias

En general



Altura = 3 (el nivel mas grande)
raíz = que no tiene padre (inicial)
padre = que tiene hijo(s)
hoja = no tiene hijo(s), tiene padre

Conjunto de árboles = Bosque.

Árbol ordenado: tiene nivel, los hijos de izquierda a derecha.

n-árbol: cuando cada padre tiene a lo más n hijos

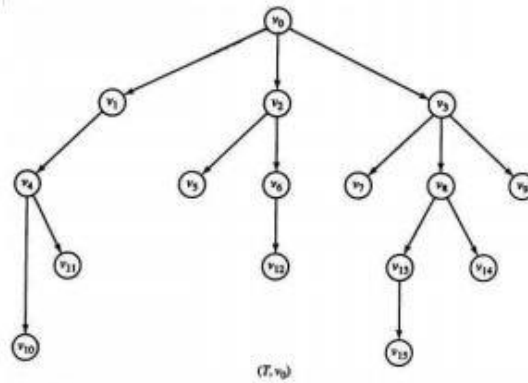
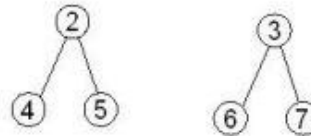
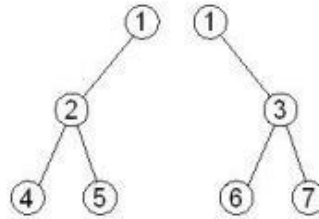
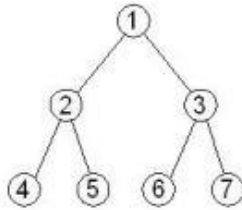
árbol binario: cada padre tiene a lo más 2 hijos.



Árboles

Para:

sub - árboles



¿Cuántos subárboles? 6

Altura = ? 5

$$V_0 - V_1$$

$$V_1$$

$$V_4$$

$$V_0 - V_2$$

$$V_2$$

$$V_6$$

$$V_0 - V_3$$

$$V_3$$

$$V_8$$

$$V_{13}$$