Universidad de San Buenaventura Cali

Guía Relaciones

Tema IV: Operaciones con Relaciones

Relaciones

Operaciones con Relaciones.

Puesto que las relaciones binarias son conjuntos de pares ordenados, las nociones de intersección, diferencia simétrica, unión y diferencia de dos relaciones, se obtienen de manera similar a las correspondientes para conjuntos.

Entonces primeramente es necesario recordar dichas nociones para conjuntos.

a) La unión de dos conjuntos A y B, denotada por A∪B, es el conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos de A ó B, ó de ambos.

Ejemplos:

1) Si A = {a, b}, B = {c, d}, entonces A∪B = {a, b,c, d}

2) Si A = {a, b}, B = {a, c}, entonces A∪B = {a, b, c}

3) Si A = {a,b}, B = {}, entonces A∪B = {a, b}

4) Si A = {a, b}, B = {c, {a, b}}, entonces A∪B = {a, b, c, {a, b}}

b) La intersección de dos conjuntos A y B, denotada por A ∩ B, es el conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos que están tanto en A como en B.

Ejemplos:

1) {a, b} ∩ {a, c} = {a}

2) {a, b} ∩ {c, d} = {}

3) {a, b} ∩ {} = {}

c) La diferencia de dos conjuntos A y B, denotada por A − B, es el conjunto que contiene exactamente aquellos elementos de A que no estan en B.

Ejemplos:

1) {a, b, c} − {a} = {b, c}

2) {a, b, c} − {a, d} = {b, c}

3) {a, b, c} − {d, e} = {a, b, c}

d) La diferencia simetrica de dos conjuntos A y B, denotada por A ⊕ B, es el conjunto que contiene todos los elementos que están en A o en B pero no en ambos, es decir, A ⊕ B = (A ∪ B) − (A ∩ B).

Relaciones

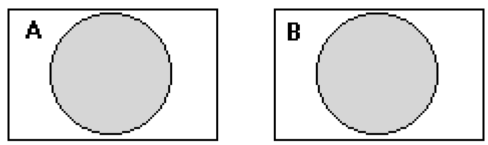
Ejemplos:

1) {a, b}$\oplus$ {a, c}={b, c}

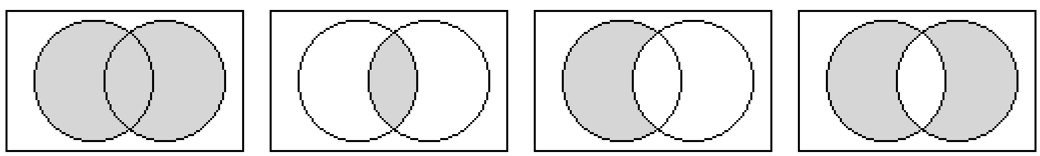
2) {a, b}$\oplus$ {}= {a, b}

3) {a, b}$\oplus$ {a, b}={}

Graficamente se pueden representar estas operaciones con conjuntos como sigue:



Conjunto A **Conjunto B**



$A \cup B$ **$A \cap B$** **$A - B$** **$A \oplus B$**

Aplicando los conceptos anteriores a relaciones binarias, tenemos que si R y S son dos relaciones binarias de A a B entonces: $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, $R \oplus S$ son también relaciones binarias de A a B.

Ejemplo:
Sean R y S dos relaciones de X a Y y de U a V respectivamente. Además tenemos que

Dom(R)={a, b, c} y Cod(R)={A, B, C}

Dom(S)={a,b} y Cod(S)={B,C}

Encontrar $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, $R \oplus S$, si R={(a, A), (a, B), (b, C)} y S={(a, B), (b, C)}

$R \cup S$={(a, A), (a, B), (b, C)}

$R \cap S$={(a, B), (b, C)}

$R - S$={(a, A)}

$R \oplus S$={(a, A)}

Definición:
Puede definirse el complemento de una relación R como el como el conjunto de todos los pares ordenados del producto cartesiano A$\times$B que no estan en R, y se representa como R' ó ~R.

Relaciones

Ejemplo:

Sean $\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$ dos relaciones de X a Y y de U a V respectivamente. Además tenemos que

Dom($\mathbf{R}$)={a, b, c} Cod($\mathbf{R}$)={A, B, C}, Dom($\mathbf{S}$)={a,b} Cod($\mathbf{S}$)={B,C} y sean

$\mathbf{R}$={(a, A), (a, B), (b, C)} y $\mathbf{S}$={(a, B), (b, C)}

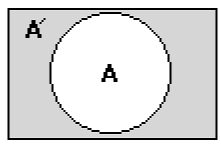
Entonces X$\times$Y={(a, A), (a, B), (a, C), (b, A), (b, B), (b, C), (c, A), (c, B), (c, C)}

Por lo tanto $\mathbf{R}'$={(a, c), (b, A), (b, B), (c, A), (c, B), (c, C)}

Y para U$\times$V ={(a, B), (a, C), (b, B), (b, C)}

se tiene que $\mathbf{S}'$={(a, C), (b, B)}.

Graficamente se representa:



Otra operación que a menudo se utiliza es el inverso de una relación, la cual se define de la siguiente manera:

Definición:

Sea $\mathbf{R}$ una relación de A a B, el inverso de $\mathbf{R}$, que de denota como $\mathbf{R}^{-1}$ ó $\mathbf{R}^{\smile}$, y es la relación de B a A definida formalmente como:

$$\mathbf{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathbf{R}\}$$

Ejemplo:

Sean A={2, 3, 4} y B={3, 4, 5, 6, 7}, además definimos $\mathbf{R}$ como sigue:

(a, b) $\in \mathbf{R}$ si a divide a b (división entera)

entonces $\mathbf{R}$ = {(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)}

por lo que $\mathbf{R}^{-1}$ = {(4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4)}

De lo anterior se deduce que $a\,\mathbf{R}\,b \equiv b\,\mathbf{R}^{-1}\,a$. Algunos autores llaman al inverso opuesto.

Como una relación es un conjunto, podemos obtener el número de elementos de dicho conjunto, es decir:

Definición:

La cardinalidad es el número de elementos de un conjunto para una relación $\mathbf{R}$ de A en B. La cardinalidad se representa #$\mathbf{R}$.

Relaciones

Ejemplos:

Si A = {1,2,3,4}entonces #A = 4

Si $\mathbf{R}$ = {(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)}entonces #$\mathbf{R}$ = 5

Definición:

Sea $\mathbf{R}$ una relación de A en B el conjunto potencia $\mathbf{R}$, denotado como P($\mathbf{R}$), es el conjunto que contiene a todos los subconjuntos de $\mathbf{R}$, es decir:

$$P(\mathbf{R}) = \{S \mid S \subset A\}$$

Si #$\mathbf{R}$ = n, entonces #P($\mathbf{R}$) = 2^n

Ejemplo:

Sea $\mathbf{R}$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3)}, entonces #$\mathbf{R}$ = 3 y #P($\mathbf{R}$) = 2^{3} = 8

P($\mathbf{R}$) = {$\varnothing$, {(1, 1)}, {(1, 2)}, {(1, 3)}, {(1, 1), (1, 2)}, {(1, 1), (1, 3)}, {(1, 2), (1, 3)}, {(1, 1), (1, 2) ,(1, 3)}}