UNIVERSIDAD DE
SAN BUENAVENTURA
CALI

Guía

Grafos

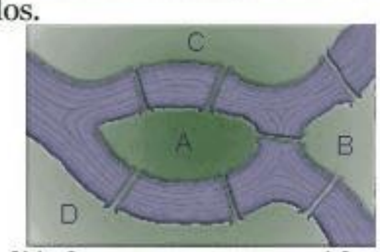
Tema I:

Teoría de Grafos

Los siete puentes de la isla Kueiphof.

La isla Kueiphof en Koenigsberg (Pomerania) el río que la rodea se divide en dos brazos.

Sobre los brazos estaban construidos *siete puentes* y para los habitantes era motivo de distracción descubrir un itinerario de manera que pudieran regresar al punto de partida, después de haber cruzado por los siete puentes pero pasando sólo una vez por cada uno de ellos.



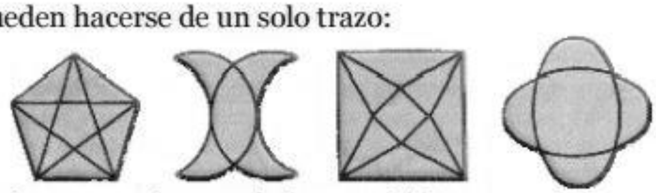
Leonardo Euler estudió el asunto, representó las distintas zonas A, B, C y D por medio de puntos, mientras que los puentes estaban representados por líneas que unían estos puntos. A la figura la llamó grafo, a los puntos los llamó vértices y a las líneas las denominó aristas.

Estudió si una figura lineal se podía dibujar con un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo sitio.

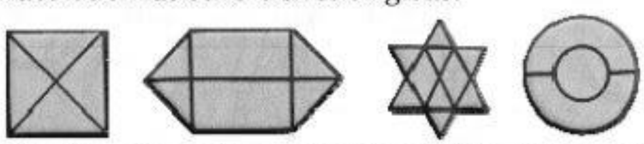
Llegó a la siguiente conclusión:
1. Es *imposible* si hay *más de dos vértices impares*.
2. Es *posible* cuando:
a) *Todos los vértices son pares* y el punto de partida puede ser cualquiera.
b) Cuando *no hay más de dos vértices impares* y en este caso el comienzo del recorrido comienza en uno de ellos y termina en el otro.
(Impar es un vértice si de él parten un número impar de caminos).

A la isla A llegan 5 puentes; a la B llegan 3 puentes; a la orilla C llegan 3 puentes y a la orilla D llegan 3 puentes, por tanto, según las conclusiones anteriores, *el problema no tiene solución.*

Ejemplos:
Estos dibujos pueden hacerse de un solo trazo:



Estos no pueden hacerse en las condiciones exigidas:

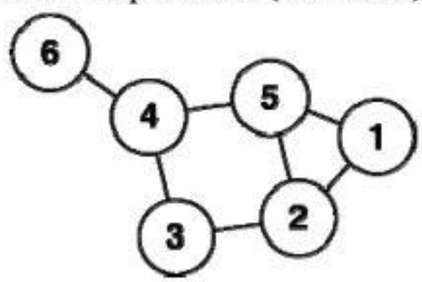


Este estudio de Euler dio origen a la teoría de los grafos, que se emplean en el estudio de los circuitos eléctricos, en problemas de transporte, programación con ordenador, etc.

Teoría de Grafos.

La Teoría de Grafos juega un papel importante en la fundamentación matemática de las Ciencias de la Computación. Los grafos constituyen una herramienta básica para modelar fenómenos discretos y son fundamentales para la comprensión de las estructuras de datos y el análisis de algoritmos.

En matemáticas y ciencias de la computación, la **teoría de grafos** estudia las propiedades de los grafos, que son colecciones de objetos llamados vértices (o nodos) conectados por líneas llamadas aristas (o arcos) que pueden tener orientación (dirección asignada). Típicamente, un grafo está diseñado por una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).



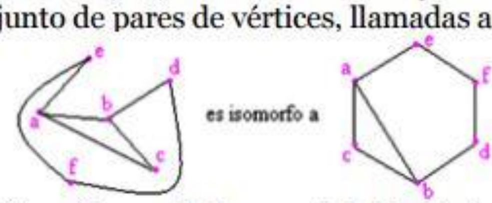
El trabajo de Leonhard Euler, en 1736, sobre el problema de los puentes de Königsberg es considerado como uno de los primeros resultados de la teoría de grafos. También se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría (que no depende de ninguna medida). Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la teoría de grafos y la topología.

En 1845 Gustav Kirchhoff publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos.

En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores que plantea si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos.

Grafo.

Un grafo es una pareja **G = (V, A)**, donde **V** es un conjunto de puntos, llamados vértices, y **A** es un conjunto de pares de vértices, llamadas aristas.



En teoría de grafos, sólo queda lo esencial del dibujo: la forma de las aristas no son relevantes, sólo importa a qué vértices están unidas. La posición de los vértices tampoco importa, y se puede variar para obtener un grafo más claro.

Generalmente, se considera que colocar los vértices en forma de polígono regular da grafos muy legibles.

Prácticamente cualquier red puede ser modelada con un grafo: una red de carreteras que conecta ciudades, una red eléctrica o un alcantarillado.

Aristas dirigidas y no dirigidas.

En algunos casos es necesario asignar un sentido a las aristas, por ejemplo, si se quiere representar la red de las calles de una ciudad con sus inevitables direcciones únicas. El conjunto de aristas será ahora un subconjunto de todos los posibles pares ordenados de vértices, con (a, b) ≠ (b, a). Los grafos que contienen aristas dirigidas se denominan **grafos orientados**, como el siguiente:

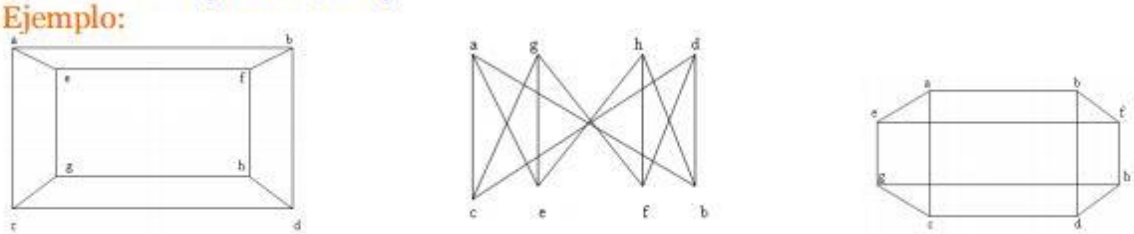
Las aristas no orientadas se consideran bidireccionales para efectos prácticos (equivale a decir que existen dos aristas orientadas entre los nodos, cada una en un sentido).

Se considera la característica de "grado" (positivo o negativo) de un vértice, como la cantidad de aristas que llegan o salen de él; para el caso de grafos no orientados, el grado de un vértice es simplemente la cantidad de aristas que tocan este vértice. Por ejemplo, el grado positivo (salidas) de *d* es 3, mientras que el grado negativo (llegadas) de *b* es 1.

Grafos isomorfos.

Dos grafos tendrán la misma "forma matemática" cuando la única diferencia entre ambos, en cuanto a su estructura, sea la representación gráfica de sus vértices y aristas. Cuando las conexiones entre vértices tengan las mismas aristas, se dice que son homorfos. **[Hortalá, 270]**

Ejemplo:



Subgrafo.

Un grafo G1 es subgrafo de otro G si todos los vértices de G1 están en G pero no necesariamente todos los vértices de G están en G1.