UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

Guía Relaciones

Tema II: Propiedades de Relaciones

Propiedades de las Relaciones.

Las relaciones binarias, es decir definidas sobre un único conjunto A, satisfacen ciertas propiedades que expondremos en este apartado.

Reflexividad.

Una relación binaria $\mathscr{R}$ sobre un conjunto A se dice que es reflexiva, cuando cada elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva} \iff \forall a\,(a \in A \Longrightarrow a\mathscr{R}a)$$

Nota.

La equivalencia anterior,

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva} \iff \forall a\,(a \in A \Longrightarrow a\mathscr{R}a)$$

puede escribirse también, en la forma:

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva} \iff \forall a\,[\neg\,(a \in A) \ \vee \ a\mathscr{R}a]$$

y si ahora negamos ambos miembros, tendremos

$$\neg\,(\mathscr{R} \text{ es reflexiva}) \iff \neg\forall a\,[\neg\,(a \in A) \ \vee \ a\mathscr{R}a]$$

es decir,

$$\mathscr{R} \text{ no es reflexiva} \iff \exists a : \neg\,[(\neg\,(a \in A) \ \vee \ a\mathscr{R}a)]$$

luego,

$$\mathscr{R} \text{ no es reflexiva} \iff \exists a : (a \in A \ \wedge \ a\not\mathscr{R}\,a)$$

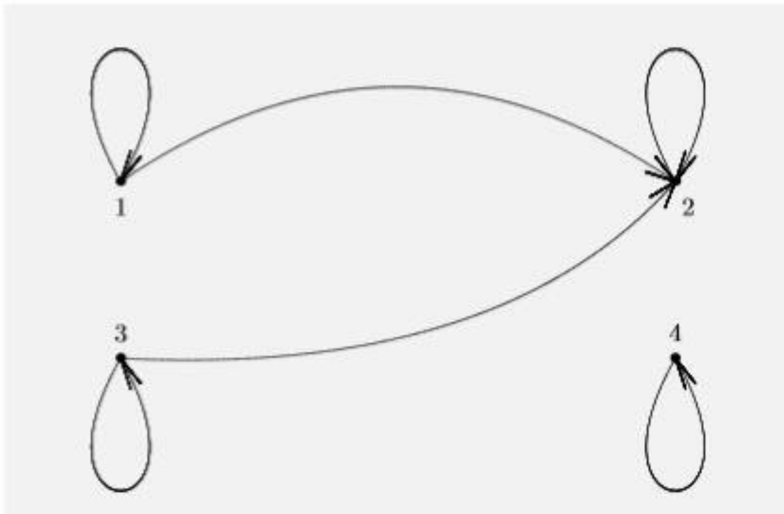
Consecuentemente, si podemos encontrar, al menos, un elemento a en el conjunto A que no esté relacionado consigo mismo, la relación $\mathscr{R}$ no es reflexiva.

Ejemplo:

Sea A = {1, 2, 3, 4} y R = {(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(3,2),(4,4)} una relación definida en A.

¿Es reflexiva? Dibujar el dígrafo y escribir la matriz de la relación

Solución:



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relación Reflexiva

En efecto, $\mathscr{R}$ es reflexiva ya que para cada $a \in A$, el par (a, a) está en la relación. La figura anterior nos muestra el digrafo y la matriz de $\mathscr{R}$.

Nota:

Observe que,

- El digrafo de una relación reflexiva se caracteriza por tener un bucle (ciclo de longitud uno) en cada uno de los vértices.
- La matriz de una relación reflexiva se caracteriza por tener todos los elementos de su diagonal principal iguales a uno. Es decir, si $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$, entonces

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva } \iff r_{ii} = 1, \forall i$$

y

$$\mathscr{R} \text{ no es reflexiva } \iff \exists i : r_{ii} = 0$$

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

Ejemplo:

Consideremos en el conjunto Z de los números enteros las relaciones "menor o igual que" y "menor que". Estudiar la reflexividad de ambas relaciones.

Solución:

(a) *"Menor o igual que".* $a\mathscr{R}b \Longleftrightarrow a \leqslant b$

Sea a cualquier número entero, entonces

$$a = a$$

luego,

$$a = a \ \vee a < a$$

es decir,

$$a \leqslant a$$

por tanto,

$$\forall a \, (a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a\mathscr{R}a)$$

Consecuentemente, la relación propuesta es *reflexiva.*

(b) *"Menor que".* $a\mathscr{R}b \Longleftrightarrow a < b.$

Sea a cualquier número entero, entonces

$$a = a$$

es decir, a no es menor que a, de aquí que

$$a \not\mathscr{R} a$$

por tanto,

$$\exists a : (a \in \mathbb{Z} \wedge a \not\mathscr{R} a)$$

luego $\mathscr{R}$ no es una relación *reflexiva.*

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

Simetría.

Una relación binaria $\mathscr{R}$ sobre un conjunto A es simétrica si cada vez que a está relacionado con b se sigue que b está relacionado con a. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \iff \forall a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \Longrightarrow b\mathscr{R}a)$$

La equivalencia.

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \iff \forall a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \Longrightarrow b\mathscr{R}a)$$

puede escribirse en la forma

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \iff \forall a, b \in A\,[\neg\,(a\mathscr{R}b)\ \vee\ b\mathscr{R}a]$$

y si ahora negamos ambos miembros, tendremos

$$\neg\,(\mathscr{R} \text{ es simétrica}) \iff \neg\forall a, b \in A\,[\neg\,(a\mathscr{R}b)\ \vee\ b\mathscr{R}a]$$

es decir,

$$\neg\,(\mathscr{R} \text{ es simétrica}) \iff \exists a, b \in A : \neg\,[\neg\,(a\mathscr{R}b)\ \vee\ b\mathscr{R}a]$$

de aquí que

$$\mathscr{R} \text{ es no simétrica} \iff \exists a, b \in A : (a\mathscr{R}b\ \wedge\ b\not\mathscr{R}\,a)$$

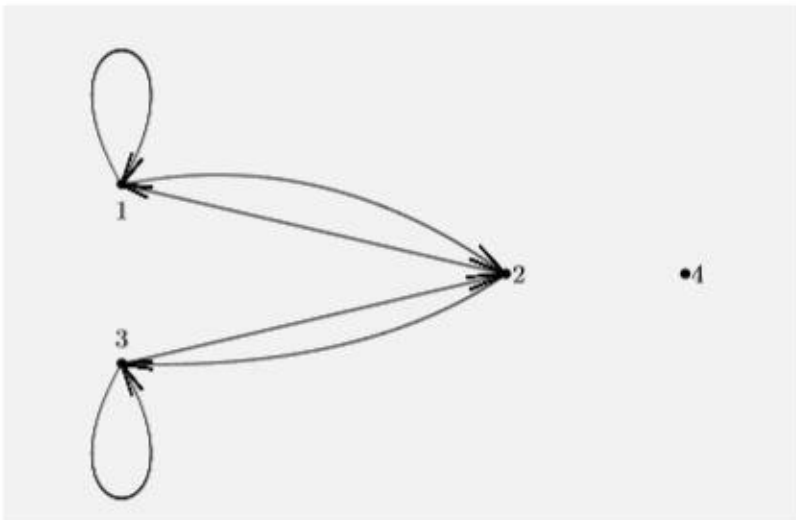
O sea, si podemos encontrar dos elementos a y b en A tales que a esté relacionado con b y b no lo esté con a, entonces $\mathscr{R}$ es *no simétrica.*

Ejemplo:

Sea A ={1,2,3,4} y R ={(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)} una relación definida en A.

¿Es simétrica? Dibujar el digrafo y escribir la matriz de la relación.

Solución:



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Simétrica

En efecto, R es simétrica ya que para cada par (a, b)∈ R, el par (b, a) también pertenece a R. El dígrafo y la matriz de R se muestran en la figura anterior.

Nota.

Observe lo siguiente.

- Si D es el digrafo de una relación simétrica, entonces entre cada dos vértices distintos de D existen dos aristas o no existe ninguna.
- La matriz $M_{\mathscr{R}} = (m_{ij})$ de una relación simétrica, satisface la propiedad de que todo par de elementos colocados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales. Luego si $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$ es la matriz de $\mathscr{R}$, entonces

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow r_{ij} = r_{ji}, \forall i, j$$

y

$$\mathscr{R} \text{ es no simétrica} \Longleftrightarrow \exists i, j : r_{ij} \neq r_{ji}$$

Asimetría.

Una relación binaria $\mathscr{R}$ definida en un conjunto A se dice que es asimétrica si cada vez que $a\mathscr{R}b$ se sigue que $b\not\mathscr{R}a$. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es asimétrica} \iff \forall a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \implies b\not\mathscr{R}\,a)$$

Nota.

$$\mathscr{R} \text{ es asimétrica} \iff \forall a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \implies b\not\mathscr{R}\,a)$$

puede escribirse en la forma

$$\mathscr{R} \text{ es asimétrica} \iff \forall a, b \in A\,(a\not\mathscr{R}\,b \vee b\not\mathscr{R}\,a)$$

de donde negando ambos miembros, resulta

$$\mathscr{R} \text{ no es asimétrica} \iff \exists a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \wedge b\mathscr{R}a)$$

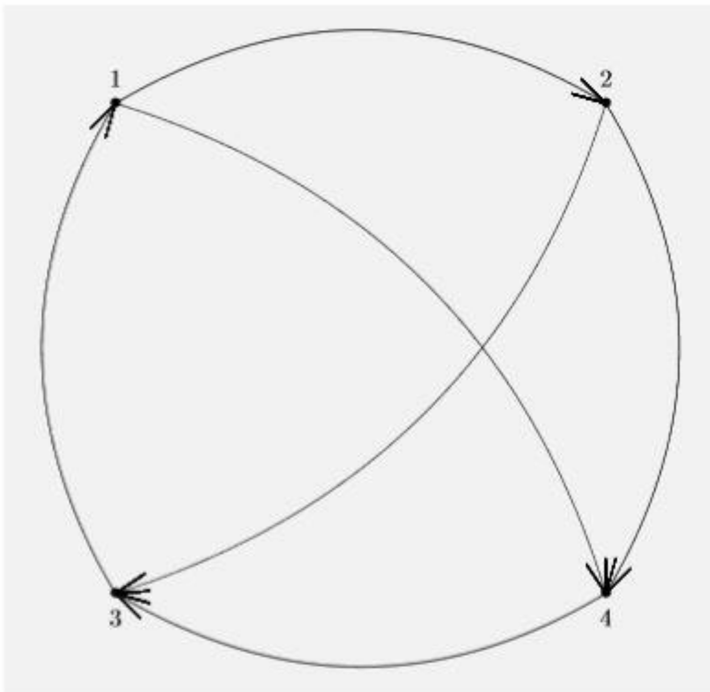
Ejemplo.

Sea A ={1,2,3,4} y R ={(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(4,3)} una relación definida en A.

¿Es asimétrica? Dibujar el dígrafo y escribir la matriz de la relación.

Solución:

$\mathscr{R}$ es, en efecto, asimétrica ya que para cada par (a, b) que pertenece a $\mathscr{R}$, el par (b, a) no pertenece.



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Asimétrica

El digrafo y la matriz se muestran en la figura anterior.

Nota.

- Si D es el digrafo de una relación asimétrica, entonces entre cada dos vértices distintos del mismo, existe un arco o no existe ninguno.
- La matriz $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$ de una relación asimétrica, satisface la propiedad de que si $i \neq j$, entonces $r_{ij} = 0$ ó $r_{ji} = 0$.

Antisimetria.

Una relación binaria $\mathscr{R}$ sobre un conjunto A se dice antisimétrica si cuando $(a,b) \in \mathscr{R}$ y $(b,a) \in \mathscr{R}$, entonces $a = b$. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A(a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}a \Longrightarrow a = b)$$

Obsérvese que en virtud de la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca,

otra forma de expresar esta definición es

$$\begin{aligned} \mathscr{R} \text{ es antisimétrica} &\Longleftrightarrow \forall a, b \in A\,(a \neq b \Longrightarrow a\not\mathscr{R}\, b \ \vee \ b\not\mathscr{R}\, a) \\ &\Longleftrightarrow \forall a, b \in A\,[a \neq b \Longrightarrow (a\not\mathscr{R}\, b \wedge b\mathscr{R}a) \vee (a\mathscr{R}b \wedge b\not\mathscr{R}\, a) \vee (a\not\mathscr{R}\, b \wedge b\not\mathscr{R}\, a)] \end{aligned}$$

Nota. La equivalencia.

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A(a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}a \Longrightarrow a = b)$$

la podemos escribir en la forma

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A\,[\neg\,(a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}a) \ \vee \ (a = b)]$$

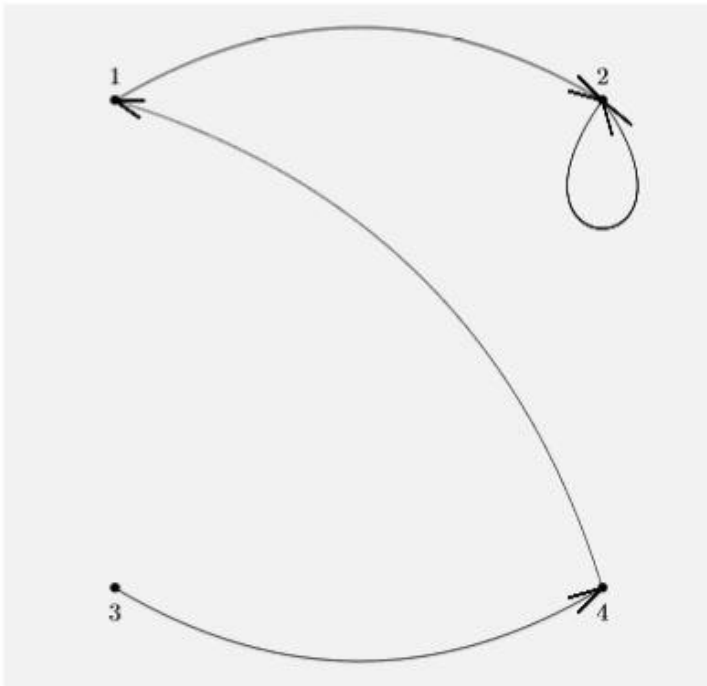
de donde, negando ambos miembros, resulta

$$\mathscr{R} \text{ es no antisimétrica} \Longleftrightarrow \exists a, b \in A : (a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}a \ \wedge \ a \neq b)$$

O sea, si podemos encontrar dos elementos a y b en A tales que a esté relacionado con b y b relacionado con a, siendo ambos distintos, entonces la relación es *no antisimétrica*.

Relaciones

Ejemplo: Sea A = {1, 2, 3, 4} y sea R = {(1,2),(2,2),(3,4),(4,1)} una relación definida en A. ¿Es antisimétrica? Dibujar el dígrafo y escribir la matriz de R.



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Antisimétrica

Observemos lo siguiente:

$1 \neq 2$ y $(1,2) \in \mathscr{R}$, pero $(2,1) \notin \mathscr{R}$, es decir $1\mathscr{R}2 \ \wedge \ 2\not\mathscr{R}1$.

$1 \neq 3$ y $(1,3) \notin \mathscr{R}$ y $(3,1) \notin \mathscr{R}$, es decir $1\not\mathscr{R}3 \ \wedge 3\not\mathscr{R}1$.

$1 \neq 4$ y $(4,1) \in \mathscr{R}$, pero $(1,4) \notin \mathscr{R}$, es decir $4\mathscr{R}1 \ \wedge \ 1\not\mathscr{R}4$.

$2 \neq 3$ y $(2,3) \notin \mathscr{R}$, $(3,2) \notin \mathscr{R}$, es decir $2\not\mathscr{R}3 \ \wedge 3\not\mathscr{R}2$.

$2 \neq 4$ y $(2,4) \notin \mathscr{R}$, $(4,2) \notin \mathscr{R}$, es decir $2\not\mathscr{R}4 \ \wedge 4\not\mathscr{R}2$.

$3 \neq 4$ y $(3,4) \in \mathscr{R}$, pero $(4,3) \notin \mathscr{R}$, es decir $3\mathscr{R}4 \ \wedge \ 4\not\mathscr{R}3$.

luego,

$$\text{si } a \neq b, \text{ entonces } (a,b) \notin \mathscr{R} \text{ ó } (b,a) \notin \mathscr{R}$$

de aquí que $\mathscr{R}$ sea antisimétrica.

El digrafo y la matriz de $\mathscr{R}$ se muestran en la figura anterior.

Ejemplo 2:

En el conjunto Z de los números enteros, consideramos la relación R ={(a,b)∈Z×Z : a 6 b}, es decir, la relación "menor o igual que". ¿Es simétrica?, ¿Es antisimetrica?

Solución:

Simetría.

Considerando los enteros 1 y 2, tendremos que

$$1 \text{ es menor que } 2 \text{ y } 2 \text{ no es menor que } 1$$

es decir,

$$1\mathscr{R}2 \text{ y } 2\not\mathscr{R}\,1$$

luego,

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : (a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\not\mathscr{R}\,a)$$

de aquí que por 4, la relación propuesta sea *no simétrica.*

Antisimetría.

Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$\begin{aligned} a \neq b \quad &\Longrightarrow \quad a < b \ \vee \ b < a \\ &\Longrightarrow \quad \neg(b \leqslant a) \ \vee \ \neg(a \leqslant b) \\ &\Longrightarrow \quad a\not\mathscr{R}\,b \ \vee \ b\not\mathscr{R}\,a \end{aligned}$$

Consecuentemente, tendremos que

$$\forall a, b \in A\,(a \neq b \Longrightarrow a\not\mathscr{R}\,b \ \vee \ b\not\mathscr{R}\,a)$$

de aquí que la relación propuesta sea *antisimétrica.*

Veamos otra forma de probar la antisimetría.

$$\left.\begin{array}{l} a\mathscr{R}b \Longleftrightarrow a \leqslant b \Longrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}_0^+ : b = a + p \\ \text{y} \\ b\mathscr{R}a \Longleftrightarrow b \leqslant a \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}_0^+ : a = b + q \end{array}\right\} \Longrightarrow a = a + p + q \Longrightarrow p + q = 0 \Longrightarrow p = q = 0 \Longrightarrow a = b$$

Transitividad.

Se dice que una relación $\mathscr{R}$ definida en un conjunto A es transitiva si cuando $(a, b) \in \mathscr{R}$ y $(b, c) \in \mathscr{R}$, entonces $(a, c) \in \mathscr{R}$. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es transitiva} \Longleftrightarrow \forall a, b, c \in A\,(a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}c \Longrightarrow a\mathscr{R}c)$$

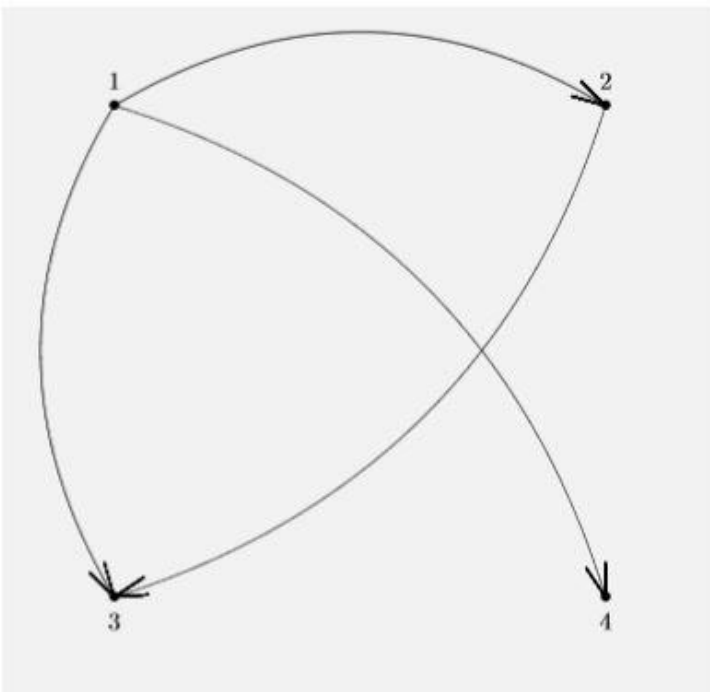
Nota. Negando los dos miembros de la equivalencia anterior, tendremos.

$$\mathscr{R} \text{ es no transitiva} \iff \exists a, b, c \in A : a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}c \ \wedge \ a\not\mathscr{R}\, c$$

es decir, la relación $\mathscr{R}$ no es transitiva, si podemos encontrar elementos a, b, c en A tales que $a\mathscr{R}b$ y $b\mathscr{R}c$, pero $a\not\mathscr{R}\, c$.

Ejemplo: Sea A = {1,2,3,4} y R = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3)} una relación definida sobre A. ¿Es transitiva? Dibujar el diágrafo y escribir la matriz de la relación.

Solución.



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Transitiva

En efecto, $\mathscr{R}$ es transitiva porque si $(a, b) \in \mathscr{R}$ y $(b, c) \in \mathscr{R}$, también está en $\mathscr{R}$ el par (a, c).

El digrafo y la matriz de $\mathscr{R}$ se muestran en la figura.

Nota.

- Si D es el digrafo de una relación transitiva y existen arcos desde a hasta b y desde b hasta c, entonces existirá un arco desde a hasta c. Por lo tanto, y existe un camino de longitud mayor que cero desde a hasta b, entonces existe un arco (camino de longitud uno) desde a hasta b.

- Es posible caracterizar la relación transitiva por su matriz $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$,

$$\mathscr{R} \text{ es transitiva } \iff (r_{ij} = 1 \ \wedge \ r_{jk} = 1 \Longrightarrow r_{ik} = 1)$$

y

$$\mathscr{R} \text{ es no transitiva } \iff r_{ij} = 1 \ \wedge \ r_{jk} = 1 \ \wedge r_{ik} = 0$$

■