UNIVERSIDAD DE
SAN BUENAVENTURA
CALI

Guía

Lógica Proposicional

Tema IV: Tablas de Verdad

1.1 CALCULO PROPOSICIONAL

1.1.1. FORMULAS.

Con estos cinco conectivos lógicos con los que se han trabajados expresiones tales como $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ y $\neg p$; se construyen proposiciones compuestas más complejas, haciendo combinaciones de las anteriores. Entonces es necesario especificar la manera en que los símbolos (variables proposicionales y conectores lógicos) pueden colocarse juntos.

DEFINICIÓN. Fórmula.

Fórmula es una expresión que contiene una secuencia finita o cadena de variables proposicionales simples o atómicas (p, q, r, etc.) y conectores lógicos ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, etc.) que satisface las siguientes reglas:

(1) Cualquier variable proposicional es una fórmula.

(2) Si p es una fórmula, entonces $\neg p$ es una fórmula.

(3) Si p y q son fórmulas, entonces $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ y $\neg p$ son fórmulas.

El valor de verdad de una fórmula dependerá de los valores de verdad de las variables proposicionales simples o atómicas que la componen. El número de combinaciones que tengamos en una tabla de verdad dependerá del número de variables proposicionales distintas que intervengan en la fórmula, siendo igual a 2^n, donde n es el número de variables proposicionales diferentes que intervienen en ella.

Ejemplo ilustrativo: Construir la tabla de verdad para la fórmula

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q:$$

Solución:

En este caso, en la fórmula intervienen dos variables proposicionales distintas, por lo tanto se tienen $2^2 = 4$ combinaciones posibles.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge (\neg p)$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q.$
V	V	V	F	F	V

V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

DEFINICIÓN. Fórmula tautológica.

Se dice que una fórmula es ***tautológica*** o ***tautología*** si y sólo si su valor de verdad es *verdadero*, independientemente de que los valores de verdad de sus variables proposicionales componentes sean falsos o verdaderos. Es decir, una ***tautología*** es una proposición compuesta que siempre es verdadera.

En la Lógica, tenemos varias tautologías que son importantes. Entre ellas, tenemos:

- La ley del medio excluido: $p \vee \neg p$
- La ley de no contradicción: $\neg (p \wedge \neg p)$
- La ley de la inferencia contrapositiva (o Modus Tollendo Tollens):
  $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)] \rightarrow \neg p$

Ejemplo:

p	q	(pvq)	(pvq)→q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	r	(p→q)	(q→r)	(p→q)^(q→r)	(p→r)	[(p→q)^(q→r)]→(p→r)]
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

p	q	r	s	(p→q)	(r^~s)	q→(r^~s)	(p→q)^[q→(r^~s)]	(rvs)	p→(rvs)	{(p→q)^[q→(r^~s)]}→[p→(rvs)]
V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V

Ejemplo ilustrativo: Mostrar, mediante una tabla de verdad, la veracidad de ley de la inferencia contrapositiva (o Modus Tollendo Tollens):

$$[(p \to q) \wedge (\neg q)] \to \neg p$$

Solución:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)$	$\neg p$	$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)] \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

DEFINICIÓN. Fórmula contradictoria.

Se dice que una fórmula es ***contradictoria*** o una ***contradicción*** si y sólo si su valor de verdad es *falso*, independientemente de que los valores de verdad de sus variables proposicionales componentes sean falsos o verdaderos. Es decir, una ***contradicción*** es una proposición compuesta que siempre es falsa.

Ejemplo:

p	q	(pvq)	(pvq)→q	~[(pvq)→q]
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

Lógica Proposicional

p	q	r	(p→q)	(q→r)	(p→q)^(q→r)	(p→r)	[(p→q)^(q→r)]→(p→r)]	~[(p→q)^(q→r)]→(p→r)]
V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	F

p	q	r	s	(p→q)	(r^~s)	q→(r^~s)	(p→q)^[q→(r^~s)]	(rvs)	p→(rvs)	(p→q)^[q→(r^~s)]}→[p→(rvs)]	~ {(p→q)^[q→(r^~s)]}→[p→(rvs)]}
V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F
V	V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F

F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	F

Ejemplo ilustrativo 1: Mostrar, mediante una tabla de verdad, la ley de contradicción: $p \wedge \neg p$.

Solución:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Ejemplo ilustrativo 2: Probar que la expresión $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$ es una contradicción:

Solución:

		A			**B**	
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	**A** $\leftrightarrow$ **B**
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F

F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

DEFINICIÓN. Fórmula sintética o contingencia.

Se dice que una fórmula es ***sintética*** o ***contingencia*** si y sólo si la misma no es una tautología ni una contradicción.

Ejemplo:

p	q	(p^q)	(p^q)↔p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

Lógica Proposicional

p	q	r	(p^q)	(p^q)↔r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

p	q	r	s	(p↔q)	(r^s)	(p↔q)→(r^s)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F

Ejemplo ilustrativo: Mostrar que la fórmula no es tautología ni contradicción:

$$[p \rightarrow (\neg\, q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg\, r)]$$

Solución:

En este caso, en la fórmula intervienen 3 variables proposicionales distintas, por lo tanto se tienen $2^3 = 8$ combinaciones posibles.

					A			**B**	
p	q	r	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$\boldsymbol{p \rightarrow (\neg\, q \vee r)}$	$p \wedge q$	$\neg r$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \vee (\neg\, r)}$	**A ↔ B**
V	V	V	F	V	**V**	V	F	**V**	**V**
V	V	F	F	F	**F**	V	V	**V**	**F**
V	F	V	V	V	**V**	F	F	**F**	**F**
V	F	F	V	V	**V**	F	V	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**V**	F	F	**F**	**F**
F	V	F	F	F	**V**	F	V	**V**	**V**
F	F	V	V	V	**V**	F	F	**F**	**F**

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

F	F	F	V	V	**V**	F	V	**V**	**V**

La expresión $[p \to (\neg q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg r)]$ representa una fórmula sintética o contingencia.

1.1.2. REGLAS DEL CÁLCULO PROPOSICIONAL

DEFINICIÓN. Proposiciones Lógicamente Equivalentes.

Las proposiciones compuestas P y Q son lógicamente equivalentes si y solo si siempre tienen el mismo valor de verdad; es decir, $P \Leftrightarrow Q$ es siempre una tautología. Algunas veces se denota por $P \equiv Q$. En este artículo se usa el símbolo $\Leftrightarrow$ para denotar que P y Q son lógicamente equivalentes.

Se presenta a continuación una lista de importantes tautologías seleccionadas por su utilidad. Estas tautologías pueden demostrarse con tablas de verdad. En la lista V representa una tautología y F una contradicción.

1. *Leyes de identidad*:	**a.** $(p \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow p$	**b.** $(p \wedge \mathrm{V}) \Leftrightarrow p$
2. *Leyes de dominación*:	**a.** $(p \vee \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$	**b.** $(p \wedge \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

3. *Leyes de Idempotencia*:	**a.** $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ **b.** $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
4. *Ley de la doble negación*:	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
5. *Ley de contradicción*:	$(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow \mathrm{F}$
6. *Ley de la no contradicción*:	$\neg(p \wedge \neg p)$
7. *Ley de complemento*	$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow \mathrm{V}$
8. *Ley del tercio excluido*:	$p \vee \neg p$
9. *Leyes conmutativas*:	**a.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ **b.** $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ **c.** $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$
10. *Leyes asociativas*:	**a.** $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$ **b.** $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$ **c.** $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$
11. *Leyes distributivas*:	**a.** $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ **b.** $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ **c.** $[p \rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

	d. $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \to q) \vee (p \to r)]$
12. *Leyes transitivas*:	**a.** $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$ **b.** $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$
13. *Leyes de Demorgan*:	**a.** $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ **b.** $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
14. *Leyes de implicación*: (*Equivalencias del condicional*)	**a.** $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ **b.** $(p \to q) \Leftrightarrow [\neg (p \wedge \neg q)]$ **c.** $\neg (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
15. *Ley de la contrarrecíproca:* (*o de la contraposición*)	$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
16. *Ley de reducción al absurdo*:	$[(p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)] \Leftrightarrow (p \to q)$
17. *Ley del razonamiento directo:* (*Modus Ponendo Ponens*)	$[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$
18. *Ley del razonamiento indirecto:* (*Modus Tollendo Tollens*)	$[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
19. *Ley del silogismo disyuntivo:*	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$

(*Modus Tollendo Ponens*)	
20. *Leyes de simplificación*:	**a.** $(p \wedge q) \Rightarrow p$ **b.** $(p \wedge q) \Rightarrow q$
21. *Ley de adjunción o adición*:	$p \Rightarrow (p \vee q)$
22. *Ley de inferencia por casos*:	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$
23. *Equivalencias del condicional*:	**a.** $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)$ **b.** $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \vee r)$ **c.** $[(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$
24. *Equivalencias del bicondicional*:	**a.** $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ **b.** $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$ **c.** $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$ **d.** $\neg (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$