UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

Guía

Álgebra Booleana

Tema I: Álgebra de Boole

AXIOMAS DEL ALGEBRA DE BOOLE

Sea B un conjunto en el cual se han definido dos operaciones binarias, + y * (En algunos casos se definen en términos de $\vee$ y $\wedge$ respectivamente), y una operación unaria, denotada **'**. Entonces a la terna $\langle B, +, * \rangle$ se le denomina **Algebra Booleana** si se cumplen los siguientes axiomas o leyes:

B1) Leyes Conmutativas. Las dos operaciones son conmutativas:

Para todos los elementos $x, y \in B$, se cumple que:

1A) $x + y = y + x$ **1B)** $x * y = y * x$

B2) Leyes Distributivas. Cada operación es distributiva con respecto a la otra:

Para todos los elementos $x, y, z \in B$, se cumple que:

2A) $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$ **2B)** $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

B3) Leyes Modulativas. Cada operación binaria es modulativa y los módulos son diferentes:

Para todo $x \in B$, existen dos elementos diferentes 0 y 1 en B tales que:

3A) $x + 0 = 0 + x = x$ **3B)** $x * 1 = 1 * x = x$

B4) Leyes de Complemento.

Para todo elemento $x \in$ B existe un elemento $x' \in$ B tal que:

4A) $x + x' = 1$ **4B)** $x * x' = 0$

Ejemplos de estructuras booleanas

Ejemplo 1. La siguiente es una de las Álgebras Booleanas con aplicación directa a los circuitos de distribución. Para futuras referencias se denominará **Álgebra Binaria de Boole**.

Sea el conjunto B = {0, 1} en el cual se definen las operaciones + y * de acuerdo a las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Supongamos que los complementos se definen por $1' \equiv 0$ y $0' \equiv 1$.

(Observe la relación de estas tablas con la disyunción ($\vee$) y la conjunción ($\wedge$) respectivamente, y la relación de los complementos con la negación de una proposición)

Demostrar que $\langle B, +, *, ' \rangle$ es un álgebra booleana, mostrando que se satisfacen los axiomas B1 a B4.

Solución:

B1) Las leyes conmutativas de las operaciones + y * se evidencian en la simetría de la matriz de resultados en ambas tablas.

B2) Establecer la distributividad de cada una de las operaciones con respecto a la otra exige calcular el resultado de ocho combinaciones posibles en cada caso.

Para **2A)** $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$:

				A			B
x	y	z	$y * z$	$x + (y * z)$	$x + y$	$x + z$	$(x + y) * (x + z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Álgebra Booleana

1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Observe que las columnas A y B son iguales

Para la forma **2B)** $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

				A			B
x	y	z	$y + z$	$x * (y + z)$	$x * y$	$x * z$	$(x * y) + (x * z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1

1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Observe que las columnas A y B son iguales

B3) En la tabla de la operación + es fácil observar que 0 es el módulo de esta operación y en la tabla de * análogamente se puede ver que 1 es el módulo; en efecto:

$0 + 0 = 0;$ $1 + 0 = 1$ y $0 * 1 = 0;$ $1 * 1 = 1.$

B4) Se han definido $1' = 0$ y $0' = 1$, de esta manera se puede observar que para cada elemento de B existe un complemento tal que:

$0 + 0' = 0 + 1 = 1$ y $1 + 1' = 1 + 0 = 1$

$0 * 0' = 0 * 1 = 0$ y $1 * 1' = 1 * 0 = 0$

De esta manera se ha demostrado que $\langle B, +, *, ' \rangle$ es una Algebra Booleana.

Ejemplo 2. Sea la familia $P(U)$ de conjuntos de U, demostrar que $\langle P(U), \cup, \cap, ' \rangle$ es un Álgebra de Boole para cada conjunto U.

Sugerencia: $B \equiv P(U)$, $+ \equiv \cup$, $* \equiv \cap$, $0 \equiv \phi$ y $1 \equiv U$

***Solución*:** A continuación se verifican los cuatro axiomas de las álgebras booleanas:

B1) Las dos operaciones unión ($\cup$) e intersección ($\cap$) son conmutativas para todo $A, B \in P(U)$:

1A) $A \cup B = B \cup A$ **1B)** $A \cap B = B \cap A$

B2) La unión es distributiva con respecto a la intersección para todos los conjuntos $A, B, C \in P(U)$, y recíprocamente:

2A) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **2B)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

B3) Para todo $A \in P(U)$ existen $\phi \in P(U)$ y $U \in P(U)$ tal que

3A) $A \cup \phi = A$ **3A)** $A \cap U = A$

B4) Para cada $A \in P(U)$, existe el complemento de A, esto es $A' = U - A$, con $A' \in P(U)$, tal que satisface las siguientes relaciones:

4A) $A \cup A' = U$ **4B)** $A \cap A' = \phi$

Así queda demostrado que $\langle P(U), \cup, \cap, ' \rangle$ es un Álgebra de Boole.

Ejemplo 3. Sean $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$, los divisores enteros positivos de 15. Se definen +, * y ' de la siguiente manera:

$x + y \equiv$ MCM (x, y): mínimo común múltiplo de x y y;

$x * y \equiv$ MCD (x, y): máximo común divisor de x y y, y

$x' \equiv 15/x$.

Demuestre que esta estructura así definida $\langle D_{15}, +, *, ' \rangle$ es un Álgebra Booleana.

***Solución*:** Verifiquemos los axiomas del álgebra booleana:

B1) La conmutatividad de las operaciones se evidencia, pues $x + y = y + x$, equivale a MCM (x, y) = MCM (y, x) y $x * y = y * x$, significa que MCD (x, y) = MCD (y, x). Es decir, no importa el orden al obtener los resultados de un par de elementos del conjunto D_{15} para el MCM y el MCD. Esto se muestra en la simetría de la matriz de resultados en cada una de las siguientes tablas:

+	1	3	5	15
1	1	3	5	15
3	3	3	15	15
5	5	15	5	15
15	15	15	15	15

*	1	3	5	15
1	1	1	1	1
3	1	3	1	3
5	1	1	5	5
15	1	3	5	15

B2) Examinemos la distributividad de una operación respecto a la otra:

2A) Para la forma $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$ es equivalente a tener

MCM $[x, (y * z)]$ = MCD $[(x + y), (x + z)]$

MCM $[x$, MCD $(y, z)]$ = MCD [MCM (x, y), MCM (x, z)]

veamos algunos ejemplos que se condensan en la siguiente tabla:

				A			B
x	y	z	$y * z$	$x + (y * z)$	$x + y$	$x + z$	$(x + y) * (x + z)$
			MCD (y, z)	MCM [x, MCD (y, z)]	MCM (x, y)	MCM (x, z)	MCD [MCM (x, y), MCM (x, z)]
1	3	5	1	1	3	5	1
3	5	15	5	15	15	15	15
5	15	3	3	15	15	15	15
15	1	3	1	15	15	15	15

Observe que las columnas A y B son iguales

2B) Para la forma $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ es equivalente a tener

MCD [x, ($y + z$)] = MCM [($x * y$), ($x * z$)]

MCD [x, MCM(y, z)] = MCM [MCD (x, y), MCD (x, z)]

veamos algunos casos en la siguiente tabla:

				A			B
x	y	z	$y + z$	$x * (y + z)$	$x * y$	$x * z$	$(x * y) + (x * z)$
			MCM (y, z)	MCD [x, MCM (y, z)]	MCD (x, y)	MCD (x, z)	MCM [MCD (x, y), MCD (x, z)]
1	3	5	15	1	1	1	1
3	5	3	15	3	1	3	3
5	5	1	5	5	5	1	5
15	1	3	3	3	1	3	3

Observe que las columnas A y B son iguales
Por lo tanto, cada operación es distributiva con respecto a la otra.

B3) Sean $0 \equiv 1$, $1 \in D_{15}$ es el módulo de +, y $1 \equiv 15$, $15 \in D_{15}$ es el módulo de *.

3A) Así $x + 0 = 0 + x = x$; esto es, para todo $x \in D_{15}$,

$$\text{MCM}\ (x, 1) = \text{MCM}\ (1, x) = x.$$

3B) $x * 1 = 1 * x = x$, es decir, para todo $x \in D_{15}$,

$$\text{MCD}(x, 15) = \text{MCD}(15, x) = x.$$

Por lo tanto, las dos operaciones son modulativas.

B4) Para cada $x \in D_{15}$ existe $x' \in D_{15}$ tal que $x + x' = 1$ y $x * x' = 0$. Esto es:

4A) Para $x + x' \equiv \text{MCM}(x, x') = \text{MCM}(x, 15/x) = 15$;

veamos un caso, $5 + 5' \equiv \text{MCM}(5, 5') = \text{MCM}(5, 3) = 15$.

4B) Para $x * x' \equiv \text{MCD}(x, x') = \text{MCD}(x, 15/x) = 1$,

un caso es $3 * 3' \equiv \text{MCD}(3, 3') = \text{MCD}(3, 15/3) = \text{MCD}(3, 5) = 1$.

Esto demuestra que D_{15} con las operaciones MCM y MCD es un Algebra Booleana.

RESULTADOS QUE SE DERIVAN DE LOS AXIOMAS DE LAS ALGEBRAS DE BOOLE

EXPRESIONES BOOLEANAS.

Definición. Sea $B = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ un conjunto de n símbolos o variables. Una **expresión booleana** $E(x_1, x_2, \ldots x_n)$ o un **polinomio booleano** en $x_1, x_2, \ldots x_n$ se define recursivamente como sigue:

1. Los símbolos o variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ son expresiones booleanas.
2. Los símbolos 0 y 1 son expresiones booleanas.
3. Si $E_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ y $E_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$ son expresiones booleanas en $x_1, x_2, \ldots x_n$ entonces también los son $E_1(x_1, x_2, \ldots x_n) + E_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $E_1(x_1, x_2, \ldots x_n) * E_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$, y $[E_1(x_1, x_2, \ldots x_n)]'$.

Observación: De acuerdo al uso en el álgebra clásica, se abrevia $x * y$ como xy. Igualmente se asume que * se evalúa antes que +; esto permite en algunos casos eliminar ciertos paréntesis. Por ejemplo, se puede escribir $xy + z$ en lugar de $(x * y) + z$.

B5) TEOREMA 1. Leyes de Idempotencia. Todo elemento de un Álgebra Booleana es idempotente. Para todo elemento $x \in$ B; se cumple que:

5A) $x + x = x$ y **5B)** $x * x = x$.

Demostración:

Demostración de **5A**:

$x + x = (x + x) * 1$	B3 (Ley modulativa)
$= (x + x) * (x + x')$	B4 (Ley de complemento)
$= x + (x * x')$	B2 (Ley distributiva)
$= x + 0$	B4 (Ley de complemento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

Demostración de **5B**:

$x * x = (x * x) + 0$	B3 (Ley modulativa)
$= (x * x) + (x * x')$	B4 (Ley de complemento)
$= x * (x + x')$	B2 (Ley distributiva)
$= x * 1$	B4 (Ley de complemento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

DEFINICION DE DUAL. El dual de una expresión E de un Álgebra Booleana, es la expresión que resulta a partir de E intercambiando + por * y 0 por 1 y recíprocamente, en cada operación de estos símbolos.

Ejemplo ilustrativo:

1. Sea la expresión $E_1 = x + y * (z + 1)$,

el dual es la expresión $E_1^d = x * (y + z * 0)$.

2. Dada la ecuación $E_2 = x + xz' = x$,

su dual es la ecuación $E_2^d = x * (x + z') = x$

PRINCIPIO DE LA DUALIDAD. Si el teorema T es deducible de los axiomas de un Algebra de Boole, entonces el dual de T, que se denota por T^d, es también deducible y para deducirlo basta cambiar cada expresión surgida en la demostración de T, por su dual.

Observe la demostración del Teorema 1, realizada anteriormente, la demostración de **5B** se obtiene a partir de **5A**, realizando los cambios respectivos previstos + por * y 1 por 0, y recíprocamente. **5B** es el T^d de **5A**.

B6) TEOREMA 2. Leyes de acotamiento. Para todo $x \in B$, se verifica que:

6A) $x + 1 = 1$ y **6B)** $x * 0 = 0$.

Demostración:

Demostración de **6A**:

$x + 1 = 1 * (x + 1)$	B3 (Ley modulativa)
$= (x + x') * (x + 1)$	B4 (Ley de complemento)
$= x + (x' * 1)$	B2 (Ley distributiva)
$= x + x'$	B3 (Ley modulativa)

$= 1$ B4 (Ley de complemento)

La demostración de **6B** $x * 0 = 0$ se omite, ya que por el principio de la dualidad se puede deducir de manera análoga tomando el dual en cada paso de la demostración de **6A** (el lector puede demostrarlo).

B7) TEOREMA 3. Leyes de absorción. Para todo $x, y \in B$, se verifica que:

7A) $x + (x * y) = x$ y **7B)** $x * (x + y) = x$.

***Demostración*:**

Demostración de **7A**:

$x + (x * y) = x * 1 + (x * y)$	B3 (Ley modulativa)
$= x * (1 + y)$	B2 (Ley distributiva)
$= x * (y + 1)$	B1 (Ley conmutativa)
$= x * 1$	B6 (Teorema 2: Ley de acotamiento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

La parte **7B** se da por demostrada por el principio del dualismo (el lector puede demostrarlo)

B8) TEOREMA 4. Unicidad del complemento. Para cada $x \in B$, siendo B un Algebra de Boole, el complemento de x, denotado por x', es único.

***Demostración*:** La demostración se hará por contradicción.

Supongamos que $x \in B$ tiene dos complementos diferentes y y z, es decir, con $y \neq z$, entonces satisfacen las condiciones del axioma **B4**: por **4A)** $x + y = 1$ (2) y $x + z = 1$ (3), y por **4B)** $x * y = 0$ (4) y $x * z = 0$ (1)

$y = y + 0$	B3
$y = y + (x * z)$	Sustitución de (1) en 0
$y = (y + x) * (y + z)$	B2
$= (x + y) * (y + z)$	B1
$= 1 * (y + z)$	Sustitución de (2)
$= (x + z) * (y + z)$	Sustitución de (3)

$= (x * y) + z$ B2

$= 0 + z$ Sustitución de (4)

$= z$ B3

Entonces $y = z$. Lo cual es una contradicción (contradice la condición de la hipótesis $y \neq z$).

B9) TEOREMA 5. Leyes de D'Morgan. Para todo $x, y \in B$, se verifica que:

8A) $(x + y)' = x' * y'$ y **8B)** $(x * y)' = x' + y'$.

***Demostración*:**

Demostración de **8A)**: Mostraremos que $x' * y'$ satisface las condiciones que caracterizan el complemento de $(x + y)$, que es único.

1º) $(x + y) + (x' * y') = (x + y + x') * (x + y + y')$ B2

$= (x + x' + y) * (x + y + y')$ B1

$= (1 + y) * (x + 1)$ B4

$= 1 * 1$ B6: Teorema 2

$= 1$ B3

2º) $(x + y) * (x' * y') = x * (x' * y') + y * (x' * y')$	B2
$= (x * x')\, y' + (y * y')\, x'$	B1 y Propiedad asociativa
$= 0 * y' + 0 * x'$	B4
$= 0 + 0$	B6: Teorema 2
$= 0$	B3

En conclusión $(x + y)' = x' * y'$.

Por el principio del dualismo **8B** se da por demostrado (el lector puede comprobarlo).

B10) TEOREMA 6. Leyes asociativas. Para todo $x, y, z \in$ B, se verifica que:

9A) $(x + y) + z = x + (y + z)$ y **9B**) $(x * y) * z = x * (y * z)$

Demostración:

Demostraremos **9B)**: Sea L = $(x * y) * z$ y R = $x * (y * z)$; entonces tenemos que demostrar que L = R. Primero demostraremos que x + L = x + R.

$x + \mathrm{L} = x + [(x * y) * z]$

$= [x + (x * y)] * (x + z)$

$= x * (x + x)$

$= x$

$x + \mathrm{R} = x + [x * (y * z)]$

$= (x + x) * (x + (y * z)]$

$= x * [x + (y * z)$

$= x$

Así, $x + \mathrm{L} = x + \mathrm{R}$.

Ahora demostremos que $x' + \mathrm{L} = x' + \mathrm{R}$.

$x' + \mathrm{L} = x' + [(x * y) * z]$

$= [x' + (x * y) * (x' + z)$

$= [(x' + x) * (x' + y') * (x' + z)]$

$=[1 * (x' + y) * (x' + z)$

$=(x' + y) * (x' + z)$

$= x' + (y * z)$

$x' + R = x' + [x * (y * z)]$

$= (x' + x) * [x' + (y * z)]$

$= 1 * [x' + (y * z)]$

$= x' + (y * z)$

De donde $x' + L = x' + R$. En consecuencia,

$L = L + 0 = L + (x * x')$

$= (L + x) * (L + x')$

$= (x + L) * (x' + L)$

$= (x + R) * (x' + R)$

$= (R + x) * (R + x')$

$= R + (x * x') = R + 0 = R$

Por el principio de dualismo **9A** se da por demostrado.

B11) TEOREMA 7. Ley de involución. Para cada $x \in B$, $(x')' = x$.

B12) TEOREMA 8. Leyes para el 0 y el 1. $0' = 1$ y $1' = 0$.