Guía Relaciones

Tema I: Relaciones

Relacion.

Sean los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Una relación $\mathscr{R}$ sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es cualquier subconjunto de este producto cartesiano, es decir,

$$\mathscr{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Si $\mathscr{R} = \emptyset$, llamaremos a $\mathscr{R}$, la relación vacía.

Si $\mathscr{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, llamaremos a $\mathscr{R}$ la relación universal.

Si $A_i = A, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathscr{R}$ es una relación n-aria sobre A.

Si $n = 2$, diremos que $\mathscr{R}$ es una relación binaria y si $n = 3$, una relación ternaria.

Igualdad de Relaciones.

Sean $\mathscr{R}_1$ una relación n-aria sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y $\mathscr{R}_2$ una relación n-aria sobre $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m$. Entonces $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$ si, y sólo si $n = m$ y $A_i = B_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ y $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son conjuntos de n-tuplas ordenadas iguales.

Relaciones Binarias.

La clase más importante de relaciones es la de las relaciones binarias. Debido a que este tipo de relaciones son las más frecuentes, el término "*relación*" denota generalmente una relación binaria; adoptaremos este criterio cuando no haya confusión y especificaremos las que no sean binarias con términos tales como "ternaria" o "n-aria".

Si $(a, b) \in \mathscr{R}$ diremos que a está relacionado con b y lo notaremos por $a\mathscr{R}b$.

Si $(a, b) \notin \mathscr{R}$, escribiremos $a \not\mathscr{R} b$ y diremos que a no está relacionado con b.

Ejemplo 1:

Sea A = {huevos, leche, maíz} y B = {vacas, cabras, gallinas}. Escribir la relación R de A a B definida por:

$$(a, b) \in \mathscr{R} \Longleftrightarrow a \text{ es producido por } b$$

Solución:

La relación sería:

$$\mathscr{R} = \{(\text{huevos,gallinas}), (\text{leche,vacas}), (\text{leche,cabras})\}$$

Ejemplo 2:

(a) Sea $\mathscr{R}$ la relación "menor que" definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

Escribiremos $3 < 5$ para indicar que $(3, 5) \in \mathscr{R}$ y $5 \not< 3$ para indicar que $(3, 5) \notin \mathscr{R}$

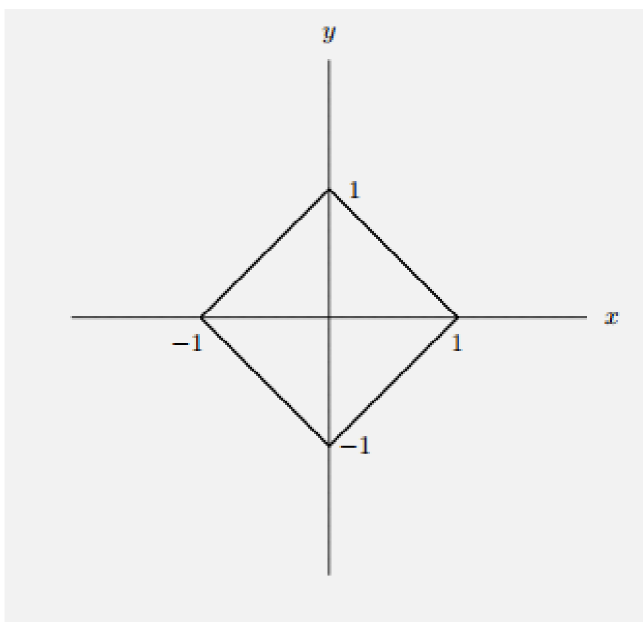
(b) Sea $\mathscr{R}$ la relación "es un múltiplo de" en el conjunto de los enteros positivos.

Entonces, $4\mathscr{R}2$ pero $2\not\mathscr{R}4$. Más generalmente, $x\mathscr{R}y$ si, y sólo si $x = ky$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. Así para todo x, $x\mathscr{R}1$. Si $p > 1$, entonces p es primo si $x\mathscr{R}p$ implica que $x = 1$ ó $x = p$. Un número x es impar si $x\not\mathscr{R}2$.

(c) Cuando un compilador traduce un programa informático construye una tabla de símbolos que contiene los nombres de los símbolos presentes en el programa, los atributos asociados a cada nombre y las sentencias de programa en las que están presentes cada uno de los nombres. Así pues, si S es el conjunto de los símbolos, A es el conjunto de los posibles atributos y P es el conjunto de las sentencias de programa, entonces la tabla de símbolos incluye información representada por las relaciones binarias de S a A y de S a P.

(d) Como dijimos anteriormente, una relación binaria sobre el conjunto de los números reales puede representarse gráficamente en el plano cartesiano. La figura siguiente es la gráfica de la relación

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| + |y| = 1\}$$



$|x| + |y| = 1$

Ejemplo 3: Sea A = {1, 2, 3} y R = {(1, 2), (1, 3), (3, 2)}. R es una relación en A ya que es un subconjunto de A × A. Con respecto a esta relación, tendremos que:

$$1\mathscr{R}2,\ 1\mathscr{R}3,\ 3\mathscr{R}2,\ \text{pero } 1\not\mathscr{R}1,\ 2\not\mathscr{R}1,\ 2\not\mathscr{R}2,\ 2\not\mathscr{R}3,\ 3\not\mathscr{R}1,\ 3\not\mathscr{R}3$$

Dominio e Imagen.

Llamaremos dominio de una relación $\mathscr{R}$ al conjunto formado por todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a $\mathscr{R}$, e imagen o rango al conjunto formado por los segundos elementos. Es decir, si $\mathscr{R}$ es una relación de A a B, entonces

$$\text{Dom}(\mathscr{R}) = \{a \in A, \exists b : b \in B \ \wedge \ (a,b) \in \mathscr{R}\}$$
$$\text{Img}(\mathscr{R}) = \{b \in B, \exists a : a \in A \ \wedge \ (a,b) \in \mathscr{R}\}$$

Así en el ejemplo anterior, el dominio de $\mathscr{R}$ es $\text{Dom}(\mathscr{R}) = \{1,3\}$ y la imagen $\text{Img}(\mathscr{R}) = \{2,3\}$

Ejemplo 6.4 Para los conjuntos $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,5\}$, determinar:

(a) $|A \times B|$.

(b) El número de relaciones de A a B.

(c) El número de relaciones binarias en A.

(d) El número de relaciones de A a B que contengan al (1,2) y al (1,5).

(e) El número de relaciones de A a B que contengan exactamente cinco pares ordenados.

(f) El número de relaciones binarias en A que contengan siete elementos como mínimo.

Solución

(a) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 3 = 9$

(b) Sea N el número de relaciones de A a B.

Como una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano de A por B, el número de relaciones de A a B será igual al número de subconjuntos que tenga $A \times B$, es decir, el número de elementos del conjunto de las partes de este conjunto, por tanto,

$$N = |\mathscr{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^9$$

(c) Igual que en el apartado anterior, si N es el número pedido, entonces

$$N = |\mathscr{P}(A \times A)| = 2^{|A \times A|} = 2^9$$

(d) Si eliminamos del producto cartesiano de A y B los pares (1,2) y (1,5), quedarán 7 pares, luego el número de posibles relaciones que pueden establecerse sin ellos será 2^7 igual al número N de relaciones que contienen a los dos pares dados ya que bastaría con añadirlos a cada una de las relaciones que no los tienen, por tanto,

$$N = 2^7$$

(e) Dos subconjuntos con cinco pares del producto cartesiano de A y B, serán distintos sólo si se diferencian en algún par sin que el orden en que los mismos figuren en el subconjunto influya para nada, por tanto, el número de subconjuntos de $A \times B$ con cinco pares será igual al de combinaciones de nueve elementos tomados cinco a cinco, es decir, si N es el número pedido, entonces

$$N = C_{9,5} = \binom{9}{5} = 126$$

(f) Sea N_i el número de relaciones que contienen i elementos y sea N el número pedido. Entonces,

$$N = N_7 + N_8 + N_9$$

y razonando igual que en el apartado anterior,

$$N_i = C_{9,i} = \binom{9}{i}$$

luego,

$$N = C_{9,7} + C_{9,8} + C_{9,9} = \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 46$$

Ejemplo:

Para U = Z +, A = {2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {10, 11, 12, 13, 14}, escribir los elementos de la relación R ⊂ A × B, donde

$a\mathscr{R}b$ si y sólo si a divide (exactamente) a b.

Solución:

$$\mathscr{R} = \{(2,10), (2,12), (2,14), (3,12), (4,12), (5,10), (6,12), (7,14)\}$$