

Oscilador de Duffing

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Computación

Docente: Gustavo Adolfo Osorio Londoño

Modelado y Simulación

Jhony Edison Mitis Cuastumal- 816037

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

6 de julio de 2020

Resumen—En este documento se presenta el modelado, análisis y simulación del comportamiento del oscilador de Duffing, este sistema es de cuarto orden y tiende a presentar un comportamiento caótico ante ciertas condiciones iniciales.

Keywords— Oscilador armónico, amortiguación, sistema no lineal, perturbaciones, sistema caótico

I. INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico es aquel que sufre cambios a lo largo del tiempo y su comportamiento está definido por ecuaciones diferenciales si es continuo o por ecuaciones de diferencias si es discreto. Estos sistemas pueden ser lineales o no lineales, un sistema lineal tiene una respuesta proporcional a la entrada, por su lado los no lineales son difíciles de predecir pues su respuesta no solo depende del estímulo de entrada. El oscilador de Duffing en el que se centrará este trabajo es un sistema no lineal y además presenta un comportamiento caótico, es decir, que es sensible a las condiciones iniciales.

II. OBJETIVOS

- Modelar y simular el comportamiento del oscilador de Duffing
- Analizar el comportamiento en el tiempo y en la fase del oscilador de Duffing.
- Analizar las bifurcaciones del oscilador de Duffing

III. FUNDAMENTO TEÓRICO Y MODELO MATEMÁTICO

Oscilador de Duffing

El oscilador caótico de Duffing es un sistema que fue diseñado por el ingeniero eléctrico Georg Duffing para estudiar el movimiento de pandeo (inestabilidad elástica en elementos comprimidos) de una viga

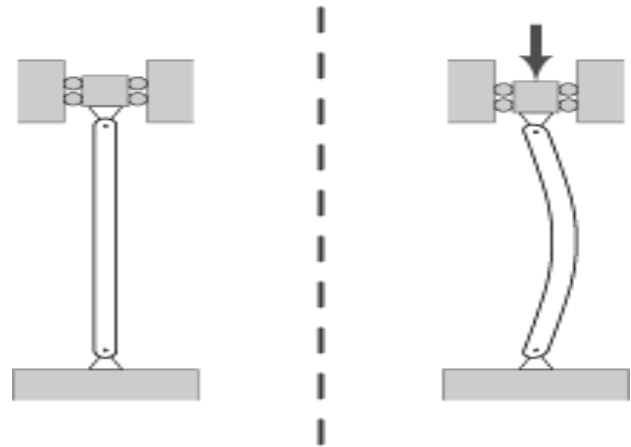


Figura 1. Comparación entre viga normal y la expuesta a un fuerza externa generando el fenómeno de pandeo

El oscilador de Duffing es un sistema dinámico y no lineal, que puede presentar un comportamiento caótico en función de los valores que tomen sus variables. En el caso de que este oscilador sea forzado periódicamente, puede presentar un comportamiento caótico. Cuando dicho sistema sufre oscilaciones pequeñas, su comportamiento puede ser lineal, mientras que a medida que van siendo mayores, el caos va apareciendo en el sistema.

Para comprender mejor el comportamiento del oscilador de Duffing hay que empezar con comprender su funcionamiento del oscilador armónico, ya que el anterior solo es una variación de este.

Oscilador armónico simple y amortiguado

Un oscilador armónico es un sistema que, cuando se desplaza de su equilibrio posición, experimenta una fuerza de recuperación F proporcional al desplazamiento x , esto viene dado por la siguiente ecuación:

$$F = -kx$$

Un oscilador simple es aquel en el que no actúan fuerzas para impulsarlo ni para amortiguarlo. Solo comprende de una masa m que es la que genera la fuerza F y una constante

que k que regula el movimiento. El comportamiento de este oscilador viene dado por la siguiente ecuación:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx$$

La solución de esta ecuación diferencial es la conocida expresión:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Donde: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Un oscilador armónico amortiguado por su parte incorpora en su sistema una fuerza ya sea de fricción o amortiguación, la cual ralentiza la velocidad del movimiento, es decir se opone al movimiento de oscilación. El comportamiento de este sistema viene dado por la siguiente ecuación:

$$F = -kx - c \frac{\partial x}{\partial t} = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x = 0$$

Donde:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: es la frecuencia angular del oscilador "parte no amortiguada"

$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$: es el factor de amortiguamiento

Oscilador de Duffing

El comportamiento del oscilador de Duffing está descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

Los parámetros en la ecuación anterior son:

δ controla la cantidad de amortiguación

α controla el lineal rigidez

β controla la cantidad de no linealidad en la fuerza de recuperación

γ es la amplitud de la fuerza de conducción periódica

ω es la frecuencia angular de la fuerza de conducción periódica.

Para simular el Oscilador se suele utilizar el siguiente circuito

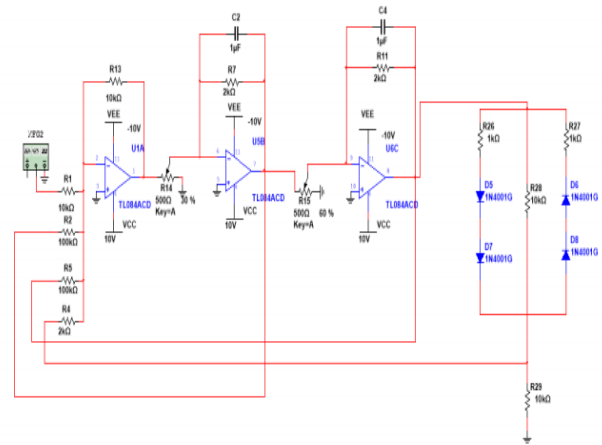


Figura 2. Circuito analógico utilizado para implementar el funcionamiento del oscilador de Duffing

IV. PROCEDIMIENTO

El oscilador de Duffing está descrito por la ya mencionada ecuación:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

Donde, δ , γ , α , β , y ω son los parámetros.

Gráfica de la solución a la ecuación diferencial con distintas condiciones iniciales.

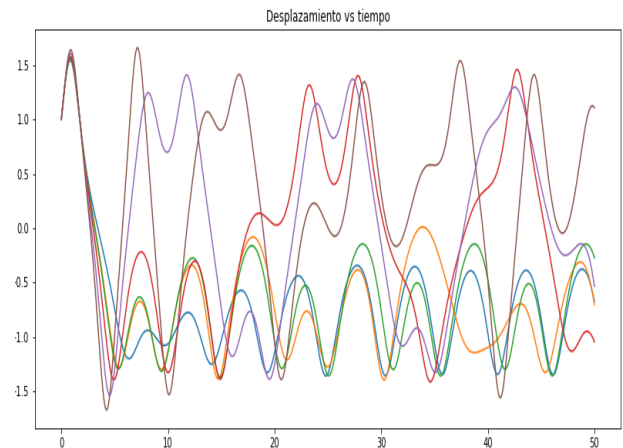


Figura 3. Gráfica de desplazamiento a distintas condiciones iniciales

La parte de la ecuación $\gamma \cos(\omega t)$ corresponde a una fuerza externa que actúa sobre el oscilador.

Como ya se dijo este sistema es no lineal y caótico, a continuación se muestran los resultados de variar el parámetro γ e rango de 0.2 a 5 con seis muestras.

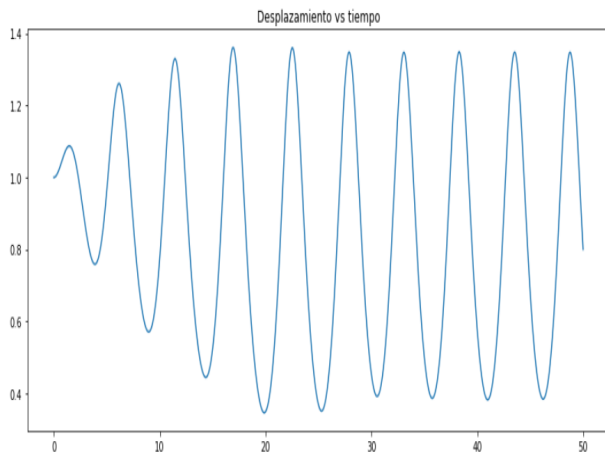


Figura 4. Gráfica de desplazamiento con $\gamma=0.2$

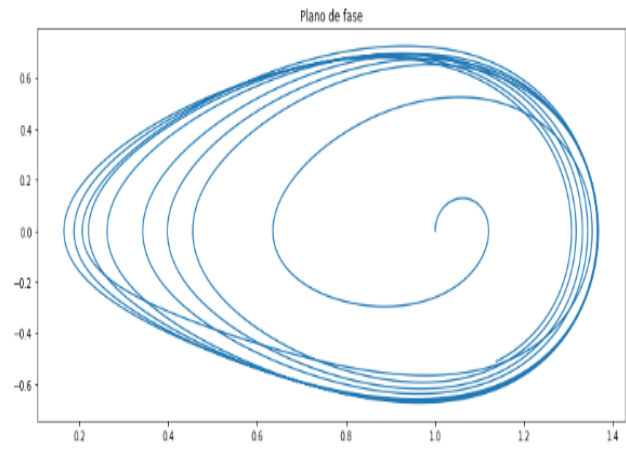


Figura 7. Plano de fase de velocidad Vs desplazamiento con $\gamma=0.28$

Con $\gamma=0.28$, la gráfica del tiempo no se tan alterada pero en el plano de fase se empieza a notar cierto caos.

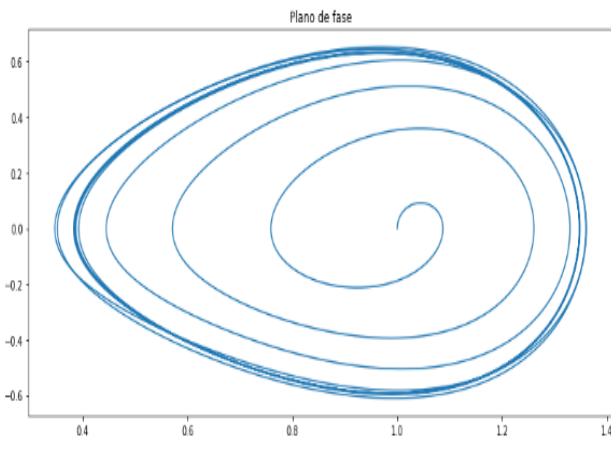


Figura 5. Plano de fase de velocidad Vs desplazamiento con $\gamma=0.2$

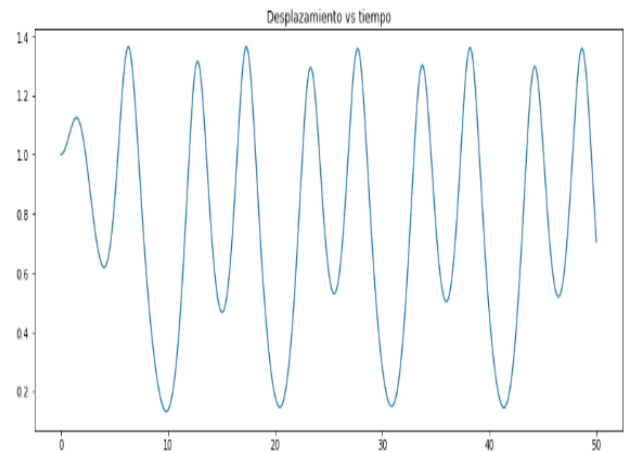


Figura 8. Gráfica de desplazamiento con $\gamma=0.29$

En las anteriores gráficas se puede observar que en el tiempo la gráfica tiende a ser periódica y en la fase guarda un comportamiento uniforme

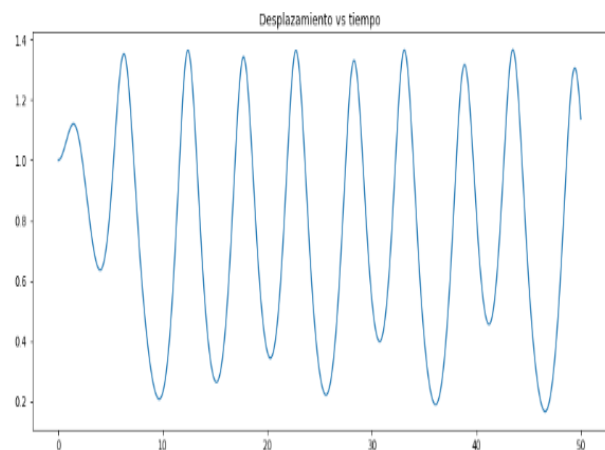


Figura 6. Gráfica de desplazamiento con $\gamma=0.28$

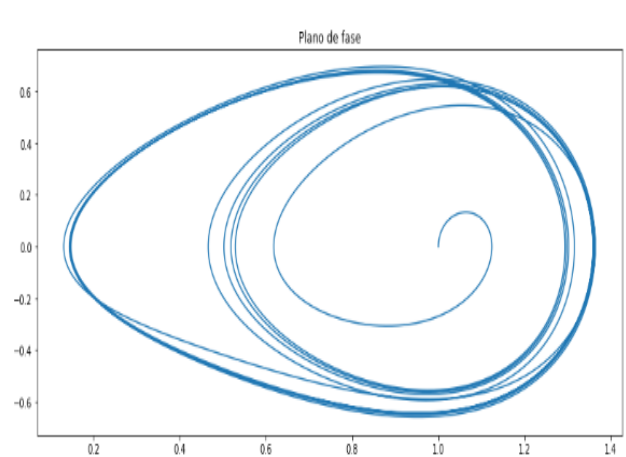


Figura 9. Plano de fase de velocidad Vs desplazamiento con $\gamma=0.29$

Con $\gamma=2.9$ el diagrama de fase no tiene mayor cambio,

pero en la gráfica de tiempo se puede observar que se va perdiendo la oscilación periódica de forma mas notable

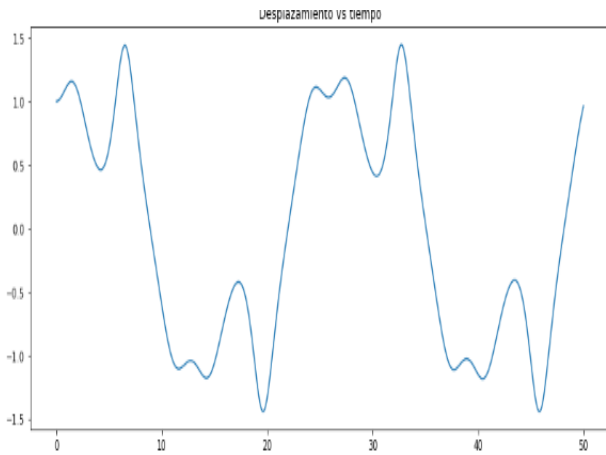


Figura 10. Gráfica de desplazamiento con $\gamma=0.37$

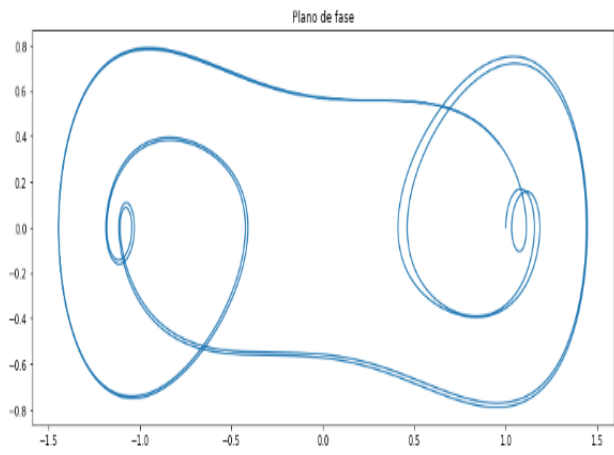


Figura 11. Plano de fase de velocidad Vs desplazamiento con $\gamma=0.37$

Las gráficas presentan cambios muy marcados la gráfica del desplazamiento deja de tener su forma sinusoidal básica e incorpora ciertos armónicos, por su parte en el diagrama de fase se forman dos atractores casi idénticos pero de signo contrario.

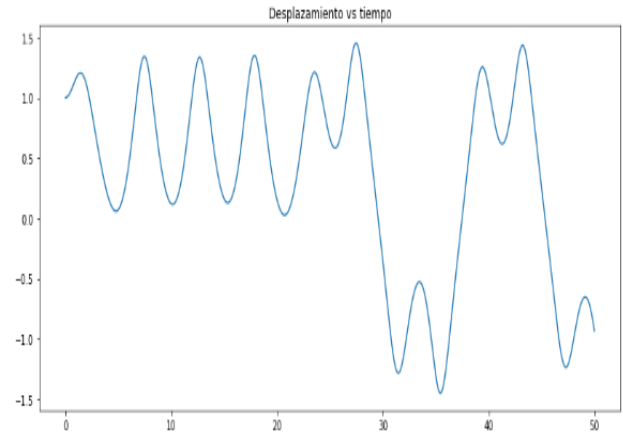


Figura 12. Gráfica de desplazamiento con $\gamma=0.5$

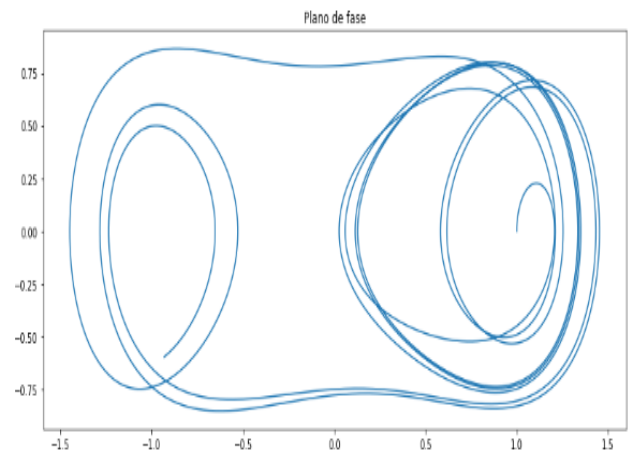


Figura 13. Plano de fase de velocidad Vs desplazamiento con $\gamma=0.5$

El gráfico de la respuesta en fase tiende a acumularse en el atractor inicial. Por su parte la gráfica del desplazamiento toma un comportamiento poco predecible.

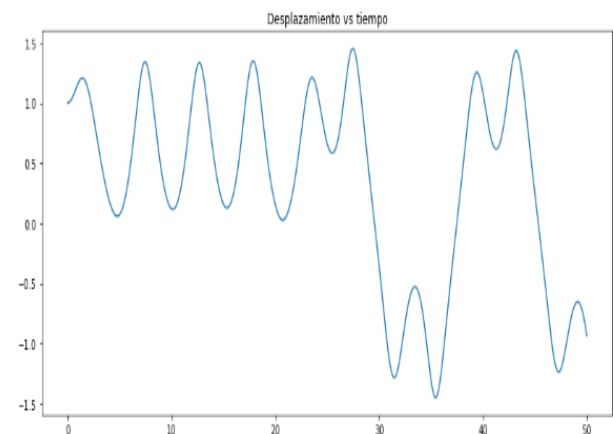


Figura 14. Gráfica de desplazamiento con $\gamma=0.65$

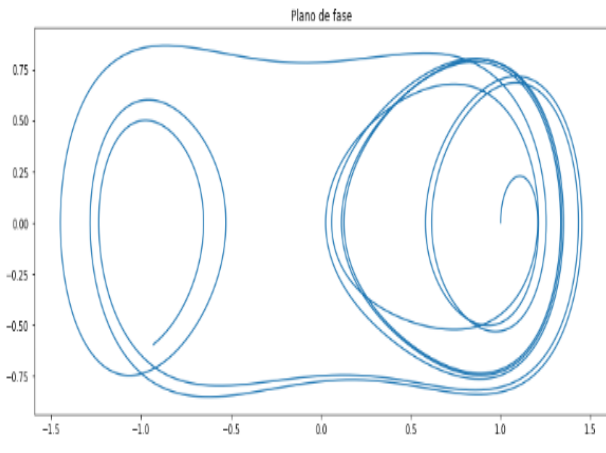


Figura 15. Plano de fase de velocidad Vs desplazamiento con $\gamma=0.65$

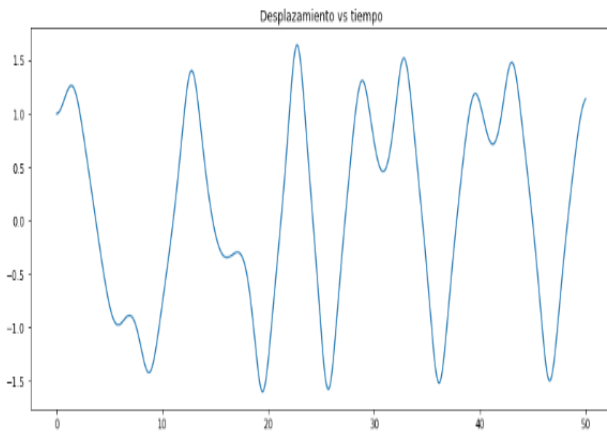


Figura 16. Gráfica de desplazamiento con $\gamma=10$

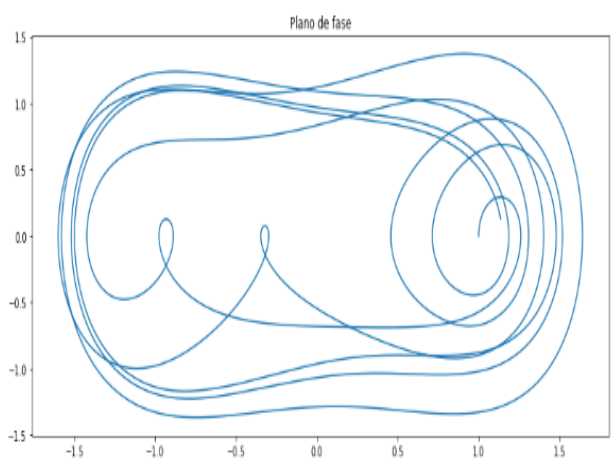


Figura 17. Plano de fase de velocidad Vs desplazamiento con $\gamma=10$

En estas ultimas gráficas tanto de fase y tiempo el comportamiento del oscilador entra al sector caótico los atractores ya toman valores poco predecibles al igual que la onda de desplazamiento

Bifurcaciones

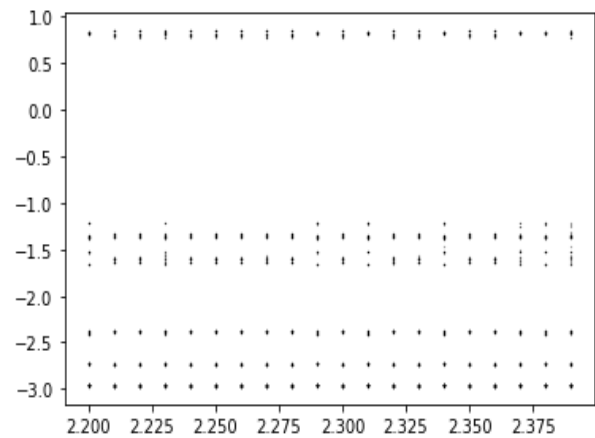


Figura 18. Diagrama de Bifurcaciones

Variando los valores de los parametros se obtiene el siguiente gráfico.

Bifurcaciones

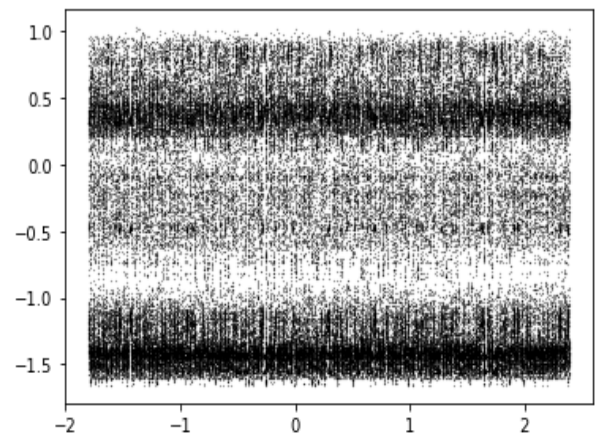


Figura 19. Diagrama de Bifurcaciones

V. CONCLUSIONES

- Los sistemas caóticos a pesar de su difícil predicción del comportamiento, pueden ser estudiados si se restringen los valores de sus parámetros a unos que generen un comportamiento estable.
- Es oscilador de Duffing al ser una herramienta importante para medir el pandeo de una estructura, es bueno conocer el comportamiento y como se ve alterado este si se cambiando algunos valores.
- Desde el punto de vista de los lenguajes de descripción, las herramientas automáticas de modelado y simulación permites ahorrar una cantidad de trabajo considerable a la hora de tratar con problemas como los planteados en este tema.

REFERENCIAS

- [1] Vacca González. Harold, "Modeling, Simulation and implementation of Oscillator by means of the Duffing Equation.,
- [2] Kovacic, I., Brennan, M.J., eds. (2011), The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour, Wiley, 392 pp.