Relacione entre fuerza, masa y aceleración en una máquina de Atwood.

Objetivos: Encontrar las relaciones entre la masa, aceleración y fuerzas que actúan en un sistema de dos cuerpos ligados a partir de los datos obtenidos utilizando un sensor de movimiento, así como aprender a usar el programa Logger Pro y la plataforma de Arduino para la captura y análisis de los datos.

Introducción

Cuando el reverendo George Atwood (1746-1807) era profesor en el Trinity College de Cambridge, publicó su *“Tratado sobre el movimiento rectilíneo y la rotación de los cuerpos, con una descripción de experimentos originales en relación con dichos temas”,* con el cual, según Thomas Young, “contribuyó al progreso de la ciencia al diversificar modos de ilustración de principios y leyes físicas mediante exposiciones experimentales que puso al alcance de instructores y profesores." El apellido Atwood quedó para siempre ligado a un arreglo de ruedas y cuerdas mediante el cual queda claro cómo la fuerza y la masa se relacionan con el movimiento de dos cuerpos que cuelgan de una polea (Figura 1).

Un gran número de generaciones de estudiantes han resuelto, y muchas más lo seguirán haciendo, el problema de dos pesas que, al estar unidas por una cuerda ideal (sin masa y de longitud constante), tienen movimientos en distintas direcciones cuando dicha cuerda se hace pasar por una polea ideal (que gira sin fricción). Para ello, generalmente se valen de las leyes de Newton del movimiento, aunque originalmente dicho sistema, ahora conocido como máquina de Atwood, fue concebido como una herramienta que permite ilustrar los enunciados y predicciones de esas misma leyes.

Específicamente, permite determinar la aceleración de las pesas al medir su cambio de posición y el tiempo en que este cambio ocurre. Dado que la fuerza que ocasiona el cambio en la posición de las masas es debido a la gravedad, el análisis del sistema permite evaluar el valor local del campo gravitatorio (g).

La máquina de Atwood es un clásico entre los instrumentos utilizados en los laboratorios de física, el cual consiste en un riel (horizontal o inclinado) sobre el que se mueve un objeto jalado por un hilo que pasa por una polea y del cual cuelga un segundo cuerpo, como se aprecia en la Figura 2.

Figura 1. En la máquina de Atwood original, el eje de la polea se suspende de un hilo muy liviano, de cuyos extremos penden pesas. Está soportado por cuatro ruedas, que al igual que la polea tienen momentos de inercia pequeños. A la derecha se muestra una máquina de Atwood simple de la cual los datos son capturados y enviados a una computadora para su análisis.

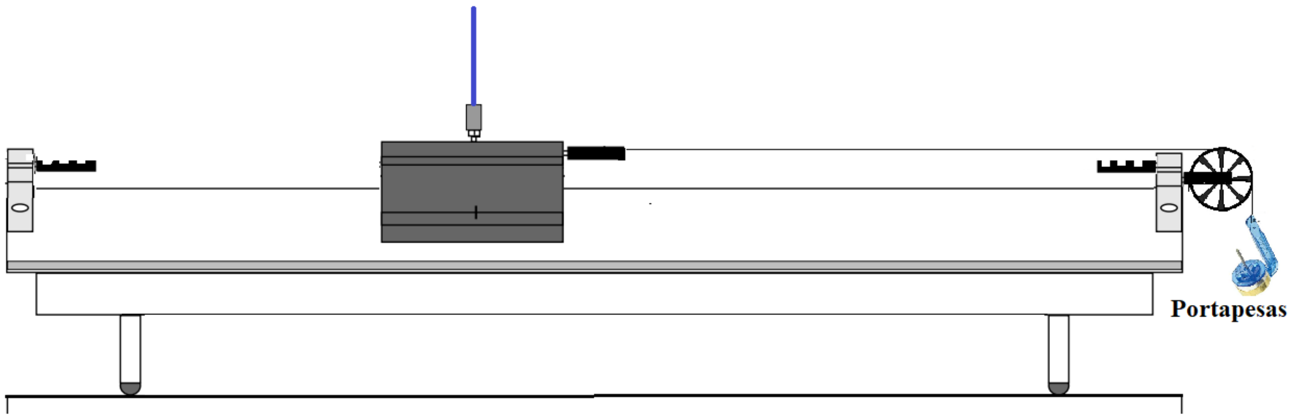

Figura 2. El popular "riel de aire", básico en los laboratorios de enseñanza, puede ser utilizado como "máquina modificada de Atwood". En este caso las velocidades de los objetos son perpendiculares entre sí.

Análisis dinámico de la máquina de Atwood en términos de las leyes de Newton

Para este análisis utilizaremos las leyes de Newton, las cuales relacionan el cambio en el movimiento de un cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él. Para ello, simplificaremos el sistema mostrando únicamente sus componentes y parámetros más importantes (Figura 3).

Supongamos que las pesas tienen masas m_1 y m_2; que m_1 es mayor que m_2 y que la polea, cuyo momento angular es I, gira en el sentido mostrado en el diagrama.

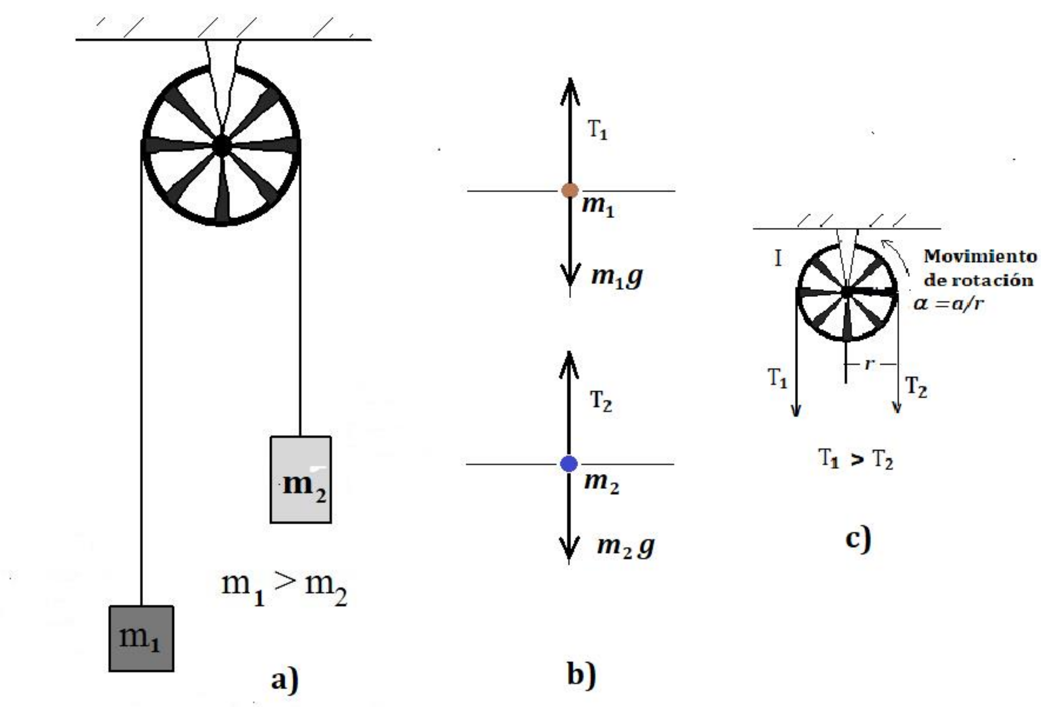

Figura 3. a) Diagrama simplificado de la máquina de Atwood. b) Diagramas de cuerpo libre de las masas.

c) Diagrama de cuerpo libre de la polea.

Primero apliquemos la segunda ley de Newton a las pesas que cuelgan.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt} = m\frac{d^2\,\vec{\mathrm{r}}}{dt^2}$$

Dado que esta es una relación vectorial, podemos separarla en sus respectivas componentes y analizarlas de forma independiente. Para cada masa, vamos a utilizar un sistema coordenado centrado en la posición de la masa y con el eje y positivo hacia arriba (Figura 3b).
Para la masa m_1 tenemos.

$$F_{1x} = m_1 a_{1x} \qquad\qquad F_{1y} = m_1 a_{1y}$$

$$0 = m_1 a_{1x} \qquad\qquad T_1 - m_1\,g = m_1 a_{1y}$$

Debido a que las fuerzas sobre la masa actúan solamente en el eje y, podemos concluir que su aceleración en el eje x es igual a cero, por lo que su movimiento es puramente vertical.

De forma similar para la masa m_2 tenemos.

$$F_{2x} = m_2 a_{2x} \qquad\qquad F_{2y} = m_2 a_{2y}$$

$$0 = m_2 a_{2x} \qquad\qquad T_2 - m_2\,g = m_2 a_{2y}$$

Y dado que la longitud del hilo no cambia, podemos concluir que.

$$a_{1y} = -\,a_{2y} = a$$

El efecto que tiene la polea sobre el sistema es el de cambiar la dirección de la aceleración, transmitiendo así la fuerza entre los dos cuerpos. Si despreciamos su masa y fricción tenemos que

$$T_1 = T_2 = T.$$

Tomando las ecuaciones de ambas masas en el eje y y despejando para las tensiones tenemos.

$$T = m_1 a + m_1 g$$
$$T = -m_2 a + m_2 g$$

Al igualar estas dos expresiones podemos encontrar el valor de la aceleración a.

$$m_1 a + m_1 g = -m_2 a + m_2 g$$
$$m_1 a + m_2 a = m_2 g - m_1 g$$
$$a(m_1 + m_2) = \ g(m_2 - m_1)$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{m_2} - \boldsymbol{m_1})}{(\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2})}\boldsymbol{g} \qquad (1)$$

Observe que, según la convención establecida, si $m_1 > m_2$, la aceleración resulta ser negativa por lo que m_1 se mueve hacia abajo mientras que m_2 lo hace hacia arriba; en tanto que si $m_2 > m_1$, la aceleración es positiva y m_1 acelera hacia arriba y m_2 hacia abajo.

Cuando las masas son iguales la aceleración es cero. Esto quiere decir que el sistema se encuentra en equilibrio inestable y ambas pesas estarán en reposo o se moverán con rapidez constante (aunque en sentidos opuestos). Por último si $m_2 = 0$ (ó $m_1 = 0$) la aceleración será igual a $-g$ y el otro cuerpo se encontrara en caída libre.

Si se toma en cuenta el movimiento de la polea, tendremos que las tensiones que actúan tangencialmente a sus lados son la causa de su rotación. De acuerdo con la segunda ley de Newton para un cuerpo en rotación

$$\vec{\tau} = I\,\vec{\alpha}$$

Donde el torque $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano en el que gira la polea y está dado por el producto vectorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{\mathrm{F}}$, donde $|\vec{r}|$ es el radio de la polea y $|\vec{\mathrm{F}}|$ la tensión que aplica la cuerda.

Dado que asumimos que la cuerda no resbala de la polea, podemos concluir que su aceleración angular está relacionada con la aceleración de las masas mediante.

$$\alpha = \frac{-a}{r}$$

El signo negativo se debe a la convención que hemos elegido, la aceleración a corresponde a la del cuerpo de masa m_1, por lo que si este se mueve hacia abajo (con aceleración negativa) provocara que la polea gire en sentido anti-horario, es decir con una aceleración angular positiva, por tanto.

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 \\ &= (-r\hat{\imath} \times -\mathrm{T}_1\,\hat{\jmath}) + (\,r\hat{\imath} \times -\mathrm{T}_2\,\hat{\jmath}) \\ &= \mathrm{T}_1\,r\,\hat{k} - \mathrm{T}_2\,r\,\hat{k} \\ &= (\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)r\,\hat{k}\end{aligned}$$

Teniendo en cuanta la segunda ley de Newton para cuerpos en rotación anteriormente mencionada.

$$\vec{\tau} = I\,\vec{\alpha} = I\frac{-a}{r}\,\hat{k} = (\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)r\,\hat{k}$$

De manera que.

$$a = -\frac{(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)r^2}{I}$$

Substituyendo el valor de las tensiones encontradas anteriormente tenemos.

$$a = -\frac{(m_1 a + m_1 g - (-m_2 a + m_2 g))r^2}{I}$$

$$-\frac{aI}{r^2} = a(m_1 + m_2) - g(m_2 - m_1)$$

$$a(m_1 + m_2) + \frac{aI}{r^2} = g(m_2 - m_1)$$

$$a(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}) = g(m_2 - m_1)$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{(m_2 - m_1)g}}{\boldsymbol{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}}} \qquad (2)$$

Si despreciamos los efectos de la polea, es decir $I = 0$ recuperamos la ecuación **(1)**

En ambos casos la aceleración resultante solo depende de la masa de los cuerpos (y la geometría de la polea) por lo que ésta es constante en el tiempo. Eso quiere decir que la ecuación que gobierna el movimiento de los cuerpos es.

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot t + \frac{\vec{a}.t^2}{2} \qquad \vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot t \qquad \vec{a} = constante$$

Dónde $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ son los valores de la posición, la velocidad y la aceleración respectivamente en el tiempo t, en tanto que $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ representan los valores iniciales (cuando $t = 0$) de la posición y de la velocidad. En este caso dado que el movimiento es rectilíneo, podemos simplificar las expresiones anteriores al tomar solamente su componente vertical.

$$y = y_i + v_{iy} \cdot t + \frac{a_y.t^2}{2} \qquad v_y = v_{iy} + a_y \cdot t \qquad a_y = constante \qquad (3)$$

***Equipo y material**:*

- *Computadora con Logger Pro instalado.*
- *Interfaz LabQuest.*
- *Juego de pesas de 1, 2, 5, 10 y 20 gramos.*
- *Polea.*
- *Portapesas.*
- *Balanza.*
- *Disco de 10 centímetros de diámetro.*
- *Hilo de cáñamo o similar.*
- *Un trozo de popote o varilla de madera.*
- *Sensor de movimiento con Arduino.*
- *Cable BTA.*
- *Soporte universal con dos varillas y nuez.*
- *Fuente de voltaje directo de 10 Volts.*
- *Par de cables banana-banana.*

Sensor de distancia con Arduino

Caso 1): Cuerpos de igual masa ($m_1 = m_2$)

Montaje

a) Colocar pesas en el disco de plástico hasta que la masa total (disco más pesas) se encuentre entre 40 y 80 gramos (o una que resulte apropiada para usar con la polea de la que se disponga). Medir la masa y registrar el dato en la celda apropiada de la Tabla 1.

b) Colocar pesas en el portapesas hasta que su masa total sea igual a la del disco. Pueden utilizarse pequeñas monedas o ligas para lograrlo y registrar el dato en la Tabla 1. Atar un hilo de aproximadamente 50cm al pivote del centro del disco, pasarlo por la polea y atar el otro extremo al portapesas, tal como se muestra en la Figura 4.

c) Colocar la polea en el soporte universal y ajustar su altura de forma que cuando uno de los cuerpos esté en la parte más alta, el otro se encuentre a aproximadamente 20 cm de la superficie de la mesa.

d) Colocar el sensor de movimiento debajo del disco de plástico, asegurándose de que existe entre estos una separación de al menos 15cm.

e) Encender la computadora e iniciar el programa de Logger pro. Conectar la interfaz LabQuest a la computadora mediante el cable USB y el sensor de movimiento a la interfaz usando el cable de datos BTA en el canal uno de la misma señalado con la leyenda “CH1” asegurándose de que el switch selector de salida del sensor se encuentra en “BTA”.

f) Conectar la fuente de voltaje al sensor de distancia con los cables banana-banana usando las terminales marcadas con la legenda “IN”. Encender la fuente y el sensor. Si el voltaje es adecuado el led indicador brillara en color verde.

g) Hacer click en el icono  que aparece en la esquina superior izquierda de la pantalla, elegir el canal uno de la interfaz y después la opción “Tensión” del menú desplegable, tal como se muestra en la Figura 5. Elegir “Voltaje en bruto (0-5) V” del submenú y cerrar la ventana.

h) Seleccionar la opción “Datos” de la barra de menú seguido de la opción “Nueva columna calculada…”. En la ventana emergente configurar el nombre, abreviatura y unidades como “Posición”, “y” y “m” respectivamente.

i) Hacer click en “Variables (Columnas) >” y seleccionar la opción “Potencial”. Completar con la expresión "Potencial"/5 en el recuadro de “Expresión” como se muestra en la Figura 6 y hacer click en aplicar. Con esto se le está indicando al software que el valor de la nueva columna será igual al valor obtenido del sensor dividido entre cinco.

j) Hacer click en la leyenda “Potencial (V)” en el eje vertical de la gráfica y seleccionar “Posición” del menú desplegable para cambiar la variable que se graficara (Figura 7).

k) Llevar el portapesas hasta la parte superior de la polea (sin que llegue a tocarla) y colocar un pequeño tubo cilíndrico de plástico (un trozo de popote rígido por ejemplo) entre los rayos de la polea para evitar que esta gire. Cuando el disco y el portapesas dejen de moverse, hacer click en “Experimento” en la barra de menú seguido de la opción “Cero”.

l) Hacer click en “Experimento” en la barra de menú y seleccionar la opción “Toma datos…”, esto abrirá una ventana como la mostrada en la Figura 8. Configurar el valor del campo “Duración” con el valor ‘2’ y el campo “muestras/segundo” con el valor ‘20’. Con esto se especifica al software que tome datos durante un intervalo de 2 segundos tomando 20 datos cada segundo.

m) En la misma ventana, seleccionar la pestaña “Disparo”, registrar el valor mostrado en el medidor digital situado en la esquina inferior izquierda y usar ese valor más 0.05 para configurar el campo “Alrededor de:” (por ejemplo si el medidor digital se muestra el valor 0.603V se tendrá que registrar el numero 0.608) seleccionando también la opción “Aumentando”. Con esto estamos indicando al software que comience a tomar datos después de que el disco se haya alejado por lo menos un centímetro de su posición original.

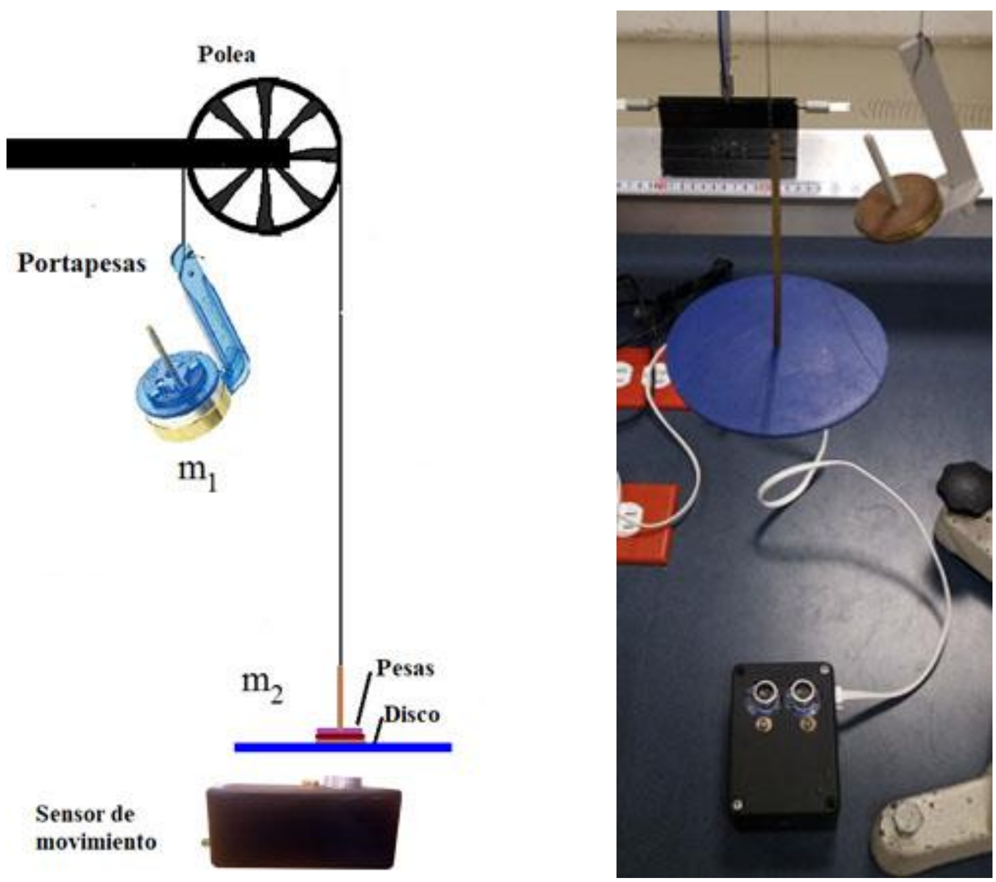

Figura 4. Montaje general de la máquina de Atwood.

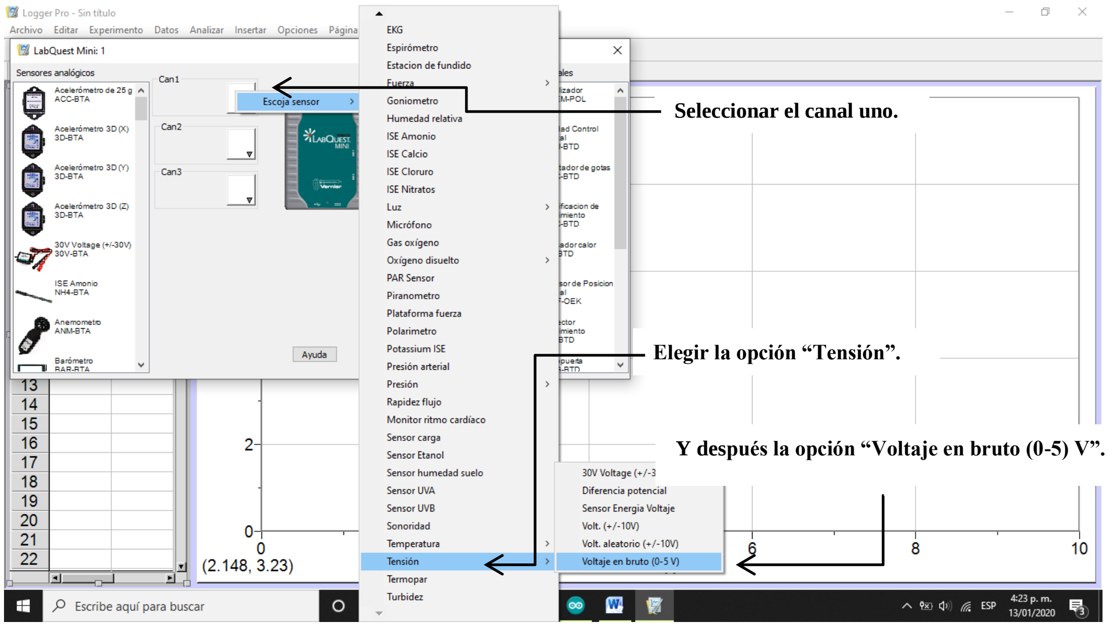

Figura 5. Configuración del sensor de movimiento.

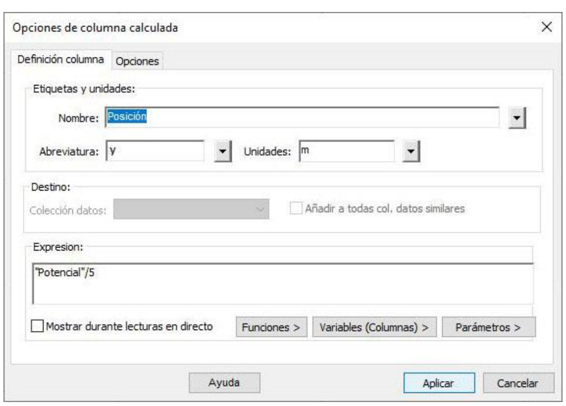

Figura 6. Configuración de la nueva columna calculada.

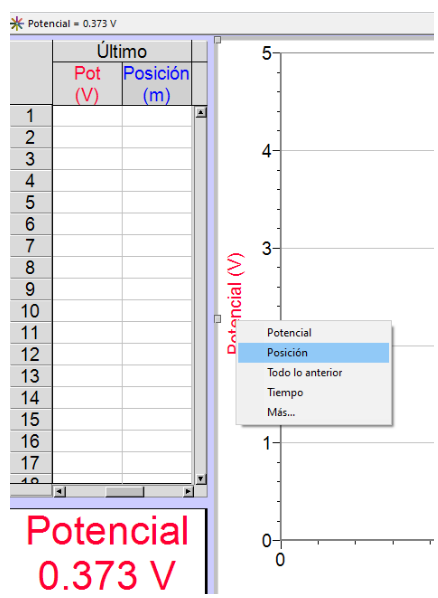

Figura 7. Selección de la variable a ser mostrada en la gráfica.

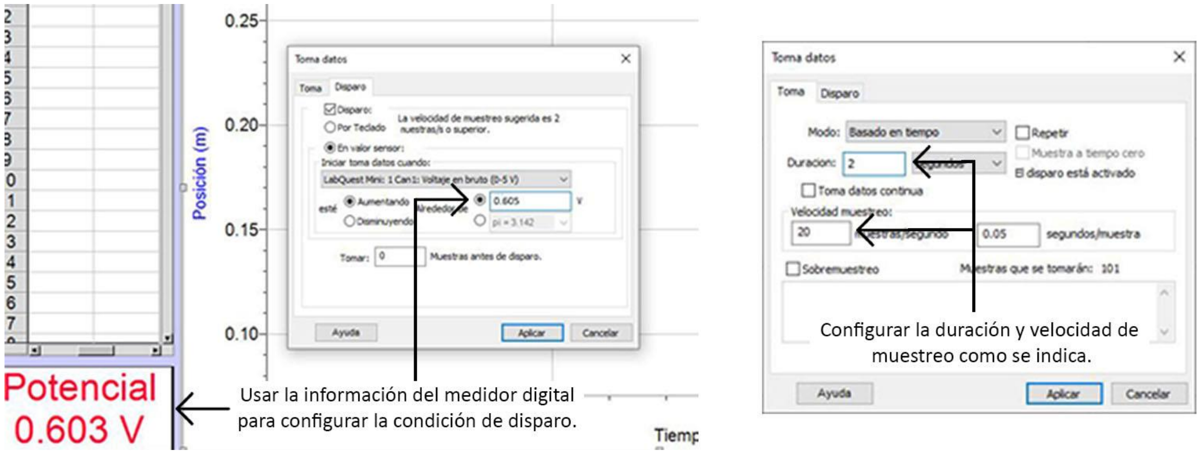

Figura 8 Configuración de la toma automática de datos, en la pestaña de "Toma" a la derecha, se configura el tiempo y frecuencia de muestreo, mientras que en la pestaña "Disparo" se establecen las condiciones de inicio para lo toma de datos.

Toma de datos

Hacer click en el botón  para iniciar la toma de datos, no aparecerá nada en la gráfica dado que aún no se han cumplido las condiciones especificadas en el inciso **j)**. Retirar el tubo de plástico de la polea y darle un ligero empuje para que comience a girar y el disco se mueva hacia arriba desde la posición inicial.

Hacer click en el botón  en la barra de herramientas para ajustar los ejes de la gráfica a los datos tomados y preguntar al instructor si la seria tomada es buena. Dependiendo de los datos obtenidos, el tiempo de toma de datos (inciso **j)**) deberá ser ajustado hasta obtener en la gráfica solo los datos correspondientes de la subida del disco hasta antes de que choque con la polea.

Preguntar al instructor si la serie de datos tomada es buena, de ser así seleccionar la opción "Experimento" de la barra de menú seguido de la opción "Almacenar última serie", en caso contrario tomar una nueva serie. Repetir este proceso hasta almacenar un total de 5 series.

Análisis de los datos

Elegir la serie de datos más representativa o la que haya salido mejor y ocultar el resto seleccionando la opción "Datos" en la barra de menú, seguido de la opción "Ocultar colección datos" y elegir todas las series que no serán analizadas. De esta forma será más sencillo visualizar la gráfica y su correspondiente ajuste.

Hacer click derecho sobre la gráfica y elegir la opción "Opciones gráfica". En la ventana emergente seleccionar la opción "Símbolos" y deseleccionar la opción "Puntos conexión" en el menú "Apariencia:", de esta forma solo se mostraran los puntos que representan los datos en la gráfica. En esta ventana se pueden configurar otros aspectos como el titulo o que colecciones de datos mostrar.

Tabla 1

Masa total del disco más pesas.	
Masa total del portapesas más pesas	
Momento de inercia de la polea	
Radio de la polea	

Para esta práctica se recomienda usar la polea de Pasco, la cual tiene un momento de inercia igual $1.8 \times 10^{-6} \frac{kg}{m^2}$ y un radio de $2.5cm$. En caso de que se esté usando una polea diferente, su momento de inercia puede ser estimado usado la fórmula para el momento de inercia de un disco.

$$I_{disco} = \frac{1}{2} M R^2$$

Donde M es la masa de la polea y R es su radio.

Hacer click en el botón en la barra de herramientas, esto calculara la recta que mejor se ajuste a los datos obtenidos (Figura 9).

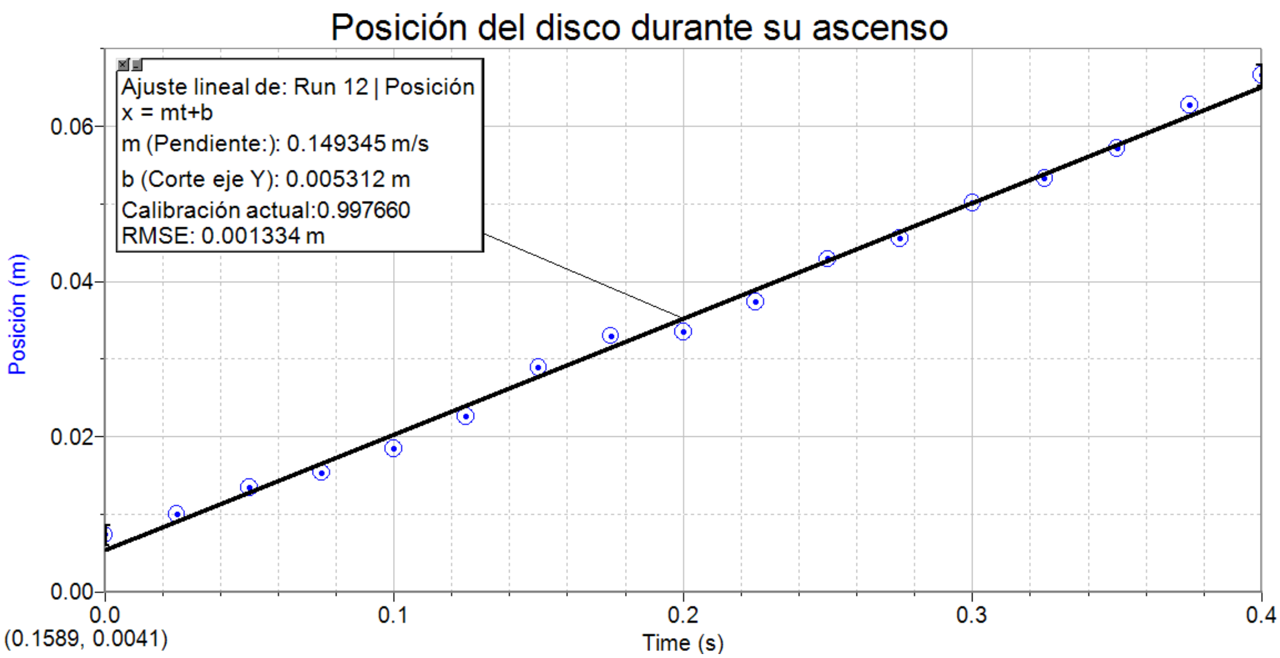

Figura 9. Posición del disco en la máquina de Atwood con ambas masas iguales.

Con el ajuste obtenido, escribir la ecuación de la recta (redondear a dos decimales y no olvidar incluir las unidades de los parámetros).

$y(t) =$

Compara la ecuación anterior con la ecuación **(3)**. ¿Cuáles son los valores de la posición inicial, velocidad inicial y la aceleración de disco?

$y_i =$ $\quad$ $v_{iy} =$ $\quad$ $a_y =$

¿Es consistente el valor encontrado para la aceleración con el valor calculado en la ecuación **(1)** tomando en cuenta el valor de las masas?

Caso 2): Cuerpos de diferente masa

Montaje

a) Agregar pesas al portapesas hasta que su masa sea de 1.5 a 3 gramos mayor que la masa del disco. Registrar la masa total del disco y el portapesas en la Tabla 2.

b) Montar nuevamente el disco y portapesas en la polea tal y como se describe el inciso **k)** del **caso 1**.

c) Seguir los pasos indicados en los incisos **l)** y **m)** del **caso 1** para configurar la toma automática de datos.

Toma de datos

Hacer click en el botón 

para iniciar la toma de datos y con cuidado retirar el trozo de plástico de la polea tratando de no dar ningún impulso al sistema.

Hacer click en el botón  en la barra de herramientas para ajustar los ejes de la gráfica a los datos tomados y preguntar al instructor si la seria tomada es buena. Dependiendo de los datos obtenidos, el tiempo de toma de datos (inciso **j)**) deberá ser ajustado hasta obtener en la gráfica solo los datos correspondientes de la subida del disco hasta antes de que choque con la polea (Figura 10).

Preguntar al instructor si la serie de datos tomada es buena, de ser así seleccionar la opción “Experimento” de la barra de menú seguido de la opción “Almacenar última serie”, en caso contrario tomar una nueva serie. Repetir este proceso hasta almacenar un total de 5 series.

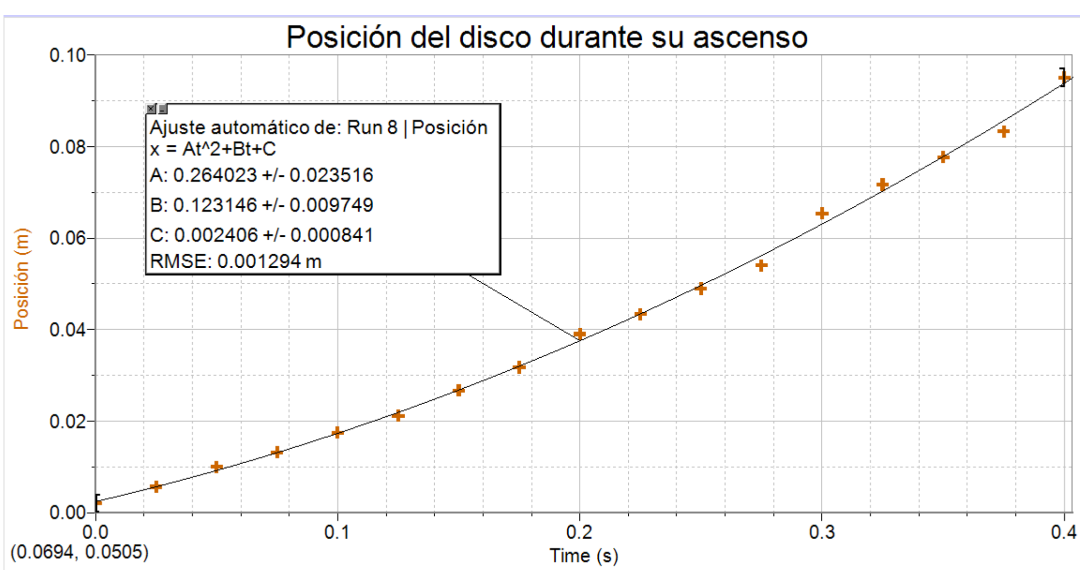

Figura 10. Datos de la posición del disco durante su ascenso en la máquina de Atwood con masas diferentes.

Análisis de los datos

Elegir la serie de datos más representativa o la que haya salido mejor y ocultar el resto.

Tabla 2

Masa total del disco más pesas agregadas	
Masa total del portapesas más pesas agregadas	
Momento de inercia de la polea	
Radio de la polea	

En este caso ajustaremos la curva resultante a una función cuadrática. Para eso, hacer click en el botón  en la barra de herramientas, esto desplegara una ventana como la mostrada en la Figura 11. Seleccionar la ecuación cuadrática del menú "Ecuación general" (tiene la forma At^2+Bt+C) y hacer click en el botón "Probar ajuste" que se encuentra en la parte inferior derecha, esto calculara le mejor ajuste para los datos usando como base la ecuación cuadrática. Hacer click en "Aceptar" para aplicar el ajuste.

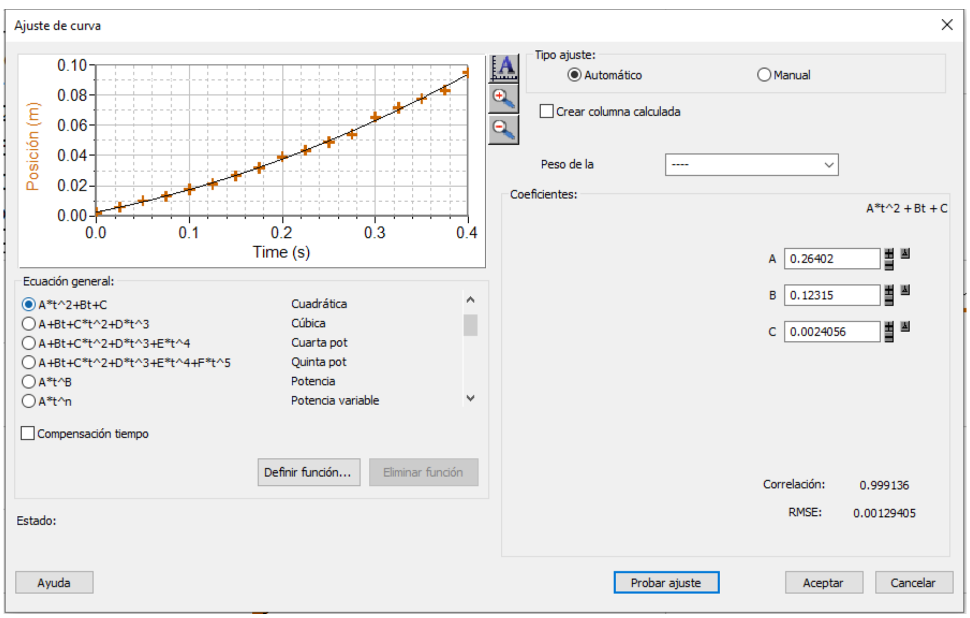

Figura 11. Ventana de ajuste de curva.

A partir del ajuste obtenido, escribir la ecuación de movimiento para la posición del disco (Redondear a dos decimales y no olvidar incluir las unidades de los parámetros).

$y(t) =$

Compara la ecuación anterior con la ecuación **(3)**. ¿Cuáles son los valores de la posición inicial, velocidad inicial y la aceleración de disco?

$y_i =$ $\quad$ $v_{iy} =$ $\quad$ $a_y =$

Utiliza la ecuación (**1**) para calcular la aceleración de las masas sustituyendo el valor de las masas registradas en la Tabla 2, teniendo en cuenta de que la masa del portapesas corresponde a m_1 y la masa del disco corresponde a m_2.

$a_{ecuacion_1} =$

Compara la aceleración encontrada con el ajuste cuadrático y la obtenida con la ecuación **(1)** calculando su diferencia porcentual.

$$\Delta a_{porcentual} = \frac{|\, a_{ajuste} - a_{ecuación_1} \,|}{\left|\frac{a_{ajuste} + a_{ecuación_1}}{2}\right|} =$$

Ahora utiliza la ecuación **(2)** para calcular la aceleración tomando en cuenta el giro de la polea (Redondear a dos decimales y no olvidar incluir las unidades de los parámetros).

$a_{ecuacion_2} =$

Compara la aceleración encontrada con el ajuste cuadrático y la obtenida con la ecuación **(2)** calculando su diferencia porcentual.

$$\Delta a_{porcentual} = \frac{|\, a_{ajuste} - a_{ecuación_2} \,|}{\left|\frac{a_{ajuste} + a_{ecuación_2}}{2}\right|} =$$

¿Son consistentes estos resultados? Explique.

Ejemplos de los datos y resultados para los diferentes casos utilizando los sensores de distancia Vernier y Arduino

Caso 1): Cuerpos de igual masa

Utilizando el sensor de movimiento Vernier

Masa total del disco más pesas agregadas	$72.7\ gramos$
Masa total del portapesas más pesas agregadas	$72.7\ gramos$
Momento de inercia de la polea	$1.8 \times 10^{-6} kg/m^2$
Radio de la polea	$2.5\ cm$

La Figura A1 muestra los resultados obtenidos en cinco ensayos utilizando un disco y portapesas con masa total de 72.7 gramos cada uno. Se utilizó una polea de Pasco, cuyo radio es $r = 2.5\ cm$ y su momento de inercia es de $1.8\ \times 10^{-6}\ kg/m^2$.

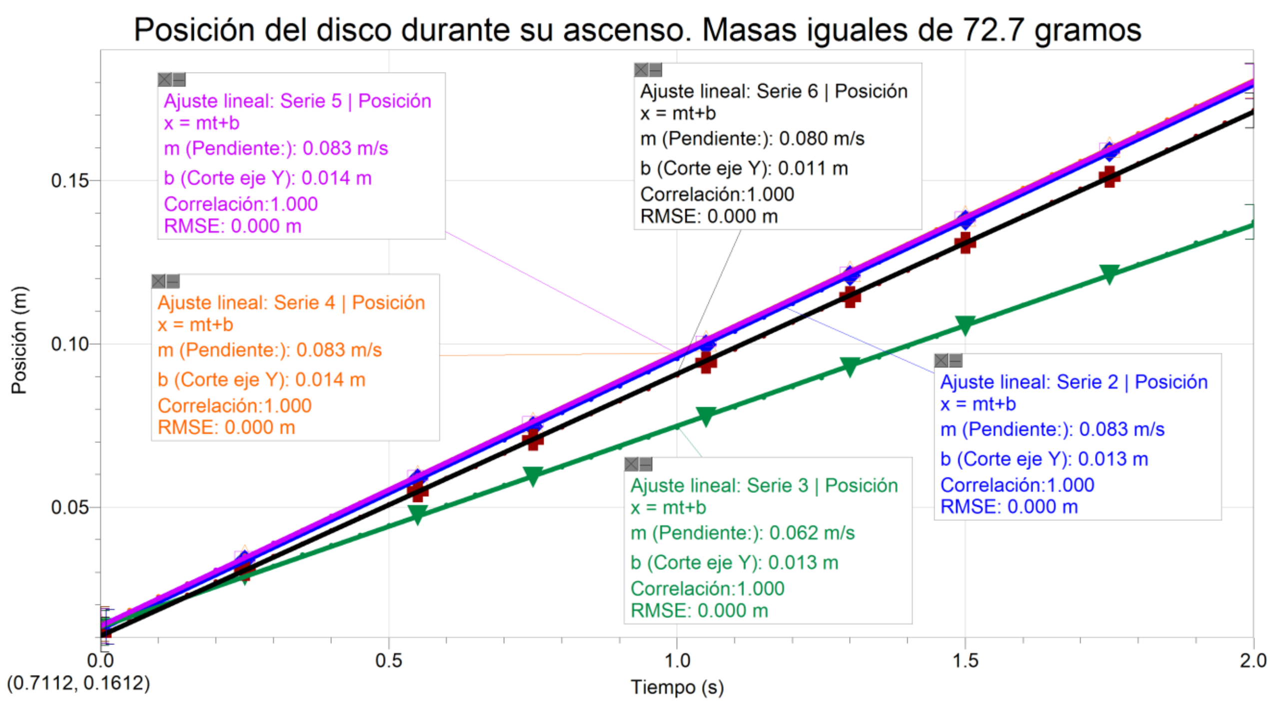

Figura A1. Gráficas de posición del ascenso del disco en una máquina de Atwood usando el sensor de distancia Vernier.

La ecuación que se ajusta al movimiento del disco en una de las series es:

$$y(t) = 0.083 \frac{m}{s} t + 0.013m$$

De acuerdo con esta ecuación, los valores para la posición inicial, velocidad inicial y aceleración son:

$y_i\ = 0.013\ m$ $\quad$ $\mathrm{v}_{iy}\ = 0.083 \frac{m}{s}$ $\quad$ $a = 0 \frac{m}{s^2}$

Utilizando el sensor de movimiento con Arduino

Masa total del disco más pesas agregadas	$72.7\ gramos$
Masa total del portapesas más pesas agregadas	$72.7\ gramos$
Momento de inercia de la polea	$1.8\ \times\ 10^{-6} kg/m^2$
Radio de la polea	$2.5\ cm$

La Figura A2 muestra los resultados obtenidos en cinco ensayos utilizando un disco con pesas cuya masa total fue de 72.7 gramos, al igual que la masa del portapesas. Se utilizó una polea de Pasco, cuyo radio es $r = 2.5\ cm$ y su momento de inercía de $1.8 \times 10^{-6}\ kg/m^2$.

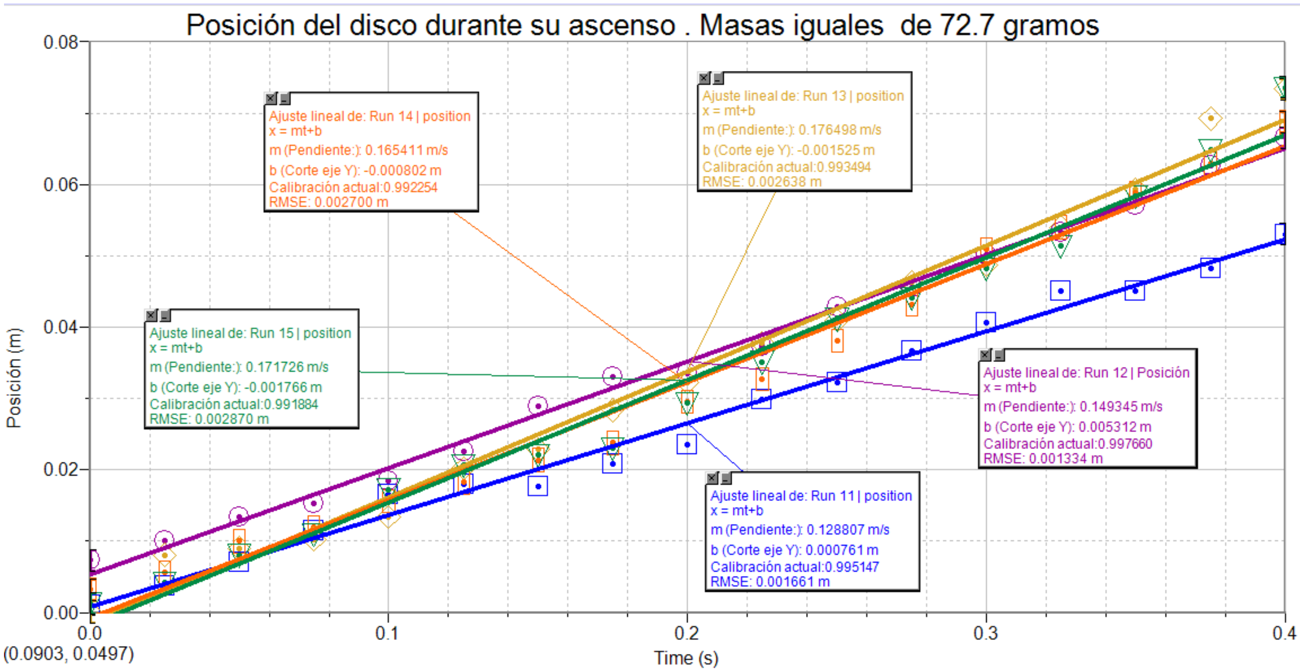

Figura A2. Gráficas de posición del ascenso del disco en una máquina de Atwood usando el sensor de distancia con Arduino.

La ecuación que se ajusta al movimiento del disco en una de las series es:

$$y(t) = 0.149\frac{m}{s}t + 0.005m$$

De acuerdo con esta ecuación, los valores para la posición inicial, velocidad inicial y aceleración son:

$y_i\ = 0.005\ m$ $\qquad$ $\mathrm{v}_{iy}\ = 0.149\frac{m}{s}$ $\qquad$ $a = 0\frac{m}{s^2}$

Caso 2): Cuerpos de diferentes masas

Utilizando el sensor de movimiento Vernier

Masa total del disco más pesas agregadas	$50\ gramos$
Masa total del portapesas más pesas agregadas	$52.1\ gramos$
Momento de inercia de la polea	$1.8 \times 10^{-6} kg/m^2$
Radio de la polea	$2.5\ cm$

La Figura A3 muestra los resultados obtenidos en cuatro ensayos utilizando un disco con pesas cuya masa total fue de 50 gramos, en tanto que la del portapesas y las pesas añadidas fue de 52.1 gramos. Se utilizó una polea de Pasco, cuyo radio es $r = 2.5\,cm$ y su momento de inercía de $1.8 \times 10^{-6}\ kg/m^2$.

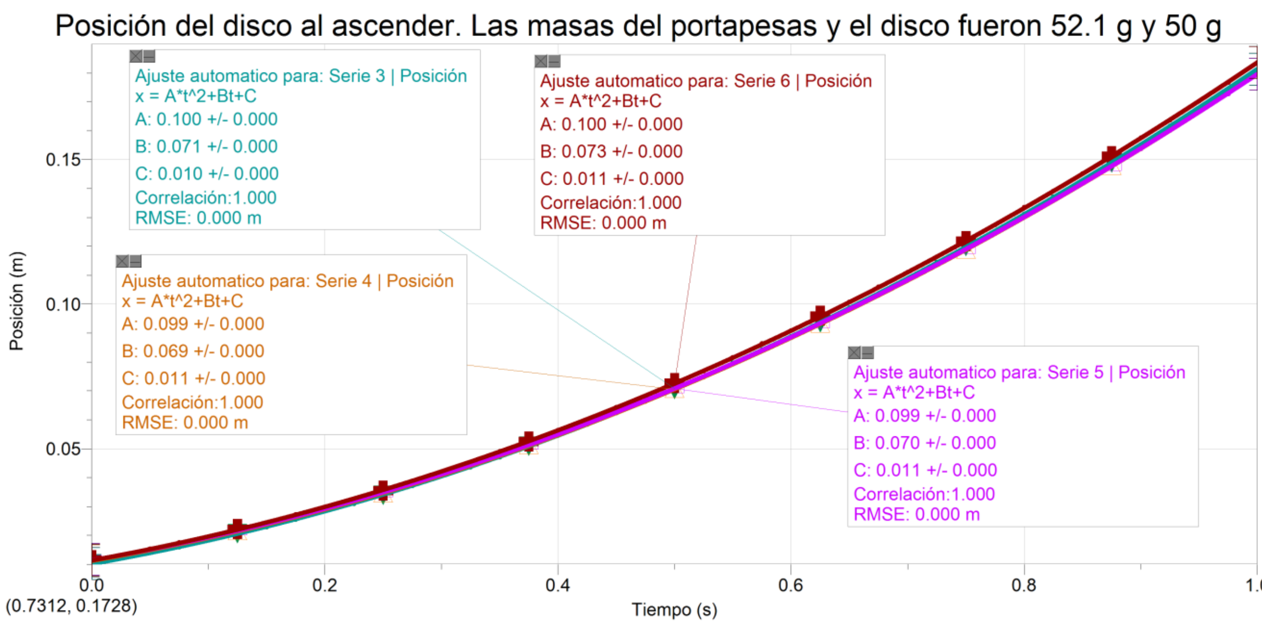

Figura A3. Gráficas de posición del ascenso del disco en una máquina de Atwood usando el sensor de distancia Vernier.

El ajuste de la posición del disco durante su ascenso de una se las series es:

$$y(t) = 0.099\,\frac{m}{s^2}\,t^2 + 0.070\ \frac{m}{s}\ t + 0.011\,m$$

De acuerdo con esta ecuación, los valores para la posición inicial, velocidad inicial y aceleración son:

$y_i\ = 0.011m$ $\qquad$ $\mathrm{v}_{iy}\ = 0.070\frac{m}{s}$ $\qquad$ $a = 0.198\frac{m}{s^2}$

Utilizando la ecuación **(1)** se encuentra que la aceleración esperada, sin tomar en cuenta la dinámica de la polea, es:

$$a_{disco} = \frac{\left(m_{portapesas} - m_{disco}\right)}{\left(m_{disco} + m_{portapesas}\right)} g = \frac{(0.0521 - 0.050\ )\ kg}{(0.050 +\ 0.0521\ )\ kg} \left(9.81\ \frac{m}{s^2}\right) = 0.202 \frac{m}{s^2}$$

La diferencia porcentual entre este valor y el encontrado con el ajuste cuadrático es:

$$\Delta a_{porcentual}\ = \frac{\left|0.198 \frac{m}{s^2} - 0.202 \frac{m}{s^2}\right|}{\left|\frac{0.198 \frac{m}{s^2} + 0.202 \frac{m}{s^2}}{2}\right|} = 0.02 = 2\%$$

El momento de inercia de la polea Pasco es: $I = 1.8 \times 10^{-6}\ kg/m^2$ tanto que su radio es igual a $r = 0.025m$, por lo tanto:

$$\frac{I}{r^2} = \frac{1.8\ \times 10^{-6}\ kg/m^2}{(0.025\ m)^2} = 0.003\ kg$$

Utilizando la ecuación **(2)** se encuentra la aceleración esperada tomando en cuenta la dinámica de la polea es:

$$a_{disco} = \frac{\left(m_{portapesas} - m_{disco}\right)}{\left(m_{disco} + m_{portapesas} + \frac{I}{r^2}\right)} g = \frac{(0.0521 -\ 0.050\ )\ kg}{(0.050\ kg +\ 0.0521\ kg + 0.003\ kg)} \left(9.81\ \frac{m}{s^2}\right) =$$

$$= 0.196\ \frac{m}{s^2}$$

La diferencia porcentual entre este nuevo valor y el encontrado con el ajuste cuadrático es:

$$\Delta a_{porcentual}\ = \frac{\left|0.198 \frac{m}{s^2} - 0.196 \frac{m}{s^2}\right|}{\left|\frac{0.198 \frac{m}{s^2} + 0.196 \frac{m}{s^2}}{2}\right|} = 0.01 = 1\%$$

El valor de la aceleración calculado teniendo en cuenta el movimiento de la polea es más cercano al valor medido.

Utilizando el sensor de movimiento con Arduino

Masa total del disco más pesas agregadas	$39\ gramos$
Masa total del portapesas más pesas agregadas	$42\ gramos$
Momento de inercia de la polea	$1.8\times 10^{-6} kg/m^2$
Radio de la polea	$2.5\ cm$

La Figura A4 muestra los resultados obtenidos en cuatro ensayos utilizando un disco con pesas cuya masa total fue de 39 gramos, en tanto que la del portapesas y las pesas añadidas fue de 42 gramos. Se utilizó una polea de Pasco, cuyo radio es $r = 2.5\,cm$ y su momento de inercia de $1.8\times 10^{-6}\ kg/m^2$.

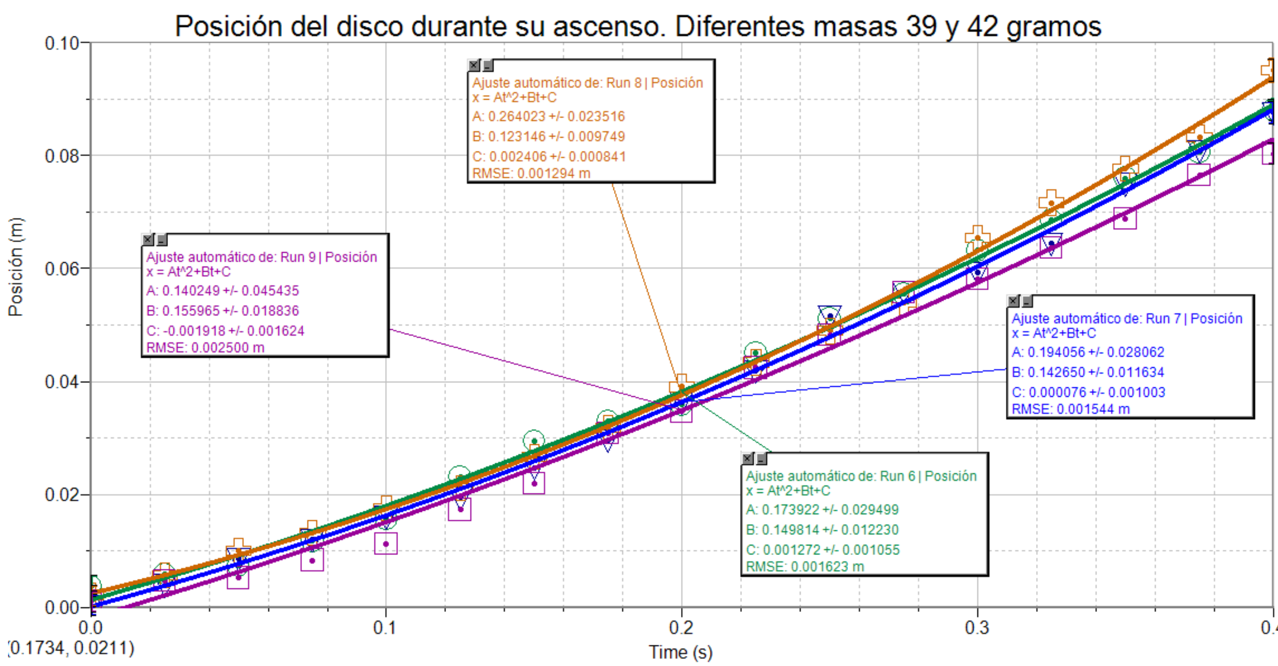

Figura A4. Gráficas de posición del ascenso del disco en una máquina de Atwood usando el sensor de distancia con Arduino.

El ajuste de la posición del disco durante su ascenso de una se las series es:

$$y(t) = 0.174\,\frac{m}{s^2}\,t^2 + 0.150\,\frac{m}{s}\,t + 0.001\,m$$

De acuerdo con esta ecuación, los valores para la posición inicial, velocidad inicial y aceleración son:

$y_i\ = 0.001m$ $\qquad$ $v_{iy}\ = 0.150\frac{m}{s}$ $\qquad$ $a = 0.348\frac{m}{s^2}$

Utilizando la ecuación **(1)** se encuentra que la aceleración esperada, sin tomar en cuenta la dinámica de la polea, es:

$$a_{disco} = \frac{\left(m_{portapesas} - m_{disco}\right)}{\left(m_{disco} + m_{portapesas}\right)} g = \frac{(0.042 - 0.039\ )\ kg}{(0.042 +\ 0.039\ )\ kg}\left(9.81\ \frac{m}{s^2}\right) = 0.363\,\frac{m}{s^2}$$

La diferencia porcentual entre este valor y el encontrado con el ajuste cuadrático es:

$$\Delta a_{porcentual} = \frac{\left|0.348\,\frac{m}{s^2} - 0.363\,\frac{m}{s^2}\right|}{\left|\frac{0.348\,\frac{m}{s^2} + 0.363\,\frac{m}{s^2}}{2}\right|} = 0.04 = 4\%$$

El momento de inercia de la polea Pasco es: $I = 1.8 \times 10^{-6}\ kg/m^2$ tanto que su radio es igual a $r = 0.025m$, por lo tanto:

$$\frac{I}{r^2} = \frac{1.8\ \times 10^{-6}\ kg/m^2}{(0.025\ m)^2} = 0.003\ kg$$

Utilizando la ecuación **(2)** se encuentra la aceleración esperada tomando en cuenta la dinámica de la polea es:

$$a_{disco} = \frac{\left(m_{portapesas} - m_{disco}\right)}{\left(m_{disco} + m_{portapesas} + \frac{I}{r^2}\right)} g = \frac{(0.042 -\ 0.039)\ kg}{(0.042\ kg +\ 0.039kg + 0.003\ kg)}\left(9.81\ \frac{m}{s^2}\right) =$$

$$= 0.350\,\frac{m}{s^2}$$

La diferencia porcentual entre este nuevo valor y el encontrado con el ajuste cuadrático es:

$$\Delta a_{porcentual} = \frac{\left|0.348\,\frac{m}{s^2} - 0.350\,\frac{m}{s^2}\right|}{\left|\frac{0.348\,\frac{m}{s^2} + 0.350\,\frac{m}{s^2}}{2}\right|} = 0.006 = 0.6\%$$

En este caso también podemos observar que el valor de la aceleración calculado teniendo en cuenta el movimiento de la polea mucho más cercano al valor medido.