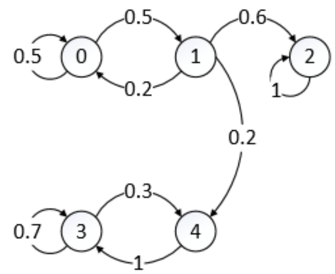
UCB DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
INVESTIGACIÓN OPERATIVA II y LABORATORIO MAT – 252
PRÁCTICA: CADENAS DE MARKOV

Problema 1

Considere la cadena de Markov que tienen la siguiente matriz de transición (de un paso). Determine las clases de esta cadena de Markov y, para cada clase, determine si es recurrente o transitoria.

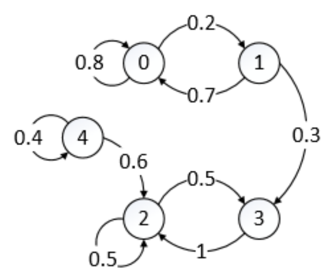
$$\begin{array}{c c} \text{Estado} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \; P = & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Problema 2

Considere la cadena de Markov que tienen la siguiente matriz de transición (de un paso). Determine las clases de esta cadena de Markov y, para cada clase, determine si es recurrente o transitoria.

$$\begin{array}{c c} \text{Estado} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \; P = & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$



Problema 3

Nota: El estado i tiene periodo d si $P_{ii}^{(n)} = 0$ cuando n no es divisible por d y d es el menor entero positivo con esa propiedad, es decir, d es el máximo común divisor del conjunto

$$\left\{ n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$$

Un estado con periodo 1 se dice aperiódico.

Considere la cadena de Markov que tiene la siguiente matriz de transición (de un paso).

$$\begin{array}{c c} \text{Estado} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \; P = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine el periodo de los estados de esta cadena de Markov.

Problema 4
Considere la cadena de Markov que tiene la siguiente matriz de transición (de un paso). Las transiciones ocurren de un día para otro.

$$\begin{array}{cc} \text{Estado} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuál es la proporción de tiempo, a largo plazo, que la cadena está en cada uno de los estados?

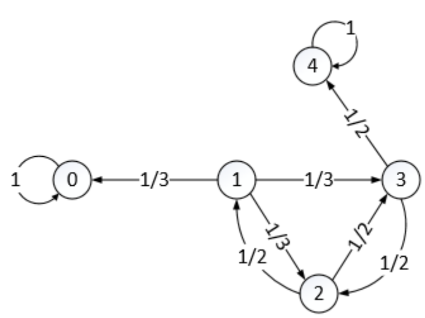
Considere que los costos respectivos por estar en los estados 0, 1, 2 son 1 000, 3 000 y 8 000 dólares. ¿Cuál es el costo diario esperado a largo plazo?

Problema 5
En la sección 16.5 del libro de Hillier & Lieberman, se calculó el costo promedio esperado (a largo plazo) por semana (basado solo en costos de ordenar y costos de la demanda insatisfecha) del ejemplo del inventario de cámaras de la sección 16.1. Suponga que se cambia la política de inventarios. Siempre que el número de cámaras al final de la semana sea 0 o 1, se coloca una orden que aumente este número hasta 3. De otra manera, no se coloca una orden.
Calcule de nuevo el costo promedio esperado (a largo plazo) por semana con esta nueva política de inventarios.

Problema 6
Un fabricante tiene una máquina que cuando empieza a operar al inicio del día tiene una probabilidad de 0.12 de descomponerse en algún momento de ese día. Cuando esto ocurre, la reparación se hace al siguiente día y se termina al finalizar ese día.

a) Formule la evolución del estado de la maquina como una cadena de Markov; identifique los tres estados posibles al final del día y después construya la matriz de transición (de un paso).
b) Encuentre las μ_{ij} (tiempo esperado de primera pasada del estado *i* al estado *j*) para toda *i* y *j*. Use estos resultados para identificar la siguiente descompostura después de que se ha terminado una reparación.

Problema 7
Considere la cadena de Markov cuyo diagrama de transición de estados es el siguiente.



a) Encontrar las probabilidades de absorción.
b) Determinar los tiempos de absorción.

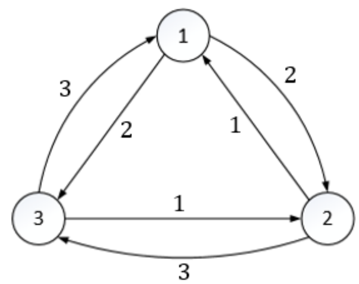
Problema 8

Hugo tiene 3 dólares y Paco tiene 2 dólares cuando comienza a jugar el siguiente juego: lanzan una moneda honrada. Si sale cara, Paco le da un dólar a Hugo. Si sale sello, Hugo le paga a Paco un dólar. El juego termina cuando uno de los dos se queda sin dinero. Sea $\{X_n\}$ la cadena de Markov que representa la cantidad de dinero que tiene Hugo.

a) Determine la probabilidad de que Hugo logre tener 5 dólares y la probabilidad de que se quede sin dinero.
b) Encuentre los respectivos tiempos: el de que Hugo logre 5 dólares y de que quede en la bancarrota.

Problema 9

Considere la cadena de Markov de tiempo continuo cuyo diagrama de tasas es el siguiente.



Encuentre las probabilidades de estado estable para esta cadena