



Trabajo Práctico Aplicaciones

Eliminatorias Sudamericanas para la copa mundial de la FIFA

Viernes 22 de Diciembre de 2023

Investigación Operativa y Optimización (LCD)

Integrante	LU	Correo electrónico
Alvarez Colombo, Juan Ignacio	928/21	jialvarez@dc.uba.ar
Comerso Salzer, Delfina Belen	1192/21	delficomerso@gmail.com
Sanchez Goicochea, Jhosept Levyt	813/21	levyt22@gmail.com
Ortiz, Pedro	417/21	portiz@dc.uba.ar



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

1. Introducción

En todas las Copas del Mundo desde 1998 hasta 2014, la CONMEBOL (Confederación Sudamericana de Fútbol) utilizó un sistema de doble round robin espejado para el torneo clasificatorio. El torneo está dividido en 18 jornadas y bajo este formato, un equipo se enfrentaba a cada rival una vez en las primeras 9 jornadas en un orden definido, y luego nuevamente en las últimas 9 jornadas en el mismo orden pero con el local-visitante invertido. Cada una de las jornadas consta de 5 partidos en los que cada equipo participa exactamente una vez. Por ende, en total el torneo cuenta con 90 encuentros.

La decisión de hacer el fixture de esta manera llevó a muchas injusticias y quejas de las distintas federaciones que componen la CONMEBOL, por lo que en este proyecto vamos a estar analizando distintas variantes, tratando de obtener soluciones que se ajusten a todas las restricciones requeridas.

Nuestro objetivo con este trabajo es definir el fixture de las eliminatorias sudamericanas de fútbol para el torneo mundial. Para hacer esto vamos a hacer uso de programación lineal. En consecuencia, se van a tener que determinar ciertas variables y restricciones que nos permitirán modelar el problema.

2. Base de la formulación

Sea $I = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de equipos (en este caso $n = 10$), y sean $K = \{1, \dots, 18\}$ el conjunto de rondas y K_{odd} el conjunto de las primeras rondas en una doble ronda. Para $i, j \in I$ y $k \in K$, se define la variable binaria $x_{i,j,k}$ igual a 1 si el equipo i juega de local contra el equipo j en la ronda k , y 0 en caso contrario.

Definimos las siguientes restricciones para mantener las características básicas de un torneo.

Restricción double round robin: Todos los equipos se enfrentan contra los demás equipos una vez en la primera mitad, y una vez en la segunda mitad; y exactamente uno de esos dos partidos debe ser jugado de local, mientras el otro debe ser jugado de visitante. Estas restricciones se formulan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K: k \leq n-1} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) &= 1 \quad \forall i \in I, j \in I: i \neq j \\ \sum_{k \in K: k > n-1} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) &= 1 \quad \forall i \in I, j \in I: i \neq j \\ \sum_{k \in K} x_{i,j,k} &= 1 \quad \forall i \in I, j \in I: i \neq j \end{aligned}$$

Compacidad: El cronograma debe ser compacto, esto es, todos los equipos deben jugar un partido en cada ronda.

$$\sum_{i \in I: i \neq j} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) = 1 \quad \forall j \in I, k \in K$$

Restricción de balance: Estas restricciones se incluyen para mantener una distribución balanceada entre los equipos de H-A secuencias en dobles rondas. Dado que hay $n - 1$ dobles rondas, imponemos que cada equipo tenga entre $\frac{n}{2} - 1$ y $\frac{n}{2}$ tales secuencias. Estas restricciones se codean con la ayuda de variables auxiliares $y_{i,k}$, las cuales toman el valor de 1 si el equipo i tiene una H-A secuencia en la doble ronda k y 0 en caso contrario. Las variables auxiliares deben satisfacer las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} - 1 &\leq \sum_{k \in K_{odd}} y_{i,k} \leq \frac{n}{2} \quad \forall i \in I \\ \sum_{j \in I: i \neq j} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k+1}) &\leq 1 + y_{i,k} \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \\ y_{i,k} &\leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{i,j,k} \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \\ y_{i,k} &\leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{j,i,k+1} \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \end{aligned}$$

Función objetivo: Una vez planteadas todas nuestras restricciones, nuestro objetivo será minimizar el número total de descansos como visitante dentro de las rondas dobles para todos los equipos. Para lograr esto, primero

definimos las variables auxiliares $w_{i,k}$, que toman un valor de 1 si el equipo i tiene un descanso como visitante en la ronda doble que comienza en la ronda k y cero en caso contrario. Estas variables deben entonces satisfacer las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I: i \neq j} (x_{j,i,k} + x_{j,i,k+1}) &\leq 1 + w_{i,k} \quad \forall i \in I, k \in K_{\text{odd}} \\ w_{i,k} &\leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{j,i,k} \quad \forall i \in I, k \in K_{\text{odd}} \\ w_{i,k} &\leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{j,i,k+1} \quad \forall i \in I, k \in K_{\text{odd}} \end{aligned}$$

Tengamos en cuenta también que, dado que la existencia de un descanso como visitante para un equipo determinado en una ronda doble implica necesariamente un descanso como local para otro equipo en la misma ronda doble, la minimización del número total de descansos en las rondas dobles se captura mediante la siguiente función objetivo:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{\text{odd}}} w_{i,k}$$

3. Esquemas simétricos

A diferencia de la estructura espejada de los torneos clasificatorios anteriores de la Copa del Mundo, la formulación base anterior no impone ningún tipo de simetría entre las primeras 9 jornadas y las últimas 9, una condición que nosotros sí requerimos. Por lo tanto, en esta sección vamos a analizar distintos esquemas y variantes como se enunció en la introducción.

3.1. Esquema espejado

La condición de simetría puede incorporarse a la formulación IP base agregando la siguiente restricción.

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n-1} \quad \forall i, j \in I : i \neq j, k \in K : 1 \leq k \leq n-1$$

En este caso en particular podemos observar que si al modelo le aplicamos todas las restricciones previamente enunciadas además de esta última, la cual es específica a este esquema, el resultado es no factible. En este caso, no agregamos los fixtures, pues, comprobamos que la solución era infactible.

3.2. Esquema francés

En este esquema la primera y última ronda son idénticas pero sus estados de local y visitante están invertidos; lo mismo vale para las rondas k y $k+n-2, k=2, \dots, n-1$.

$$x_{i,j,1} = x_{j,i,2n-2}, \quad x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n-2} \quad \forall i, j \in I : i \neq j, k \in K : 2 \leq k \leq n-1$$

3.3. Esquema inglés

En este esquema, las rondas $n-1$ y n son idénticas, pero sus estados de local y visitante están invertidos; lo mismo vale para las rondas k y $k+n, k=2, \dots, n-2$.

$$x_{i,j,n-1} = x_{j,i,n}, \quad x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n} \quad \forall i, j \in I : i \neq j, k \in K : 2 \leq k \leq n-1$$

3.4. Esquema invertido

En este esquema las rondas k y $2n-k-1$ son idénticas, pero sus estados de local y visitante están invertidos, para $k=1, \dots, n-1$.

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,2n-1-k} \quad \forall i, j \in I : i \neq j, k \in K : 1 \leq k \leq n-1$$

3.5. Esquema back-to-back

En este esquema las rondas k y $k + 1$ son idénticas, pero sus estados de local y visitante están invertidos para $k \in K_{odd}$.

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+1} \quad \forall i, j \in I : i \neq j, k \in K_{odd}$$

3.6. Esquema de separación Min-Max

En este esquema los dos partidos entre dos equipos están separados por al menos c rondas y como mucho d rondas consecutivas.

$$\sum_{\bar{k} \in K : k \leq \bar{k} \leq k+c} (x_{i,j,\bar{k}} + x_{j,i,\bar{k}}) \leq 1 \quad \forall i, j \in I : i \neq j, k \leq |K| - c$$

$$\sum_{\bar{k} \in K : (k-d) \wedge 1 \leq \bar{k} \leq (k+d) \vee 2(n-1) : \bar{k} \neq k} x_{i,j,\bar{k}} \geq x_{j,i,k} \quad \forall i, j \in I : i \neq j, k \in K$$

A pesar de que muchos de estos esquemas no sean tan populares como el esquema espejado, algunos han sido usados en varias ligas profesionales de diferentes países. Por ejemplo, el esquema francés ha sido utilizado en República Checa, Francia, Luxemburgo y Rusia. Por esta razón es que consideramos varios de ellos.

4. Resultados

Resolvimos la formulación base en combinación con las diversas restricciones relacionadas con la simetría y obtuvimos una serie de calendarios plantilla con un valor de cero en la función objetivo. Hay que tener en cuenta también que para cada esquema de simetría mencionado anteriormente, podría haber múltiples calendarios.

En cada configuración, obtuvimos calendarios que eliminaron los descansos en doble ronda. Para el esquema de separación Min-Max usamos $c = 5$ y $d = 13$, ya que estos eran los valores más cercanos posibles, que pudimos correr en nuestras computadoras, al caso espejado no factible ($c = 9$ y $d = 9$) que eliminaban los descansos en doble ronda.

Finalmente, luego de obtener todas las configuraciones, sorteamos los países a cada número, y completamos los fixtures en cada esquema.

5. Fixtures con países asignados

Mostraremos como queda el fixture para cada esquema. Para aclarar temas de notación, el símbolo @ representa que un país juega de visitante, es decir, si tenemos en un casillero de la tabla @BRA, tenemos que el país de la fila elegida, juega de visitante en Brasil.

5.1. Fixture - Esquema francés

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	@VEN	BOL	@ECU	BRA	@COL	CHI	@PAR	PER	URU
BOL	CHI	@ARG	@VEN	ECU	PAR	@BRA	@PER	URU	@COL
BRA	COL	@PAR	URU	@ARG	@ECU	BOL	VEN	@CHI	@PER
CHI	@BOL	ECU	COL	@PAR	PER	@ARG	@URU	BRA	VEN
COL	@BRA	URU	@CHI	VEN	ARG	@PER	@ECU	PAR	BOL
ECU	PER	@CHI	ARG	@BOL	BRA	@URU	COL	@VEN	@PAR
PAR	@URU	BRA	@PER	CHI	@BOL	VEN	ARG	@COL	ECU
PER	@ECU	VEN	PAR	@URU	@CHI	COL	BOL	@ARG	BRA
URU	PAR	@COL	@BRA	PER	@VEN	ECU	CHI	@BOL	@ARG
VEN	ARG	@PER	BOL	@COL	URU	@PAR	@BRA	ECU	@CHI

Cuadro 1: Primeras 9 fechas, formato francés

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	@BOL	ECU	@BRA	COL	@CHI	PAR	@PER	@URU	VEN
BOL	ARG	VEN	@ECU	@PAR	BRA	PER	@URU	COL	@CHI
BRA	PAR	@URU	ARG	ECU	@BOL	@VEN	CHI	PER	@COL
CHI	@ECU	@COL	PAR	@PER	ARG	URU	@BRA	@VEN	BOL
COL	@URU	CHI	@VEN	@ARG	PER	ECU	@PAR	@BOL	BRA
ECU	CHI	@ARG	BOL	@BRA	URU	@COL	VEN	PAR	@PER
PAR	@BRA	PER	@CHI	BOL	@VEN	@ARG	COL	@ECU	URU
PER	@VEN	@PAR	URU	CHI	@COL	@BOL	ARG	@BRA	ECU
URU	COL	BRA	@PER	VEN	@ECU	@CHI	BOL	ARG	@PAR
VEN	PER	@BOL	COL	@URU	PAR	BRA	@ECU	CHI	@ARG

Cuadro 2: Últimas 9 fechas, formato francés

5.2. Fixture - Esquema inglés

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	@PAR	BOL	COL	@URU	@VEN	BRA	PER	@ECU	CHI
BOL	PER	@ARG	@ECU	BRA	@PAR	VEN	URU	@CHI	COL
BRA	@URU	ECU	CHI	@BOL	PER	@ARG	@COL	PAR	@VEN
CHI	VEN	@PER	@BRA	ECU	@COL	URU	@PAR	BOL	@ARG
COL	@ECU	PAR	@ARG	VEN	CHI	@PER	BRA	@URU	@BOL
ECU	COL	@BRA	BOL	@CHI	@URU	PAR	@VEN	ARG	PER
PAR	ARG	@COL	@VEN	PER	BOL	@ECU	CHI	@BRA	URU
PER	@BOL	CHI	URU	@PAR	@BRA	COL	@ARG	VEN	@ECU
URU	BRA	@VEN	@PER	ARG	ECU	@CHI	@BOL	COL	@PAR
VEN	@CHI	URU	PAR	@COL	ARG	@BOL	ECU	@PER	BRA

Cuadro 3: Primeras 9 fechas, formato inglés

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	@CHI	PAR	@BOL	@COL	URU	VEN	@BRA	@PER	ECU
BOL	@COL	@PER	ARG	ECU	@BRA	PAR	@VEN	@URU	CHI
BRA	VEN	URU	@ECU	@CHI	BOL	@PER	ARG	COL	@PAR
CHI	ARG	@VEN	PER	BRA	@ECU	COL	@URU	PAR	@BOL
COL	BOL	ECU	@PAR	ARG	@VEN	@CHI	PER	@BRA	URU
ECU	@PER	@COL	BRA	@BOL	CHI	URU	@PAR	VEN	@ARG
PAR	@URU	@ARG	COL	VEN	@PER	@BOL	ECU	@CHI	BRA
PER	ECU	BOL	@CHI	@URU	PAR	BRA	@COL	ARG	@VEN
URU	PAR	@BRA	VEN	PER	@ARG	@ECU	CHI	BOL	@COL
VEN	@BRA	CHI	@URU	@PAR	COL	@ARG	BOL	@ECU	PER

Cuadro 4: Últimas 9 fechas, formato inglés

5.3. Fixture - Esquema invertido

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	@BRA	ECU	@PER	CHI	COL	@PAR	VEN	@BOL	@URU
BOL	@VEN	BRA	COL	@URU	PAR	@ECU	@PER	ARG	CHI
BRA	ARG	@BOL	@CHI	ECU	VEN	@COL	@PAR	URU	PER
CHI	@ECU	COL	BRA	@ARG	PER	@VEN	@URU	PAR	@BOL
COL	URU	@CHI	@BOL	PER	@ARG	BRA	ECU	@VEN	PAR
ECU	CHI	@ARG	PAR	@BRA	@URU	BOL	@COL	PER	@VEN
PAR	PER	@URU	@ECU	VEN	@BOL	ARG	BRA	@CHI	@COL
PER	@PAR	VEN	ARG	@COL	@CHI	URU	BOL	@ECU	@BRA
URU	@COL	PAR	@VEN	BOL	ECU	@PER	CHI	@BRA	ARG
VEN	BOL	@PER	URU	@PAR	@BRA	CHI	@ARG	COL	ECU

Cuadro 5: Primeras 9 fechas, formato invertido

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	URU	BOL	@VEN	PAR	@COL	@CHI	PER	@ECU	BRA
BOL	@CHI	@ARG	PER	ECU	@PAR	URU	@COL	@BRA	VEN
BRA	@PER	@URU	PAR	COL	@VEN	@ECU	CHI	BOL	@ARG
CHI	BOL	@PAR	URU	VEN	@PER	ARG	@BRA	@COL	ECU
COL	@PAR	VEN	@ECU	@BRA	ARG	@PER	BOL	CHI	@URU
ECU	VEN	@PER	COL	@BOL	URU	BRA	@PAR	ARG	@CHI
PAR	COL	CHI	@BRA	@ARG	BOL	@VEN	ECU	URU	@PER
PER	BRA	ECU	@BOL	@URU	CHI	COL	@ARG	@VEN	PAR
URU	@ARG	BRA	@CHI	PER	@ECU	@BOL	VEN	@PAR	COL
VEN	@ECU	@COL	ARG	@CHI	BRA	PAR	@URU	PER	@BOL

Cuadro 6: Últimas 9 fechas, formato invertido

5.4. Fixture - Esquema Back to Back

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	BRA	@BRA	COL	@COL	ECU	@ECU	@PER	PER	@BOL
BOL	@URU	URU	ECU	@ECU	BRA	@BRA	@COL	COL	ARG
BRA	@ARG	ARG	URU	@URU	@BOL	BOL	@VEN	VEN	PER
CHI	@PAR	PAR	PER	@PER	VEN	@VEN	@URU	URU	ECU
COL	@ECU	ECU	@ARG	ARG	PAR	@PAR	BOL	@BOL	VEN
ECU	COL	@COL	@BOL	BOL	@ARG	ARG	PAR	@PAR	@CHI
PAR	CHI	@CHI	@VEN	VEN	@COL	COL	@ECU	ECU	URU
PER	@VEN	VEN	@CHI	CHI	URU	@URU	ARG	@ARG	@BRA
URU	BOL	@BOL	@BRA	BRA	@PER	PER	CHI	@CHI	@PAR
VEN	PER	@PER	PAR	@PAR	@CHI	CHI	BRA	@BRA	@COL

Cuadro 7: Primeras 9 fechas, formato Back to Back

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	BOL	@URU	URU	PAR	@PAR	@CHI	CHI	VEN	@VEN
BOL	@ARG	@PER	PER	CHI	@CHI	VEN	@VEN	@PAR	PAR
BRA	@PER	@PAR	PAR	@ECU	ECU	COL	@COL	CHI	@CHI
CHI	@ECU	@COL	COL	@BOL	BOL	ARG	@ARG	@BRA	BRA
COL	@VEN	CHI	@CHI	@PER	PER	@BRA	BRA	URU	@URU
ECU	CHI	@VEN	VEN	BRA	@BRA	URU	@URU	@PER	PER
PAR	@URU	BRA	@BRA	@ARG	ARG	PER	@PER	BOL	@BOL
PER	BRA	BOL	@BOL	COL	@COL	@PAR	PAR	ECU	@ECU
URU	PAR	ARG	@ARG	VEN	@VEN	@ECU	ECU	@COL	COL
VEN	COL	ECU	@ECU	@URU	URU	@BOL	BOL	@ARG	ARG

Cuadro 8: Últimas 9 fechas, formato Back to Back

5.5. Fixture - Esquema Min-Max

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	COL	@PAR	BRA	@ECU	PER	@BOL	VEN	@CHI	@URU
BOL	@URU	VEN	@PAR	CHI	@ECU	ARG	BRA	@PER	COL
BRA	ECU	@COL	@ARG	PER	VEN	@PAR	@BOL	URU	CHI
CHI	@VEN	PER	URU	@BOL	@COL	ECU	@PAR	ARG	@BRA
COL	@ARG	BRA	VEN	@URU	CHI	@PER	@ECU	PAR	@BOL
ECU	@BRA	URU	@PER	ARG	BOL	@CHI	COL	@VEN	PAR
PAR	@PER	ARG	BOL	@VEN	@URU	BRA	CHI	@COL	@ECU
PER	PAR	@CHI	ECU	@BRA	@ARG	COL	@URU	BOL	@VEN
URU	BOL	@ECU	@CHI	COL	PAR	@VEN	PER	@BRA	ARG
VEN	CHI	@BOL	@COL	PAR	@BRA	URU	@ARG	ECU	PER

Cuadro 9: Primeras 9 fechas, formato Min-Max

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	ECU	@COL	PAR	@PER	BOL	@BRA	URU	@VEN	CHI
BOL	@CHI	URU	@VEN	ECU	@ARG	@COL	PAR	@BRA	PER
BRA	@PER	@ECU	COL	@VEN	PAR	ARG	@CHI	BOL	@URU
CHI	BOL	VEN	@PER	COL	@ECU	@URU	BRA	PAR	@ARG
COL	URU	ARG	@BRA	@CHI	PER	BOL	@VEN	ECU	@PAR
ECU	@ARG	BRA	@URU	@BOL	CHI	@PAR	PER	@COL	VEN
PAR	VEN	PER	@ARG	URU	@BRA	ECU	@BOL	@CHI	COL
PER	BRA	@PAR	CHI	ARG	@COL	VEN	@ECU	URU	@BOL
URU	@COL	@BOL	ECU	@PAR	VEN	CHI	@ARG	@PER	BRA
VEN	@PAR	@CHI	BOL	BRA	@URU	@PER	COL	ARG	@ECU

Cuadro 10: Últimas 9 fechas, formato Min-Max

6. Fixtures con países asignados y restricción top team

A lo largo de los años, varias federaciones han expresado su descontento con el formato de las fechas clasificatorias para la Copa Mundial de la FIFA. En este formato, los dos equipos más fuertes de la confederación, Argentina y Brasil, pueden enfrentarse en fechas consecutivas contra el mismo contrincante. Estos dos equipos tienen los mejores récords históricos en las clasificatorias, con uno de ellos siempre terminando primero desde 1998. Según las federaciones, jugar contra estos dos equipos en fechas consecutivas es desmotivante para los jugadores, ya que la derrota es casi inevitable.

Teniendo esto en cuenta vamos a agregar una restricción que impide que esta situación ocurra.

Restricción top team: El conjunto de los "mejores equipos", notamos I_S , contiene a Argentina y Brasil, las potencias del fútbol sudamericano. Se desea que ningún equipo deba jugar contra ellos en partidos consecutivos.

$$\sum_{j \in I_S} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k} + x_{i,j,k+1} + x_{j,i,k+1}) \leq 1 \quad \forall i \in I \setminus I_S, k \in K : k < |K|$$

Cabe destacar, que los modelos que incluyen las restricciones de *top-team*, fueron generados a posteriori, es decir, una vez que sorteamos que país poseía cada número, generamos el conjunto I_S , y a partir de allí corrimos los modelos deseados.

6.1. Fixture - Esquema francés

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	URU	@BOL	PER	@CHI	COL	@BRA	ECU	@PAR	@VEN
BOL	@PER	ARG	PAR	@COL	VEN	@URU	BRA	@ECU	CHI
BRA	@CHI	COL	VEN	@PAR	@ECU	ARG	@BOL	URU	PER
CHI	BRA	@URU	@ECU	ARG	@PAR	PER	@COL	VEN	@BOL
COL	VEN	@BRA	@URU	BOL	@ARG	ECU	CHI	@PER	@PAR
ECU	PAR	@VEN	CHI	@PER	BRA	@COL	@ARG	BOL	@URU
PAR	@ECU	PER	@BOL	BRA	CHI	@VEN	@URU	ARG	COL
PER	BOL	@PAR	@ARG	ECU	URU	@CHI	@VEN	COL	@BRA
URU	@ARG	CHI	COL	@VEN	@PER	BOL	PAR	@BRA	ECU
VEN	@COL	ECU	@BRA	URU	@BOL	PAR	PER	@CHI	ARG

Cuadro 11: Primeras 9 fechas, formato francés

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	BOL	@PER	CHI	@COL	BRA	@ECU	PAR	VEN	@URU
BOL	@ARG	@PAR	COL	@VEN	URU	@BRA	ECU	@CHI	PER
BRA	@COL	@VEN	PAR	ECU	@ARG	BOL	@URU	@PER	CHI
CHI	URU	ECU	@ARG	PAR	@PER	COL	@VEN	BOL	@BRA
COL	BRA	URU	@BOL	ARG	@ECU	@CHI	PER	PAR	@VEN
ECU	VEN	@CHI	PER	@BRA	COL	ARG	@BOL	URU	@PAR
PAR	@PER	BOL	@BRA	@CHI	VEN	URU	@ARG	@COL	ECU
PER	PAR	ARG	@ECU	@URU	CHI	VEN	@COL	BRA	@BOL
URU	@CHI	@COL	VEN	PER	@BOL	@PAR	BRA	@ECU	ARG
VEN	@ECU	BRA	@URU	BOL	@PAR	@PER	CHI	@ARG	COL

Cuadro 12: Últimas 9 fechas, formato francés

6.2. Fixture - Esquema inglés

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	PAR	@BOL	@CHI	PER	COL	@URU	VEN	@ECU	@BRA
BOL	@VEN	ARG	@PER	COL	PAR	@BRA	ECU	@CHI	URU
BRA	@PER	VEN	@COL	URU	@ECU	BOL	CHI	@PAR	ARG
CHI	@COL	URU	ARG	@VEN	@PER	ECU	@BRA	BOL	PAR
COL	CHI	@ECU	BRA	@BOL	@ARG	PER	PAR	@URU	@VEN
ECU	@URU	COL	VEN	@PAR	BRA	@CHI	@BOL	ARG	@PER
PAR	@ARG	PER	@URU	ECU	@BOL	VEN	@COL	BRA	@CHI
PER	BRA	@PAR	BOL	@ARG	CHI	@COL	URU	@VEN	ECU
URU	ECU	@CHI	PAR	@BRA	@VEN	ARG	@PER	COL	@BOL
VEN	BOL	@BRA	@ECU	CHI	URU	@PAR	@ARG	PER	COL

Cuadro 13: Primeras 9 fechas, formato inglés

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	BRA	@PAR	BOL	CHI	@PER	@COL	URU	@VEN	ECU
BOL	@URU	VEN	@ARG	PER	@COL	@PAR	BRA	@ECU	CHI
BRA	@ARG	PER	@VEN	COL	@URU	ECU	@BOL	@CHI	PAR
CHI	@PAR	COL	@URU	@ARG	VEN	PER	@ECU	BRA	@BOL
COL	VEN	@CHI	ECU	@BRA	BOL	ARG	@PER	@PAR	URU
ECU	PER	URU	@COL	@VEN	PAR	@BRA	CHI	BOL	@ARG
PAR	CHI	ARG	@PER	URU	@ECU	BOL	@VEN	COL	@BRA
PER	@ECU	@BRA	PAR	@BOL	ARG	@CHI	COL	@URU	VEN
URU	BOL	@ECU	CHI	@PAR	BRA	VEN	@ARG	PER	@COL
VEN	@COL	@BOL	BRA	ECU	@CHI	@URU	PAR	ARG	@PER

Cuadro 14: Últimas 9 fechas, formato inglés

6.3. Fixture - Esquema invertido

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	@PAR	BOL	ECU	@VEN	COL	@URU	@CHI	PER	@BRA
BOL	URU	@ARG	VEN	@COL	@PAR	BRA	@PER	CHI	ECU
BRA	@COL	VEN	CHI	@PAR	PER	@BOL	@ECU	URU	ARG
CHI	PER	@ECU	@BRA	URU	@VEN	PAR	ARG	@BOL	COL
COL	BRA	@PER	@URU	BOL	@ARG	ECU	PAR	@VEN	@CHI
ECU	@VEN	CHI	@ARG	PER	URU	@COL	BRA	@PAR	@BOL
PAR	ARG	@URU	@PER	BRA	BOL	@CHI	@COL	ECU	@VEN
PER	@CHI	COL	PAR	@ECU	@BRA	VEN	BOL	@ARG	URU
URU	@BOL	PAR	COL	@CHI	@ECU	ARG	VEN	@BRA	@PER
VEN	ECU	@BRA	@BOL	ARG	CHI	@PER	@URU	COL	PAR

Cuadro 15: Primeras 9 fechas, formato invertido

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	BRA	@PER	CHI	URU	@COL	VEN	@ECU	@BOL	PAR
BOL	@ECU	@CHI	PER	@BRA	PAR	COL	@VEN	ARG	@URU
BRA	@ARG	@URU	ECU	BOL	@PER	PAR	@CHI	@VEN	COL
CHI	@COL	BOL	@ARG	@PAR	VEN	@URU	BRA	ECU	@PER
COL	CHI	VEN	@PAR	@ECU	ARG	@BOL	URU	PER	@BRA
ECU	BOL	PAR	@BRA	COL	@URU	@PER	ARG	@CHI	VEN
PAR	VEN	@ECU	COL	CHI	@BOL	@BRA	PER	URU	@ARG
PER	@URU	ARG	@BOL	@VEN	BRA	ECU	@PAR	@COL	CHI
URU	PER	BRA	@VEN	@ARG	ECU	CHI	@COL	@PAR	BOL
VEN	@PAR	@COL	URU	PER	@CHI	@ARG	BOL	BRA	@ECU

Cuadro 16: Últimas 9 fechas, formato invertido

6.4. Fixture - Esquema Back to Back

En este esquema notamos que la restricción de *top-teams* carece de sentido, pues inevitablemente se cumplirá, debido a que en cada doble fecha se jugará con el mismo rival, impidiendo así que una selección juegue consecutivamente con los denominados *top-teams*, en este caso Argentina y Brasil.

Aunque lo que sí ocurrirá es que jugará con cada país de manera seguida, por la característica fundamental del esquema.

6.5. Fixture - Esquema Min-Max

Selección / Fecha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	ECU	@CHI	BOL	@BRA	PER	@COL	@PAR	VEN	@URU
BOL	PER	@ECU	@ARG	COL	@BRA	PAR	@VEN	URU	CHI
BRA	URU	@PAR	@VEN	ARG	BOL	@ECU	CHI	@PER	COL
CHI	@VEN	ARG	PAR	@URU	ECU	@PER	@BRA	COL	@BOL
COL	PAR	@URU	ECU	@BOL	@VEN	ARG	PER	@CHI	@BRA
ECU	@ARG	BOL	@COL	VEN	@CHI	BRA	@URU	PAR	PER
PAR	@COL	BRA	@CHI	PER	URU	@BOL	ARG	@ECU	VEN
PER	@BOL	VEN	URU	@PAR	@ARG	CHI	@COL	BRA	@ECU
URU	@BRA	COL	@PER	CHI	@PAR	VEN	ECU	@BOL	ARG
VEN	CHI	@PER	BRA	@ECU	COL	@URU	BOL	@ARG	@PAR

Cuadro 17: Primeras 9 fechas, formato Min-Max

Selección / Fecha	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ARG	BRA	@ECU	CHI	@PER	COL	@BOL	URU	PAR	@VEN
BOL	@COL	@PER	ECU	BRA	@PAR	ARG	@CHI	VEN	@URU
BRA	@ARG	@URU	PAR	@BOL	ECU	VEN	@COL	@CHI	PER
CHI	URU	VEN	@ARG	@ECU	PER	@PAR	BOL	BRA	@COL
COL	BOL	@PAR	URU	VEN	@ARG	@ECU	BRA	@PER	CHI
ECU	@VEN	ARG	@BOL	CHI	@BRA	COL	@PER	URU	@PAR
PAR	@PER	COL	@BRA	@URU	BOL	CHI	@VEN	@ARG	ECU
PER	PAR	BOL	@VEN	ARG	@CHI	@URU	ECU	COL	@BRA
URU	@CHI	BRA	@COL	PAR	@VEN	PER	@ARG	@ECU	BOL
VEN	ECU	@CHI	PER	@COL	URU	@BRA	PAR	@BOL	ARG

Cuadro 18: Últimas 9 fechas, formato Min-Max

7. Observaciones

Mediante la realización de los distintos esquemas logramos notamos varios sucesos que captaron nuestra atención:

- **Tardanza en la resolución** : Vimos que agregar o quitar restricciones variaba enormemente el tiempo el cual teníamos que esperar para obtener la resolución. Un ejemplo de esto se puede ver al comparar el esquema inglés o francés, ya sea en el caso con restricciones top-teams o no, con el esquema min-max. Estos primeros tardaron entre meros segundos y pocos minutos, pero para el esquema min-max, aún con restricciones relativamente laxas, como lo son una distancia no menor a 5 fechas y no mayor a 13, el programa de resolución tardó más de dos horas. Por lo tanto, en un futuro estudio se podría buscar utilizar computadoras con mayor potencial de cómputo o con algún método de paralelización automática para encontrar resultados más restrictivos.
- **Restricción top-team** : Esta restricción a veces se cumplía sin tener que incluirla como tal a la hora de generar los esquemas, como por ejemplo en el esquema francés. En otros esquemas, como el min-max, no se cumplía. Por ejemplo, Colombia en la primer fecha era visitante de Argentina, e inmediatamente recibía a Brasil. Por lo tanto, notamos empíricamente que es conveniente agregar este conjunto de restricciones, para garantizar que ningún conjunto nacional enfrente consecutivamente, en una doble fecha, a Brasil y Argentina.
- **Esquema espejado** : Este esquema, con todas las restricciones de balance planteadas, resultaba infactible. Sin embargo, notamos también, que a la hora de eliminar estas restricciones y buscar soluciones factibles que no cumplieran las normas propuestas de balance, el programa de resolución podía pasar hasta 10 horas sin encontrar respuesta. Debido a esto, al ser un tanto accesorio, pues sabíamos que no íbamos a encontrar una solución sin "breaks", decidimos no incluir este esquema a la hora de completar los fixtures.
- **Justicia a largo plazo** : El estudio se centra en un único torneo, por lo que se debería analizar si la solución propuesta es adaptable a futuros torneos y posibles cambios en la clasificación de equipos. La respuesta parecería ser simple, pero no lo es, ya que por ejemplo, para las eliminatorias para el año 2026 los cupos de clasificación son mayores, teniendo 6 plazas para países de la CONMEBOL. Estos cambios pueden llevar a que el fixture del torneo deje de ser tan justo con todos los equipos.
- **Equilibrios entre objetivos** : En este estudio se analizaron algunas variables para tratar de que el torneo sea lo más justo posible con todos sus integrantes, pero esto no quiere decir que no haya otros inconvenientes involucrados que también generen injusticias. Encontrar el equilibrio perfecto entre la justicia, las restricciones de programación y las preocupaciones prácticas como los viajes y la participación de los fanáticos puede ser muy complejo. Es posible que nunca se logre un equilibrio perfecto, ya que siempre habrá partes que no lo encuentren totalmente justo. Sin embargo, es importante explorar las compensaciones e identificar compromisos aceptables. Esto ayudará a garantizar que el torneo sea lo más justo posible para todos los participantes.

8. Conclusiones

Teniendo en cuenta las observaciones recién planteadas, y todo nuestro estudio, vimos que no era únicamente importante entender cómo plantear modelos de programación lineal y saber interpretar los resultados. Hasta no ver lo que ocurre en la práctica, estos modelos teóricos no aportan información. Al calcular los fixtures, vimos que no todo funciona de acuerdo a lo esperado: algunos modelos resultaron en soluciones infactibles o tomaron cantidades de tiempo excesivas (que incluso pueden no terminar "nunca"). Además, si estos modelos solo funcionan para una única y determinada situación, tampoco son de gran utilidad. Gracias a este trabajo pudimos descubrir estos aspectos que también son parte de utilizar programación lineal para resolver problemas cotidianos.