Investigación Operativa

Segundo Cuatrimestre 2023

Práctica 1: Modelado y complejidad

Ejercicio 1. Un dietista está planeando el menú de la comida de una escuela. Proyecta servir tres alimentos principales, todos ellos con distinto contenido nutricional, de manera que se suministre al menos la ración diaria mínima (RDM) de vitaminas A, C y D en una comida. En la siguiente tabla se sintetiza el contenido vitamínico y el costo por día por cada 30 gramos de los tres tipos de alimento.

	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina D	Costo
Alimento 1	0.03 g	0.01 g	0.04 g	$ 0.15
Alimento 2	0.02 g	0.015 g	0.03 g	$ 0.10
Alimento 3	0.04 g	0.005 g	0.02 g	$ 0.12
RDM	0.3 g	0.12 g	0.21 g	

Cualquier combinación de ellos puede seleccionarse, con tal de que el tamaño total de la porción sea de por lo menos 225g. Plantee un modelo de programación lineal que, al ser resuelto, determine la cantidad que debe servirse de cada alimento sabiendo que el objetivo es reducir al mínimo el costo de la comida y teniendo en cuenta que se deben alcanzar los niveles de las raciones mínimas de las tres vitaminas y se debe respetar la restricción relativa al tamaño mínimo de la porción.

Ejercicio 2. Se cuenta con un presupuesto de mil millones de pesos para otorgarlos como subsidio destinado a la investigación innovadora en el campo de la búsqueda de otras formas de producir energía. Se seleccionaron seis proyectos. En la siguiente tabla figuran la utilidad neta que se obtendrá por cada peso invertido en el proyecto así como el nivel requerido de financiamiento (en millones de pesos).

Proyecto	Clasificación	Utilidad Neta	Financiamiento
1	Solar	4.4	220
2	Solar	3.8	180
3	Comb. Sintéticos	4.1	250
4	Carbón	3.5	150
5	Nuclear	5.1	400
6	Geotérmico	3.2	120

Además se ha resuelto financiar por lo menos el 50% del proyecto de energía nuclear y como mínimo 300 millones de pesos de los proyectos de energía solar. Plantee el problema sabiendo que el objetivo es maximizar los beneficios netos.

Ejercicio 3. *(Problema de coloreo).* Dado un mapa con N regiones (provincias o países), formular un modelo de programación lineal que permita minimizar la cantidad de colores necesarios para pintar el mapa, de manera tal que dos regiones limítrofes no sean pintadas con el mismo color.

Ejercicio 4. Una empresa quiere decidir una ubicación, de entre tres disponibles (U_1, U_2 y U_3) para construir una fábrica que elaborará 3 productos (P_1, P_2 y P_3). La producción de estos productos genera un volumen de contaminación de 0.5, 2 y 1 cm^3 respectivamente por unidad producida, independientemente de la ubicación, pero los costos de producción y contratación (afectan al beneficio y a la capacidad de producción) y la política medioambiental varían de una ubicación a otra. La capacidad diaria de producción, el beneficio neto por unidad producida, el volumen máximo de contaminación diaria permitido (en cm^3) y la penalización diaria por excedente de contaminación (pesos por cm^3) en cada ubicación se muestran en la siguiente tabla:

	U_1	U_2	U_3
Beneficio unitario P_1	2	4	3
Beneficio unitario P_2	5	3	6
Beneficio unitario P_3	3	4	2
Capacidad máxima de producción	200	400	300
Volumen máximo de contaminación	150	250	200
Penalización por contaminación excedente	\$200	\$150	\$100

Formular un modelo de programación lineal para determinar la ubicación de la fábrica y cuántas unidades de cada producto deben producirse, de modo que se maximice el beneficio total (sin contar posibles multas) y no se incurra en sanciones por más de \$90000 al día.

Ejercicio 5. Sea $M \in \mathbb{Z}$ conocido, elaborar un modelo de programación lineal entera que permita resolver el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & z = f(x,y) \\ \text{s.a:} & \begin{array}{rcl} x & \neq & y \\ |x| & \leq & M \\ |y| & \leq & M \\ x, y & \in & \mathbb{Z} \end{array} \end{array}$$

Ejercicio 6. Sean $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones lineales, modelar el siguiente problema como un problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & z = \max\{f_1(x), \ldots, f_s(x)\} \\ \text{s.a:} & \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

Ejercicio 7. El objetivo de este ejercicio es modelar fórmulas de lógica proposicional con programación lineal. Como las variables proposicionales pueden tomar dos valores (verdadero o falso), se suelen utilizar variables binarias para modelarlas. Para cada una de las siguientes fórmulas, encontrar un conjunto de restricciones lineales cuyas soluciones factibles se correspondan con los valores que la hacen verdadera. Al modelar podría ser necesario incluir variables auxiliares enteras.

Ejemplo: el enunciado $x \wedge y$ se puede modelar como $x + y = 2$.

a) $x \veebar y$ *(disyunción exclusiva)*

b) $x \Rightarrow y$

c) $x \iff y$

d) $\neg(x \vee y)$

e) $(x \vee y) \Rightarrow z$

f) $x \Rightarrow (y \wedge z)$

g) $x \iff (y \wedge z)$

h) $x \vee (y \wedge (\neg z))$

i) $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$

j) $(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n) \iff y$

k) $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n) \iff y$

Ejercicio 8. El dueño de un establecimiento quiere alquilarlo por 4 años, aunque no necesariamente a la misma gente. Para decidir la duración de los contratos, contacta con una empresa de estudios de mercado, que le proporciona la siguiente tabla, indicando la utilidad esperada, en miles de pesos, si se alquila desde el inicio del año i hasta el inicio del año j:

$i \backslash j$	2	3	4	5
1	12	22	38	40
2	-	13	20	29
3	-	-	10	19
4	-	-	-	12

Elaborar un modelo de programación lineal que permita decidir cuándo y por cuánto tiempo arrendar para maximizar la utilidad esperada durante los próximos 4 años.

Ejercicio 9. El intendente de una ciudad del interior de Argentina ha decidido relocalizar todos los colegios de modo de hacer más cómoda la movilidad de los alumnos. La ciudad se puede dividir en I distritos, y cada uno contiene p_i alumnos. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las escuelas sólo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad.

Sea $d_{ij} \geq 0$ la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j. Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir un colegio (en un sitio cabe a lo sumo uno) y además se debe asignar un colegio a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener uno (y sólo un) colegio asociado. En cambio, cada colegio puede tener hasta dos distritos asociados. Además, si un colegio fue construido, al menos un distrito tiene que serle asignado.

Construir un colegio en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j. Existe también un costo variable que es linealmente proporcional (la constante de proporcionalidad es F) a la cantidad total de alumnos a que debe servir el colegio. O sea, si se construye un colegio en el sitio j, entonces el costo asociado es $c_j + Fs_j$, donde s_j es la población total a que debe servir el colegio ubicado en j (cuidado que s_j no es un dato previo sino que es la suma de las poblaciones de los distritos asociados a ese colegio).

La capacidad de alumnos que soporta un colegio construido en el sitio j es un dato conocido (T_j). El presupuesto total destinado para construir los colegios es igual a B y no debe ser sobrepasado. Además, la Dirección de Educación de la ciudad ha determinado que los distritos u y v deben ser atendidos por 2 colegios distintos. Formular un problema de programación lineal mixto, que, respetando las condiciones planteadas, determine dónde construir los colegios y qué colegio atiende a qué distrito. El objetivo es minimizar la distancia máxima entre el centro de un distrito y su respectivo colegio.

Ejercicio 10. (*Problema del viajante de comercio*) Se quieren recorrer N ciudades numeradas $1, \ldots, N$. Es necesario empezar por la primera ciudad y recorrer todas las ciudades pasando una sola vez por cada una. Al final del recorrido se debe volver a la ciudad original. Se conoce la matriz D de distancias entre las ciudades (D_{ij} es la distancia entre la ciudad i y la ciudad j). Formule un problema de programación lineal entera para calcular la forma de hacer el recorrido que minimice la distancia total recorrida.

Ejercicio 11. Determine la mayor cantidad de alfiles que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 8×8. tal que no haya dos alfiles en la misma casilla y cada alfil sea amenazado como máximo por uno de los otros alfiles. Nota: Un alfil amenaza a otro si ambos se encuentran en dos casillas distintas de una misma diagonal. El tablero tiene por diagonales las 2 diagonales principales y las paralelas a ellas.

Ejercicio 12. Han dejado sólo al rey en el tablero de ajedrez, que tiene un tamaño de $n \times n$. El rey se encuentra en el casillero (s, t) y debe llegar al casillero (u, v), con $s, t, u, v \in \{1, \ldots, n\}$. Recordar que el rey se puede mover una casilla por vez en cualquier dirección ($\rightarrow, \nearrow, \uparrow, \nwarrow, \leftarrow, \swarrow, \downarrow, \searrow$)

Además en el tablero hay piezas enemigas, cuya posición está fija. El rey, para no ser atacado, tiene que procurar no moverse a un casillero que ya esté ocupado por una pieza enemiga. Se conoce el conjunto de casilleros $\mathcal{E}$ ocupados por piezas enemigas. Naturalmente, $(s, t) \notin \mathcal{E}$ y $(u, v) \notin \mathcal{E}$. Formular un problema lineal que permita hallar el camino con la menor cantidad de movimientos que debe recorrer el rey desde la casilla (s, t) hasta (u, v).

Ejercicio 13. Una compañía de construcción quiere mover arena desde sitios (A,B,C) de construcción que están terminados a tres nuevos sitios de construcción (1,2,3). Los kilos de arena que se encuentran en los sitios A, B y C es, respectivamente, 700 kg., 600 kg. y 400 kg. mientras que los sitios 1, 2 y 3 requieren 800, 500 y 400 kilos de arena respectivamente. La siguiente tabla muestra el costo de trasladar cada kilo de arena desde un sitio de construcción terminada a uno nuevo:

	1	2	3
A	9	6	5
B	7	4	9
C	4	6	3

Se utilizan camiones para mover arena desde un sitio a otro. Cada camión tiene una capicidad de 600 kg. de arena. Formular un modelo de PL que determine el plan de transporte de costo mínimo, considerando que:

- usar un camión tiene un costo de $50
- se cuenta con 4 camiones (cada camión puede ser utilizado para un único par de sitio de construcción terminada y sitio nuevo).
- es posible alquilar un quinto camión por $65.
- el sitio 2 no puede recibir arena de A y de B simultáneamente.

Ejercicio 14. Formule un modelo de programación lineal entera para resolver el sudoku.

Ejercicio 15. Plantear un modelo de programación lineal que permita resolver el siguiente problema:

$$\begin{array}{lrcl} \min & z = |x| + |y| + |w| & & \\ \text{s.a:} & x + y & \leq & 1 \\ & 2x + w & = & 3 \end{array}$$

Ejercicio 16. Se desea organizar un festival de música que se celebrará a lo largo de tres días. Cada jornada tendrá una duración de 14 horas divididas en franjas de dos horas, acumulando un total de 21 franjas horarias a lo largo de los tres días. A cada banda invitada se le asignará exactamente una de esas franjas horarias para realizar su show.

Se cuenta con cuatro escenarios E_1, E_2, E_3, E_4, por lo que durante cada franja horaria pueden ocurrir a lo sumo cuatro conciertos simultáneamente.

Se tiene un conjunto B de bandas candidatas a ser invitadas a tocar en el festival. Para cada banda $i \in B$, se estima que atraerá e_i espectadores a su show y se pronostica que dará una ganancia neta de r_i pesos. Las bandas candidatas se categorizan en cinco conjuntos disjuntos según su género musical: G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 (es decir: $\bigcup_{k=1}^{5} G_k = B,\ G_k \cap G_r = \varnothing$ si $k \neq r$).

1. Teniendo en cuenta que se desea decidir qué bandas invitar y en qué escenario y franja horaria tocará cada una de las bandas invitadas, modelar linealmente las siguientes restricciones del festival definiendo las variables y conjuntos que se consideren necesarios:

   a) cada banda invitada debe tocar exactamente durante una franja horaria en exactamente un escenario.

   b) en cada franja horaria, en cada escenario puede tocar a lo sumo una banda.

   c) durante cada franja horaria pueden ocurrir a lo sumo cuatro conciertos simultáneamente.

   d) para cada franja horaria, la cantidad de espectadores del escenario E_j no debe superar su capacidad ℓ_j.

   e) la cantidad de espectadores totales en cada franja horaria no debe superar 20000.

   f) se deben invitar al menos g_k bandas del género G_k.

   g) el escenario 4 debe permanecer vacío durante la primera franja horaria de cada día.

   h) hay un conjunto $P \subset B$ de bandas muy populares que deben ser invitadas.

   i) cada banda del conjunto P debe tocar durante alguna de las dos últimas franjas horarias de cualquiera de los días.

   j) la ganancia neta del festival debe superar los R pesos.

   k) las bandas invitadas con menos de S espectadores deben tocar durante los primeras tres franjas horarias.

2. La empresa organizadora del festival está interesada en analizar el resultado obtenido con diferentes criterios. Utilizando las variables y conjuntos definidos en el ítem 1., modelar cada una de las siguientes funciones objetivo, agregando, de ser necesario, las restricciones y variables correspondientes.

   a) Maximizar el mínimo de espectadores totales diarios.

b) Minimizar el máximo número de espectadores totales durante la misma franja horaria.

c) Minimizar la suma de la diferencia absoluta de cantidad de bandas invitadas entre cada par de géneros musicales.

Ejercicio 17. Una compañía minera empezará a operar en una determinada zona por los próximos 5 años para extraer, principalmente, minerales de hierro. En dicha zona se localizan cuatro minas pero, por razones ambientales, la empresa puede explotar a lo sumo tres de ellas cada año. A pesar de que una mina puede no estar operando cierto año, es necesario que permanezca abierta, en el sentido que las regalías por su explotación se siguen pagando si operará en un año futuro (de los 5 pactados). Todas las minas se abren cuando la empresa empieza a trabajar en la zona. Claramente, si una mina dejase de funcionar, se cierra y se dejan de abonar regalías por ella. Anualmente, la compañía abonará regalías por cada una de las minas abiertas. Debido a que la zona de minas explotada se encuentra cercana a una ciudad, se ha consensuado con sus habitantes que la empresa minera pague una multa en función de indicadores ambientales de los ríos próximos. Estos indicadores ambientales varían entre 0 y 5 y la función que indica la multa, en millones de dólares, es:

$$f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq a \leq 2 \\ 3a+1 & \text{si } 2 < a \leq 4 \\ 5a+7 & \text{si } 4 < a \leq 5 \end{cases}$$

Por estudios ambientales, es sabido que, luego de un año de explotación, el indicador ambiental correspondiente es por lo menos 2/3 de la cantidad de millones de toneladas de minerales de hierro extraída en ese año. La cantidad de minerales de hierro que la minera podrá extraer cada año por cada mina tiene límites que se detallan en la Tabla 1. La calidad de esos minerales varía según sea la mina de la cual se extraen y es medida en una escala de manera que la calidad de la mezcla de minerales resulta en una combinación lineal de la respectiva calidad de los minerales mezclados. Medidas en esas unidades, se tienen las calidades de los minerales de cada mina que figuran en la siguiente tabla. En cada año, es necesario combinar el total

	Mina			
	1	2	3	4
Regalía (en millones)	5	7	4	6
Límite de cantidad de minerales extraída (en millones de Tn.)	2	2.5	1.7	3
Indicador de la calidad de los minerales	1	0.7	1.5	0.5

de extracciones de cada mina para producir una mezcla de minerales de hierro de calidad 0.9; 0.8; 1.2; 1 y 1.1; respectivamente. La mezcla de minerales de hierro que se obtiene cada año se vende a 10 millones de dólares por tonelada. Formular un problema de programación lineal mixto que, al ser resuelto, maximice la ganancia de la compañía minera

Ejercicio 18. 1. La organización de un congreso internacional decidió albergar a los n participantes del mismo en un hotel que tiene h habitaciones. La j-ésima habitación del hotel tiene capacidad para c_j personas, y tiene una calificación de e_j estrellas. Además se conoce que la i-ésima persona es de país de origen p_i, tiene a_i años y se dedica al estudio del tema t_i.

Luego de una larga deliberación, la organización concluyó que necesariamente al ubicar a cada persona en una habitación del hotel se debe cumplir que:

(a) Toda persona sea ubicada en alguna habitación

(b) Se evite asignar más personas a una habitación que la capacidad de la misma

(c) Se evite ubicar personas de Argentina y Brasil en una misma habitación.

(d) No haya más de 2 personas que estudien el mismo tema en una misma habitación

(e) Las personas que tengan al menos 50 años sean ubicadas en habitaciones de 3 estrellas o más

2. Por otro lado, la organización todavía no logró definir con qué criterio desempatar entre distintas posibles asignaciones. Las propuestas existentes son las siguientes:

(a) Minimizar la cantidad de habitaciones utilizadas (con al menos una persona)

(b) Minimizar la máxima diferencia de edad entre dos personas de una misma habitación.

(c) Dados G grupos de amigos (llamamos $\mathcal{A}_g$ al g-ésimo grupo de amigos), se busca maximizar la cantidad de grupos de amigos que son asignados a una misma habitación. *Sugerencia*: utilizar el ejercicio $7j$)

Formular un modelo de programación lineal entera que modele las condiciones que deben cumplirse necesariamente (ítem 1), y luego formular cómo incorporar a ese modelo cada criterio de desempate entre soluciones (cada uno por separado, ítem 2).

Ejercicio 19. Una empresa forestal acaba de adquirir un territorio que desea explotar responsablemente. El terreno fue dividido en N secciones y se desean producir J tipos de madera distintos. Se cuenta con los siguientes datos:

- m_j: el árbol con madera j tarda m_j meses desde que fue plantado hasta su maduración (es decir, hasta estar listo para ser talado).
- a_i: área de la sección i.
- A_t: área máxima de tierra en la que se puede plantar árboles durante el mes t.
- v_{ij}: volumen de madera j que se obtiene al cosechar la sección i.
- g_j: ganancia por cada unidad de volumen de madera j.
- k_{ij}: costo de plantar árboles de madera j en la sección i.
- f_{it}: costo de cada camión de transporte desde la sección i hasta el aserradero en el mes t.
- C_t: cantidad de camiones de transporte disponibles durante el mes t.
- V: capacidad de volumen de madera de cada camión de transporte.

Cuando se cosecha la madera de una sección, se talan todos los árboles de la misma y todo el volumen de madera obtenido es transportado al aserradero. Cada camión de transporte hace a lo sumo un viaje por mes. El objetivo es planificar la producción de madera durante los próximos $\mathcal{T}$ meses. Plantear un modelo de programación lineal que permita decidir dónde, cuándo y qué árboles plantar y cuándo talarlos, de manera tal que se maximice la ganancia. Se deben considerar las siguientes restricciones:

1. en cada sección no puede haber más de una especie de árbol.
2. en cada sección se puede plantar a lo sumo una vez.
3. si se plantan árboles en una sección, deben ser talados en algún momento.
4. no se puede talar árboles que no han madurado.
5. en cada mes t, no se pueden plantar árboles en un área mayor que A_t.
6. no sobrepasar la disponibilidad mensual de camiones
7. no se puede plantar en las secciones del conjunto $\mathcal{S}$ durante los primeros 6 meses.
8. los árboles de la madera 4 sólo pueden plantarse a partir del mes 12, inclusive.

Ejercicio 20. Para cada una de las siguientes operaciones estime la cantidad máxima de sumas, multiplicaciones y divisiones que deben realizarse. Exprese el resultado usando la notación de la $\mathcal{O}$.

a) sumar dos matrices de $n \times n$

b) multiplicar dos matrices de $n \times n$

c) invertir una matriz inversible de $n \times n$

d) resolver un sistema $Ax = b$ con A inversible.

e) multiplicar dos polinomios de grado n

Ejercicio 21. Escriba en pseudocódigo un algoritmo para ordenar una lista de números. Estimar la cantidad de comparaciones ($<$, $>$ o $=$) necesarias.

Ejercicio 22. (†) Pruebe que decidir si un problema de programación lineal entera tiene alguna solución es NP-Completo. *Sugerencia:* considere el ejercicio 7 y el 3-SAT.