

Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo

Kevin Llanos y Jorge Jaimes
Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

30 de septiembre de 2021

Resumen

Presentamos una propuesta para poder calcular el valor de la aceleración de la gravedad estudiando el movimiento angular, velocidad angular y aceleración de un péndulo simple. Esto se llevó a cabo mediante la experimentación con dos masas y dos longitudes distintas oscilando en ángulos de $\theta_0 \approx 5^\circ$, $\theta_0 \approx 20^\circ$, $\theta_0 \approx 30^\circ$ y $\theta_0 \approx 40^\circ$. Lo cual por medio del análisis de estos datos podemos concluir que la aceleración de la gravedad no depende de la masa, solamente depende de la longitud del péndulo y la amplitud de este. Al comparar el resultado obtenido en cada experimento con la gravedad real podemos encontrar que no se presentan errores mayores al 20 % lo cual nos da un grado de confiabilidad con los datos recolectados del experimento. Y garantiza al reproducibilidad del experimento con las mismas condiciones.

1. Introducción

Con el pasar del tiempo el estudio y la comprensión de los péndulos ha sido un tema que ayudo a los humanos a crear objetos como los relojes que prácticamente se usan para todo. Estos estudios se han transformado en formulas y leyes que describen la oscilación y las variables que afectan a este movimiento. [1]

A partir de estas formulas y leyes, se reproducirá un experimento con el fin de estimar el valor de la gravedad en la tierra y descubrir que tan aproximado está el resultado teórico con el experimental.

El objetivo del experimento no solo es verificar la diferencia de aproximación teórica y experimental que nos da mediante el uso de un algortimo creado en python y otros artilugios matemáticos, si no que busca comprender y analizar los factores que pueden llegar a afectar este movimiento como puede ser la longitud de la cuerda a la que se sostiene el péndulo y saber cómo modificarlos de una forma que este efecto sea el mínimo.

2. Metodología

Como primera medida para el estudio de un péndulo simple para estimar el valor de la aceleración de la gravedad en la tierra se planteó de dos maneras diferentes una de manera teórica en la cual abordaremos el problema desde las ecuaciones fundamentales del movimiento circular y otra práctica realizando un experimento a lo más parecido a condiciones ideales, haciendo énfasis en las dos oscilaciones iniciales, que es en el cual el experimento tiene un comportamiento similar al ideal.

2.1. Teórica

Nos basamos en la fórmula que relaciona el periodo T , del movimiento realizado por un péndulo simple (Estas ocurren en pequeñas oscilaciones y sin rozamiento) y su longitud L , con la aceleración de la gravedad.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

El péndulo se compone de una masa M la cual se considera puntual, suspendida de un hilo que tiene masa despreciable y longitud L . Para obtener la frecuencia del péndulo utilizaremos el principio de conservación de energía, la desviación se mide por el ángulo que forma el hilo con la vertical, cuando el hilo se desvía el ángulo, la masa se eleva una altura h .

$$h = L * L\cos\theta \quad (2)$$

La trayectoria al ser un arco de circunferencia de radio L , su velocidad es

$$v = L\frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

Al aplicar la conservación de la energía, la suma de la energía cinética y potencial debe ser constante en toda la oscilación

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh \quad (4)$$

Al sustituir h y v por sus expresiones se llega a

$$E = \frac{1}{2}ML^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + Mgl(1 - \cos\theta) \quad (5)$$

Podemos anular simplificando si derivamos la ecuación anterior con respecto a t obteniendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad (6)$$

Ya para ángulos pequeños el seno se puede sustituir por el ángulo en radianes y se llega a la siguiente ecuación.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (7)$$

$$\theta = \theta_{max} \sin(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (9)$$

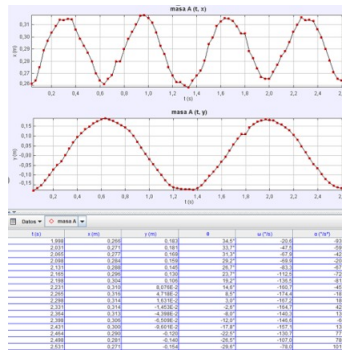
La solución de la ecuación (6) es siempre aproximada y se resuelve no teniendo en cuenta los términos considerados en cada caso “pequeño”. [2]

2.2. Práctica

Para realizar el experimento primero plantemos los ángulos que tomaríamos en cuenta siendo estos $\theta_0 \approx 5^\circ$, $\theta_0 \approx 20^\circ$, $\theta_0 \approx 30^\circ$ y $\theta_0 \approx 40^\circ$, para proceder a fijar la longitud de la cuerda y la masa a oscilar llegando a que realizaríamos los experimento con dos longitudes distintas y dos masas distintas siendo estas $L \approx 30cm$, $L \approx 50cm$ y $m \approx 400ml$, $m \approx 600ml$ respectivamente para realizar el experimento con cada una de las masas y longitudes usando cada ángulo, haciendo el video con 10 repeticiones por cada uno para poder encontrar el error que nos da al hacer el experimento tomando el promedio de cada video.

Teniendo en cuenta todo se hicieron 160 videos en los cuales solo 16 fueron experimentos únicos y los demás fueron para disminuir al mínimo el error experimental.

Procediendo a pasar los 160 videos por el software Tracker el cual nos da los resultados de cada experimento y sacando los promedios de cada 10 videos en cada caso, como a medida que pasa el tiempo el péndulo va perdiendo energía por causa de la fricción usamos solamente dos oscilaciones para analizar ya que este cambio no es tan alto.

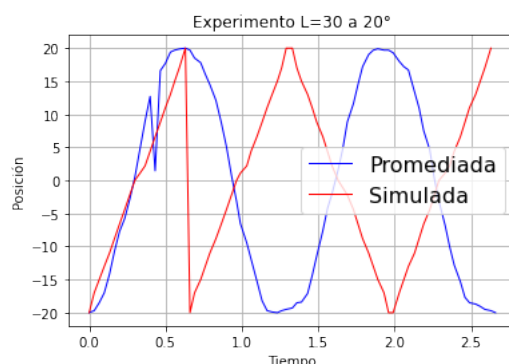


Ya con los resultados que nos da Tracker lo pasamos a Python y mediante programación encontramos el valor de la gravedad basándonos sobre todo cuando el ángulo es pequeño y la trayectoria del péndulo mediante gráficas y lo comparamos con el resultado teórico.

3. El experimento y los resultados

El primer cálculo que se realiza es encontrar los ángulos en los cuales el error era menor a 3%, esto se realiza por medio de una función en python que desarrollamos, la cual recibe como parámetro de entrada un vector de ángulos, esta función analiza cada uno de ellos sacando el respectivo seno de este ángulo θ . A continuación se realiza la fórmula de error absoluto para poder llegar al porcentaje de error y aquellos que tuvieron un error menor a 3% fueron agregados a un vector llegando a la siguiente lista de ángulos:

ángulo en Grados	ángulo en radianes
1.0027855153203342	0.0175rad
3.0083565459610027	0.05251rad
5.01392757660167	0.08751rad
7.0194986072423395	0.1225rad
9.025069637883007	0.1575rad
11.030640668523676	0.1925rad
13.036211699164344	0.2275rad
15.04178272980501	0.2625rad
16.044568245125348	0.28rad
18.050139275766014	0.315rad
20.05571030640668	0.35rad
23.064066852367684	0.4025rad



Como podemos observar se muestra el comportamiento del péndulo en la representación simulada y promediada de los datos generales, esto se evidencia de forma explícita como es mejor se comporta la partícula a través del tiempo. Para la estimación de la gravedad utilizamos dos experimentos distintos con la misma masa ($0,6\text{kg}$) pero longitudes distintas 30 cm y 50 cm, las cuales se usaron con un ángulo de 5 grados. A través de la siguiente fórmula pudimos calcular la gravedad:

$$g = \frac{4\pi^2 * L}{T^2} \quad (10)$$

El resultado que nos dio al calcularlo mediante el algoritmo realizado en Python para la longitud de 30cm es de: $9,113208126582972\text{m/s}^2$, el mismo experimento pero esta vez cambiando la longitud de la cuerda a 50 cm nos da un resultado de $8,772981689857207\text{m/s}^2$,

Al realizar el mismo cálculo para cada experimento pudimos notar que el cálculo de la estimación de la gravedad no depende de la masa. Solo depende de la longitud de la cuerda y el período del péndulo. En este caso se demostró que al cambiar la longitud pero conservando la masa la relación cambiaba.

3.1. Los errores y precisión

Los errores experimentales siempre están presentes en la réplica de un experimento, ya sea por error humano o simplemente las condiciones reales a la hora de replicar estos. Para el experimento de longitud=30cm, masa=600ml o 0,6kg con un ángulo de 5° se realizaron 10 ejercicios iguales dando una desviación estándar total de 4.5. El error encontrado a la hora de realizar el cálculo de la gravedad para dos experimentos idénticos solamente cambiando la longitud de la cuerda una de 30 cm y la otra de 50 cm nos da errores del 7 % y 10 % respectivamente. Lo cual genera un grado de confianza por mantenerse en porcentaje aceptable que genera confiabilidad.

Referencias

- [1] sc. Oscilaciones. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/pendulo/pendulo.html>, 2015.
- [2] UCM Laboratorio de Física, Grado en Ingeniería Química. Pendulo simple. <https://fisicas.ucm.es/data/cont/media/www/pag-103480/Guiones/Pendulo2016>.