Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo

Kevin Llanos y Jorge Jaimes
Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

30 de septiembre de 2021

Resumen

Presentamos una propuesta para estimar el valor de la aceleración de gravedad a partir de la medición del período de oscilación de un péndulo. Para ello, proponemos realizar el experimento con una masa oscilando con pequeñas amplitudes (por ejemplo, con un ángulo máximo de oscilación, $\theta_0 \approx 5^o$). Luego, procedemos a identificar de qué depende el período de oscilación del péndulo para cualquier amplitud (considere por ejemplo $\theta_0 \approx 30^o$, $\theta_0 \approx 45^o$ y $\theta_0 \approx 60^o$).

En ambos casos deberán comparar el experimento con las simulaciones, estimar los errores sistemáticos y la precisión de sus mediciones. Para determinar la precisión de la medición se recomienda realizar cada experimento al menos 10 veces.

Para presentar los resultados de los experimentos, deberá entregar un reporte técnico de la experiencia, los archivos de datos de las mediciones, los códigos y una presentación de un maximo 6 láminas donde narre la experiencia.

1. Introducción

Con el pasar del tiempo el estudio y la comprensión de los péndulos ha sido un tema que ayudo a los humanos a crear objetos como los relojes que prácticamente lo usa todos. Estos estudios se han trasformado en formulas y leyes que describen la oscilación, y las variables que afectan a este movimiento. (referencia)

A partir de están formulas y leyes, se reproducirá un experimento con el fin de estimar el valor de la gravedad en la tierra y descubrir que tan aproximado está el resultado empírico con el experimental.

El objetivo del experimento no solo es verificar la diferencia de aproximación teórica y experimental nos da mediante el uso de Python y otros artilugios matemáticos, si no que busca comprender y analizar los factores que pueden llegar a afectar este movimiento como puede ser la longitud de la cuerda a la que se sostiene el péndulo y saber cómo modificarlos de una forma que este efecto sea el mínimo.

2. Metodología

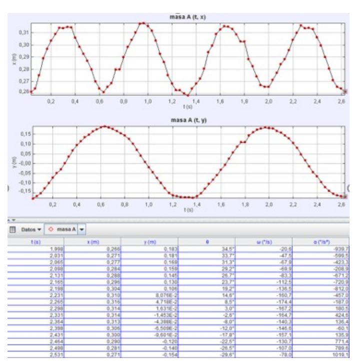
Como primera medida para el estudio de un péndulo simple para estimar el valor de la aceleración de la gravedad en la tierra se planteó de dos maneras diferentes una de manera práctica y otra teórica

2.1. Práctica

Para realizar el experimento primero plantemos los ángulos que tomaríamos en cuanta siendo estos (5°, 20°,30° y 40°), para proceder a fijar la longitud de la cuerda y la masa a oscilar llegando a que realizaríamos los experimento con dos longitudes distintas y dos masas distintas siendo estas (30 cm y 40 cm y 400ml y 600ml) para realizar el experimento con cada una de las masas y longitudes usando cada ángulo, haciendo el video con 10 repeticiones por cada uno para poder encontrar el error que nos da al hacer el experimento tomando el promedio de cada video.

Teniendo en cuenta todo se hicieron 160 videos en los cuales solo 16 fueron experimentos únicos y los demás fueron para disminuir al mínimo el error experimental.

Procediendo a pasar los 160 videos por el software Tracker el cual nos da los resultados de cada experimento y sacando los promedios de cada 10 videos en cada caso, como a medida que pasa el tiempo el péndulo va perdiendo energía por causa de la fricción usamos solamente dos oscilaciones para analizar ya que este cambio no es tan alto.



Ya con los resultados que nos da Tracker lo pasamos a Python y mediante programación encontramos el valor de la gravedad basándonos sobre todo cuando el ángulo es pequeño y la trayectoria del péndulo mediante gráficas y lo comparamos con el resultado teórico.

2.2. Teórica

Nos basamos en la fórmula que relaciona el periodo, T, del movimiento realizado por un péndulo simple (Estas ocurren en pequeñas oscilaciones y sin rozamiento) y su longitud L , con la aceleración de la gravedad.

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \tag{1}$$

El péndulo se compone de una masa M la cual se considera puntual, suspendida de un hilo que tiene masa despreciable y longitud L, que giro libremente es su extremo. Para obtener la frecuencia del péndulo utilizaremos el principio de conservación de energía, la desviación se mide por el ángulo que forma el hilo con la vertical, cuando el hilo se desvía el ángulo, la masa se eleva una altura h.

$$h = L * Lcos\theta \tag{2}$$

La trayectoria al ser un arco de circunferencia de radio L, su velocidad es

$$v = L(d\theta/dt) \tag{3}$$

Al aplicar la conversación de la energía, la suma de la energía cinética y potencial debe ser constante en toda la oscilación

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh \tag{4}$$

Al sustituir h y v por sus expresiones se llega a

$$E = \frac{1}{2}ML^2(d\theta/dt)^2 + Mgl(1 - cos\theta) \tag{5}$$

Podemos anular simplificando si derivamos la educación anterior con respecto a t obteniendo

$$d^2\theta/dt^2 + (g/L)sen\theta = 0 \tag{6}$$

Ya para ángulos pequeños el seno se puede sustituir por el ángulo en radianes y se llega a la siguiente ecuación.

$$d^2\theta/dt^2 + (g/L)\theta = 0 \tag{7}$$

$$\theta = \theta_{max}sen(wt + \varphi) \tag{8}$$

$$w = \sqrt{g/L}, T = 2\pi/w = 2\pi\sqrt{L/g} \tag{9}$$

La solución de la ecuación (6) es siempre aproximada y se resuelve no teniendo en cuenta los términos considerados en cada caso “pequeño”.

3. El experimento y los resultados

Comenzamos encontrando los ángulos en los cuales el Error era menor a 3 prociento , llegando a la siguiente lista de ángulos

ángulo en Grados	ángulo en radianes
1.0027855153203342	0.0175rad
3.0083565459610027	0.05251rad
5.01392757660167	0.08751rad
7.0194986072423395	0.1225rad
9.025069637883007	0.1575rad
11.030640668523676	0.1925rad
13.036211699164344	0.2275rad
15.04178272980501	0.2625rad
16.044568245125348	0.28rad
18.050139275766014	0.315rad
20.05571030640668	0.35rad
23.064066852367684	0.4025rad

Para estimar la gravedad utilizamos el movimiento del péndulo con un ángulo de 5 grados, usando la siguiente formula:

$$g = (4\pi^2) * L/(T^2) \tag{10}$$

El resultado que nos dio al aproxímalo mediante programación en Python es de 8.22467034 m/s**2

3.1. Las leyes de Newton

La ecuación que describe el movimento de un péndulo de masa m atado a una cuerda *flexible, inextensible* y *sin masa* de longitud L es

$$m\ \vec{a} = \vec{T} + m\ \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} ma_r = -T + mg\cos\theta \\ \\ ma_t = -mg\ \mathrm{sen}\ \theta. \end{array} \right. \tag{11}$$

donde $\vec{g}$ es la aceleración de gravedad, $\vec{T}$ es la tensión de la cuerda y, finalmente la aceleración viene representada por $\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_t\hat{u}_t$ con a_r y a_t son las componentes de la aceleración en este sistema de referencia. Vale decir, son las aceleraciones radiales y tangenciales, respectivamente. Por otro lado, $\hat{u}_r$ es el vector unitario en la dirección radial, mientras $\hat{u}_t$ corresponde al vector unitario en la dirección tangencial, tal y como se muestra en la figura 1.

La ecuación (11) es la segunda Ley de Newton: sumatoria de fuerzas externas es igual a masa por aceleración. A la derecha está presentada en forma vectorial y las de la izquierda se encuentran proyectadas en el un sistema de coordenadas polares que se ilustra en la figura 1. La ecuación de la izquierda se desdobla en dos ecuaciones, una a lo largo de la dirección radial y otra tangencial. Es claro que las aceleraciones radiales y tangenciales no son constantes porque dependen del ángulo que indica la posición en el movimiento de la masa.

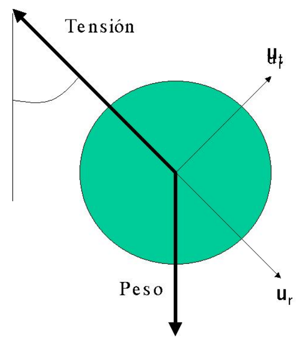


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una masa m atada a una cuerda de *flexible, inextensible* y *sin masa* de longitud L. Note la dirección del sistema de referencia en coordenadas polares.

3.2. Movimiento circular

Si recordamos el movimiento circular podemos escribir un par de relaciones entre las aceleraciones radiales y tangenciales con las velocidades y aceleraciones angulares

$$a_r = \omega^2 r \qquad \text{y} \qquad a_t = r\alpha \ . \tag{12}$$

Donde ω representa la velocidad angular (variación de ángulo por unidad de tiempo) y α la aceleración angular (variación de la velocidad angular por unidad de tiempo).

En el colegio nos repitieron muchas veces que si la aceleración α era constante, podíamos construir relaciones para describir el movimiento circular uniformemente variado como

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t \qquad \text{y} \qquad \theta_f = \theta_0 + \omega t + \alpha \frac{t^2}{2} \, . \tag{13}$$

Donde ω_f es la velocidad angular final del movimiento, ω_0 la velocidad angular inicial, α la aceleración angular, θ_f la posición angular final y θ_0 la posición angular inicial.

3.3. Ecuaciones de movimiento y el algoritmo

Utilizando las ecuaciones (12) en las leyes de Newton (11) obtenemos

$$m\omega^2 r = -T + mg\cos\theta \qquad \text{y} \qquad mr\alpha = -mg \text{ sen } \theta \, . \tag{14}$$

Claramente, α no es constante y por lo tanto no podemos utilizar las relaciones (13) sino por breves instantes de tiempo. Esto es: fraccionammos el intervalo total de tiempo en pequeños intervalos en los cuales la aceleración α es "casi" constante.

Entonces que dividimos ese intervalo de tiempo en N subintervalos

$$[t_0, t_f] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \cdots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \cdots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_f] \ ,$$

de tal modo que en cada uno de esos N subintervalos la aceleración es constante. En estas situación, nuestras "formulitas" (13) son válidas. Entonces para el intervalo genérico, $[t_i, t_{i+1}]$, podemos proceder de la siguiente forma

$$[t_i, t_{i+1}] : \quad \left. \begin{array}{r} \omega(t_i) = \omega_i \\ \\ \theta(t_i) = \theta_i \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i \, [t_{i+1} - t_i] \\ \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i [t_{i+1} - t_i] + \alpha_i \, \dfrac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \, ; \end{array}$$

donde hemos representado $\alpha_i \equiv \alpha(\theta_i, \omega_i, t_i)$.

Ahora podemos calcular la aceleración angular en ese intervalo y luego el valor de la tensión:

$$\alpha_i = \frac{g \text{ sen } \theta_i}{r} \quad \Rightarrow T_i = -m\omega_i^2 r + mg\cos\theta_i \, . \tag{15}$$

Si la amplitud es pequeña, entonces podemos aproximar sen $\theta_i \approx \theta_i$ y las ecuaciones se simplifican como

$$\alpha_i = \frac{g \; \theta_i}{r} \quad \Rightarrow T_i = -m\omega_i^2 r + mg\cos\theta_i \, . \tag{16}$$

Seguidamente determinamos la velocidad angular al final del intervalo y el correspondiente desplazamiento angular

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i \, [t_{i+1} - t_i] \qquad \text{y} \qquad \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i [t_{i+1} - t_i] + \alpha_i \, \frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \, . \tag{17}$$

Los ángulos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_i, \cdots$ deben ser comparados con los resultados de *tracker*.

3.4. Los errores y precisión

En todo experimento es indispensable estimar los errores que se comenten. Una forma es realizar varias veces el experimento. El promedió será el valor mas probable de la medición y la desviación cuadrática media dará un estimado del error experimental. Manteniendo el mismo montaje experimental, realice 10 veces la experiencia y estime la precisión de su medida. Hay una muy buena discusión de precisión y exactitud en wikipedia que le recomendamos estudiar[1]

Referencias

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Accuracy_and_precision