

Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo

Kevin Llanos y Jorge Jaimes
Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

1 de octubre de 2021

Resumen

Presentamos una propuesta para poder calcular el valor de la aceleración de la gravedad estudiando el movimiento angular, velocidad angular y aceleración de un péndulo simple. Esto se llevó a cabo mediante la experimentación con dos masas y dos longitudes distintas oscilando en ángulos de $\theta_0 \approx 5^\circ$, $\theta_0 \approx 20^\circ$, $\theta_0 \approx 30^\circ$ y $\theta_0 \approx 40^\circ$. Lo cual por medio del análisis de estos datos podemos concluir que la aceleración de la gravedad no depende de la masa, solamente depende de la longitud del péndulo y la amplitud de este. Al comparar el resultado obtenido en cada experimento con la gravedad real podemos encontrar que no se presentan errores mayores al 20 % lo cual nos da un grado de confiabilidad con los datos recolectados del experimento. Y garantiza al reproducibilidad del experimento con las mismas condiciones.

1. Introducción

Con el pasar del tiempo el estudio y la comprensión de los péndulos ha sido un tema que ayudo a los humanos a crear objetos como los relojes que prácticamente se usan para todo. Estos estudios se han transformado en formulas y leyes que describen la oscilación y las variables que afectan a este movimiento. [1]

A partir de estas formulas y leyes, se reproducirá un experimento con el fin de estimar el valor de la gravedad en la tierra y descubrir que tan aproximado está el resultado teórico con el experimental.

El objetivo del experimento no solo es verificar la diferencia de aproximación teórica y experimental que nos da mediante el uso de un algortimo creado en python y otros artilugios matemáticos, si no que busca comprender y analizar los factores que pueden llegar a afectar este movimiento como puede ser la longitud de la cuerda a la que se sostiene el péndulo y saber cómo modificarlos de una forma que queramos.

2. Metodología

Como primera medida para el estudio de un péndulo simple para estimar el valor de la aceleración de la gravedad en la tierra se planteó de dos maneras diferentes una de manera teórica en la cual abordaremos el problema desde las ecuaciones fundamentales del movimiento circular y otra práctica realizando un experimento a lo más parecido a condiciones ideales, haciendo énfasis en las dos oscilaciones iniciales, que es en el cual el experimento tiene un comportamiento similar al ideal.[2]

2.1. Teórica

Nos basamos en la fórmula que relaciona el periodo T , del movimiento realizado por un péndulo simple (Estas ocurren en pequeñas oscilaciones y sin rozamiento) y su longitud L , con la aceleración de la gravedad.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

El péndulo se compone de una masa M la cual se considera puntual, suspendida de un hilo que tiene masa despreciable y longitud L . Para obtener la frecuencia del péndulo utilizaremos el principio de conservación de energía, la desviación se mide por el ángulo que forma el hilo con la vertical, cuando el hilo se desvía el ángulo, la masa se eleva una altura h . [3]

$$h = L * L\cos\theta \quad (2)$$

La trayectoria al ser un arco de circunferencia de radio L , su velocidad es

$$v = L\frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

Al aplicar la conservación de la energía, la suma de la energía cinética y potencial debe ser constante en toda la oscilación

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh \quad (4)$$

Al sustituir h y v por sus expresiones se llega a

$$E = \frac{1}{2}ML^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + Mgl(1 - \cos\theta) \quad (5)$$

Podemos anular simplificando si derivamos la ecuación anterior con respecto a t obteniendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad (6)$$

Ya para ángulos pequeños el seno se puede sustituir por el ángulo en radianes y se llega a la siguiente ecuación.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (7)$$

$$\theta = \theta_{max} \sin(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (9)$$

La solución de la ecuación (6) es siempre aproximada y se resuelve no teniendo en cuenta los términos considerados en cada caso “pequeño”. [4]

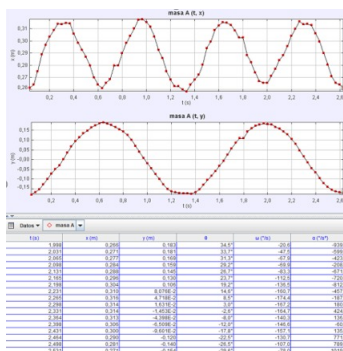
2.2. Práctica

Para realizar el experimento primero plantemos los ángulos que tomaríamos en cuenta siendo estos $\theta_0 \approx 5^\circ$, $\theta_0 \approx 20^\circ$, $\theta_0 \approx 30^\circ$ y $\theta_0 \approx 40^\circ$, para proceder a fijar la longitud de la cuerda y la masa a oscilar llegando a que realizaríamos los experimento con dos longitudes distintas y dos masas distintas siendo estas $L \approx 30cm$, $L \approx 50cm$ y $m \approx 400ml$, $m \approx 600ml$ respectivamente para realizar el experimento con cada una de las masas y longitudes usando cada ángulo, haciendo el video con 10 repeticiones por cada uno para poder encontrar el error que nos da al hacer el experimento tomando el promedio de cada video.

Teniendo en cuenta todo se hicieron 160 videos en los cuales solo 16 fueron experimentos únicos y los demás fueron para disminuir al mínimo el error experimental.

Al momento de grabar los videos nos dimos cuenta que, si solo amarábamos el hilo a la botella esto hacia que al comenzar el movimiento se desplazará hacia un lado, por lo tanto, para solucionar este problema ideamos el hacerle un hueco al centro de una tapa y pasar el hilo por ahí haciendo que este desplazamiento ya no exista.

Procediendo a pasar los 160 videos por el software Tracker el cual nos da los resultados de cada experimento y sacando los promedios de cada 10 videos en cada caso, como a medida que pasa el tiempo el péndulo va perdiendo energía por causa de la fricción usamos solamente dos oscilaciones para analizar ya que este cambio no es tan alto.



Ya con los resultados que nos da Tracker lo pasamos los datos a python y mediante un algoritmo encontramos el valor de la gravedad basándonos sobre todo cuando el ángulo pequeño.

3. El experimento y los resultados

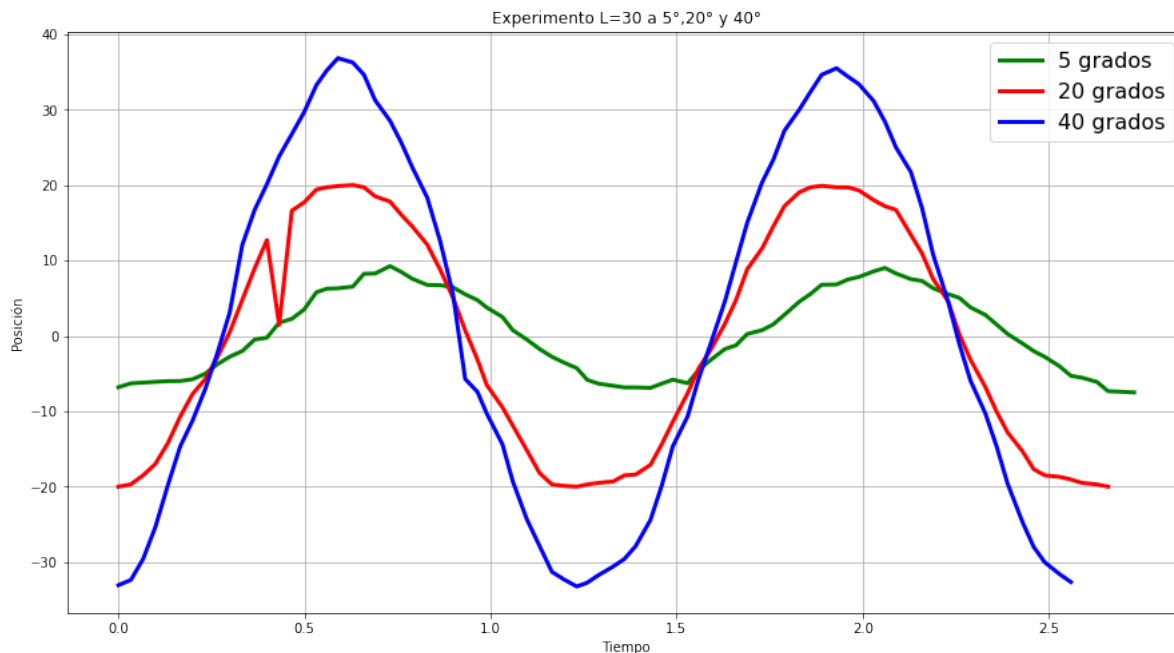
3.1. Estimación $\sin\theta \approx \theta$

El primer cálculo que se realiza es encontrar los ángulos en los cuales el error era menor a 3 %, esto se realiza por medio de una función en python que desarrollamos, la cual recibe como parámetro de entrada un vector de ángulos, esta función analiza cada uno de ellos sacando el respectivo seno de este ángulo θ . A continuación se realiza la fórmula de error absoluto para poder llegar al porcentaje de error y aquellos que tuvieron un error menor a 3 % fueron agregados a un vector llegando a la siguiente lista de ángulos:

ángulo en Grados	ángulo en radianes
1.0027855153203342	0.0175rad
3.0083565459610027	0.05251rad
5.01392757660167	0.08751rad
7.0194986072423395	0.1225rad
9.025069637883007	0.1575rad
11.030640668523676	0.1925rad
13.036211699164344	0.2275rad
15.04178272980501	0.2625rad
16.044568245125348	0.28rad
18.050139275766014	0.315rad
20.05571030640668	0.35rad
23.064066852367684	0.4025rad

3.2. Estimación aceleración de la gravedad

Para el primer análisis experimental del movimiento del péndulo se cargaron los datos de tracker para una masa de $0,6kg$ con una longitud de $30cm$ para ángulos de $\theta_0 \approx 5^\circ$, $\theta_0 \approx 20^\circ$ y $\theta_0 \approx 40^\circ$



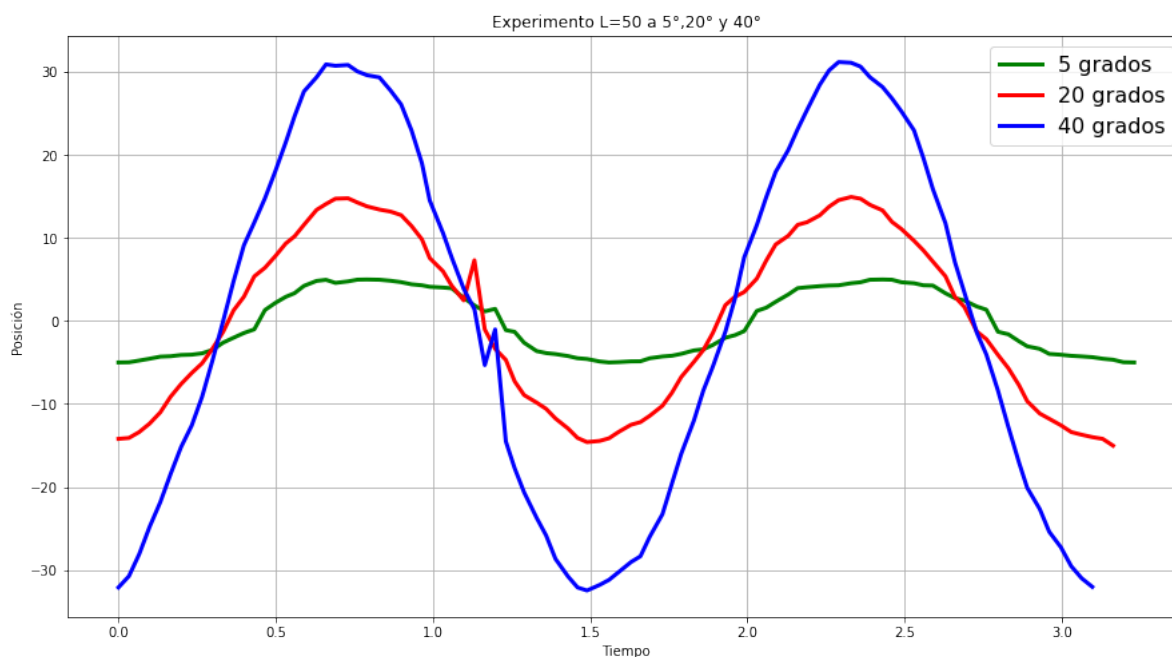
Como podemos observar se muestra el comportamiento del péndulo en los experimentos, esto se evidencia de forma explícita como es mejor se comporta la partícula a través del tiempo. Para la estimación de la gravedad utilizamos tres experimentos distintos con la misma masa $0,6\text{kg}$ pero diferentes ángulos, con una longitud de 30cm . A través de la siguiente fórmula pudimos calcular la gravedad:

$$g = \frac{4\pi^2 * L}{T^2} \quad (10)$$

El resultado que nos dio al calcularlo mediante el algoritmo realizado en Python para la longitud de 30cm es de: $7,008\text{m/s}^2$, $9,788\text{m/s}^2$ y $8,22\text{m/s}^2$ con errores respectivos de $28,48\%$, $0,12\%$ y $16,07\%$ para los tres ángulos.

Al realizar el mismo cálculo para cada experimento pudimos notar que el cálculo de la estimación de la gravedad no depende de la masa. Solo depende de la longitud de la cuerda y el período del péndulo. En este caso se demostró que al cambiar el ángulo pero conservando la longitud, se puede calcular con un error no mayor al 30% .

Para el segundo análisis experimental del movimiento del péndulo se cargaron los datos de tracker para una masa de $0,6\text{kg}$ con una longitud de 50cm para ángulos de $\theta_0 \approx 5^\circ$, $\theta_0 \approx 20^\circ$ y $\theta_0 \approx 40^\circ$.

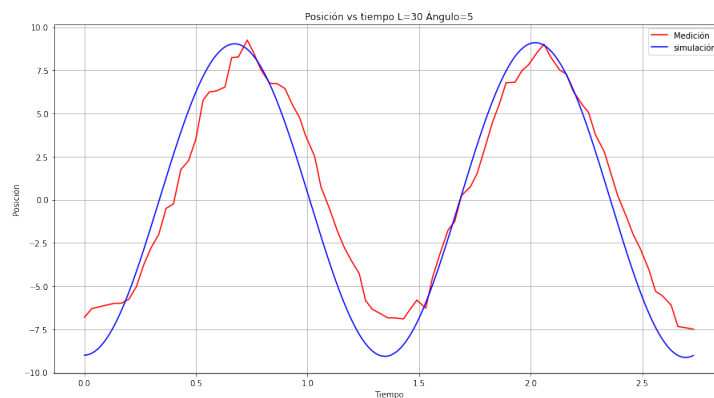


El valor de la gravedad que nos dio al calcularlo mediante el algoritmo realizado en Python para la longitud de 50cm es de: $7,710m/s^2$, $8,77m/s^2$ y $9,38m/s^2$ con errores respectivos de 21,32 %, 10,47 % y 4,19 % para los tres ángulos.

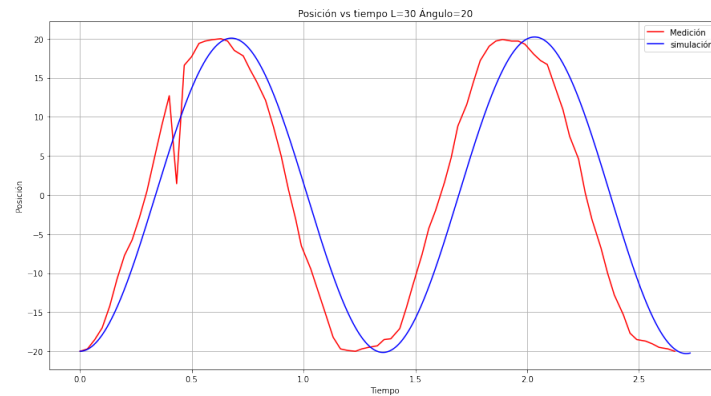
Al realizar el mismo cálculo para cada experimento reforzamos la idea de que la aceleración de la gravedad solo depende de la longitud y el periodo, ya que al aumentar el largo de la cuerda se aumenta el periodo del péndulo obteniendo un error no mayor al 25 %.

3.3. Simulación vs promedio

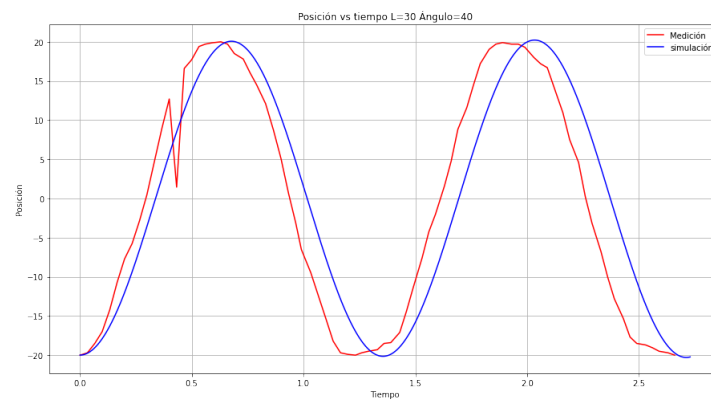
En esta subsección son presentados los resultados de la simulación para la masa de $0,6kg$ en las dos diferentes longitudes y los tres ángulos que se plantearon al comienzo



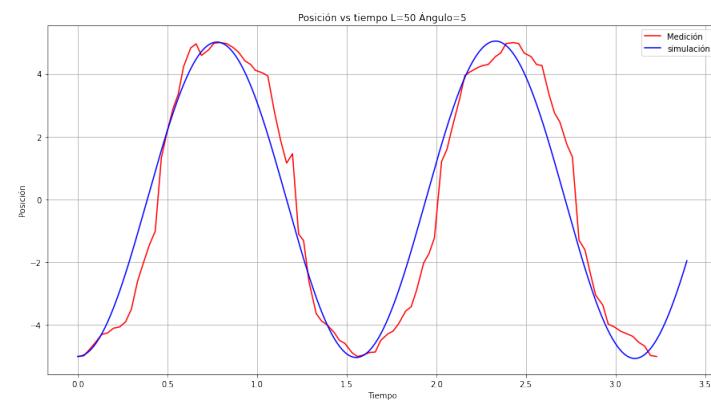
Gráfica de simulación y el promedio en $L=30$ a 5°



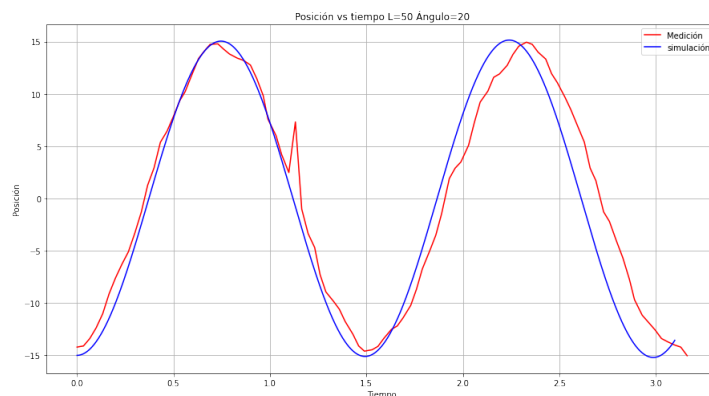
Gráfica de simulación y el promedio en $L=30$ a 20°



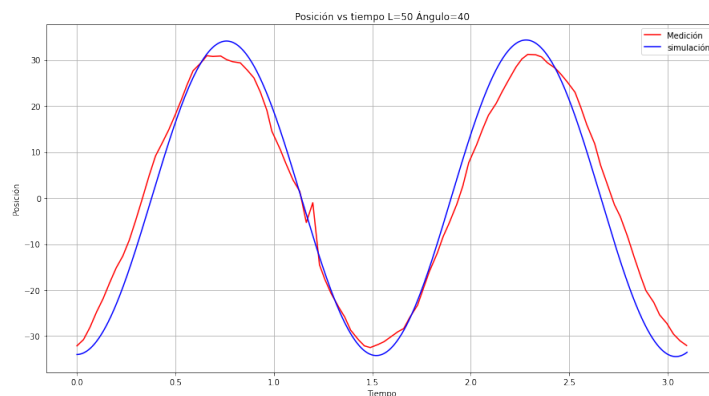
Gráfica de simulación y el promedio en $L=30$ a 40°



Gráfica de simulación y el promedio en $L=50$ a 5°



Gráfica de simulación y el promedio en $L=50$ a 20°



Gráfica de simulación y el promedio en $L=50$ a 40°

Como se puede observar el experimento al compararlo con la simulación dan resultados similares, con un margen de error muy pequeño ya sea humano o por el ambiente en el que se realizó el experimento. Por ende es pertinente afirmar que la reproducibilidad de estos experimentos es posible debido a que estos datos tienen su comportamiento similar al modelo teórico, con un error menor al 5%. Confirmándonos que son datos confiables para la estimación de la gravedad que realizamos arriba.

4. Los errores y precisión

Los errores experimentales siempre están presentes en la replica de un experimento, ya sea por error humano o simplemente las condiciones reales a la hora de replicar estos. Para el experimento de longitud=30cm, masa=600ml o 0,6kg con un ángulo de 5° se realizaron 10 ejercicios iguales dando una desviación estándar total de 4.5. El error encontrado a la hora de realizar el cálculo de la gravedad para dos experimentos idénticos solamente cambiando la longitud de la cuerda una de 30 cm y la otra de 50 cm nos da errores del 7 % y 10 % respectivamente. Lo cual genera un grado de confianza por mantenerse en porcentaje aceptable que genera confiabilidad.

5. Conclusiones

Al hacer el análisis correspondiente podemos notar al hacer el cálculo de la gravedad esta no depende la masa, si no de la longitud y el periodo del péndulo pero cuando el θ es un ángulo muy pequeño tal que se pueda aproximar a $\sin\theta$ a la hora de replicar este experimento lo ideal es mantenerlo para pocas oscilaciones ya que al aumentarlo la fricción reduce la energía del péndulo.

Un error que se puede realizar a la hora de replicar el experimento es el error humano ya que al soltar la botella en el instante inicial esta puede agregarle un impulso al péndulo además agregarle variación al ángulo.

Referencias

- [1] sc. Oscilaciones. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/pendulo/pendulo.html>, 2015.
- [2] lumen. The simple pendulum. <https://courses.lumenlearning.com/physics/chapter/16-4-the-simple-pendulum/>, 2017.
- [3] José Antonio Gómez Tejedor. Péndulo simple. *Universitat Politècnica de València*, 2011.
- [4] UCM Laboratorio de Física, Grado en Ingeniería Química. Pendulo simple. <https://fisicas.ucm.es/data/cont/media/www/pag-103480/Guiones/Pendolo2016>.