



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра вычислительных методов

Бутаков Олег Борисович

«to be filled by the OEM»

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф-м.н., профессор

С.И. Мухин

Москва, 2019

Оглавление

Введение	3
1 Система уравнений магнитной гидродинамики.	4
1.1 Система уравнений магнитной гидродинамики.	4
1.2 Консервативная форма идеальной МГД-системы.	5
1.3 Характеристические свойства идеальной МГД-системы.	6
2 Конечно-объемные схемы Годуновского типа для МГД-системы.	8
2.1 Разностная схема Годуновского типа для гиперболической систе- мы уравнений.	8
2.1.1 Сетка и неизвестные.	8
2.1.2 Конечно-объемная аппроксимация уравнений.	9
2.1.3 Аппроксимация уравнений разрывным методом Галеркина.	10
2.1.4 Выбор базисных функций.	11
2.1.5 Вычисление интегралов.	13
2.1.6 Ограничители.	14
2.2 Приближенное решение задачи Римана.	15
2.2.1 Потoki семейства Куранта-Изаксона-Риса.	15
2.2.2 Потoki семейства Хартена-Лакса-ван Лира.	16
2.3 Особенности применения схем Годуновского типа для системы уравнений магнитной гидродинамики.	17
2.4 Результаты расчетов	18
2.4.1 Одномерная задача о распаде разрыва.	18

2.4.2	Вихрь Орзака-Тана.	20
	Заключение	24
	Литература	25

Введение

В данной работе рассматриваются основные свойства системы уравнений магнитной гидродинамики, а также наиболее популярные на сегодняшний день способы её численного решения: схемы Годуновского типа и разрывный метод Галеркина.

Глава 1

Система уравнений магнитной гидродинамики.

1.1 Система уравнений магнитной гидродинамики.

Система уравнений магнитной гидродинамики (1.1) описывает течение вязкой проводящей жидкости или газа.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0; \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} [\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}] &= \eta \Delta \vec{v}; \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) E + \operatorname{div} [p \vec{v} + \vec{W}] + \frac{1}{4\pi} (\vec{v} \cdot [\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}]) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] &= -\frac{1}{\sigma} \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}; \\ (\nabla \cdot \vec{B}) &= 0; \\ p = p(\rho, \varepsilon); E = \varepsilon + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}; \vec{W} = \vec{W}(\varepsilon, \operatorname{grad} \varepsilon).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь: ρ – плотность, \vec{v} – скорость, p – давление; E – полная удельная энергия; ε – удельная внутренняя энергия, \vec{B} – вектор магнитной индукции; η – вязкость среды, σ – проводимость среды; c – скорость света в вакууме.

Система уравнений содержит восемь неизвестных – плотность ρ , компоненты скорости \vec{v} , удельная внутренняя энергия ε и компоненты вектора магнит-

ной индукции \vec{B} и состоит из девяти уравнений (не учитывая уравнения состояния): закона сохранения массы, импульса, энергии, уравнения индукции и закона Гаусса для магнитного поля.

Заметим, что вычислив дивергенцию уравнения индукции, мы получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0,$$

то есть, если закон Гаусса выполняется для начальных данных, то он будет выполняться и впоследствии.

1.2 Консервативная форма идеальной МГД-системы.

В данном пункте будем рассматривать консервативный вид идеальной МГД-системы, то есть будем считать коэффициенты η , σ и тепловой поток \vec{W} равными нулю.

Получим дивергентный вид закона сохранения импульса. Для этого сложим его с умноженным на плотность уравнением неразрывности, равной нулю величиной $\frac{1}{4\pi}\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B})$ и воспользуемся известными формулами векторного анализа $[\vec{B} \times \text{rot } \vec{B}] = \frac{1}{2}\text{grad } (\vec{B} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}$, $\text{div } (\vec{v} \otimes \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v}\text{div } \vec{v}$:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div} \left[\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \otimes \vec{B} \right] + \text{grad} \left[p + \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2} \right] = 0.$$

Назовем $p_* := p + \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2}$ полным давлением. Тогда последнее уравнение примет свой окончательный вид:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div} \left[\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \otimes \vec{B} + p_* I \right] = 0.$$

Аналогично можно получить и дивергентный вид закона сохранения энергии:

$$\frac{\partial \rho E_*}{\partial t} + \text{div} \left[\rho H_* \vec{v} - (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{B} \right] = 0.$$

Здесь $E_* := E + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2}$ – полная удельная энергия, а $H_* := E_* + \frac{p_*}{\rho}$ – полная удельная энтальпия.

Теперь получим консервативную форму уравнения индукции. Воспользуемся другим известным соотношением векторного анализа

$$\operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] = \operatorname{div} [\vec{B} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{B}]:$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{div} [\vec{v} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{v}] = 0.$$

Определим вектор консервативных неизвестных \mathbf{q} и функция потока $F(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{q} := [\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E_*, B_x, B_y, B_z] \in \mathbb{R}^{1 \times 8};$$

$$F(\mathbf{q}) := \left[\rho \vec{v}, \right. \\ \left. \rho v_x \vec{v} - B_x \vec{B} + p_* \vec{e}_x, \rho v_y \vec{v} - B_y \vec{B} + p_* \vec{e}_y, \rho v_z \vec{v} - B_z \vec{B} + p_* \vec{e}_z, \right. \\ \left. \rho H_* \vec{v} - (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{B}, \right. \\ \left. \frac{1}{4\pi} (B_x \vec{v} - v_x \vec{B}), \frac{1}{4\pi} (B_y \vec{v} - v_y \vec{B}), \frac{1}{4\pi} (B_z \vec{v} - v_z \vec{B}) \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 8}.$$

В этих обозначениях систему (1.1) при $\eta = \sigma = 0$, $\vec{W} = 0$ можно записать в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) = 0.$$

1.3 Характеристические свойства идеальной МГД-системы.

Идеальная МГД-система является гиперболической, так как якобиан $\frac{\partial F_x(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ имеет семь действительных собственных значений (как и $\frac{\partial F_y(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial F_z(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$):

$$\lambda_1 = v_x - c_f; \lambda_7 = v_x + c_f;$$

$$\lambda_2 = v_x - c_a; \lambda_6 = v_x + c_a;$$

$$\lambda_3 = v_x - c_s; \lambda_5 = v_x + c_s;$$

$$\lambda_4 = v_x.$$

λ_1 и λ_7 соответствуют быстрым ударным волнам, λ_2 и λ_6 соответствуют альфвеновским волнам, λ_3 и λ_5 соответствуют медленным ударным волнам, а λ_4 — энтропийной волне.

Пусть $c_0^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ – скорость звука, $c_{a,x}^2 = \frac{B_x^2}{4\pi\rho}$, $c_a^2 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{4\pi\rho}$ – альфвеновские скорости. Тогда быстрым и медленным скоростям ударных магнитных волн соответствуют следующие значения:

$$c_f^2 = \frac{1}{2}(c_0^2 + c_a^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(c_0^2 + c_a^2)^2 - 4c_0^2c_{a,x}^2};$$

$$c_s^2 = \frac{1}{2}(c_0^2 + c_a^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(c_0^2 + c_a^2)^2 - 4c_0^2c_{a,x}^2}.$$

Глава 2

Конечно-объемные схемы Годуновского типа для МГД-системы.

2.1 Разностная схема Годуновского типа для гиперболической системы уравнений.

2.1.1 Сетка и неизвестные.

Пусть \mathcal{C}_i – множество ячеек (элементов) сетки, \mathcal{F}_j – множество граней ячеек, \mathcal{E}_l – множество ребер всех граней, и, наконец, \mathcal{N}_k – множество узлов расчетных ячеек. В дальнейшем будем использовать индекс i только для обозначения объектов, связанных с расчетными ячейками, j и l – с гранями и ребрами ячеек, k – с узлами сетки.

Введем отображения, описывающие топологию сетки. Так, пусть \mathcal{J}_i и \mathcal{K}_i – множества индексов граней и вершин i -ой ячейки; \mathcal{L}_j и \mathcal{I}_j – множества индексов ребер и смежных ячеек j -ой грани; \mathcal{K}_l и \mathcal{J}_l – множества индексов вершин и смежных граней l -го ребра; \mathcal{I}_k и \mathcal{L}_k – множества индексов ячеек и ребер, содержащих k -ую вершину.

2.1.2 Конечно-объемная аппроксимация уравнений.

Построим конечно-объемную аппроксимацию для произвольной гиперболической системы уравнений, записанной в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) = 0. \quad (2.1)$$

При использовании конечно-объемного метода предполагается, что решение является постоянным в пределах каждой ячейки: $\mathbf{q}(\vec{r}) := \mathbf{q}_i = \text{const}, \vec{r} \in \mathcal{C}_i$. Проинтегрируем систему уравнений (2.1) по произвольной ячейке с номером i :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{C}_i} \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) \right] dV = \\ & \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} \left(F(\mathbf{q}) \cdot \vec{n}_{ij} \right) dS = \\ & \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \left(\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij} \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь \vec{n}_{ij} – нормаль j -ой грани, внешняя по отношению к i -ой ячейке, \vec{n}_j – произвольно-ориентированная нормаль j -ой грани, $(\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij}) = \pm 1$; $F_{n,j} = (F(q) \cdot \vec{n}_j)$.

Для реализации расчета по построенной схеме (2.2) требуется вычислить значения потоков $F(q)$ в точках, принадлежащих граням ячеек сетки, однако кусочно-постоянная в ячейках функция решения терпит в этих точках разрывы. Отличительной особенностью методов Годуновского типа является вычисление потоков на границах ячеек путем приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Пусть $F_{n,j}^R(\{q^-, q^+\}, n_j)$ – функция, осуществляющая решение такой задачи относительно плоскости, задаваемой нормалью n_j , в положительной полуплоскости которой газ находится в состоянии q^+ , в отрицательной – q^- .

Заменив интегралы по граням ячеек в последнем равенстве выражения (2.2) их приближенным значение по формуле среднего с первым порядком точности, и воспользовавшись введенной функций $F_{n,j}^R(\{q^-, q^+\}, n_j)$, окончательно полу-

чим следующую аппроксимацию уравнений (2.1):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} F_{n,j}^R (\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij}) S_j &= 0; \\ F_{n,j}^R &= F_{n,j}^R(\{\mathbf{q}_{i_1}, i_1 \in \mathcal{I}_j\}, n_j). \end{aligned}} \quad (2.3)$$

Заметим, что если j -ая грань является внутренней, множество \mathcal{I}_j содержит в себе ровно два индекса. Здесь нормаль \vec{n}_j совпадает с $\vec{n}_{i_1 j}$, где i_1 – первый элемент множества \mathcal{I}_j .

2.1.3 Аппроксимация уравнений разрывным методом Галеркина.

Нетрудно заметить, что (2.3) аппроксимируем исходную систему уравнений (2.1) лишь с первым порядком точности, что обусловлено во-первых, кусочно-постоянной формой искомого решения, и, во-вторых, интегрированием потоков по формуле среднего. Для увеличения точности естественно было бы предложить аппроксимировать решение не кусочно-постоянной функцией, а, например, кусочно-линейной или кусочно-квадратичной функцией.

Предположим, что решение в пределах каждой ячейки является элементом конечномерного пространства функций с базисом $\{\psi_i^{(m)}\}$. Не ограничивая общности суждений, предположим, что базис является ортогональным с весом ϕ_i , причем выполнено следующее равенство:

$$\left(\psi_i^{(m)} \cdot \psi_i^{(n)} \right) = \iiint_{\mathcal{C}_i} \psi_i^{(m)} \psi_i^{(n)} \phi_i dV = \delta_{m,n} V_i. \quad (2.4)$$

Таким образом, решение уравнений (2.1) может быть представлено в виде линейной комбинации элементов нашего конечномерного подпространства: $q_i(t, \vec{r}) = \sum_m q_i^{(m)}(t) \psi_i^{(m)}(\vec{r})$. Подставим эту линейную комбинацию в исходную систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) &= \\ \sum_m \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} \psi_i^{(m)} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) &= 0. \end{aligned}$$

Скалярно умножим последнее равенство на произвольную базисную функцию, воспользуемся свойством ортогональности и известной формулой вычисления дивергенции произведения скалярного и векторного полей:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\mathcal{C}_i} \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) \right] \psi_i^{(m)} \phi_i dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \iiint_{\mathcal{C}_i} \phi_i \psi_i^{(m)} \operatorname{div} F(\mathbf{q}) dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \iiint_{\mathcal{C}_i} \operatorname{div} \left[\phi_i \psi_i^{(m)} F(\mathbf{q}) \right] dV - \iiint_{\mathcal{C}_i} \left(\operatorname{grad} \phi_i \psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i) \right) dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} \left(F(\mathbf{q}) \cdot \vec{n}_{ij} \right) \psi_i^{(m)} \phi_i dS - \iiint_{\mathcal{C}_i} \left(\operatorname{grad} \phi_i \psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i) \right) dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \left(\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij} \right) \iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS - \iiint_{\mathcal{C}_i} \left(\operatorname{grad} \phi_i \psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i) \right) dV = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, если выбрать базис, состоящий из одной функции $\psi_i^{(0)} \equiv 1$ при $\phi_i \equiv 1$, то аппроксимация (2.5) разрывным методом Галеркина совпадает с конечно-объемной аппроксимацией (2.2).

2.1.4 Выбор базисных функций.

Аппроксимация (2.5) допускает произвольный выбор базисных функций, удовлетворяющих условию (2.4). На практике широкое распространение получил базис, состоящий из ортогональных полиномов, в частности, масштабированных многочленов Лежандра.

Одномерные базисные функции. Рассмотрим сначала одномерный случай. Поскольку полиномы Лежандра $L_m(x)$ ортогональны на отрезке $[-1, +1]$:

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n},$$

то в качестве базиса для ячейки с центром в точке x_i и длиной h_i можно выбрать функции вида:

$$\boxed{\psi_i^{(m)}(x) := \sqrt{\frac{2}{2m+1}} L_m(x - x_i), \phi_i = \frac{2}{h_i}.}$$

Двумерные базисные функции. Обобщим полиномы Лежандра на случай двух пространственных измерений. Определив $P_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} L_m(\xi)$, построим функции $P_m(x, y)$, ортонормированные на квадрате $\mathcal{C}_0 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0(x)P_0(y), \\ P_1 &= P_1(x)P_0(y), P_2 = P_0(x)P_1(y), \\ P_3 &= P_2(x)P_0(y), P_4 = P_1(x)P_1(y), P_5 = P_0(x)P_2(y), \\ P_6 &= P_3(x)P_0(y), P_7 = P_2(x)P_1(y), P_8 = P_1(x)P_2(y), P_9 = P_0(x)P_3(y), \\ &\dots \end{aligned}$$

Для простоты предположим, что ячейка является выпуклым четырехугольником с вершинами $\{\mathcal{N}_{k_n}, k_n \in \mathcal{K}_i\}$, пронумерованными против часовой стрелки. Эта область является взаимно-однозначным отображением квадрата \mathcal{C}_0 , осуществляемым с помощью узловых функций N_{k_n} :

$$\begin{aligned} \vec{r}(\xi, \eta) &= \sum_{k_n} \vec{r}_{k_n} N_{k_n}(\xi, \eta); \exists \xi(x, y), \eta(x, y); \\ N_{k_1}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), N_{k_2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_{k_3}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), N_{k_4}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned}$$

Положим $\psi_i^{(m)}(x, y) := P_m(\xi(x, y), \eta(x, y))$ и определим скалярное произведение базисных функций:

$$\begin{aligned} \left(\psi_i^{(m)}(x, y) \cdot \psi_i^{(n)}(x, y) \right) &= \iiint_{\mathcal{C}_i} \psi_i^{(m)}(x, y) \psi_i^{(n)}(x, y) \phi_i(x, y) dV = \\ &= \iiint_{\mathcal{C}_0} P_m(\xi, \eta) P_n(\xi, \eta) \phi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| dV_0 = \delta_{m,n} V_i \Leftrightarrow \\ \phi_i(x, y) &:= V_i \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right|. \end{aligned}$$

Трехмерные базисные функции. В трехмерном случае построение базисных функций осуществляется аналогично: пусть $P_m(x, y, z)$ – полиномы, состоящие из произведения полиномов первой степени упорядоченными в виде пирамиды. Также, пусть ячейки сетки представляют собой выпуклые фигуры с шестью четырехугольными гранями. Тогда будут существовать отображения $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y(\xi, \eta, \zeta)$, $z(\xi, \eta, \zeta)$ и $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$. В качестве базисных функций выберем $\psi_i^{(m)}(x, y, z) := P_m(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z))$, а весовую функцию положим равной $\phi_i(x, y, z) := V_i \left| \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} \right|$.

2.1.5 Вычисление интегралов.

Вычислим интегралы, входящие в выражение (2.5). Начнем с поверхностных интегралов вида:

$$\iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS.$$

Поскольку мы предположили, что наши ячейки являются отображением куба $\mathcal{C}_0 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, то грань \mathcal{F}_j является одной из граней куба \mathcal{C}_0 . Не ограничивая общности, предположим, что это грань $\mathcal{F}_0 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{1\}$, то есть $x = x(\xi, \eta, 1)$, $y = y(\xi, \eta, 1)$, $z = z(\xi, \eta, 1)$. Следовательно, перейдя к переменным ξ, η интеграл можно упростить:

$$\iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS = V_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F_{n,j,i}(\xi, \eta, 1) P_m(\xi, \eta, 1) d\xi d\eta.$$

Воспользуемся квадратурной формулой с узлами x_n весами w_n , например, квадратурой Гаусса, и функцией приближенного решения задачи Римана:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS &\cong V_i \sum_{n_1} \sum_{n_2} w_{n_1} w_{n_2} F_{n,j}^R(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1) P_m(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1); \\ F_{n,j}^R(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1) &= F_{n,j}^R \left(\left\{ \sum_m q_{i_1}^{(m)} P_m(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1), i_1 \in \mathcal{I}_j \right\}, n_j \right). \end{aligned}$$

Таким образом, предварительно рассчитав значения функций P_m в точках на гранях реперного куба \mathcal{C}_0 , можно вычислить значения решения, а, значит, и $F_{n,j}^R$.

2.1.6 Ограничители.

В случае, если количество базисных функций отлично от единицы, разрывной метод Галеркина формально можно считать методом высокого порядка аппроксимации. Как следствие этого, использование метода без специальных ограничителей невозможно: в силу теоремы Годунова метод не является монотонным.

Опишем общую процедуру построения ограничителя на примере метода, использующего кусочно-линейные или кусочно-квадратичные базисные функции.

1. Вычислим сначала осредненные по ячейкам значения решения.:

$$\mathbf{q}_i^{avg} := \iiint_{\mathcal{C}_i} \mathbf{q}_i dV,$$

2. Приблизительно вычислим градиенты решения $\text{grad } q_j^{avg}$ на ребрах. Если сетка является ортогональной, то есть такой, что для любых двух соседних ячеек $\mathcal{C}_{i_1}, \mathcal{C}_{i_2}$ прямая, соединяющая их центры, перпендикулярна их общей грани \mathcal{F}_j с нормалью \vec{n}_{i_1j} , то градиенты могут быть вычислены, например, как

$$\text{grad } \mathbf{q}_j^{avg} := \frac{\mathbf{q}_{i_2} - \mathbf{q}_{i_1}}{\|\vec{r}_{i_2} - \vec{r}_{i_1}\|} \vec{n}_{i_1j}.$$

В случае кусочно-квадратичного базиса необходимо также вычислить и гессианы осредненного решения в ячейках:

$$\text{hess } \mathbf{q}_i^{avg} := \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} \left(\text{grad } \mathbf{q}_j^{avg} \otimes \vec{n}_{ij} \right) dS.$$

3. Вычислим ограниченные значения градиентов в ячейках. Одним из самых простых способов вычисления является ограничение функцией `minmod`:

$$\begin{aligned} \text{grad } \mathbf{q}_i^{lim} &:= \text{minmod} \left(\text{grad } \mathbf{q}_i, \text{grad } \mathbf{q}_{j_1}^{avg}, \dots, \text{grad } \mathbf{q}_{j_N}^{avg} \right), j_n \in \mathcal{J}_i; \\ \text{minmod} \left(a_0, a_1, \dots, a_N \right) &:= \left\lfloor \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \text{sgn}(a_n) \right\rfloor \min \left\{ |a_0|, |a_1|, \dots, |a_N| \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно ограничить и гессианы $\text{hess } q_i^{lim}$, используя гессиан решения в текущей ячейке и вычисленные значения $\text{hess } q_i^{avg}$ в соседних ячейках.

4. Теперь ограниченное решение может быть представлено через разложения в ряд Тейлора:

$$\mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) = \mathbf{q}_i^{avg} + \left(\text{grad } \mathbf{q}_i^{lim} \cdot \vec{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{hess } \mathbf{q}_i^{lim} \vec{r} \cdot \vec{r} \right).$$

Осталось лишь найти коэффициенты разложения по базисным функциям:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^{lim} &= \sum_m \mathbf{q}_i^{(m),lim} \psi_i^{(m)} \Rightarrow \left(\mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) \cdot \psi_i^{(m)} \right) = \mathbf{q}_i^{(m),lim} V_i \Rightarrow \\ \mathbf{q}_i^{(m),lim} &:= \frac{1}{V_i} \left(\mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) \cdot \psi_i^{(m)} \right). \end{aligned}$$

2.2 Приближенное решение задачи Римана.

Рассмотрим два семейства алгоритмов, осуществляющих приближенное нахождение решения задачи Римана.

2.2.1 Потоки семейства Куранта-Изаксона-Риса.

В схемах семейства Куранта-Изаксона-Риса (КИР) для вычисления потоков используется следующая формула:

$$\begin{aligned} F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) &= \frac{1}{2} \left(F_n(\mathbf{q}^+) + F_n(\mathbf{q}^-) \right) + \frac{1}{2} |A_n| \left(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- \right); \\ |A_n| &= \Omega_{R,n} |\Lambda_n| \Omega_{L,n}, \quad A_n = \frac{\partial F_n}{\partial \mathbf{q}} = \Omega_{R,n} \Lambda_n \Omega_{L,n}, \end{aligned}$$

Поскольку исходная система является нелинейной, конкретная реализация схемы данного семейства зависит от выбора линеаризации якобиана.

Поток Русанова (Локальный поток Лакса-Фридрихса). Потоки LLF являются, пожалуй, простейшими. Линеаризация производится путем замены якобиана на модуль максимального собственного значения. Окончательная формула потоков LLF будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) &= \frac{1}{2} \left(F_n(\mathbf{q}^+) + F_n(\mathbf{q}^-) \right) + \frac{1}{2} |\lambda_n| \left(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- \right); \\ |\lambda_n| &= \max \left\{ |v_n^+| + c_f^+, |v_n^-| + c_f^- \right\}. \end{aligned}$$

Поток Роу. Поток Роу используют линеаризацию якобиана \hat{A}_n в некоторой промежуточной точке $\hat{\mathbf{q}}$:

$$\hat{\rho} = \sqrt{\rho^+ \rho^-}; \hat{H}_* = \frac{\sqrt{\rho^+} H_*^+ + \sqrt{\rho^-} H_*^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}};$$

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\sqrt{\rho^+} \vec{v}^+ + \sqrt{\rho^-} \vec{v}^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}; \hat{\vec{B}} = \frac{\sqrt{\rho^+} \vec{B}^+ + \sqrt{\rho^-} \vec{B}^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}.$$

Нетрудно заметить, что при такой линеаризации будут выполнены следующие свойства:

$$F_n(\mathbf{q}^+) - F_n(\mathbf{q}^-) = \hat{A}_n(\hat{\mathbf{q}}_n) (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-); A_n(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n) = \hat{A}_n(\hat{\mathbf{q}}_n).$$

Существенным недостатком приведенного метода является вычислительная сложность: необходимо вычислить матрицы правых и левых собственных векторов $\Omega_{R,n}, \Omega_{L,n}$.

В работе [1] предлагается достаточно компактные выражения собственных векторов якобиана системы уравнений магнитной гидродинамики в альтернативном базисе (для одномерного случая):

$$\mathbf{w} = \left[\frac{1}{\rho}, v_x, v_y, v_z, B_y, B_z, p \right];$$

$$A_n = \Omega_{R,n} \Lambda_n \Omega_{L,n}; \Omega_{R,n} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{w}} \Omega_{R,n}^w; \Omega_{L,n} = \Omega_{L,n}^w \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial F_n}{\partial \mathbf{w}} = \Omega_{R,n}^w \Lambda_n \Omega_{L,n}^w.$$

Конкретные выражения для $\Omega_{R,n}^w, \Omega_{L,n}^w$ приводятся в статье.

2.2.2 Поток семейства Хартена-Лакса-ван Лира.

Поток семейства Хартена-Лакса-ван Лира (HLL) вычисляют значение на основе характеристической плоскости. Пусть s^+, s^- – скорости распространения возмущения. Тогда значения потоков могут быть вычислены следующим образом:

$$F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) = \begin{cases} F_n(\mathbf{q}^+), s^+ < 0, \\ F_n(\mathbf{q}^-), s^- > 0, \\ \frac{s^+ F_n(\mathbf{q}^-) - s^- F_n(\mathbf{q}^+) + s^+ s^- (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-)}{s^+ - s^-}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Вычислить s^+ , s^- можно, например, так:

$$s^\pm = \max\{v_n^+ \pm c_f^+, v_n^- \pm c_f^-\}.$$

В работах [2], [3] приводятся различные вариации обобщения потока HLLC, точно разрешающего контактные разрывы на случай магнитной гидродинамики. Также в работе [3] приводится поток HLLD, разрешающий и альфвеновские волны.

2.3 Особенности применения схем Годуновского типа для системы уравнений магнитной гидродинамики.

Ни одна из построенных схем не гарантирует соленоидальности магнитного поля в многомерном случае, то есть

$$\operatorname{div} \vec{B} \neq 0.$$

Для коррекции магнитного поля применим проекционный метод, позаимствованный из численных методов решения системы уравнений вязкой несжимаемой жидкости. По теореме Гельмгольца магнитное поле может быть представлено как сумма скалярного и векторного потенциалов:

$$\vec{B} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \vec{\psi}; \operatorname{div} \vec{B} = \Delta \phi \neq 0.$$

Таким образом, численно решив уравнение Пуассона $\operatorname{div} \vec{B} = \Delta \phi$ (граничные условия для поля ϕ , вообще говоря, не заданы), можно вычислить значение скалярного потенциала $\operatorname{grad} \phi$, и откорректировать магнитное поле:

$$\vec{B} := \vec{B} - \operatorname{grad} \phi.$$

2.4 Результаты расчетов

2.4.1 Одномерная задача о распаде разрыва.

Рассмотрим одномерную задачу о распаде произвольного разрыва. Начальные данные зададим следующим образом:

$$B_x = 4, B_z = 2; \gamma = \frac{5}{3};$$

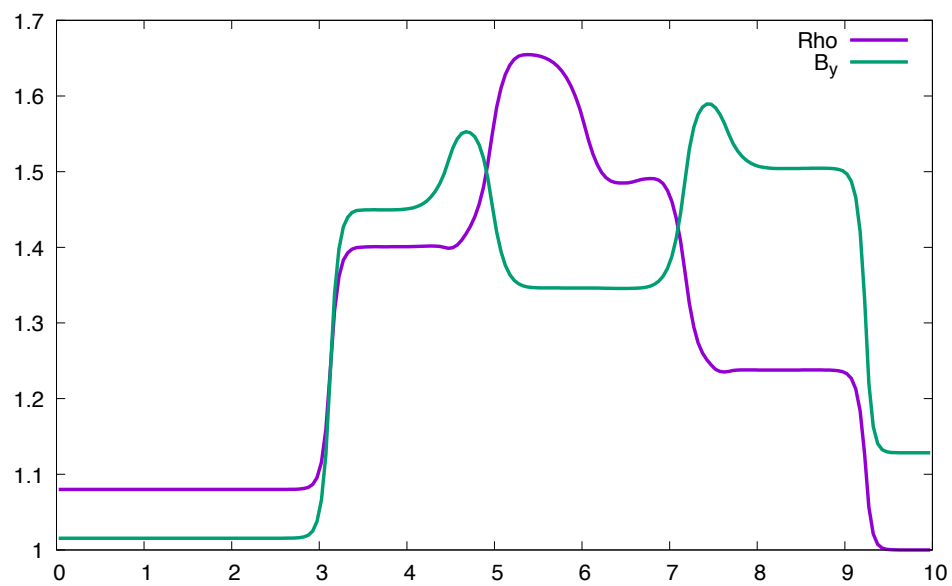
$$\rho = 1.08, p = 0.95, v_x = 1.2, v_y = 0.01, v_z = 0.5, B_y = 3.6, x \leq 5;$$

$$\rho = 1, p = 1, v_x = 0, v_y = 0, v_z = 0, B_x = 4, x > 5;$$

Расчет производится на отрезке $[0, 10]$ со свободными граничными условиями на краях. Ниже приведены результаты расчета разрывным методом Галеркина с двумя базисными функциями при $\tau = 0.001$ на 200 ячейках.

Рис. 2.1: ρ и B_y при $t = 1800\tau$.

(a) Поток LLF.



(b) Поток HLL.

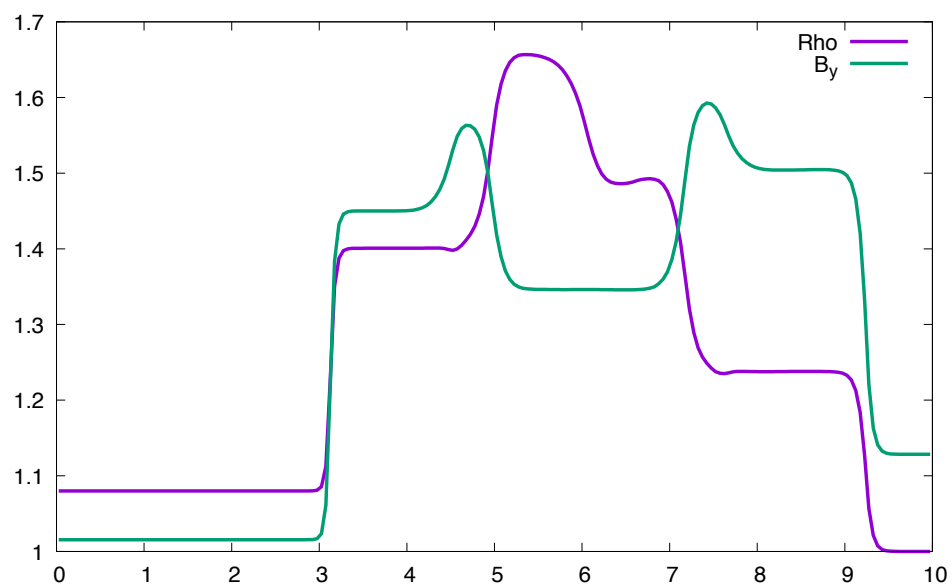
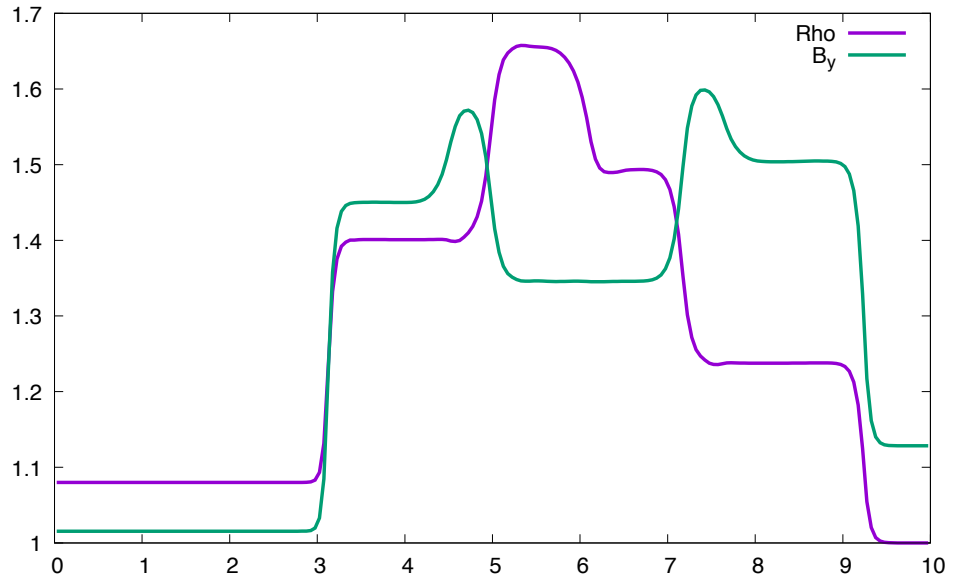
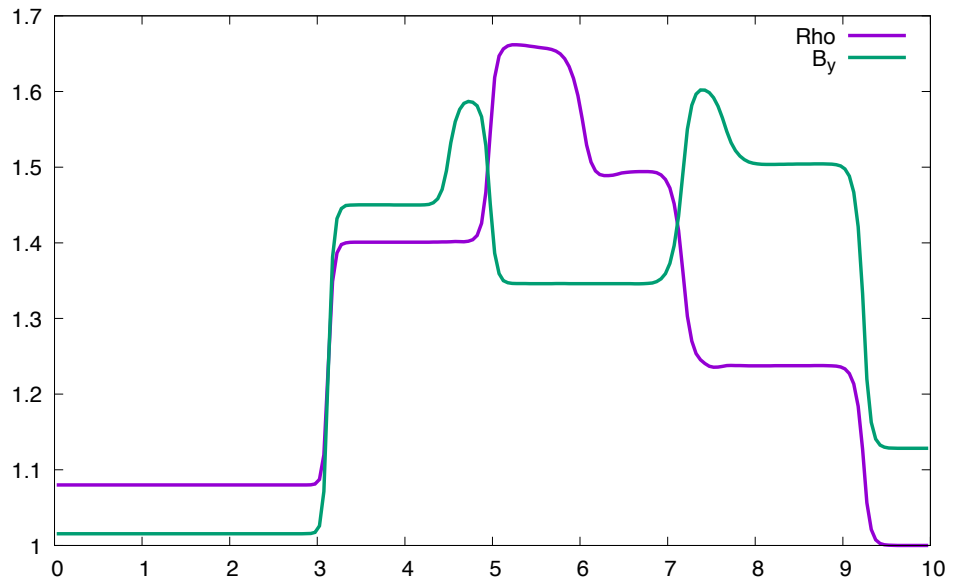


Рис. 2.2: ρ и B_y при $t = 1800\tau$.

(a) Потоки HLLC.



(b) Потоки HLLD.



2.4.2 Вихрь Орзака-Тана.

Вихрь Орзака-Тана (Orszag-Tang Vortex) – один из самых распространенных тестов для МГД-системы. Областью расчета является единичный квадрат со периодическими граничными условиями на всех сторонах. Начальные данные

для этого теста задаются так:

$$\rho = \frac{25}{36\pi}; p = \frac{5}{12\pi}; \gamma = \frac{5}{3};$$

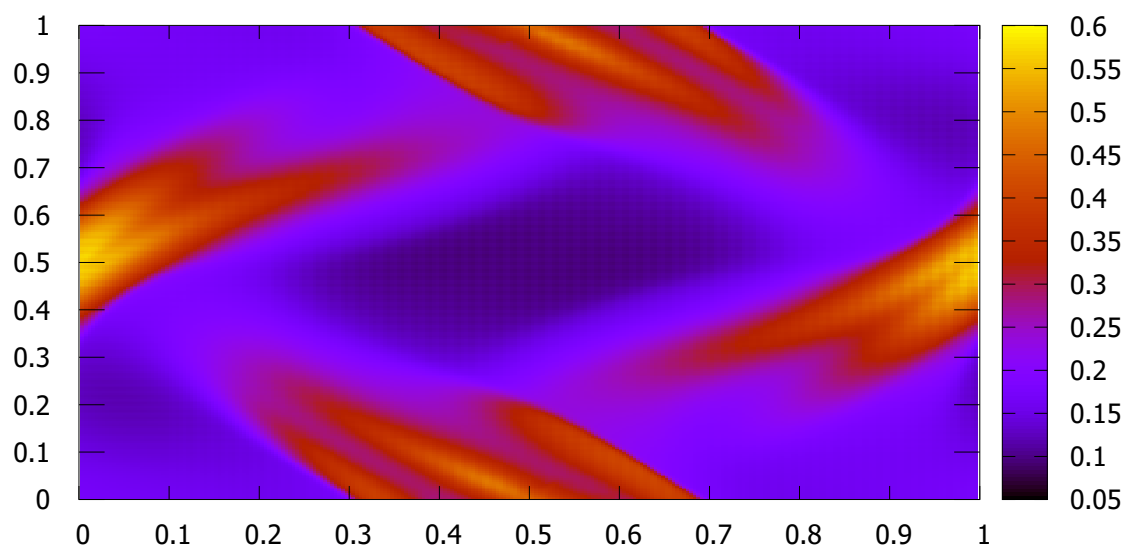
$$v_x = -\sin(2\pi y); v_y = \sin(2\pi x); v_z = 0;$$

$$B_x = -\sin(2\pi y); B_y = \sin(4\pi x); B_z = 0.$$

Ниже приведены результаты расчета методом конечных объемов, при $\tau = 0.001$ на 256 ячейках по каждому измерению с использованием потоков HLLC.

Рис. 2.3: ρ .

(a) $t = 2000\tau$



(b) $t = 4000\tau$

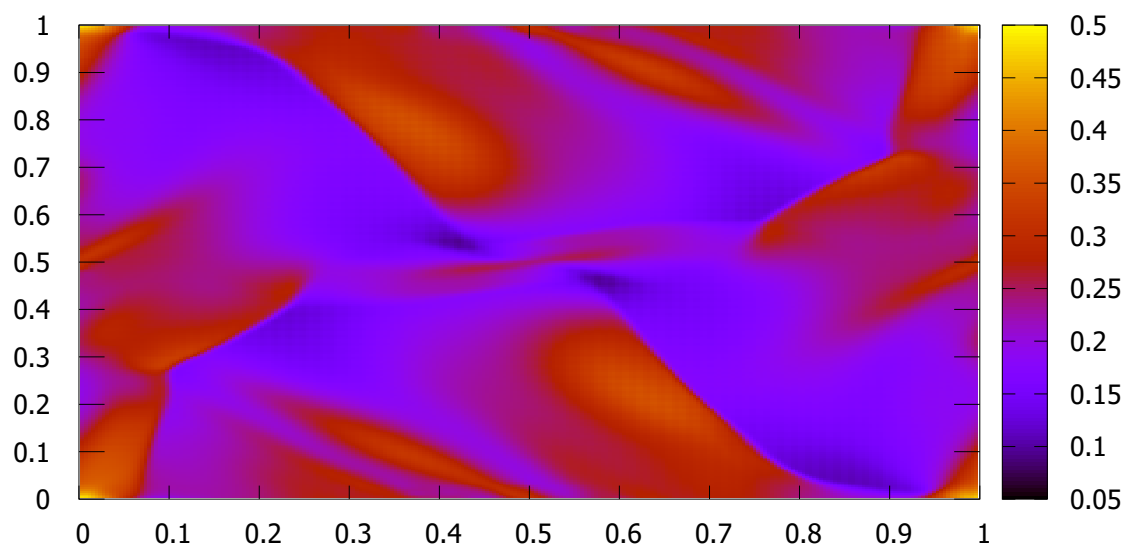
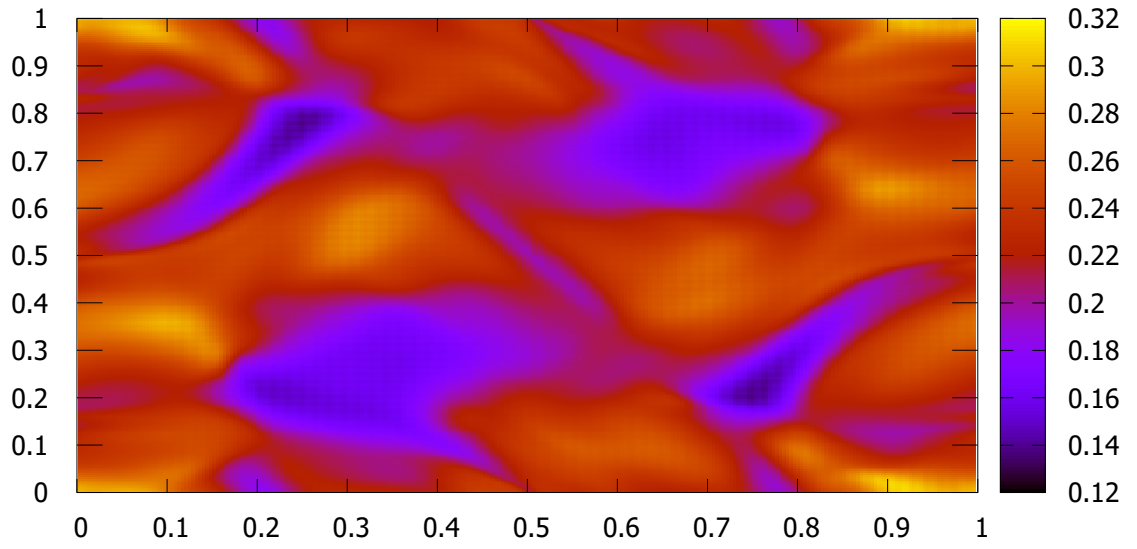
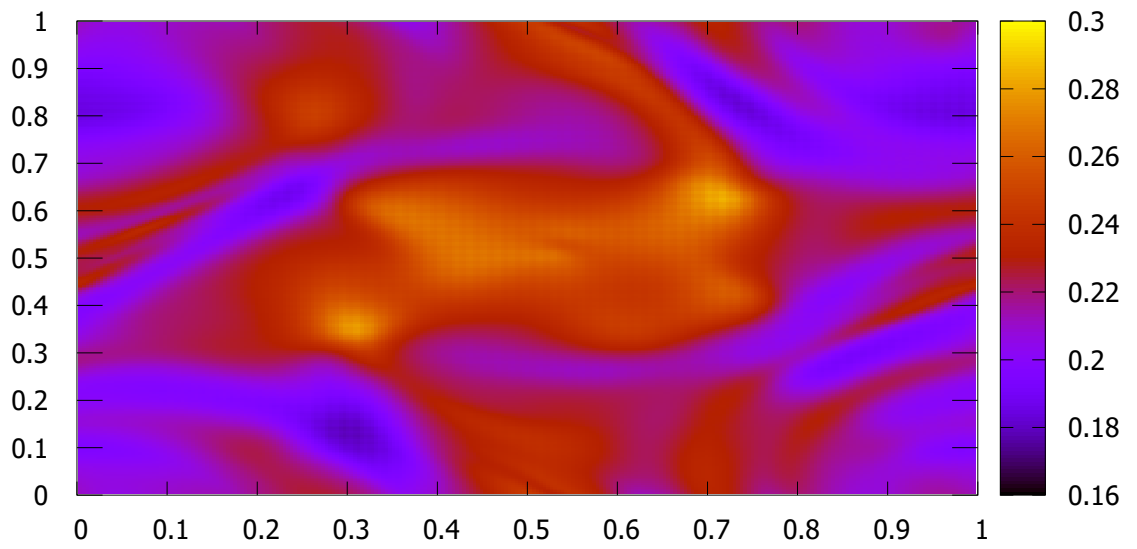


Рис. 2.4: ρ .

(a) $t = 10000\tau$



(b) $t = 20000\tau$



Заключение

В ходе работы были основные свойства системы уравнений магнитной гидродинамики, построены конечно-объемные схемы Годуновского типа и схемы разрывного метода Галеркина повышенного порядка аппроксимации для неструктурированных сеток, проведены тестовые расчеты одномерных в двумерных задач.

Качественно лучшие результаты для задачи о распаде разрыва были получены применением разрывного метода Галеркина с использованием потоков HLLD, а для вихря Орзака-Тана – с использованием потока HLLC, который зарекомендовал себя как наиболее устойчивый при хорошей разрешающей способности для многомерных задач.

Исходный код реализации построенных методов доступен по адресу <https://github.com/Jhuighuy/OrchidSolver>.

Литература

- [1] Zachary Andrew L., Colellaz Phillip. A higher-order godunov method for the equations of ideal magnetohydrodynamics // Journal of Computational Physics. 1992. T. 99, № 2. С. 341 – 347. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290213I>.
- [2] Li Shengtai. An HLLC Riemann solver for magneto-hydrodynamics // Journal of Computational Physics - J COMPUT PHYS. 2005. 02. T. 203. С. 344–357.
- [3] Miyoshi Takahiro, Kusano Kanya. A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics // Journal of Computational Physics. 2005. T. 208, № 1. С. 315 – 344. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999105001142>.