Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Бутаков Олег Борисович

«to be filled by the OEM»

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф-м.н., профессор
С.И. Мухин

Москва, 2019

Оглавление

Введение **3**

1 Система уравнений магнитной гидродинамики. **4**

1.1 Вывод системы уравнений магнитной гидродинамики. 4

1.1.1 Система уравнений Максвелла. 4

1.1.2 Уравнение индукции. 5

1.2 Консервативная форма системы уравнений магнитной гидродинамики. 5

1.3 Основные свойства системы уравнений магнитной гидродинамики. 5

2 Конечно-объемные схемы Годуновского типа для МГД-системы. **6**

2.1 Разностная схема Годуновского типа для гиперболической системы уравнений. 6

2.1.1 Сетка и неизвестные. 6

2.1.2 Конечно-объемная аппроксимация уравнений. 7

2.1.3 Аппроксимация уравнений разрывным методом Галеркина. 8

2.1.4 Выбор базисных функций. 9

2.1.5 Вычисление интегралов. 11

2.1.6 Ограничители. 12

2.2 Приближенное решение задачи Римана. 13

2.2.1 Потоки семейства Куранта-Изаксона-Риса. 13

2.2.2 Потоки семейства Хартена-Лакса-ван Лира. 14

2.3 Особенности применения схем Годуновского типа для системы уравнений магнитной гидродинамики. 15

2.4 Результаты расчетов 16

2.4.1 Одномерная задача о распаде разрыва. 16

2.4.2 Вихрь Орзака-Тана. 18

Заключение **20**

Введение

В данной работе будут рассмотрены основные свойства системы уравнений магнитной гидродинамики, а также наиболее популярные на сегодняшний день способы её численного решения, такие как схемы Годуновсткого типа и разрывный метод Галеркина.

Глава 1

Система уравнений магнитной гидродинамики.

1.1 Вывод системы уравнений магнитной гидродинамики.

1.1.1 Система уравнений Максвелла.

Выпишем систему уравнений Максвелла в гауссовой системе единиц:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\ \vec{E}; \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\ \vec{H} - \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}; \\ \mathrm{div}\ \vec{B} = 0; \\ \mathrm{div}\ \vec{D} = 4\pi\rho. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{B}$ и $\vec{D}$ – магнитная и электрическая индукция соответственно, $\vec{H}$ и $\vec{E}$ – напряженность магнитного и электрического полей, $\vec{j}$ – плотность электрического тока, ρ – объемная плотность сторонних электрических зарядов, c – скорость света в вакууме.

Приведенная система (1.1) содержит 15 неизвестных и 8 уравнений, поэтому она должна быть дополнена материальными уравнениями, связывающими

$\vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{D}$ и $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} &\vec{B} = \mu \vec{H}; \vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \\ &\vec{j} = \sigma \vec{E} + \frac{\sigma}{c}\big[\vec{v} \times \vec{B}\big]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь μ и ε – относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости, σ – удельная проводимость среды, $\vec{v}$ – скорость движения зарядов. Последнее выражением называется законом Ома.

1.1.2 Уравнение индукции.

В дальнейшем будем предполагать, что сторонние электрические заряды отсутствуют: $\rho = 0$. Также ограничимся нерелятивистским случаем: характерная скорость v движения зарядов много меньше скорости света.

Выразим из закона Ома $\vec{E}$ и подставим его первое уравнение системы (1.1):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\left[\frac{1}{\sigma}\vec{j} - \frac{1}{c}\big[\vec{v} \times \vec{B}\big]\right]$$

1.2 Консервативная форма системы уравнений магнитной гидродинамики.

1.3 Основные свойства системы уравнений магнитной гидродинамики.

Глава 2

Конечно-объемные схемы Годуновского типа для МГД-системы.

2.1 Разностная схема Годуновского типа для гиперболической системы уравнений.

2.1.1 Сетка и неизвестные.

Пусть $\mathcal{C}_i$ – множество ячеек (элементов) сетки, $\mathcal{F}_j$ – множество граней ячеек, $\mathcal{E}_l$ – множество ребер всех граней, и, наконец, $\mathcal{N}_k$ – множество узлов расчетных ячеек. В дальнейшем будем использовать индекс i только для обозначения объектов, связанных с расчетными ячейками, j и l – с гранями и ребрами ячеек, k – с узлами сетки.

Введем отображения, описывающие топологию сетки. Так, пусть $\mathcal{J}_i$ и $\mathcal{K}_i$ – множества индексов граней и вершин i-ой ячейки; $\mathcal{L}_j$ и $\mathcal{I}_j$ – множества индексов ребер и смежных ячеек j-ой грани; $\mathcal{K}_l$ и $\mathcal{J}_l$ – множества индексов вершин и смежных граней l-го ребра; $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{L}_k$ – множество индексов ячеек и ребер, содержащих k-ую вершину.

2.1.2 Конечно-объемная аппроксимация уравнений.

Построим конечно-объемную аппроксимацию для произвольной гиперболической системы уравнений, записанной в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) = 0. \tag{2.1}$$

При использовании конечно-объемного метода предполагается, что решение является постоянным в пределах каждой ячейки: $\mathbf{q}(\vec{r}) := \mathbf{q}_i = const, \vec{r} \in \mathcal{C}_i$. Проинтегрируем систему уравнений (2.1) по произвольной ячейке с номером i:

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \Big[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q})\Big] dV = \\
&\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint\limits_{\mathcal{F}_j} \Big(F(\mathbf{q}) \cdot n_{ij}\Big) dS = \\
&\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint\limits_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \Big(\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij}\Big) dS = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\vec{n}_{ij}$ – нормаль j-ой грани, внешняя по отношению к i-ой ячейке, $\vec{n}_j$ – произвольно-ориентированная нормаль j-ой грани, $(\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij}) = \pm 1$; $F_{n,j} = (F(q) \cdot \vec{n}_j)$.

Для реализации расчета по построенной схеме (2.2) требуется вычислить значения потоков $F(q)$ в точках, принадлежащих граням ячеек сетки, однако кусочно-постоянная в ячейках функция решения терпит в этих точках разрывы. Отличительной особенностью методов Годуновского типа является вычисление потоков на границах ячеек путем приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Пусть $F^R_{n,j}(\{q^-, q^+\}, n_j)$ – функция, осуществляющая решение такой задачи относительно плоскости, задаваемой нормалью n_j, в положительной полуплоскости которой газ находится в состоянии q^+, в отрицательной – q^-.

Заменив интегралы по граням ячеек в последнем равенстве выражения (2.2) их приближенным значение по формуле среднего с первым порядком точности, и воспользовавшись введенной функций $F^R_{n,j}(\{q^-, q^+\}, n_j)$, окончательно получим следующую аппроксимацию уравнений (2.1):

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{q}_i}{dt}V_i + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} F^R_{n,j}\Big(\vec{n}_j\cdot\vec{n}_{ij}\Big)S_j = 0;\\ &F^R_{n,j} = F^R_{n,j}(\{\mathbf{q}_{i_1}, i_1\in\mathcal{I}_j\}, n_j).\end{aligned}} \tag{2.3}$$

Заметим, что если j-ая грань является внутренней, множество $\mathcal{I}_j$ содержит в себе ровно два индекса. Здесь нормаль $\vec{n}_j$ совпадает с $\vec{n}_{i_1j}$, где i_1 – первый элемент множества $\mathcal{I}_j$.

2.1.3 Аппроксимация уравнений разрывным методом Галеркина.

Нетрудно заменить, что (2.3) аппроксимируем исходную систему уравнений (2.1) лишь с первым порядком точности, что обусловлено во-первых, кусочно-постоянной формой искомого решения, и, во-вторых, интегрированием потоков по формуле среднего. Для увеличения точности естественно было бы предложить аппроксимировать решение не кусочно-постоянной функций, а, например, кусочно-линейной или кусочно-квадратичной функцией.

Предположим, что решение в пределах каждой ячейки является элементом конечномерного пространства функций с базисом $\{\psi_i^{(m)}\}$. Не ограничивая общности суждений, предположим, что базис является ортогональным с весом ϕ_i, причем выполнено следующее равенство:

$$\Big(\psi_i^{(m)}\cdot\psi_i^{(n)}\Big) = \iiint\limits_{\mathcal{C}_i}\psi_i^{(m)}\psi_i^{(n)}\phi_i dV = \delta_{m,n}V_i. \tag{2.4}$$

Таким образом, решение уравнений (2.1) может быть представлено в виде линейной комбинации элементов нашего конечномерного подпространства: $q_i(t,\vec{r}) = \sum\limits_m q_i^{(m)}(t)\psi_i^{(m)}(\vec{r})$. Подставим эту линейную комбинацию в исходную систему:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) =\\ &\sum_m\frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt}\psi_i^{(m)} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) = 0.\end{aligned}$$

Скалярно умножим последнее равенство на произвольную базисную функцию, и воспользуемся свойством ортогональности и известной формулой вычисления дивергенции произведения скалярного и векторного полей:

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \Big[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathrm{div}\ F(\mathbf{q})\Big]\psi_i^{(m)}\phi_i dV = \\
&\frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt}V_i + \iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \phi_i\psi_i^{(m)}\mathrm{div}\ F(\mathbf{q})dV = \\
&\frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt}V_i + \iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \mathrm{div}\ \Big[\phi_i\psi_i^{(m)}F(\mathbf{q})\Big]dV - \iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \Big(\mathrm{grad}\ \phi_i\psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i)\Big)dV = \\
&\frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt}V_i + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \iint\limits_{\mathcal{F}_j} \Big(F(\mathbf{q}) \cdot \vec{n}_{ij}\Big)\psi_i^{(m)}\phi_i dS - \iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \Big(\mathrm{grad}\ \phi_i\psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i)\Big)dV = \\
&\frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt}V_i + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \Big(\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij}\Big) \iint\limits_{\mathcal{F}_j} F_{n,j}\psi_i^{(m)}\phi_i dS - \iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \Big(\mathrm{grad}\ \phi_i\psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i)\Big)dV = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, аппроксимация (2.5) разрывным методом Галеркина совпадает с конечно-объемной аппроксимацией (2.2), если выбрать базис, состоящий из одной функции $\psi_i^{(0)} \equiv 1$ при $\phi_i \equiv 1$.

2.1.4 Выбор базисных функций.

Аппроксимация (2.5) допускает произвольный выбор базисных функций, удовлетворяющих условию (2.4). На практике широкое распространение получил базис, состоящий из ортогональных полиномов, в частности, масштабированных многочленов Лежандра.

Одномерные базисные функции. Рассмотрим сначала одномерный случай. Поскольку полиномы Лежандра $L_m(x)$ ортогональны на отрезке $[-1, +1]$:

$$\int\limits_{-1}^{1} L_m(x)L_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{m,n},$$

в качестве базиса для ячейки с центром в точке x_i и длиной h_i можно выбрать функции вида:

$$\boxed{\psi_i^{(m)}(x) := \sqrt{\frac{2}{2m+1}} L_m(x - x_i), \phi_i = \frac{2}{h_i}.}$$

Двумерные базисные функции. Обобщим полиномы Лежандра на случай двух пространственных измерений. Определив $P_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} L_m(\xi)$, построим функции $P_m(x, y)$, ортонормированные на квадрате $\mathcal{C}_0 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ следующим образом:

$$P_0 = P_0(x)P_0(y),$$
$$P_1 = P_1(x)P_0(y), P_2 = P_0(x)P_1(y),$$
$$P_3 = P_2(x)P_0(y), P_4 = P_1(x)P_1(y), P_5 = P_0(x)P_2(y),$$
$$P_6 = P_3(x)P_0(y), P_7 = P_2(x)P_1(y), P_8 = P_1(x)P_2(y), P_9 = P_0(x)P_3(y),$$
$$\ldots$$

Для простоты предположим, что ячейка является выпуклым четырехугольником с вершинами $\left\{\mathcal{N}_{k_n}, k_n \in \mathcal{K}_i\right\}$, пронумерованными против часовой стрелки. Эта область является взаимно-однозначным отображением квадрата $\mathcal{C}_0$, осуществляемым с помощью узловых функций N_{k_n}:

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \sum_{k_n} \vec{r}_{k_n} N_{k_n}(\xi, \eta); \exists \xi(x, y), \eta(x, y);$$
$$N_{k_1}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), N_{k_2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta),$$
$$N_{k_3}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), N_{k_4}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).$$

Положим $\psi_i^{(m)}(x, y) := P_m(\xi(x, y), \eta(x, y))$ и определим скалярное произведение базисных функций:

$$\left(\psi_i^{(m)}(x, y) \cdot \psi_i^{(n)}(x, y)\right) = \iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \psi_i^{(m)}(x, y)\psi_i^{(n)}(x, y)\phi_i(x, y)dV =$$
$$= \iiint\limits_{\mathcal{C}_0} P_m(\xi, \eta)P_n(\xi, \eta)\phi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right|dV_0 = \delta_{m,n}V_i \Leftrightarrow$$
$$\phi_i(x, y) := V_i\left|\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right|.$$

Трехмерные базисные функции. В трехмерном случае построение базисных функций осуществляется аналогично: пусть $P_m(x,y,z)$ – полиномы, состоящие из произведения полиномов первой степени упорядоченными в виде пирамиды. Также, пусть ячейки сетки представляю собой выпуклые фигуры с шестью четырехугольными гранями. Тогда будут существовать отображения $x(\xi,\eta,\zeta)$, $y(\xi,\eta,\zeta)$, $z(\xi,\eta,\zeta)$ и $\xi(x,y,z)$, $\eta(x,y,z)$, $\zeta(x,y,z)$. В качестве базисных функций выберем $\psi_i^{(m)}(x,y,z) := P_m(\xi(x,y,z),\eta(x,y,z),\zeta(x,y,z))$, а весовую функцию положим равной $\phi_i(x,y,z) := V_i\left|\dfrac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right|$.

2.1.5 Вычисление интегралов.

Вычисление потоков. Вычислим интегралы, входящие в выражение (2.5). Начнем с поверхностных интегралов вида:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_j} F_{n,j}\psi_i^{(m)}\phi_i dS.$$

Поскольку мы предположили, что наши ячейки являются отображением куба $\mathcal{C}_0 = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$, то грань $\mathcal{F}_j$ является одной из граней куба $\mathcal{C}_0$. Не ограничивая общности, предположим, что это грань $\mathcal{F}_0 = [-1,1]\times[-1,1]\times\{1\}$, то есть $x = x(\xi,\eta,1), y = y(\xi,\eta,1), z = z(\xi,\eta,1)$. Следовательно, перейдя к переменным ξ,η интеграл можно упросить:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_j} F_{n,j}\psi_i^{(m)}\phi_i dS = V_i\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} F_{n_j,ij}(\xi,\eta,1)P_m(\xi,\eta,1)d\xi d\eta.$$

Воспользуемся квадратурной формулой с узлами x_n весами w_n, например, квадратурой Гаусса, и функцией приближенного решения задачи Римана:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_j} F_{n,j}\psi_i^{(m)}\phi_i dS \approxeq V_i\sum_{n_1}\sum_{n_2} w_{n_1}w_{n_2}F^R_{n,j}(\xi_{n_1},\eta_{n_2},1)P_m(\xi_{n_1},\eta_{n_2},1);$$

$$F^R_{n,j}(\xi_{n_1},\eta_{n_2},1) = F^R_{n,j}\Big(\Big\{\sum_m q_{i_1}^{(m)}P_m(\xi_{n_1},\eta_{n_2},1), i_1\in\mathcal{I}_j\Big\}, n_j\Big).$$

Таким образом, предварительно рассчитав значения функций P_m в точках на гранях реперного куба $\mathcal{C}_0$, можно вычислить значения решения, а значит и $F^R_{n,j}$.

2.1.6 Ограничители.

В случае, если количество базисных функций отлично от единицы, разрывный метод Галеркина формально можно считать методом высокого порядка аппроксимации. Как следствие этого, использование метода без специальных ограничителей невозможно: в силу теоремы Годунова метод не является монотонным.

Опишем общую процедуру построения ограничителя на примере метода, использующего кусочно-линейные или кусочно-квадратичные базисные функции.

1. Вычислим сначала осредненные по ячейкам значения решения.:

   $$\mathbf{q}_i^{avg} := \iiint\limits_{\mathcal{C}_i} \mathbf{q}_i dV,$$

2. Приближенно вычислим градиенты решения grad q_j^{avg} на ребрах. Если сетка является ортогональной, то есть такой, что для любых двух соседних ячеек $\mathcal{C}_{i_1}$, $\mathcal{C}_{i_2}$ прямая, соединяющая их центры, перпендикулярна их общей грани $\mathcal{F}_j$ с нормалью $\vec{n}_{i_1 j}$, то градиенты могут быть вычислены, например, как

   $$\text{grad } \mathbf{q}_j^{avg} := \frac{\mathbf{q}_{i_2} - \mathbf{q}_{i_1}}{||\vec{r}_{i_2} - \vec{r}_{i_1}||} \vec{n}_{i_1 j}.$$

   В случае кусочно-квадратичного базиса необходимо также вычислить и гессианы осредненного решения в ячейках:

   $$\text{hess } \mathbf{q}_i^{avg} := \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint\limits_{\mathcal{F}_j} \Big(\text{grad } \mathbf{q}_j^{avg} \otimes \vec{n}_{ij} \Big) dS.$$

3. Вычислим ограниченные значения градиентов в ячейках. Одним из самых простых способов вычисления является ограничение функцией minmod:

   $$\text{grad } \mathbf{q}_i^{lim} := \text{minmod}\Big(\text{grad } \mathbf{q}_i, \text{grad } \mathbf{q}_{j_1}^{avg}, ..., \text{grad } \mathbf{q}_{j_N}^{avg} \Big), j_n \in \mathcal{J}_i;$$

   $$\text{minmod}\Big(a_0, a_1, ... a_N\Big) := \Big\lfloor \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \text{sgn}(a_n) \Big\rfloor \min \Big\{ |a_0|, |a_1|, ..., |a_N| \Big\}.$$

   Аналогично можно ограничить и гессианы hess q_i^{lim}, используя гессиан решения в текущей ячейки и вычисленные значения hess q_i^{avg} в соседних ячейках.

4. Теперь ограниченное решение может быть представлено через разложения в ряд Тейлора:

$$\mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) = \mathbf{q}_i^{avg} + \Big(\text{grad } \mathbf{q}_i^{lim} \cdot \vec{r}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\text{hess } \mathbf{q}_i^{lim}\vec{r} \cdot \vec{r}\Big).$$

   Осталось лишь найти коэффициенты разложения по базисным функциям:

$$\mathbf{q}_i^{lim} = \sum_m \mathbf{q}_i^{(m),lim}\psi_i^{(m)} \Rightarrow \Big(\mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) \cdot \psi_i^{(m)}\Big) = \mathbf{q}_i^{(m),lim} V_i \Rightarrow$$
$$\mathbf{q}_i^{(m),lim} := \frac{1}{V_i}\Big(\mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) \cdot \psi_i^{(m)}\Big).$$

2.2 Приближенное решение задачи Римана.

Рассмотрим два семейства алгоритмов, осуществляющих приближенное нахождение решения задачи Римана.

2.2.1 Потоки семейства Куранта-Изаксона-Риса.

В схемах семейства Куранта-Изаксона-Риса (КИР) для вычисления потоков используется следующая формула:

$$F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) = \frac{1}{2}\Big(F_n(\mathbf{q}^+) + F_n(\mathbf{q}^-)\Big) + \frac{1}{2}\big|A_n\big|\Big(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-\Big);$$
$$\big|A_n\big| = \Omega_{R,n}\big|\Lambda_n\big|\Omega_{L,n}, A_n = \frac{\partial F_n}{\partial \mathbf{q}} = \Omega_{R,n}\Lambda_n\Omega_{L,n},$$

Поскольку исходная система является нелинейной, конкретная реализация схемы данного семейства зависит от выбора линеаризации якобиана.

Поток Русанова (Локальный поток Лакса-Фридрихса). Потоки LLF являются, пожалуй, простейшими потоками не только семейства КИР, но и вообще как таковыми. Линеаризация производится путем замены якобиана на модуль максимального собственного значения. Окончательная формула потоков LLF будет выглядеть следующим образом:

$$F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) = \frac{1}{2}\Big(F_n(\mathbf{q}^+) + F_n(\mathbf{q}^-)\Big) + \frac{1}{2}\big|\lambda_n\big|\Big(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-\Big);$$
$$\big|\lambda_n\big| = max\Big\{\big|v_n^+\big| + c_f^+, \big|v_n^-\big| + c_f^-\Big\}.$$

Поток Роу. Потоки Роу используют линеаризацию якобиана $\hat{A}_n$ в некоторой промежуточной точке $\hat{\mathbf{q}}$:

$$\hat{\rho} = \sqrt{\rho^+\rho^-}; \hat{H}_* = \frac{\sqrt{\rho^+}H_*^+ + \sqrt{\rho^-}H_*^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}};$$
$$\hat{\vec{v}} = \frac{\sqrt{\rho^+}\vec{v}^+ + \sqrt{\rho^-}\vec{v}^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}; \hat{\vec{B}} = \frac{\sqrt{\rho^+}\vec{B}^+ + \sqrt{\rho^-}\vec{B}^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}.$$

Нетрудно заметить, что при такой линеаризации будет выполнено следующий свойства:

$$F_n(\mathbf{q}^+) - F_n(\mathbf{q}^-) = \hat{A}_n(\hat{\mathbf{q}}_n)\Big(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-\Big); A_n(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n) = \hat{A}_n(\hat{\mathbf{q}}_n).$$

Существенным недостатком приведенного метода является вычислительная сложность: необходимо вычислить матрицы правых и левых собственных векторов $\Omega_{R,n}, \Omega_{L,n}$.

В работе [123] предлагается достаточно компактные выражения собственных векторов якобиана системы уравнений магнитной гидродинамики в альтернативном базисе (для одномерного случая):

$$\mathbf{w} = \left[\frac{1}{\rho}, v_x, v_y, v_z, B_y, B_z, p\right];$$
$$A_n = \Omega_{R,n}\Lambda_n\Omega_{L,n}; \Omega_{R,n} = \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{w}}\Omega_{R,n}^w; \Omega_{L,n} = \Omega_{L,n}^w\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{q}};$$
$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial F_n}{\partial\mathbf{w}} = \Omega_{R,n}^w\Lambda_n\Omega_{L,n}^w.$$

Конкретные выражения для $\Omega_{R,n}^w$, $\Omega_{L,n}^w$ приводятся в статье.

2.2.2 Потоки семейства Хартена-Лакса-ван Лира.

Потоки семейства Хартена-Лакса-ван Лира (HLL) вычисляют значение на основе характеристической плоскости. Пусть s^+, s^- – скорости распространения возмущения. Тогда значения потоков могут быть вычислены следующим образом:

$$F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) = \begin{cases} F_n(\mathbf{q}^+), s^+ < 0, \\ F_n(\mathbf{q}^-), s^- > 0, \\ \dfrac{s^+F_n(\mathbf{q}^-) - s^-F_n(\mathbf{q}^+) + s^+s^-\big(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-\big)}{s^+ - s^-}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Вычислить s^+, s^- можно, например, так:

$$s^{\pm} = \max\{v_n^+ \pm c_f^+, v_n^- \pm c_f^-\}.$$

В работах [123], [456] приводится различные вариации обобщения потока HLLC, точно разрешающего контактные разрывы, на случай магнитной гидродинамики. Также в работе [456] приводится поток HLLD, разрешающий и альфвеновские волны.

2.3 Особенности применения схем Годуновского типа для системы уравнений магнитной гидродинамики.

Ни одна из построенных схем не гарантирует соленоидальности магнитного поля в многомерном случае, то есть

$$\mathrm{div}\ \vec{B} \neq 0.$$

Для коррекции магнитного поля применим проекционный метод, позаимствованный из численных методов решения системы уравнений вязкой несжимаемой жидкости. По теореме Гельмгольца, магнитное поле может быть представлено как сумма скалярного и векторного потенциалов:

$$\vec{B} = \mathrm{grad}\ \phi + \mathrm{rot}\ \vec{\psi}; \mathrm{div}\ \vec{B} = \triangle\phi \neq 0.$$

Таким образом, численно решив уравнение Пуассона $\mathrm{div}\ \vec{B} = \triangle\phi$ (граничные условия для поля ϕ, вообще говоря, не заданы), можно вычислить значение скалярного потенциала $\mathrm{grad}\ \phi$, и откорректировать магнитное поле:

$$\vec{B} := \vec{B} - \mathrm{grad}\ \phi.$$

2.4 Результаты расчетов

2.4.1 Одномерная задача о распаде разрыва.

Рассмотрим одномерную задачу о распаде произвольного разрыва. Начальные данные зададим следующим образом:

$$B_x = 4, B_z = 2; \gamma = \frac{5}{3};$$

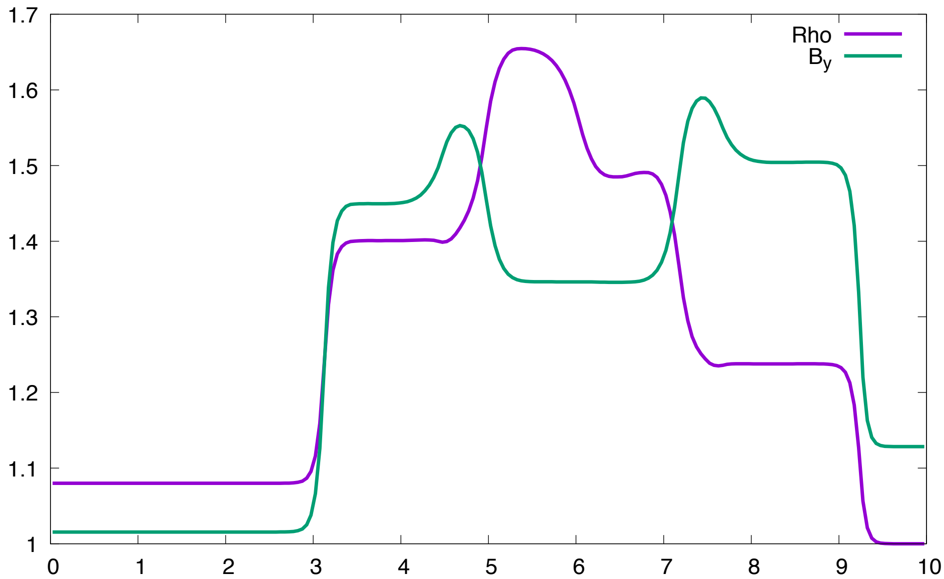
$$\rho = 1.08, p = 0.95, v_x = 1.2, v_y = 0.01, v_z = 0.5, B_y = 3.6, x \leq 5;$$

$$\rho = 1, p = 1, v_x = 0, v_y = 0, v_z = 0, B_x = 4, x > 5;$$

Расчет производится на отрезке $[0, 10]$ со свободными граничными условиями на краях. Ниже приведены результаты расчета разрывным методом Галеркина с двумя базисными функциями при $\tau = 0.001$ на 200 ячейках.

Рис. 2.1: ρ и B_y при $t = 1800\tau$.

(a) Поток LLF.



(b) Поток HLL.

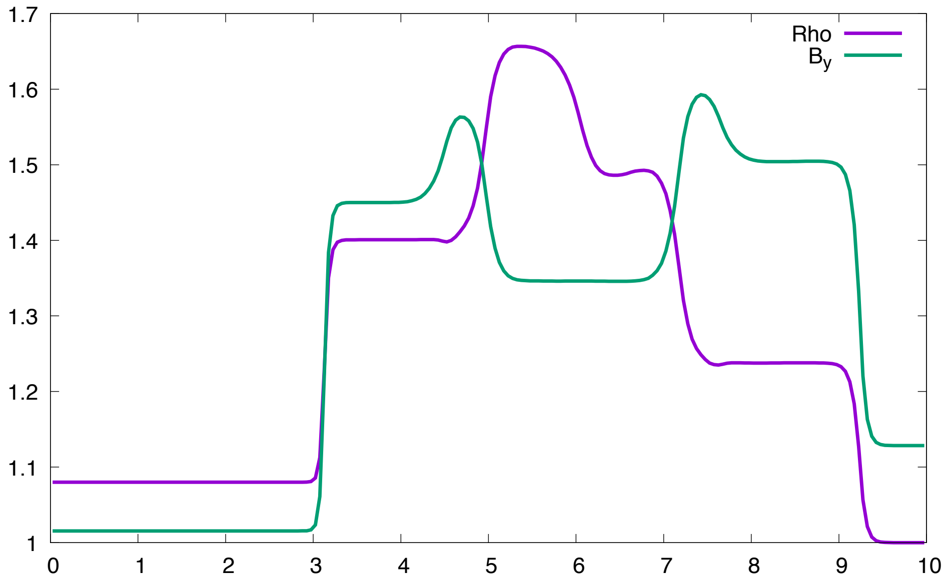
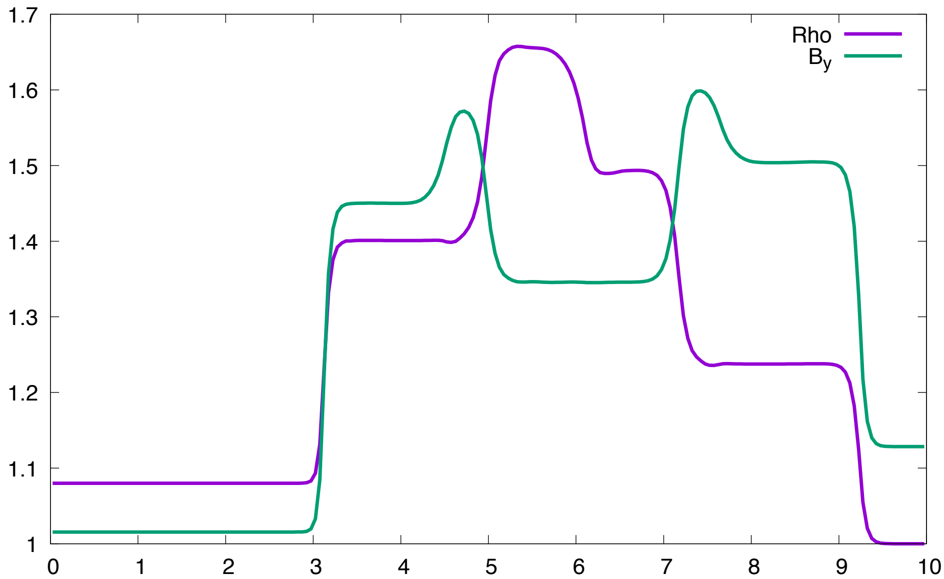
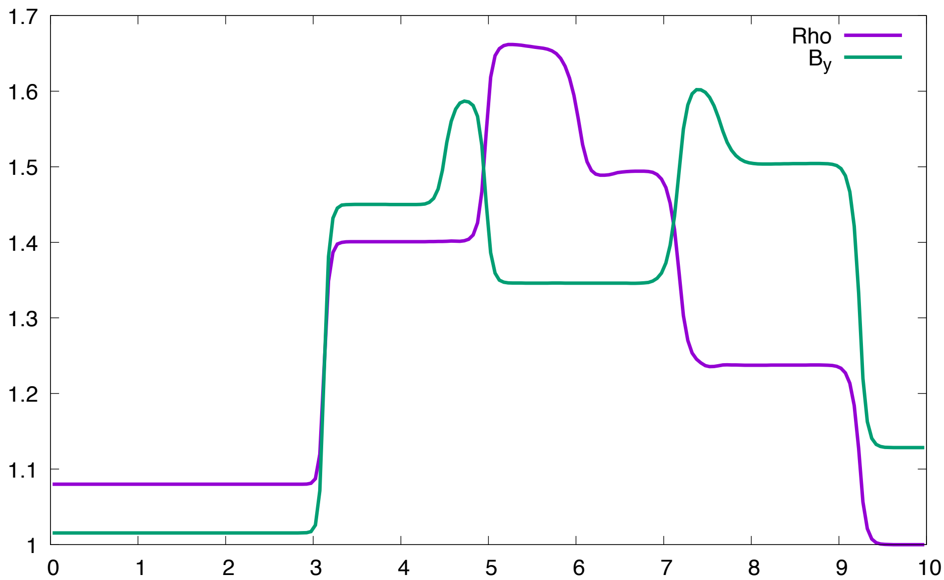


Рис. 2.2: ρ и B_y при $t = 1800\tau$.

(a) Потоки HLLC.



(b) Потоки HLLD.



2.4.2 Вихрь Орзака-Тана.

Вихрь Орзака-Тана (Orszag-Tang Vortex) – один из самых распространенных тестов для МГД-системы. Областью расчета является единичный квадрат со периодическими граничными условиями на всех сторонах. Начальные данные для этого теста задаются так:

$$\rho = \frac{25}{36\pi}; p = \frac{5}{12\pi}; \gamma = \frac{5}{3};$$
$$v_x = -\sin(2\pi y); v_y = \sin(2\pi x); v_z = 0;$$
$$B_x = -\sin(2\pi y); B_y = \sin(4\pi x); B_z = 0.$$

Ниже приведены результаты расчета методом конечных объемов, при $\tau = 0.001$ на 256 ячейках по каждому измерению с использованием потоков HLLC.

Заключение

В ходе работы были рассмотрены вывод и свойства системы уравнений магнитной гидродинамики, построены конечно-объемные схемы Годуновского типа и схемы разрывного метода Галеркина повышенного порядка аппроксимации для неструктурированных сеток, проведены тестовые расчеты одномерных в двумерных задач.

Качественно лучшие результаты для задачи о распаде разрыва были получены применением разрывного метода Галеркина с использованием потоков HLLD, а для вихря Орзака-Тана – с использованием потока HLLC, который зарекомендовал себя как наиболее устойчивый при хорошей разрешающей способности для многомерных задач.