



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра вычислительных методов

Бутаков Олег Борисович

«to be filled by the OEM»

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**

д.ф-м.н., профессор

С.И. Мухин

Москва, 2019

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Система уравнений магнитной гидродинамики.</b>	<b>4</b>
1.1 Система уравнений магнитной гидродинамики. . . . .	4
1.2 Консервативная форма идеальной МГД-системы. . . . .	5
1.3 Характеристические свойства идеальной МГД-системы. . . . .	6
<b>2 Конечно-объемные схемы Годуновского типа для МГД-системы.</b>	<b>8</b>
2.1 Разностная схема Годуновского типа для гиперболической систе- мы уравнений. . . . .	8
2.1.1 Сетка и неизвестные. . . . .	8
2.1.2 Конечно-объемная аппроксимация уравнений. . . . .	9
2.1.3 Аппроксимация уравнений разрывным методом Галеркина. . . . .	10
2.1.4 Выбор базисных функций. . . . .	11
2.1.5 Вычисление интегралов. . . . .	13
2.1.6 Ограничители. . . . .	14
2.2 Приближенное решение задачи Римана. . . . .	15
2.2.1 Потоки семейства Куранта-Изаксона-Риса. . . . .	15
2.2.2 Потоки семейства Хартена-Лакса-ван Лира. . . . .	16
2.3 Особенности применения схем Годуновского типа для системы уравнений магнитной гидродинамики. . . . .	17
2.4 Результаты расчетов . . . . .	18
2.4.1 Одномерная задача о распаде разрыва. . . . .	18

2.4.2	Вихрь Орзака-Тана. . . . .	20
	<b>Заключение</b>	<b>24</b>
	<b>Литература</b>	<b>25</b>

# Введение

В данной работе рассматриваются основные свойства системы уравнений магнитной гидродинамики, а также наиболее популярные на сегодняшний день способы её численного решения: такие как схемы Годуновского типа и разрывный метод Галеркина.

# Глава 1

## Система уравнений магнитной гидродинамики.

### 1.1 Система уравнений магнитной гидродинамики.

Система уравнений магнитной гидродинамики (1.1) описывает течение вязкой проводящей жидкости или газа.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0; \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} [\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}] &= \eta \Delta \vec{v}; \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) E + \operatorname{div} [p \vec{v} + \vec{W}] + \frac{1}{4\pi} (\vec{v} \cdot [\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}]) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] &= -\frac{1}{\sigma} \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}; \\ (\nabla \cdot \vec{B}) &= 0; \\ p = p(\rho, \varepsilon); E = \varepsilon + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}; \vec{W} = \vec{W}(\varepsilon, \operatorname{grad} \varepsilon).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь:  $\rho$  – плотность,  $\vec{v}$  – скорость,  $p$  – давление;  $E$  – полная удельная энергия;  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции;  $\eta$  – вязкость среды,  $\sigma$  – проводимость среды;  $c$  – скорость света в вакууме.

Система уравнений содержит восемь неизвестных – плотность  $\rho$ , компоненты скорости  $\vec{v}$ , удельная внутренняя энергия  $\varepsilon$  и компоненты вектора магнит-

ной индукции  $\vec{B}$  и состоит из девяти уравнений (не учитывая уравнения состояния): закона сохранения массы, импульса, энергии, уравнения индукции и закона Гаусса для магнитного поля.

Заметим, что вычислив дивергенцию уравнения индукции, мы получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0,$$

то есть, если закон Гаусса выполняется для начальных данных, то он будет выполняться и впоследствии.

## 1.2 Консервативная форма идеальной МГД-системы.

В данном пункте будем рассматривать консервативный вид идеальной МГД-системы, то есть будем считать коэффициенты  $\eta$ ,  $\sigma$  и тепловой поток  $\vec{W}$  равными нулю.

Получим дивергентный вид закона сохранения импульса. Для этого сложим его с умноженным на плотность уравнением неразрывности, равной нулю величиной  $\frac{1}{4\pi}\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B})$  и воспользуемся известными формулами векторного анализа  $[\vec{B} \times \text{rot } \vec{B}] = \frac{1}{2}\text{grad } (\vec{B} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}$ ,  $\text{div } (\vec{v} \otimes \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v}\text{div } \vec{v}$ :

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \otimes \vec{B} \right] + \text{grad} \left[ p + \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2} \right] = 0.$$

Назовем  $p_* := p + \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2}$  полным давлением. Тогда последнее уравнение примет свой окончательный вид:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \otimes \vec{B} + p_* I \right] = 0.$$

Аналогично можно получить и дивергентный вид закона сохранения энергии:

$$\frac{\partial \rho E_*}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho H_* \vec{v} - (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{B} \right] = 0.$$

Здесь  $E_* := E + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2}$  — полная удельная энергия, а  $H_* := E_* + \frac{p_*}{\rho}$  — полная удельная энтальпия.

Теперь получим консервативную форму уравнения индукции. Воспользуемся другим известным соотношением векторного анализа

$$\operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] = \operatorname{div} [\vec{B} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{B}]:$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{div} [\vec{v} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{v}] = 0.$$

Определим вектор консервативных неизвестных  $\mathbf{q}$  и функция потока  $F(\mathbf{q})$ :

$$\mathbf{q} := [\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E_*, B_x, B_y, B_z] \in \mathbb{R}^{1 \times 8};$$

$$F(\mathbf{q}) := \left[ \rho \vec{v}, \right. \\ \left. \rho v_x \vec{v} - B_x \vec{B} + p_* \vec{e}_x, \rho v_y \vec{v} - B_y \vec{B} + p_* \vec{e}_y, \rho v_z \vec{v} - B_z \vec{B} + p_* \vec{e}_z, \right. \\ \left. \rho H_* \vec{v} - (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{B}, \right. \\ \left. \frac{1}{4\pi} (B_x \vec{v} - v_x \vec{B}), \frac{1}{4\pi} (B_y \vec{v} - v_y \vec{B}), \frac{1}{4\pi} (B_z \vec{v} - v_z \vec{B}) \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 8}.$$

В этих обозначениях систему (1.1) при  $\eta = \sigma = 0$ ,  $\vec{W} = 0$  можно записать в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) = 0.$$

### 1.3 Характеристические свойства идеальной МГД-системы.

Идеальная МГД-система является гиперболической, так как якобиан  $\frac{\partial F_x(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  имеет семь действительных собственных значений (как и  $\frac{\partial F_y(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial F_z(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ ):

$$\lambda_1 = v_x - c_f; \lambda_7 = v_x + c_f;$$

$$\lambda_2 = v_x - c_a; \lambda_6 = v_x + c_a;$$

$$\lambda_3 = v_x - c_s; \lambda_5 = v_x + c_s;$$

$$\lambda_4 = v_x.$$

$\lambda_1$  и  $\lambda_7$  соответствуют быстрым ударным волнам,  $\lambda_2$  и  $\lambda_6$  соответствуют альфвеновским волнам,  $\lambda_3$  и  $\lambda_5$  соответствуют медленным ударным волнам, а  $\lambda_4$  — энтропийной волне.

Пусть  $c_0^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$  – скорость звука,  $c_{a,x}^2 = \frac{B_x^2}{4\pi\rho}$ ,  $c_a^2 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{4\pi\rho}$  – альфвеновские скорости. Тогда быстрым и медленным скоростям ударных магнитных волн соответствуют следующие значения:

$$c_f^2 = \frac{1}{2}(c_0^2 + c_a^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(c_0^2 + c_a^2)^2 - 4c_0^2c_{a,x}^2};$$

$$c_s^2 = \frac{1}{2}(c_0^2 + c_a^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(c_0^2 + c_a^2)^2 - 4c_0^2c_{a,x}^2}.$$



## Глава 2

# Конечно-объемные схемы Годуновского типа для МГД-системы.

### 2.1 Разностная схема Годуновского типа для гиперболической системы уравнений.

#### 2.1.1 Сетка и неизвестные.

Пусть  $\mathcal{C}_i$  – множество ячеек (элементов) сетки,  $\mathcal{F}_j$  – множество граней ячеек,  $\mathcal{E}_l$  – множество ребер всех граней, и, наконец,  $\mathcal{N}_k$  – множество узлов расчетных ячеек. В дальнейшем будем использовать индекс  $i$  только для обозначения объектов, связанных с расчетными ячейками,  $j$  и  $l$  – с гранями и ребрами ячеек,  $k$  – с узлами сетки.

Введем отображения, описывающие топологию сетки. Так, пусть  $\mathcal{J}_i$  и  $\mathcal{K}_i$  – множества индексов граней и вершин  $i$ -ой ячейки;  $\mathcal{L}_j$  и  $\mathcal{I}_j$  – множества индексов ребер и смежных ячеек  $j$ -ой грани;  $\mathcal{K}_l$  и  $\mathcal{J}_l$  – множества индексов вершин и смежных граней  $l$ -го ребра;  $\mathcal{I}_k$  и  $\mathcal{L}_k$  – множества индексов ячеек и ребер, содержащих  $k$ -ую вершину.

## 2.1.2 Конечно-объемная аппроксимация уравнений.

Построим конечно-объемную аппроксимацию для произвольной гиперболической системы уравнений, записанной в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) = 0. \quad (2.1)$$

При использовании конечно-объемного метода предполагается, что решение является постоянным в пределах каждой ячейки:  $\mathbf{q}(\vec{r}) := \mathbf{q}_i = \text{const}, \vec{r} \in \mathcal{C}_i$ . Проинтегрируем систему уравнений (2.1) по произвольной ячейке с номером  $i$ :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{C}_i} \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) \right] dV = \\ & \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} \left( F(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) dS = \\ & \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \left( \vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij} \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\vec{n}_{ij}$  – нормаль  $j$ -ой грани, внешняя по отношению к  $i$ -ой ячейке,  $\vec{n}_j$  – произвольно-ориентированная нормаль  $j$ -ой грани,  $(\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij}) = \pm 1$ ;  $F_{n,j} = (F(q) \cdot \vec{n}_j)$ .

Для реализации расчета по построенной схеме (2.2) требуется вычислить значения потоков  $F(q)$  в точках, принадлежащих граням ячеек сетки, однако кусочно-постоянная в ячейках функция решения терпит в этих точках разрывы. Отличительной особенностью методов Годуновского типа является вычисление потоков на границах ячеек путем приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Пусть  $F_{n,j}^R(\{q^-, q^+\}, n_j)$  – функция, осуществляющая решение такой задачи относительно плоскости, задаваемой нормалью  $n_j$ , в положительной полуплоскости которой газ находится в состоянии  $q^+$ , в отрицательной –  $q^-$ .

Заменив интегралы по граням ячеек в последнем равенстве выражения (2.2) их приближенным значением по формуле среднего с первым порядком точности, и воспользовавшись введенной функцией  $F_{n,j}^R(\{q^-, q^+\}, n_j)$ , окончательно полу-

чим следующую аппроксимацию уравнений (2.1):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} F_{n,j}^R (\vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij}) S_j &= 0; \\ F_{n,j}^R &= F_{n,j}^R(\{\mathbf{q}_{i_1}, i_1 \in \mathcal{I}_j\}, n_j). \end{aligned}} \quad (2.3)$$

Заметим, что если  $j$ -ая грань является внутренней, множество  $\mathcal{I}_j$  содержит в себе ровно два индекса. Здесь нормаль  $\vec{n}_j$  совпадает с  $\vec{n}_{i_1 j}$ , где  $i_1$  – первый элемент множества  $\mathcal{I}_j$ .

### 2.1.3 Аппроксимация уравнений разрывным методом Галеркина.

Нетрудно заметить, что (2.3) аппроксимируем исходную систему уравнений (2.1) лишь с первым порядком точности, что обусловлено во-первых, кусочно-постоянной формой искомого решения, и, во-вторых, интегрированием потоков по формуле среднего. Для увеличения точности естественно было бы предложить аппроксимировать решение не кусочно-постоянной функцией, а, например, кусочно-линейной или кусочно-квадратичной функцией.

Предположим, что решение в пределах каждой ячейки является элементом конечномерного пространства функций с базисом  $\{\psi_i^{(m)}\}$ . Не ограничивая общности суждений, предположим, что базис является ортогональным с весом  $\phi_i$ , причем выполнено следующее равенство:

$$\left( \psi_i^{(m)} \cdot \psi_i^{(n)} \right) = \iiint_{\mathcal{C}_i} \psi_i^{(m)} \psi_i^{(n)} \phi_i dV = \delta_{m,n} V_i. \quad (2.4)$$

Таким образом, решение уравнений (2.1) может быть представлено в виде линейной комбинации элементов нашего конечномерного подпространства:  $q_i(t, \vec{r}) = \sum_m q_i^{(m)}(t) \psi_i^{(m)}(\vec{r})$ . Подставим эту линейную комбинацию в исходную систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) &= \\ \sum_m \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} \psi_i^{(m)} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) &= 0. \end{aligned}$$

Скалярно умножим последнее равенство на произвольную базисную функцию, воспользуемся свойством ортогональности и известной формулой вычисления дивергенции произведения скалярного и векторного полей:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\mathcal{C}_i} \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{q}) \right] \psi_i^{(m)} \phi_i dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \iiint_{\mathcal{C}_i} \phi_i \psi_i^{(m)} \operatorname{div} F(\mathbf{q}) dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \iiint_{\mathcal{C}_i} \operatorname{div} \left[ \phi_i \psi_i^{(m)} F(\mathbf{q}) \right] dV - \iiint_{\mathcal{C}_i} \left( \operatorname{grad} \phi_i \psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i) \right) dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} \left( F(\mathbf{q}) \cdot \vec{n}_{ij} \right) \psi_i^{(m)} \phi_i dS - \iiint_{\mathcal{C}_i} \left( \operatorname{grad} \phi_i \psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i) \right) dV = \\
& \frac{d\mathbf{q}_i^{(m)}}{dt} V_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \left( \vec{n}_j \cdot \vec{n}_{ij} \right) \iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS - \iiint_{\mathcal{C}_i} \left( \operatorname{grad} \phi_i \psi_i^{(m)} \cdot F(\mathbf{q}_i) \right) dV = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, если выбрать базис, состоящий из одной функции  $\psi_i^{(0)} \equiv 1$  при  $\phi_i \equiv 1$ , то аппроксимация (2.5) разрывным методом Галеркина совпадает с конечно-объемной аппроксимацией (2.2).

### 2.1.4 Выбор базисных функций.

Аппроксимация (2.5) допускает произвольный выбор базисных функций, удовлетворяющих условию (2.4). На практике широкое распространение получил базис, состоящий из ортогональных полиномов, в частности, масштабированных многочленов Лежандра.

**Одномерные базисные функции.** Рассмотрим сначала одномерный случай. Поскольку полиномы Лежандра  $L_m(x)$  ортогональны на отрезке  $[-1, +1]$ :

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n},$$

то в качестве базиса для ячейки с центром в точке  $x_i$  и длиной  $h_i$  можно выбрать функции вида:

$$\boxed{\psi_i^{(m)}(x) := \sqrt{\frac{2}{2m+1}} L_m(x - x_i), \phi_i = \frac{2}{h_i}.}$$

**Двумерные базисные функции.** Обобщим полиномы Лежандра на случай двух пространственных измерений. Определив  $P_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} L_m(\xi)$ , построим функции  $P_m(x, y)$ , ортонормированные на квадрате  $\mathcal{C}_0 = [-1, 1] \times [-1, 1]$  следующим образом:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0(x)P_0(y), \\ P_1 &= P_1(x)P_0(y), P_2 = P_0(x)P_1(y), \\ P_3 &= P_2(x)P_0(y), P_4 = P_1(x)P_1(y), P_5 = P_0(x)P_2(y), \\ P_6 &= P_3(x)P_0(y), P_7 = P_2(x)P_1(y), P_8 = P_1(x)P_2(y), P_9 = P_0(x)P_3(y), \\ &\dots \end{aligned}$$

Для простоты предположим, что ячейка является выпуклым четырехугольником с вершинами  $\{\mathcal{N}_{k_n}, k_n \in \mathcal{K}_i\}$ , пронумерованными против часовой стрелки. Эта область является взаимно-однозначным отображением квадрата  $\mathcal{C}_0$ , осуществляемым с помощью узловых функций  $N_{k_n}$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}(\xi, \eta) &= \sum_{k_n} \vec{r}_{k_n} N_{k_n}(\xi, \eta); \exists \xi(x, y), \eta(x, y); \\ N_{k_1}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), N_{k_2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_{k_3}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), N_{k_4}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned}$$

Положим  $\psi_i^{(m)}(x, y) := P_m(\xi(x, y), \eta(x, y))$  и определим скалярное произведение базисных функций:

$$\begin{aligned} \left( \psi_i^{(m)}(x, y) \cdot \psi_i^{(n)}(x, y) \right) &= \iiint_{\mathcal{C}_i} \psi_i^{(m)}(x, y) \psi_i^{(n)}(x, y) \phi_i(x, y) dV = \\ &= \iiint_{\mathcal{C}_0} P_m(\xi, \eta) P_n(\xi, \eta) \phi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| dV_0 = \delta_{m,n} V_i \Leftrightarrow \\ \phi_i(x, y) &:= V_i \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right|. \end{aligned}$$

**Трехмерные базисные функции.** В трехмерном случае построение базисных функций осуществляется аналогично: пусть  $P_m(x, y, z)$  – полиномы, состоящие из произведения полиномов первой степени упорядоченными в виде пирамиды. Также, пусть ячейки сетки представляют собой выпуклые фигуры с шестью четырехугольными гранями. Тогда будут существовать отображения  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $z(\xi, \eta, \zeta)$  и  $\xi(x, y, z)$ ,  $\eta(x, y, z)$ ,  $\zeta(x, y, z)$ . В качестве базисных функций выберем  $\psi_i^{(m)}(x, y, z) := P_m(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z))$ , а весовую функцию положим равной  $\phi_i(x, y, z) := V_i \left| \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} \right|$ .

### 2.1.5 Вычисление интегралов.

Вычислим интегралы, входящие в выражение (2.5). Начнем с поверхностных интегралов вида:

$$\iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS.$$

Поскольку мы предположили, что наши ячейки являются отображением куба  $\mathcal{C}_0 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ , то грань  $\mathcal{F}_j$  является одной из граней куба  $\mathcal{C}_0$ . Не ограничивая общности, предположим, что это грань  $\mathcal{F}_0 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{1\}$ , то есть  $x = x(\xi, \eta, 1)$ ,  $y = y(\xi, \eta, 1)$ ,  $z = z(\xi, \eta, 1)$ . Следовательно, перейдя к переменным  $\xi, \eta$  интеграл можно упростить:

$$\iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS = V_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F_{n,j,i}(\xi, \eta, 1) P_m(\xi, \eta, 1) d\xi d\eta.$$

Воспользуемся квадратурной формулой с узлами  $x_n$  весами  $w_n$ , например, квадратурой Гаусса, и функцией приближенного решения задачи Римана:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}_j} F_{n,j} \psi_i^{(m)} \phi_i dS &\cong V_i \sum_{n_1} \sum_{n_2} w_{n_1} w_{n_2} F_{n,j}^R(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1) P_m(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1); \\ F_{n,j}^R(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1) &= F_{n,j}^R \left( \left\{ \sum_m q_{i_1}^{(m)} P_m(\xi_{n_1}, \eta_{n_2}, 1), i_1 \in \mathcal{I}_j \right\}, n_j \right). \end{aligned}$$

Таким образом, предварительно рассчитав значения функций  $P_m$  в точках на гранях реперного куба  $\mathcal{C}_0$ , можно вычислить значения решения, а, значит, и  $F_{n,j}^R$ .

## 2.1.6 Ограничители.

В случае, если количество базисных функций отлично от единицы, разрывный метод Галеркина формально можно считать методом высокого порядка аппроксимации. Как следствие этого, использование метода без специальных ограничителей невозможно: в силу теоремы Годунова метод не является монотонным.

Опишем общую процедуру построения ограничителя на примере метода, использующего кусочно-линейные или кусочно-квадратичные базисные функции.

1. Вычислим сначала осредненные по ячейкам значения решения.:

$$\mathbf{q}_i^{avg} := \iiint_{\mathcal{C}_i} \mathbf{q}_i dV,$$

2. Приблизительно вычислим градиенты решения  $\text{grad } q_j^{avg}$  на ребрах. Если сетка является ортогональной, то есть такой, что для любых двух соседних ячеек  $\mathcal{C}_{i_1}, \mathcal{C}_{i_2}$  прямая, соединяющая их центры, перпендикулярна их общей грани  $\mathcal{F}_j$  с нормалью  $\vec{n}_{i_1j}$ , то градиенты могут быть вычислены, например, как

$$\text{grad } \mathbf{q}_j^{avg} := \frac{\mathbf{q}_{i_2} - \mathbf{q}_{i_1}}{\|\vec{r}_{i_2} - \vec{r}_{i_1}\|} \vec{n}_{i_1j}.$$

В случае кусочно-квадратичного базиса необходимо также вычислить и гессианы осредненного решения в ячейках:

$$\text{hess } \mathbf{q}_i^{avg} := \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \iint_{\mathcal{F}_j} \left( \text{grad } \mathbf{q}_j^{avg} \otimes \vec{n}_{ij} \right) dS.$$

3. Вычислим ограниченные значения градиентов в ячейках. Одним из самых простых способов вычисления является ограничение функцией `minmod`:

$$\begin{aligned} \text{grad } \mathbf{q}_i^{lim} &:= \text{minmod} \left( \text{grad } \mathbf{q}_i, \text{grad } \mathbf{q}_{j_1}^{avg}, \dots, \text{grad } \mathbf{q}_{j_N}^{avg} \right), j_n \in \mathcal{J}_i; \\ \text{minmod} \left( a_0, a_1, \dots, a_N \right) &:= \left\lfloor \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \text{sgn}(a_n) \right\rfloor \min \left\{ |a_0|, |a_1|, \dots, |a_N| \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно ограничить и гессианы  $\text{hess } q_i^{lim}$ , используя гессиан решения в текущей ячейке и вычисленные значения  $\text{hess } q_i^{avg}$  в соседних ячейках.

4. Теперь ограниченное решение может быть представлено через разложения в ряд Тейлора:

$$\mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) = \mathbf{q}_i^{avg} + \left( \text{grad } \mathbf{q}_i^{lim} \cdot \vec{r} \right) + \frac{1}{2} \left( \text{hess } \mathbf{q}_i^{lim} \vec{r} \cdot \vec{r} \right).$$

Осталось лишь найти коэффициенты разложения по базисным функциям:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^{lim} &= \sum_m \mathbf{q}_i^{(m),lim} \psi_i^{(m)} \Rightarrow \left( \mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) \cdot \psi_i^{(m)} \right) = \mathbf{q}_i^{(m),lim} V_i \Rightarrow \\ \mathbf{q}_i^{(m),lim} &:= \frac{1}{V_i} \left( \mathbf{q}_i^{lim}(\vec{r}) \cdot \psi_i^{(m)} \right). \end{aligned}$$

## 2.2 Приближенное решение задачи Римана.

Рассмотрим два семейства алгоритмов, осуществляющих приближенное нахождение решения задачи Римана.

### 2.2.1 Потоки семейства Куранта-Изаксона-Риса.

В схемах семейства Куранта-Изаксона-Риса (КИР) для вычисления потоков используется следующая формула:

$$\begin{aligned} F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) &= \frac{1}{2} \left( F_n(\mathbf{q}^+) + F_n(\mathbf{q}^-) \right) + \frac{1}{2} |A_n| \left( \mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- \right); \\ |A_n| &= \Omega_{R,n} |\Lambda_n| \Omega_{L,n}, \quad A_n = \frac{\partial F_n}{\partial \mathbf{q}} = \Omega_{R,n} \Lambda_n \Omega_{L,n}, \end{aligned}$$

Поскольку исходная система является нелинейной, конкретная реализация схемы данного семейства зависит от выбора линеаризации якобиана.

**Поток Русанова (Локальный поток Лакса-Фридрихса).** Потоки LLF являются, пожалуй, простейшими. Линеаризация производится путем замены якобиана на модуль максимального собственного значения. Окончательная формула потоков LLF будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) &= \frac{1}{2} \left( F_n(\mathbf{q}^+) + F_n(\mathbf{q}^-) \right) + \frac{1}{2} |\lambda_n| \left( \mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- \right); \\ |\lambda_n| &= \max \left\{ |v_n^+| + c_f^+, |v_n^-| + c_f^- \right\}. \end{aligned}$$



**Поток Роу.** Поток Роу используют линеаризацию якобиана  $\hat{A}_n$  в некоторой промежуточной точке  $\hat{\mathbf{q}}$ :

$$\hat{\rho} = \sqrt{\rho^+ \rho^-}; \hat{H}_* = \frac{\sqrt{\rho^+} H_*^+ + \sqrt{\rho^-} H_*^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}};$$

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\sqrt{\rho^+} \vec{v}^+ + \sqrt{\rho^-} \vec{v}^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}; \hat{\vec{B}} = \frac{\sqrt{\rho^+} \vec{B}^+ + \sqrt{\rho^-} \vec{B}^-}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}.$$

Нетрудно заметить, что при такой линеаризации будут выполнены следующие свойства:

$$F_n(\mathbf{q}^+) - F_n(\mathbf{q}^-) = \hat{A}_n(\hat{\mathbf{q}}_n) (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-); A_n(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n) = \hat{A}_n(\hat{\mathbf{q}}_n).$$

Существенным недостатком приведенного метода является вычислительная сложность: необходимо вычислить матрицы правых и левых собственных векторов  $\Omega_{R,n}, \Omega_{L,n}$ .

В работе [1] предлагается достаточно компактные выражения собственных векторов якобиана системы уравнений магнитной гидродинамики в альтернативном базисе (для одномерного случая):

$$\mathbf{w} = \left[ \frac{1}{\rho}, v_x, v_y, v_z, B_y, B_z, p \right];$$

$$A_n = \Omega_{R,n} \Lambda_n \Omega_{L,n}; \Omega_{R,n} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{w}} \Omega_{R,n}^w; \Omega_{L,n} = \Omega_{L,n}^w \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial F_n}{\partial \mathbf{w}} = \Omega_{R,n}^w \Lambda_n \Omega_{L,n}^w.$$

Конкретные выражения для  $\Omega_{R,n}^w, \Omega_{L,n}^w$  приводятся в статье.

## 2.2.2 Поток семейства Хартена-Лакса-ван Лира.

Поток семейства Хартена-Лакса-ван Лира (HLL) вычисляют значение на основе характеристической плоскости. Пусть  $s^+, s^-$  – скорости распространения возмущения. Тогда значения потоков могут быть вычислены следующим образом:

$$F_n^R(\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+, n) = \begin{cases} F_n(\mathbf{q}^+), s^+ < 0, \\ F_n(\mathbf{q}^-), s^- > 0, \\ \frac{s^+ F_n(\mathbf{q}^-) - s^- F_n(\mathbf{q}^+) + s^+ s^- (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-)}{s^+ - s^-}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Вычислить  $s^+$ ,  $s^-$  можно, например, так:

$$s^\pm = \max\{v_n^+ \pm c_f^+, v_n^- \pm c_f^-\}.$$

В работах [2], [3] приводятся различные вариации обобщения потока HLLC, точно разрешающего контактные разрывы на случай магнитной гидродинамики. Также в работе [3] приводится поток HLLD, разрешающий и альфвеновские волны.

## 2.3 Особенности применения схем Годуновского типа для системы уравнений магнитной гидродинамики.

Ни одна из построенных схем не гарантирует соленоидальности магнитного поля в многомерном случае, то есть

$$\operatorname{div} \vec{B} \neq 0.$$

Для коррекции магнитного поля применим проекционный метод, позаимствованный из численных методов решения системы уравнений вязкой несжимаемой жидкости. По теореме Гельмгольца магнитное поле может быть представлено как сумма скалярного и векторного потенциалов:

$$\vec{B} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \vec{\psi}; \operatorname{div} \vec{B} = \Delta \phi \neq 0.$$

Таким образом, численно решив уравнение Пуассона  $\operatorname{div} \vec{B} = \Delta \phi$  (граничные условия для поля  $\phi$ , вообще говоря, не заданы), можно вычислить значение скалярного потенциала  $\operatorname{grad} \phi$ , и откорректировать магнитное поле:

$$\vec{B} := \vec{B} - \operatorname{grad} \phi.$$

## 2.4 Результаты расчетов

### 2.4.1 Одномерная задача о распаде разрыва.

Рассмотрим одномерную задачу о распаде произвольного разрыва. Начальные данные зададим следующим образом:

$$B_x = 4, B_z = 2; \gamma = \frac{5}{3};$$

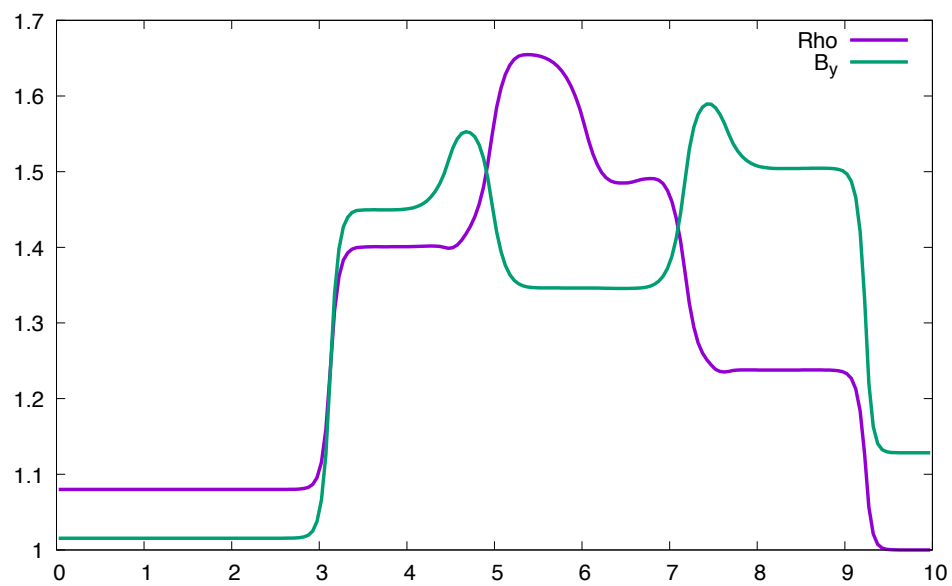
$$\rho = 1.08, p = 0.95, v_x = 1.2, v_y = 0.01, v_z = 0.5, B_y = 3.6, x \leq 5;$$

$$\rho = 1, p = 1, v_x = 0, v_y = 0, v_z = 0, B_x = 4, x > 5;$$

Расчет производится на отрезке  $[0, 10]$  со свободными граничными условиями на краях. Ниже приведены результаты расчета разрывным методом Галеркина с двумя базисными функциями при  $\tau = 0.001$  на 200 ячейках.

Рис. 2.1:  $\rho$  и  $B_y$  при  $t = 1800\tau$ .

(a) Поток LLF.



(b) Поток HLL.

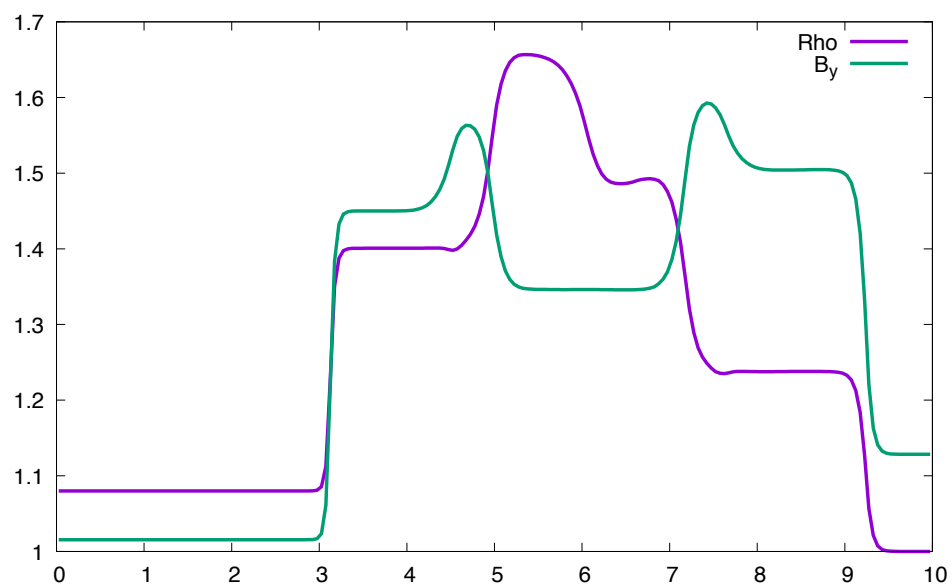
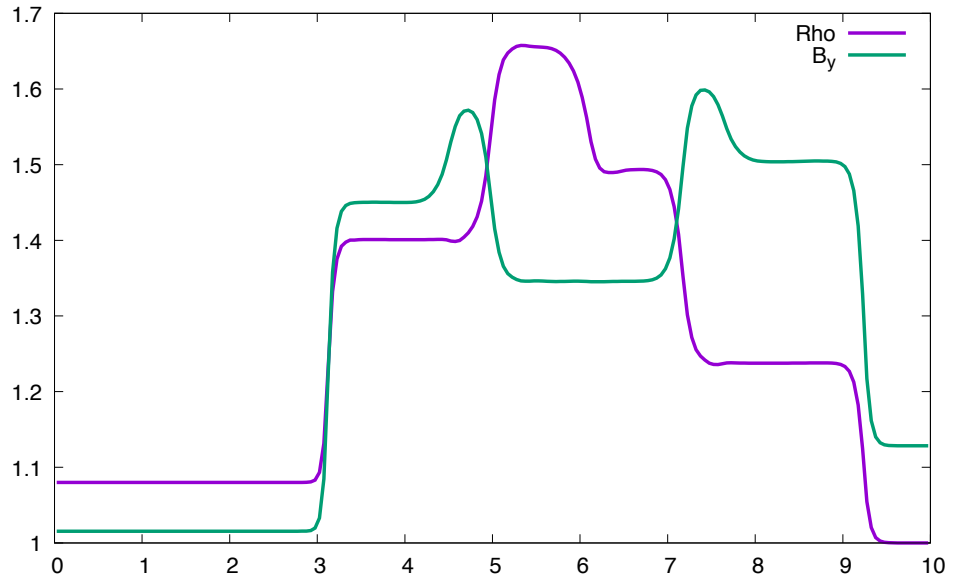
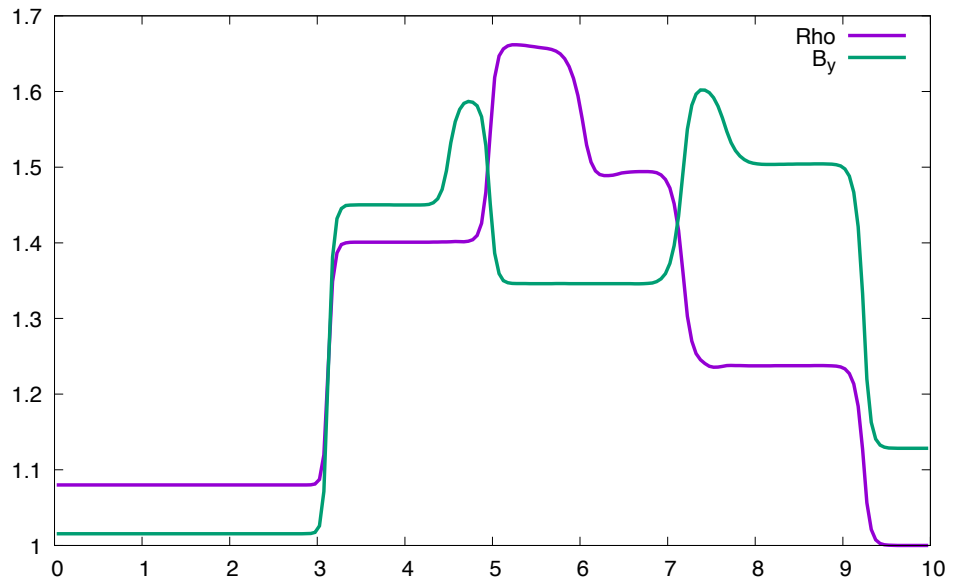


Рис. 2.2:  $\rho$  и  $B_y$  при  $t = 1800\tau$ .

(a) Потоки HLLC.



(b) Потоки HLLD.



## 2.4.2 Вихрь Орзака-Тана.

Вихрь Орзака-Тана (Orszag-Tang Vortex) – один из самых распространенных тестов для МГД-системы. Областью расчета является единичный квадрат со периодическими граничными условиями на всех сторонах. Начальные данные

для этого теста задаются так:

$$\rho = \frac{25}{36\pi}; p = \frac{5}{12\pi}; \gamma = \frac{5}{3};$$

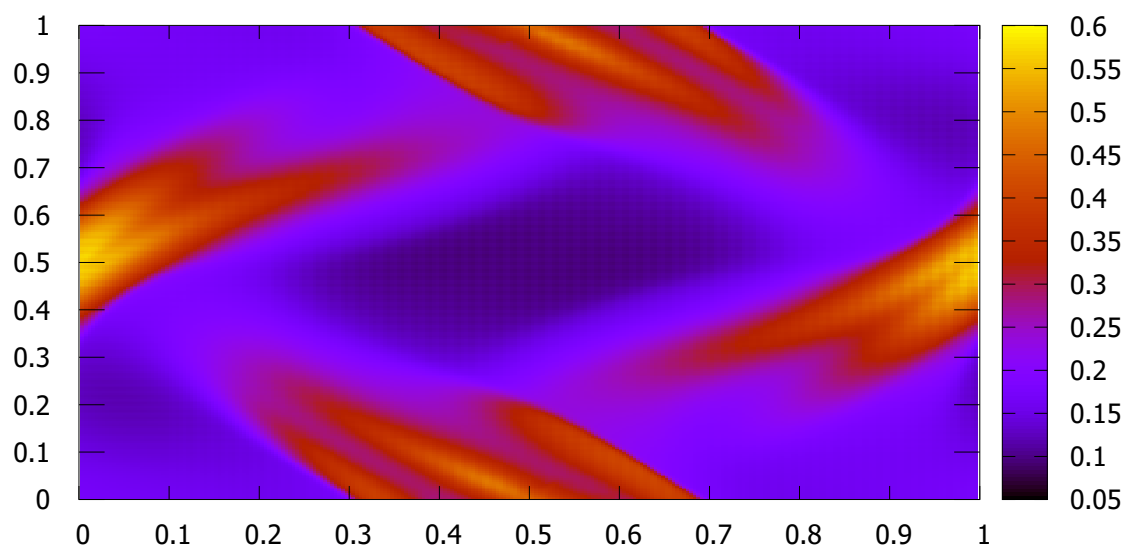
$$v_x = -\sin(2\pi y); v_y = \sin(2\pi x); v_z = 0;$$

$$B_x = -\sin(2\pi y); B_y = \sin(4\pi x); B_z = 0.$$

Ниже приведены результаты расчета методом конечных объемов, при  $\tau = 0.001$  на 256 ячейках по каждому измерению с использованием потоков HLLC.

Рис. 2.3:  $\rho$ .

(a)  $t = 2000\tau$



(b)  $t = 4000\tau$

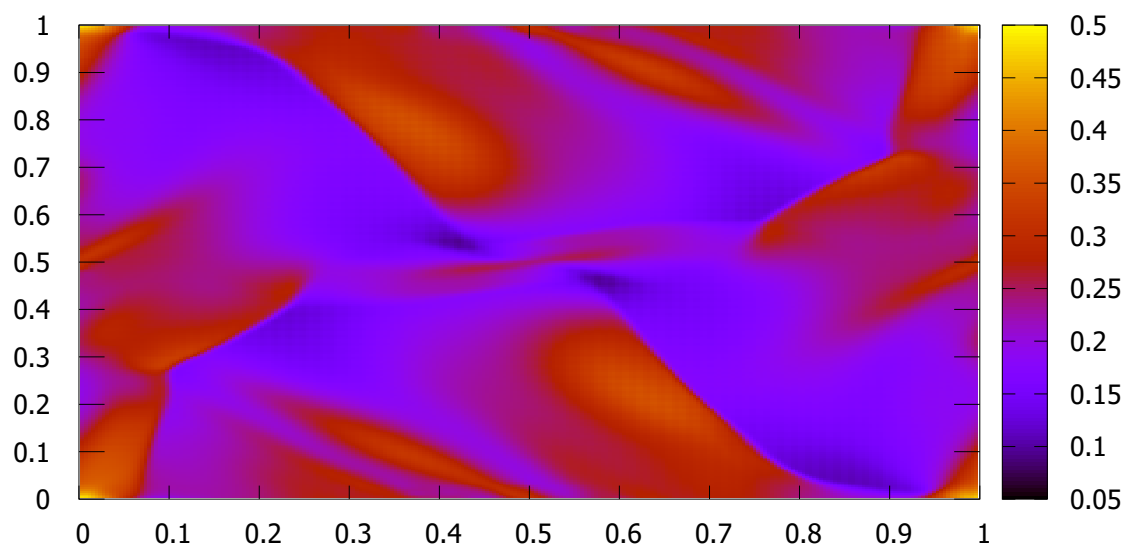
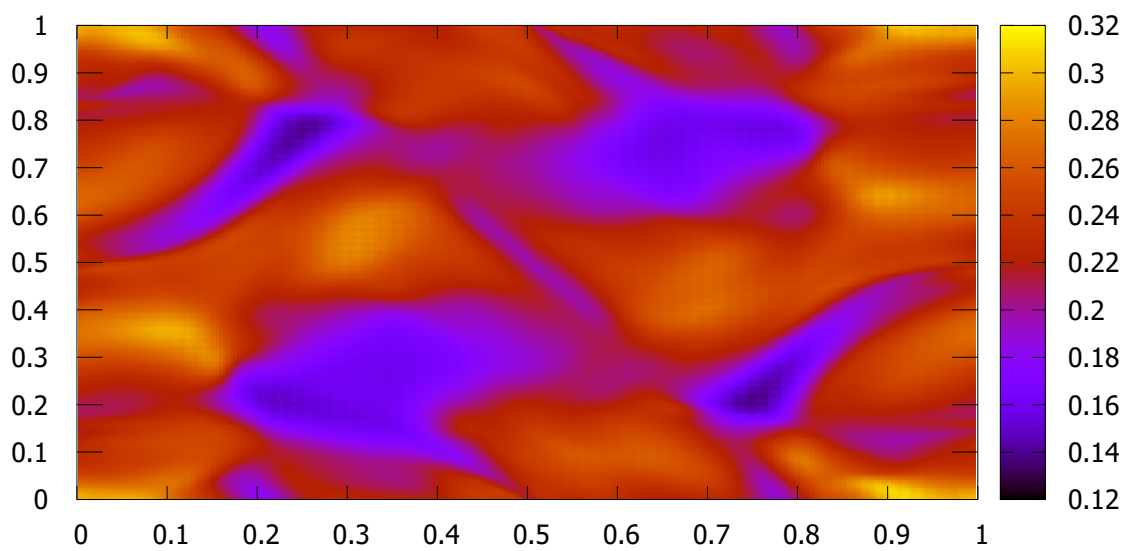
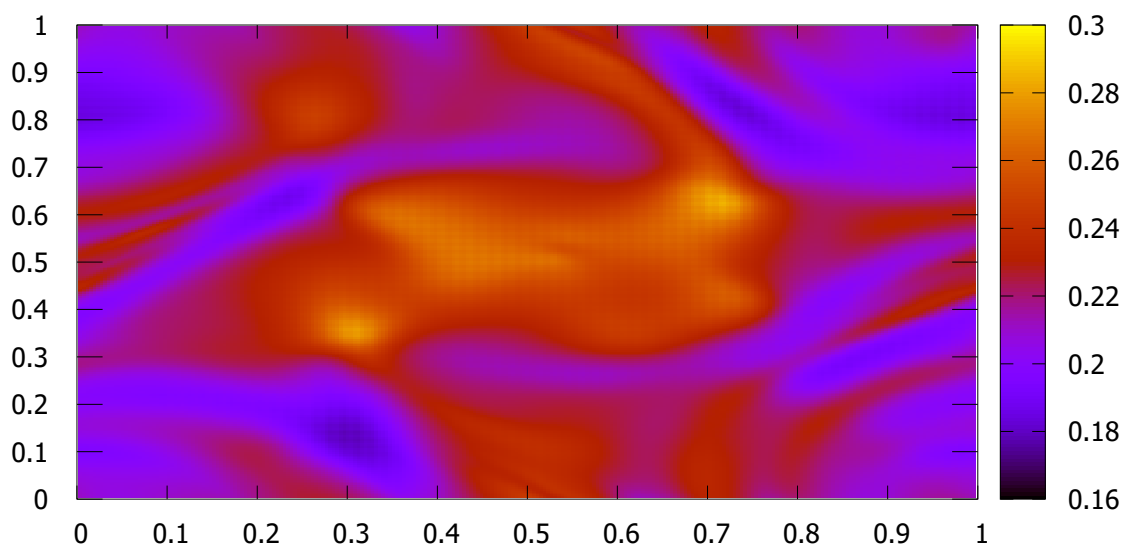


Рис. 2.4:  $\rho$ .

(a)  $t = 10000\tau$



(b)  $t = 20000\tau$





# Заключение

В ходе работы были рассмотрены получение и свойства системы уравнений магнитной гидродинамики, построены конечно-объемные схемы Годуновского типа и схемы разрывного метода Галеркина повышенного порядка аппроксимации для неструктурированных сеток, проведены тестовые расчеты одномерных в двумерных задач.

Качественно лучшие результаты для задачи о распаде разрыва были получены применением разрывного метода Галеркина с использованием потоков HLLD, а для вихря Орзака-Тана – с использованием потока HLLC, который зарекомендовал себя как наиболее устойчивый при хорошей разрешающей способности для многомерных задач.

Исходный код реализации построенных методов доступен по адресу <https://github.com/Jhuighuy/OrchidSolver>

# Литература

- [1] Zachary Andrew L., Colellaz Phillip. A higher-order godunov method for the equations of ideal magnetohydrodynamics // Journal of Computational Physics. 1992. T. 99, № 2. С. 341 – 347. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290213I>.
- [2] Li Shengtai. An HLLC Riemann solver for magneto-hydrodynamics // Journal of Computational Physics - J COMPUT PHYS. 2005. 02. T. 203. С. 344–357.
- [3] Miyoshi Takahiro, Kusano Kanya. A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics // Journal of Computational Physics. 2005. T. 208, № 1. С. 315 – 344. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999105001142>.