2 INTERPOLACIÓN POLINOMIAL. ASPECTOS PRÁCTICOS

2.1 Introducción

La interpolación polinomial es la base de muchos tipos de integración numérica y tiene otras aplicaciones teóricas. En la práctica a menudo tenemos una tabla de datos $\{(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, ..., n\}$, obtenida por muestreo o experimentación. Suponemos que los datos corresponden a los valores de una función f desconocida (a veces es conocida, pero queremos cambiarla por una función más sencilla de calcular). El "ajuste de curvas" trata el problema de construir una función que aproxime muy bien estos datos (es decir, a f). Un caso particular de ajuste de curvas es la interpolación polinomial: En este caso se construye un polinomio $P(x)$ que pase por los puntos de la tabla.

La interpolación polinomial consiste en estimar $f(x^*)$ con $P(x^*)$ si x^* no está en la tabla pero se puede ubicar entre estos valores. Una situación típica se muestra en el siguiente ejemplo en el que tenemos datos que relacionan temperatura con el segundo coeficiente virial.[2]
En el mundillo del ajuste de curvas hay varias alternativas,

- Usar un polinomio interpolante. Es el método de propósito general más usado.
- Usar trazadores (splines). Estas son funciones polinomiales a trozos.
- Usar Polinomios trigonométricos en $[0, 2\pi]$. Son la elección natural cuando la función f es periódica de periodo 2π.
- Usar sumas exponenciales. Se usan si conocemos que f presenta decaimiento exponencial conforme $x \longrightarrow \infty$.
- Si los datos son aproximados ("datos experimentales"), lo conveniente sería usar *Mínimos Cuadrados*

Aquí solo vamos a tratar con interpolación polinomial y trazadores cúbicos.

[2] El comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la *ecuación virial de estado*

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + ...,$$

donde P es la presión, V el volumen molar del gas, T es la temperatura Kelvin y R es la constante de gas ideal. Los coeficientes $B = B(T)$, $C = C(T)$,... son el segundo y tercer coeficiente virial, respectivamente. En la práctica se usa la serie truncada

$$\frac{PV}{RT} \approx 1 + \frac{B}{V}$$

Ejemplo 2.1

Considere los siguientes datos para el nitrógeno (N_2):

$T(K)$	100	200	300	400	450	500	600
$B(cm^3/mol)$	-160	-35	-4.2	9.0	?	16.9	21.3

donde T es la temperatura y B es el segundo coeficiente virial. ¿Cuál es el segundo coeficiente virial a $450K$?. Para responder la pregunta, usando interpolación polinomial, construimos un polinomio P que pase por los seis puntos de la tabla (ya veremos cómo), tal y como se muestra en la figura (2.1). Luego, el segundo coeficiente virial a $450K$ es aproximadamente $P(450) = 13.5cm^3/mol$.

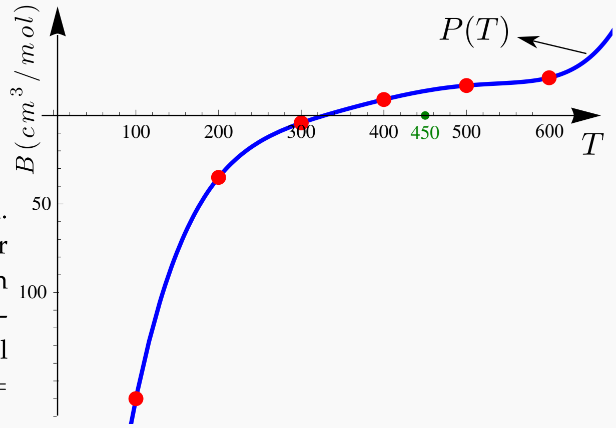


Figura 2.1 Polinomio interpolante

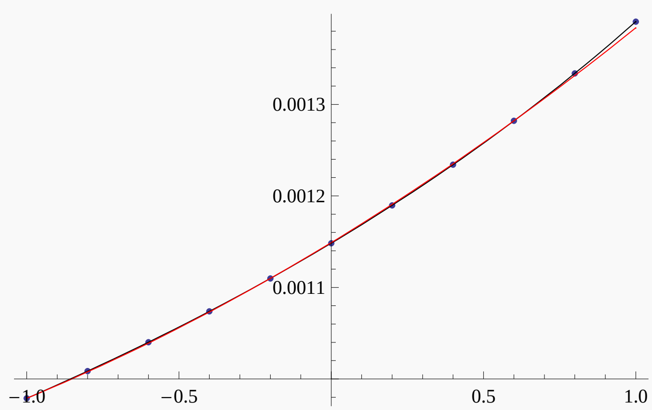
Ejemplo 2.2

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \int_5^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-x}\,dt, \quad \text{con} \quad -1 \leq x \leq 1$$

La integral que define a f es una integral no trivial (no se puede expresar en términos de funciones elementales). La tabla de la izquierda nos muestra algunos valores para f.

x	$f(x)$
-1	0.0009788055864607286
-0.6	0.0010401386051341144
-0.2	0.0011097929435687336
0	0.0011482955912753257
0.2	0.0011896108201581322
0.25	**?**
0.6	0.0012820294923443982
1.	0.0013903460525251596



Podemos usar un polinomio interpolante para interpolar $f(0.25)$.

2.2 Interpolación polinomial.

Un problema de interpolación polinomial se especifica como sigue: dados $n+1$ *pares* $(x_0,y_0),(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$, siendo todos los x_i's distintos, y $y_i = f(x_i)$ para alguna función f; encontrar un polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$P_n(x_i) = y_i,\ \ i = 0,1,2,...,n \tag{2.1}$$

Teorema 2.1 (Polinomio interpolante).

Dados $n+1$ puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1), ... ,(x_n,y_n) con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$; existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = y_i\ \ \forall\, i = 0,1,...,n$

A $P_n(x)$ se le llama *polinomio interpolante*, a cada x_i le decimos *nodo de interpolación* y a cada y_i *valor interpolado.*

- El problema tiene solución única, es decir hay un único polinomio que satisface (2.1).
- No se requiere que los datos estén igualmente espaciados ni en algún orden en particular.
- Si f es un polinomio de grado $k \leq n$, el polinomio interpolante de f en $n+1$ puntos coincide con f.
- El grado de P_n es $\leq n$ pues podría pasar, por ejemplo, que tres puntos estén sobre una recta y así el polinomio tendría grado cero o grado uno

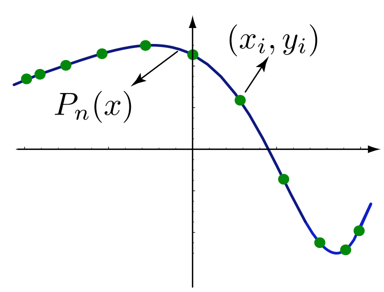


Figura 2.2 Polinomio interpolante.

Definición 2.1

Si de una función f conocemos los puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1), ... ,(x_n,y_n), con los x_i's todos distintos, y si $A = \{x_0,x_1,...,x_n\}$ y $x^* \notin A$ pero $\min A < x^* < \max A$; entonces *interpolar* f en x^* con un subconjunto de $k+1$ nodos de A consiste en calcular $P_k(x^*)$ donde P_k es el polinomio interpolante obtenido con un subconjunto de $k+1$ nodos alrededor de x^*.

El polinomio interpolante es único, es decir, solo hay un polinomio que pasa por estos $n+1$ puntos. Aquí vamos a ver cuatro maneras de calcular este polinomio interpolante: La forma de Lagrange del polinomio interpolante, la fórmula baricéntrica de Lagrange, la modificada de Lagrange y la forma de Newton del polinomio interpolante (método de diferencias divididas de Newton). Los cuatro métodos dan el mismo polinomio (aunque con diferente aspecto), y los cuatro métodos son importantes porque de ellos se hacen otras derivaciones teóricas.

2.3 Forma de Lagrange del polinomio interpolante.

Lagrange[3] calculó el único polinomio interpolante de manera explícita: El polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ que pasa por los $n+1$ puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ (con $x_i \neq x_j$ para todo i,j) es

$$P_n(x) = y_0 L_{n,0}(x) + y_1 L_{n,1}(x) + ... + y_n L_{n,n}(x)$$

donde $L_{n,k}(x) = \displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n).}$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
L_{n,0}(x) &= \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n).} \\
L_{n,1}(x) &= \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n).} \\
L_{n,3}(x) &= \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_n).} \\
\vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots \\
L_{n,n}(x) &= \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}).}
\end{aligned}$$

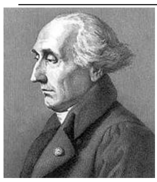
Ejemplo 2.3

Determine la forma de Lagrange polinomio interpolante de grado ≤ 2 (una recta o una parábola) que pasa por tres puntos $(0,1),(1,3),\ (2,0)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0\, L_{2,0}(x) + y_1\, L_{2,1}(x) + y_2\, L_{2,2}(x) \\
&= 1\cdot L_{2,0}(x) + 3\cdot L_{2,1}(x) + 0\cdot L_{2,2}(x) \\
&= 1\cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 3\cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}
\end{aligned}$$

[3]



Joseph Louis Lagrange (1736-1813) fue uno de los más grandes matemáticos de su tiempo. Nació en Italia pero se nacionalizó Francés. Hizo grandes contribuciones en todos los campos de la matemática y también en mecánica. Su obra principal es la "Mécanique analytique"(1788). En esta obra de cuatro volúmenes, se ofrece el tratamiento más completo de la mecánica clásica desde Newton y sirvió de base para el desarrollo de la física matemática en el siglo XIX.

Ejemplo 2.4

De una función f, conocemos la información de la tabla que sigue. Interpolar $f(0.35)$ usando un polinomio interpolante $P_3(x)$ indicando la subtabla de datos que va a usar.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	.3	.31	.32	.33	.34	.45	.46	.47

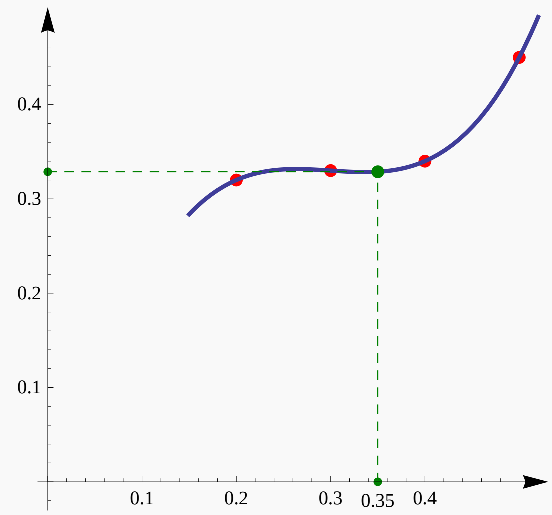
Solución: Como se requiere un polinomio interpolante $P_3(x)$, se necesita una subtabla de *cuatro* datos. Una opción es

x	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.32	0.33	0.34	0.45

Si usamos la forma de Lagrange del polinomio interpolante, entonces

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0.32 \cdot \frac{(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5)}{(0.2-0.3)(0.2-.4)(0.2-0.5)} \\ &+ 0.33 \cdot \frac{(x-0.2)(x-0.4)(x-0.5)}{(0.3-0.2)(0.3-0.4)(0.3-0.5)} \\ &+ 0.34 \cdot \frac{(x-0.2)(x-0.3)(x-0.5)}{(0.4-0.2)(0.4-0.3)(0.4-0.5)} \\ &+ 0.45 \cdot \frac{(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)}{(0.5-0.2)(0.5-0.3)(0.5-0.4)} \end{aligned}$$

y entonces $f(0.35) \approx P_3(0.35) = 0.32875$.



Ejemplo 2.5 (Interpolación lineal. Fórmula de un solo punto para una recta).

Verifique que el polinomio interpolante de grado ≤ 1 que pasa por $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ es,

$$P_1(x) = m(x - x_1) + y_1 \; = \; \frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)}(x - x_1) + y_1$$

Solución: Usando la fórmula de Lagrange,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 L_{n,0}(x) + y_1 L_{n,1}(x) \\ &= y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}. \quad \text{Simplificando,} \\ &= \frac{(y_0-y_1)}{(x_0-x_1)}(x-x_1) + y_1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6

En la tabla que sigue aparece las estadísticas de un curso con la cantidad de estudiantes en cada rango de notas.

Rango de Notas	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
N^o Estudiantes	35	48	70	40	22

Estime la cantidad de estudiantes con nota menor o igual a 55.

Solución: Para hacer la estimación necesitamos una tabla con las frecuencias acumuladas,

x≤	40	50	60	70	80
y	35	83	153	193	215

Ahora calculamos el polinomio interpolante,

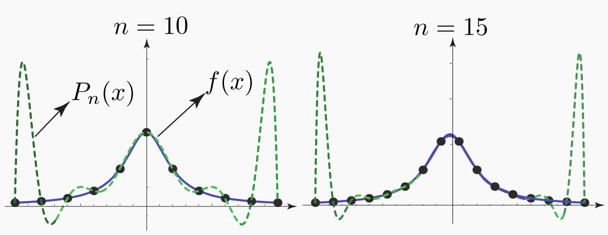
$$\begin{aligned} P_4(x) &= \frac{7(x-80)(x-70)(x-60)(x-50)}{48000} \\ &+ \frac{83(80-x)(x-70)(x-60)(x-40)}{60000} \\ &+ \frac{153(x-80)(x-70)(x-50)(x-40)}{40000} \\ &+ \frac{193(80-x)(x-60)(x-50)(x-40)}{60000} \\ &+ \frac{43(x-70)(x-60)(x-50)(x-40)}{48000} \end{aligned}$$

Así, la cantidad de estudiantes con nota menor o igual a 55 es aproximadamente $P_4(x) = 120$.

Ejemplo 2.7 (Nodos igualmente espaciados-fenómeno de Runge).

En general, el polinomio interpolante se podría ver afectado por el conjunto $\{x_0, ..., x_n\}$ y por la función f.

Este ejemplo es algo extremo y es conocido como ‘fenómeno de Runge’; si $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, el polinomio interpolante presenta problemas de convergencia si tomamos los x_i’s igualmente espaciados en $[-1,1]$, es decir si $x_i = -1 + i \cdot h$ con $h = 2/n$.



Observe que la interpolación se ve afectado hacia los extremos del intervalo no asi en el centro; esto parece ser una tendencia general.

Si se puede escoger los nodos, una buena opción de ajuste se obtiene con nodos de Tchebychev [4]

Ejemplo 2.8 (Nodos de Tchebychev).

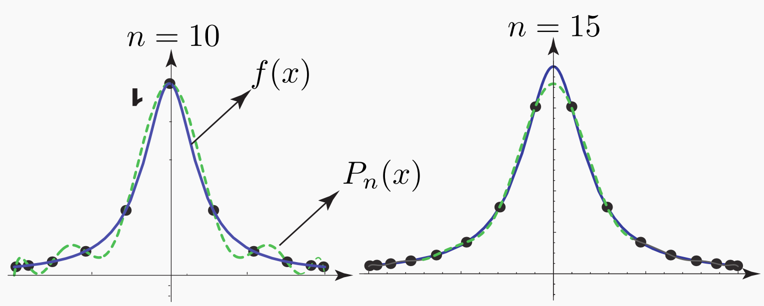
Si hay posibilidad de escoger los puntos de interpolación, en el intervalo $[-1,1]$, la elección podría ser los nodos

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right),$$

conocidos como nodos de Tchebychev. A diferencia de lo que podría suceder con nodos igualmente espaciados, con estos nodos el polinomio interpolante ajusta bien si $f \in C^1[-1,1]$.

Para un intervalo $[a,b]$ es válido hacer el cambio de variable $u = \dfrac{(b-a)(x-1)}{2} + b$ que mapea el intervalo $[-1,1]$ en el intervalo $[a,b]$. En este caso, los nodos serían

$$u_i = \frac{(b-a)(x_i-1)}{2+b} \quad \text{con} \quad x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right).$$



Como se prueba más adelante, en este caso, si $x^* \in [a,b]$,

$$|f(x^*) - P_n(x^*)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^n} \quad \text{si} \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b].$$

2.4 Forma modificada y forma baricéntrica de Lagrange.

La forma de Lagrange del polinomio interpolante es atractiva para propósitos teóricos. Sin embargo se puede reescribir en una forma que se vuelva eficiente para el cálculo computacional además de ser numéricamente mucho más estable (ver [2]). La forma modificada y la forma baricéntrica de Lagrange son útiles cuando queremos interpolar una función en todo un intervalo con un con un polinomio interpolante.

[4]  Pafnuti Lvóvich Tchebychev (1821 - 1894). El más prominente miembro de la escuela de matemáticas de St. Petersburg. Hizo investigaciones en Mecanismos, Teoría de la Aproximación de Funciones, Teoría de los Números, Teoría de Probabilidades y Teoría de Integración. Sin embargo escribió acerca de muchos otros temas: formas cuadráticas, construcción de mapas, cálculo geométrico de volúmenes, etc.