CAPÍTULO 18

Interpolación

Con frecuencia se encontrará con que tiene que estimar valores intermedios entre datos definidos por puntos. El método más común que se usa para este propósito es la interpolación polinomial. Recuerde que la fórmula general para un polinomio de n-ésimo grado es

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{18.1}$$

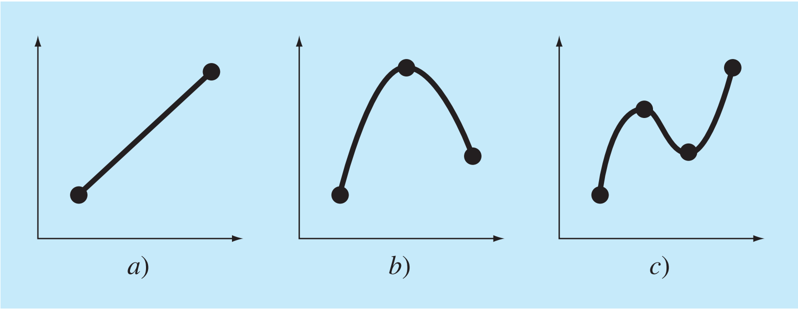
Dados $n + 1$ puntos, hay uno y sólo un polinomio de grado* n que pasa a través de todos los puntos. Por ejemplo, hay sólo una línea recta (es decir, un polinomio de primer grado) que une dos puntos (figura 18.1*a*). De manera similar, únicamente una parábola une un conjunto de tres puntos (figura 18.1*b*). La *interpolación polinomial* consiste en determinar el polinomio único de n-ésimo grado que se ajuste a $n + 1$ puntos. Este polinomio, entonces, proporciona una fórmula para calcular valores intermedios.

Aunque hay uno y sólo un polinomio de n-ésimo grado que se ajusta a $n + 1$ puntos, existe una gran variedad de formas matemáticas en las cuales puede expresarse este polinomio. En este capítulo describiremos dos alternativas que son muy adecuadas para implementarse en computadora: los polinomios de Newton y de Lagrange.

18.1 INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE NEWTON EN DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Como se dijo antes, existe una gran variedad de formas alternativas para expresar una interpolación polinomial. El *polinomio de interpolación de Newton en diferencias di-*

FIGURA 18.1
Ejemplos de interpolación polinomial: *a*) de primer grado (lineal) que une dos puntos, *b*) de segundo grado (cuadrática o parabólica) que une tres puntos y *c*) de tercer grado (cúbica) que une cuatro puntos.



* De hecho se puede probar que dados $n + 1$ puntos, con abscisas distintas entre sí, existe uno y sólo un polinomio de grado a lo más n que pasa por estos puntos.

vididas es una de las formas más populares y útiles. Antes de presentar la ecuación general, estudiaremos las versiones de primero y segundo grados por su sencilla interpretación visual.

18.1.1 Interpolación lineal

La forma más simple de interpolación consiste en unir dos puntos con una línea recta. Dicha técnica, llamada *interpolación lineal*, se ilustra de manera gráfica en la figura 18.2. Utilizando triángulos semejantes,

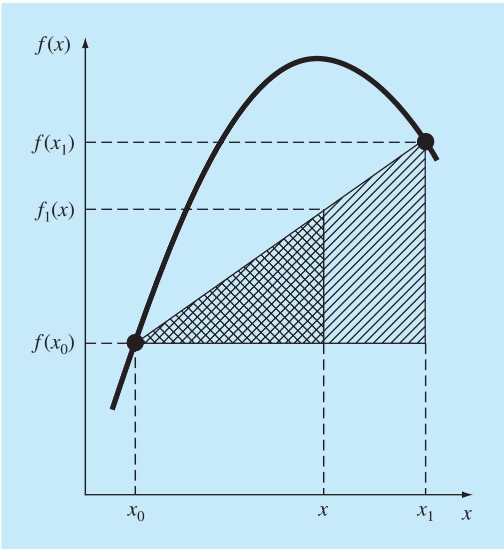
$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

reordenándose se tiene

$$f_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) \tag{18.2}$$

que es una *fórmula de interpolación lineal*. La notación $f_1(x)$ designa que éste es un polinomio de interpolación de primer grado. Observe que además de representar la pendiente de la línea que une los puntos, el término $[f(x_1)-f(x_0)]/(x_1-x_0)$ es una aproximación en diferencia dividida finita a la primer derivada [ecuación (4.17)]. En general,

FIGURA 18.2
Esquema gráfico de la interpolación lineal. Las áreas sombreadas indican los triángulos semejantes usados para obtener la fórmula de la interpolación lineal [ecuación(18.2)].



cuanto menor sea el intervalo entre los datos, mejor será la aproximación. Esto se debe al hecho de que, conforme el intervalo disminuye, una función continua estará mejor aproximada por una línea recta. Esta característica se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 18.1 **Interpolación lineal**

Planteamiento del problema. Estime el logaritmo natural de 2 mediante interpolación lineal. Primero, realice el cálculo por interpolación entre ln 1 = 0 y ln 6 = 1.791759. Después, repita el procedimiento, pero use un intervalo menor de ln 1 a ln 4 (1.386294). Observe que el valor verdadero de ln 2 es 0.6931472.

Solución. Usamos la ecuación (18.2) y una interpolación lineal para ln(2) desde x_0 = 1 hasta x_1 = 6 para obtener

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.791759 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.3583519$$

que representa un error: ε_t = 48.3%. Con el intervalo menor desde x_0 = 1 hasta x_1 = 4 se obtiene

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.386294 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0.4620981$$

Así, usando el intervalo más corto el error relativo porcentual se reduce a ε_t = 33.3%. Ambas interpolaciones se muestran en la figura 18.3, junto con la función verdadera.

FIGURA 18.3
Dos interpolaciones lineales para estimar ln 2. Observe cómo el intervalo menor proporciona una mejor estimación.