Lista 2

1) Suponha que haja 40 bolas em um chapéu, das quais 10 são vermelhas, 10 são azuis, 10 são amarelas e 10 são roxas. Qual é a probabilidade de obter duas bolas azuis e duas roxas ao tirar 10 bolas aleatoriamente do chapéu? O que muda no resultado caso a bola seja retirada e não reposta.

Com reposição:

P(R) = 10/4
P(A) = 10/4

$$(1/4)^2 * (1/4)^2 = 1/256$$

Sem reposição:

A probabilidade de retirar a primeira bola azul é
P(A) = 10/40 = 1/4.
Após retirar uma bola azul, restam:

9 bolas azuis
Total bolas: #Total – Bola azul = 39
Total bolas: 40 – 1 = 39

Então a probabilidade de retirar uma segunda bola azul é 9/39
A probabilidade de retirar a primeira bola roxa é
P(R) = 10/38
Após retirar uma bola roxa, restam:

9 bolas roxas
Total bolas: 40 – 3 = 37

Então a probabilidade de retirar uma segunda bola roxa é 9/37

Portanto, a probabilidade de retirar duas bolas azuis e duas roxas é:

$$(10/40) * (9/39) * (10/38) * (9/37) = 0.00014444$$

Quando a bola não é recolocada, a probabilidade diminui porque reduz o Espaço amostral.

2) Faça um programa para estimar a probabilidade de obter pelo menos um dado com seis ao lançar 5 dados.

Probabilidade de no obter un seis en um um único lançamento de dado é 5/6

Como os lançamentos de dados são independentes, a probabilidade de não obter um seis em cinco lançamentos é

$$P = (5/6)^5$$

Probabilidade de obter pelo menos um seis

$$P(1 \leq x \leq 6) = 1 - P(x = 0)$$
$$P(1 \leq x \leq 6) = 1 - (5/6)^5$$
$$P(1 \leq x \leq 6) = 0.5981224279835391$$

```
import random
#Criamos a função que simula o lançamento de dados
def lançar_dados(n_simulações):
    #Iniciamos a variável que armazenará o número de sucesso
    sucesso = 0
    #criamos um loop for com o intervalo do número de simulações que ele realizará
    for _ in range(n_simulações):
        #geramos um numero aleatorio entre 1 e 6, cinco vezes
        dados = [random.randint(1, 6) for _ in range(5)]
        #se o valor do dado for 6 então somamos um ao número de sucessos
        if 6 in dados:
            sucesso += 1
    #retorna a probabilidade estimada
    return sucesso / n_simulações

probabilidade = lançar_dados(1000000)
print(f"La probabilidad estimada es {probabilidade}")
```

```
La probabilidad estimada es 0.598112
```

https://colab.research.google.com/drive/1IF50rmkx3r1oTKQS3bhG_HS7SzHUdOt#scrollTo=ay3q8tDt7VOW

3) Você paga 1 real e pode lançar quatro dados. Se a soma dos olhos nos dados for inferior a 9, recebe de volta r reais, caso contrário perde o investimento de 1 reais. Suponha que r = 10. Você vai, então, a longo prazo, ganhar ou perder dinheiro ao jogar este jogo?
Para calcular a probabilidad de obter uma probabilidade de obter uma suma inferior a 9, temos qu ecalcular a soma das probabilidades de termos os resultados 4, 5, 6, 7, 8. Começamos em 4 porque é o valor mínimo que podemos obter com a soma dos quatro dados.

Temos 4 dados então há 6 resultados possíveis para cada um dos 4 dados, portanto há 1296 resultados possíveis.

Combinações possíveis para obter uma soma com valor 4:
(1, 1, 1, 1)
Combinações possíveis para obter uma soma com valor 5:
(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)
Combinações possíveis para obter uma soma com valor 6:
(1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 3, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 3, 1, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1)
Combinações possíveis para obter uma soma com valor 7:
(1, 1, 1, 4), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 3, 2), (1, 1, 4, 1), (1, 2, 1, 3), (1, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 1), (1, 3, 1, 2), (1, 3, 2, 1), (1, 4, 1, 1), (2, 1, 1, 3), (2, 1, 2, 2), (2, 1, 3, 1), (2, 2, 1, 2), (2, 2, 2, 1), (2, 3, 1, 1), (3, 1, 1, 2), (3, 1, 2, 1), (3, 2, 1, 1), (4, 1, 1, 1)
Combinações possíveis para obter uma soma com valor 8:
(1, 1, 1, 5), (1, 1, 2, 4), (1, 1, 3, 3), (1, 1, 4, 2), (1, 1, 5, 1), (1, 2, 1, 4), (1, 2, 2, 3), (1, 2, 3, 2), (1, 2, 4, 1), (1, 3, 1, 3), (1, 3, 2, 2), (1, 3, 3, 1), (1, 4, 1, 2), (1, 4, 2, 1), (1, 5, 1, 1), (2, 1, 1, 4), (2, 1, 2, 3), (2, 1, 3, 2), (2, 1, 4, 1), (2, 2, 1, 3), (2, 2, 2, 2), (2, 2, 3, 1), (2, 3, 1, 2), (2, 3, 2, 1), (2, 4, 1, 1), (3, 1, 1, 3), (3, 1, 2, 2), (3, 1, 3, 1), (3, 2, 1, 2), (3, 2, 2, 1), (3, 3, 1, 1) (4, 1, 1, 2), (4, 1, 2, 1), (4, 2, 1, 1), (5, 1, 1, 1)

Soma	Combinações	Probabilidade
4	1	1/1296
5	4	4/1296
6	10	10/1296
7	20	20/1296
8	35	35/1296

Calcumos o valor esperado para cada resultado possível:

Para soma 4: $EV(4) = \frac{1}{1296} x10 = \frac{10}{1296}$

Para soma 5: $EV(5) = \frac{4}{1296} x10 = \frac{40}{1296}$

Para soma 6: $EV(6) = \frac{10}{1296} x10 = \frac{100}{1296}$

Para soma 4: $EV(7) = \frac{20}{1296} x10 = \frac{200}{1296}$

Para soma 8: $EV(8) = \frac{35}{1296} x10 = \frac{350}{1296}$

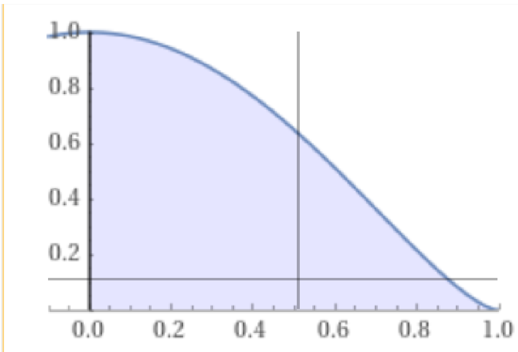
$$EV \ = EV(4) + EV(5) + EV(6) + EV(7) + EV(8)$$
$$EV \ = \frac{10}{1296} + \frac{40}{1296} + \frac{100}{1296} + \frac{200}{1296} + \frac{350}{1296}$$
$$EV \ = \frac{700}{1296}$$
$$EV \sim 0.539$$

Como o valor esperado é positivo, podemos assumir que o ganharemos dinheiro a longo prazo ao jogar.
Link: https://colab.research.google.com/drive/1IF50rmkx3r1oTKQS3bhG_HS7SzHUdOt

4) Resova as seguintes integrais pelo método da integração de monte carlo e pelo método da integração por importância.

a) $I = \int_0^1$ (1-x^2)^{3/2}dx

$$\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\, dx = \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905$$



Integração de Monte Carlo

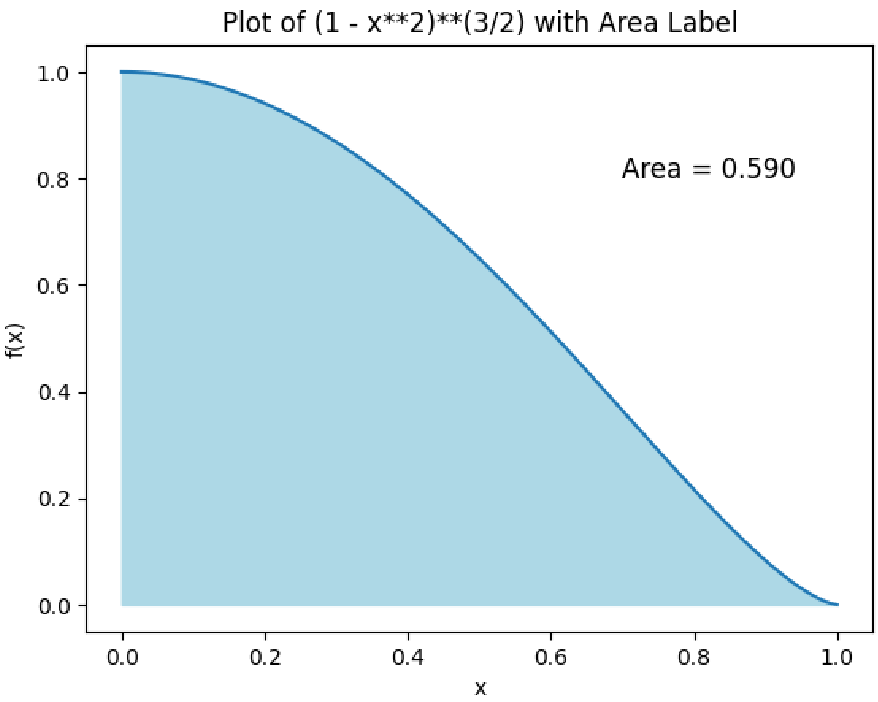
a) $I = \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} \, dx$

$y = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-0}{1-0} = x$

$dy = dx$

$I = \int_0^1 (1-y^2)^{3/2} \, dy$

$I = E\left[(1-y^2)^{3/2}\right]$



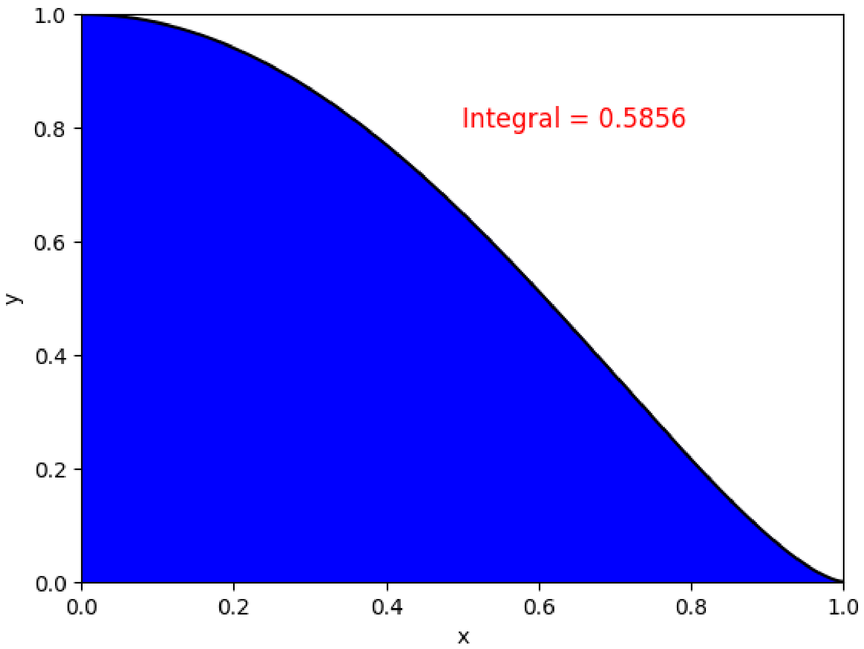
Método da integração por importância

b) $I = \int_{-2}^{2} e^{(x+x^2)} \, dx$

$y = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-(-2)}{2-(-2)} = \frac{x+2}{4} \rightarrow x = 4y-2$

$dy = \frac{dx}{4} \rightarrow dx = 4dy$

$I = \int_0^1 4 e^{4y-2+(4y-2)^2} \, dy = \underline{4 E\left[e^{4y-2+(4y-2)^2}\right]}$



b) $I = \int_{-2}^{2} \exp\,(x + x^2)dx$

Definite integral

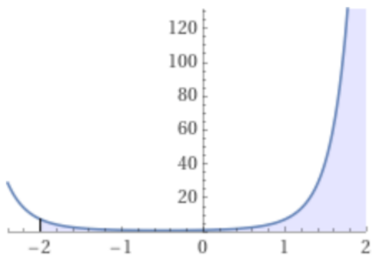
More digits

$$\int_{-2}^{2} \exp(x + x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\left(\operatorname{erfi}\left(\frac{3}{2}\right) + \operatorname{erfi}\left(\frac{5}{2}\right)\right)}{2\sqrt[4]{e}} \approx 93.1628$$

erfi(x) is the imaginary error function

Visual representation of the integral

Enlarge | Data | Customize | Plain Text

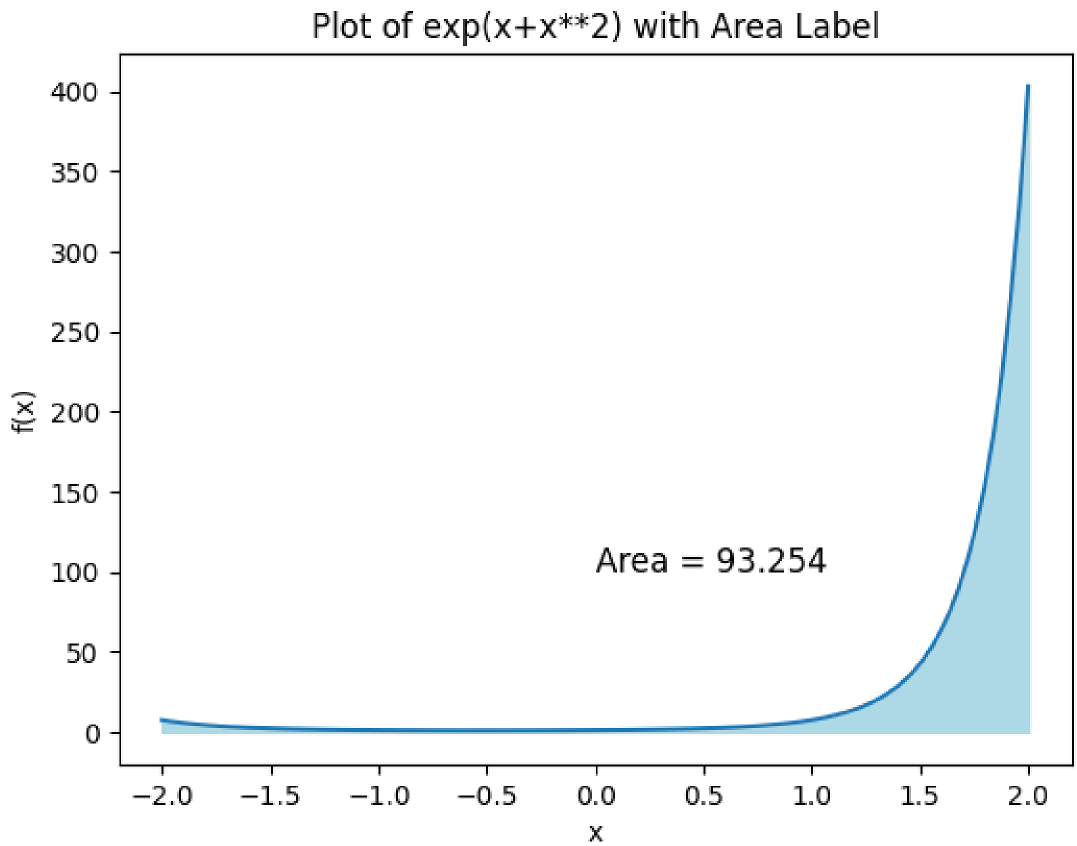


Integração de Monte Carlo

b) $I = \int_{-2}^{2} e^{(x+x^2)}\,dx$ $\qquad I = \int_0^1 4\,e^{4y-2+(4y-2)^2}\,dy = 4\,E\left[e^{4y-2+(4y-2)^2}\right]$

$y = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-(-2)}{2-(-2)} = \frac{x+2}{4} \rightarrow x = 4y-2$

$dy = \frac{dx}{4} \rightarrow dx = 4dy$



Método da integração por importância

$$g(x) = Ae^x$$

$$\int_{-2}^{2} Ae^x = 1$$

$$Ae^x \Big|_{-2}^{2} = 1$$

$$A(e^2 - e^{-2}) = 1$$

$$A = \frac{1}{e^2 - e^{-2}}$$

$$g(x) = \frac{e^x}{e^2 - e^{-2}}$$

$$\frac{1}{e^2 - e^{-2}} \int_{-2}^{x} e^x = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} (e^x - e^{-2}) = U$$

$$e^x - e^{-2} = U(e^2 - e^{-2})$$

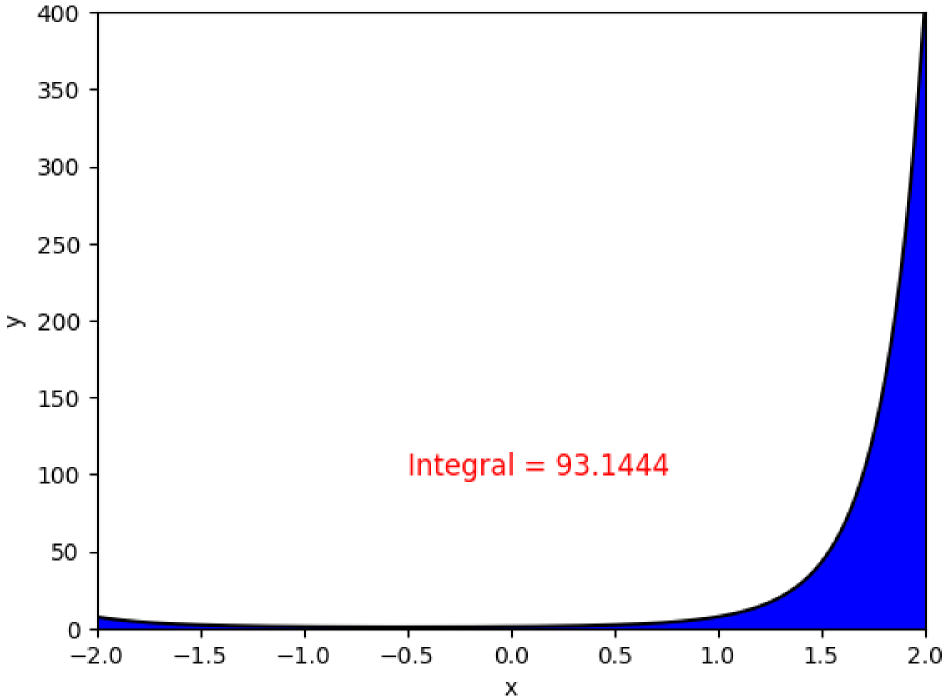
$$e^x = U(e^2 - e^{-2}) + e^{-2}$$

$$x = \ln\left[e^{-2} + U(e^2 - e^{-2})\right]$$

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{e^{(x+x^2)}}{\frac{e^x}{e^2 - e^{-2}}} g(x)\,dx$$

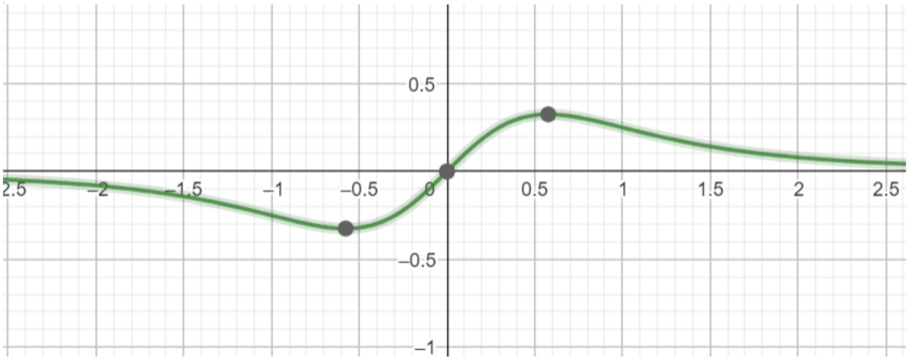
$$I = \int_{-2}^{2} (e^2 - e^{-2})\, e^{x^2} g(x)\,dx$$

$$I = (e^2 - e^{-2})\, E_g\left[e^{x^2}\right]$$



c)$I = \int_0^\infty$ x(1 + x^2)^{-2}dx

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2} = 0.5$$



Integração de Monte Carlo

$$c)\quad I = \int_0^\infty x\,(1+x^2)^{-2}\,dx \quad = \int_0^1 \left(\frac{1}{y}-1\right)\left(1+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2\right)^{-2} \frac{dy}{y^2}$$

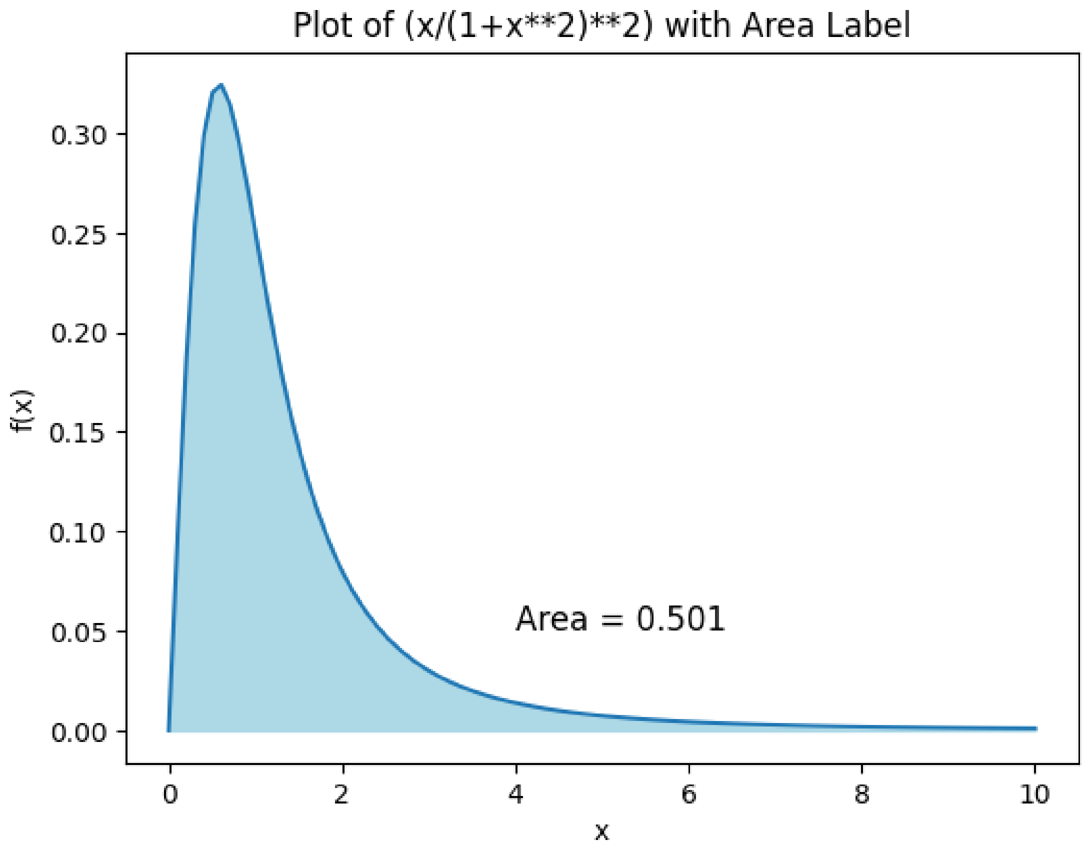
$$y = \frac{1}{1+x} \qquad dy = -(1+x)^{-2}\,dx$$

$$x = \frac{1}{y} - 1 \qquad dy = \frac{-dx}{(1+x)^2}$$

$$dy = -y^2\,dx$$

$$-\frac{dy}{y^2} \quad dx$$

$$I = \left[\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(1+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2\right)^{-2} \Big/ y^2\right]$$



Método da integração por importância

c) $I = \int_0^\infty x(1+x^2)^{-2}dx$

$$I = \int_0^\infty \frac{\frac{x}{(1+x^2)^2}}{\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} g(x)\,dx$$

$$g(x) = A\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2} E_g\left[\frac{x}{(1+x^2)}\right]}$$

$$A\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$A\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^\infty = 1$$

$$A\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 1$$

$$A\frac{\pi}{2} = 1$$

$$A = \frac{2}{\pi}$$

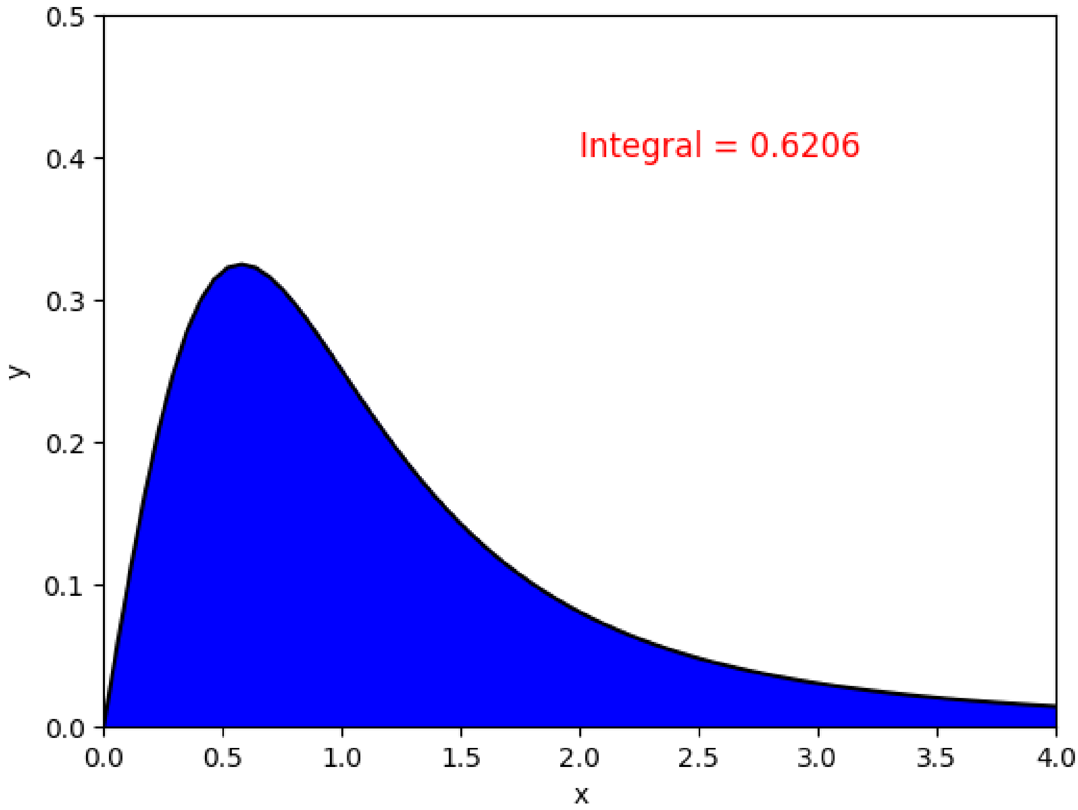
$$g(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(x)\right)_0^x = U$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(x)\right) = U$$

$$\operatorname{arctg}(x) = U\frac{\pi}{2}$$

$$x = \operatorname{tg}\left(U\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$



Link Monte Carlo:
https://colab.research.google.com/drive/1V1Eaj8TAwFnrIWy7eX0dRYbSx2W5WVrG
Link importancia:
https://colab.research.google.com/drive/1F6ehkhglMEPUmfBh9uTFJvi7XQWoFmnx#scrollTo=mw1_ywceISAa