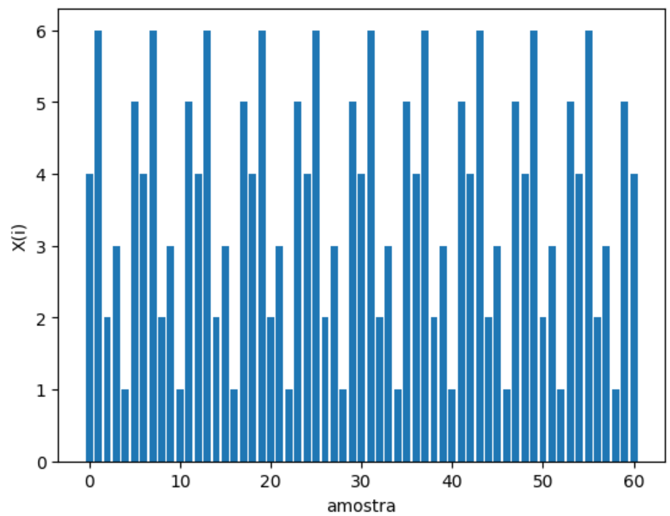
1ºLista de exercícios

1. Mostre, usando análise e simulação, que o gerador de números aleatórios definido por $X_{i+1} = 5x_i \bmod (7)$ é um gerador de período completo. Determine a sequência gerada para sementes $x_0 = 4$ e $x_0 = 7$. Compare as sequências e comente os resultados.

$X_{i+1} = 5x_i \bmod(7)$
$x_0 = 4$



$X_1 = 5(4) \bmod(7) = 6$

$X_2 = 5(6) \bmod(7) = 2$

$X_3 = 5(2) \bmod(7) = 3$

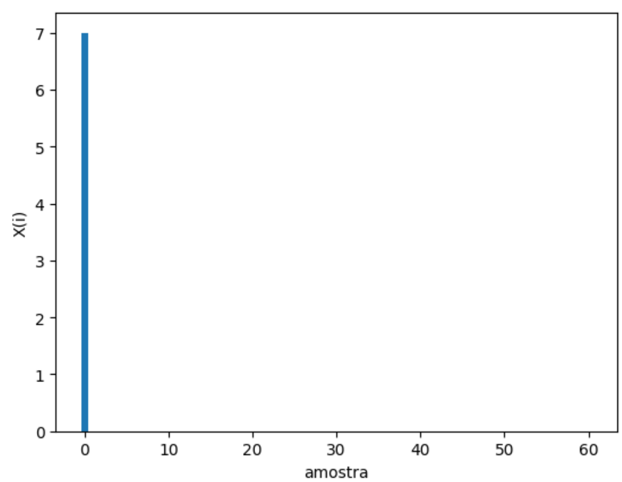
$X_4 = 5(3) \bmod(7) = 1$

$X_5 = 5(1) \bmod(7) = 5$

$X_6 = 5(5) \bmod(7) = 4$

$X_7 = 5(4) \bmod(7) = 6$

$X_{i+1} = 5x_i \bmod(7)$
$x_0 = 7$



$X_1 = 5(7) \bmod(7) = 0$

$X_2 = 5(0) \bmod(7) = 0$

$X_3 = 5(0) \bmod(7) = 0$

Podemos observar no primeiro caso quando a semente é 4 encontramos um período de 6, porém quando mudamos a semente para 7 este é reduzido para um.

Como a semente é um múltiplo do nosso m e sendo um múltiplo, nosso módulo resultante será zero. Para qualquer semente que seja múltiplo de m a resposta será a mesma que podemos ver no segundo gráfico.

https://colab.research.google.com/drive/1yxPsAQsAuWHThj5f_1QjoPLgI5SPUIj0#scrollTo=qSWXEKP1ivmH

2.O número de chamadas para o help-desk de uma empresa tem uma distribuição de Poisson com 60 chamadas por um período de 10 horas. Se C = a variável aleatória para o número de chamadas por hora, encontre:

a. A probabilidade de que o suporte técnico não receba chamadas em uma determinada hora.

$$P(C = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$P(C = 0) = \frac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} = e^{-6} \approx 2.48x10^{-3}$$

b. a probabilidade de que o suporte técnico receba menos de oito chamadas em uma determinada hora.

$$P(C < 8) = P(C = 0) + P(C = 1) + P(C = 2) + \cdots + P(C = 7)$$

$$P(C < 8) = \sum_{k=0}^{7} \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k!}$$

$$P(C < 8) = 0.744$$

c. O número médio de chamadas por hora E (C).

λ = 60/10 = 6 chamadas por hora

d. A variância de C.

λ = 6

e. O desvio padrão de C

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{6}$$

3) Um fabricante de pistões de metal descobre que, em média, 15% de seus pistões são rejeitados porque são superdimensionados ou subdimensionados. Qual é a probabilidade de um lote de 8 pistões conter

(a) não mais que 2 rejeitados?

$$P(X = k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$
$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$P(X \leq 2) = C(8{,}0) \cdot (0{,}15)^0 \cdot (0{,}85)^8 + C(8{,}1) \cdot (0{,}15)^1 \cdot (0{,}85)^7 + C(8{,}2) \cdot (0{,}15)^2 \cdot (0{,}85)^6$$
$$P(X \leq 2) = 0.89$$

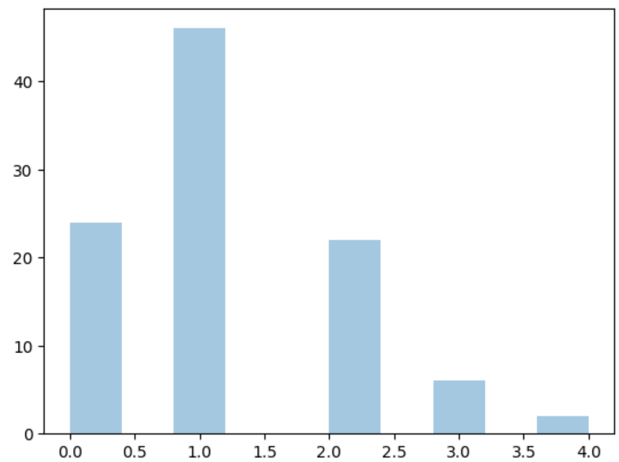
(b) pelo menos 6 rejeitados?

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$

$$P(X \geq 6) = C(8{,}6) \cdot (0{,}15)^6 \cdot (0{,}85)^2 + C(8{,}7) \cdot (0{,}15)^7 \cdot (0{,}85)^1 + C(8{,}8) \cdot (0{,}15)^8 \cdot (0{,}85)^0$$

$$P(X \geq 6) = 2.4x10^{-4} \approx 0.024\%$$

- Traçar o histograma da variável analisada.



https://colab.research.google.com/drive/1VeqOwLK26fR5h4Lq2lq4PqMXZA5M4Y2T#scrollTo=sC12pY0aBSR_

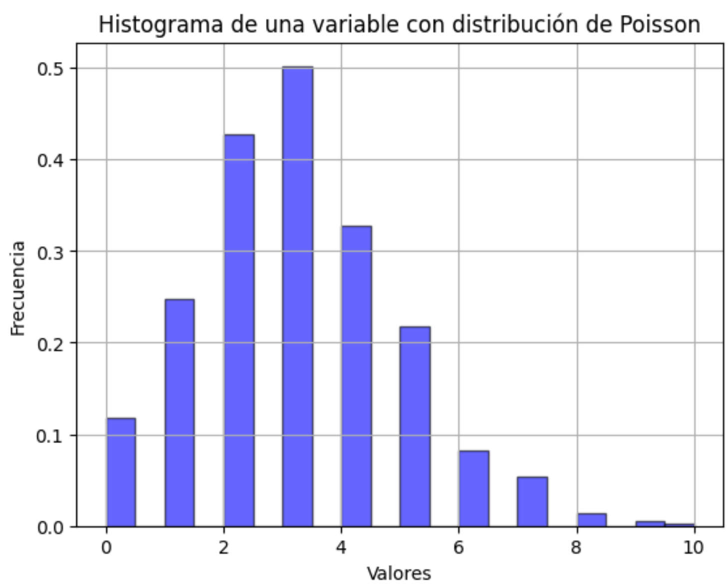
4) Se ocorrerem falhas de energia elétrica de acordo com uma distribuição de Poisson com uma média de 6 falhas a cada duas semanas, calcule a probabilidade de que haverá ao menos 2 falhas durante uma semana específica. Traçar o histograma da variável analisada.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!}\right)$$

$$P(X \geq 2) = 0.80$$

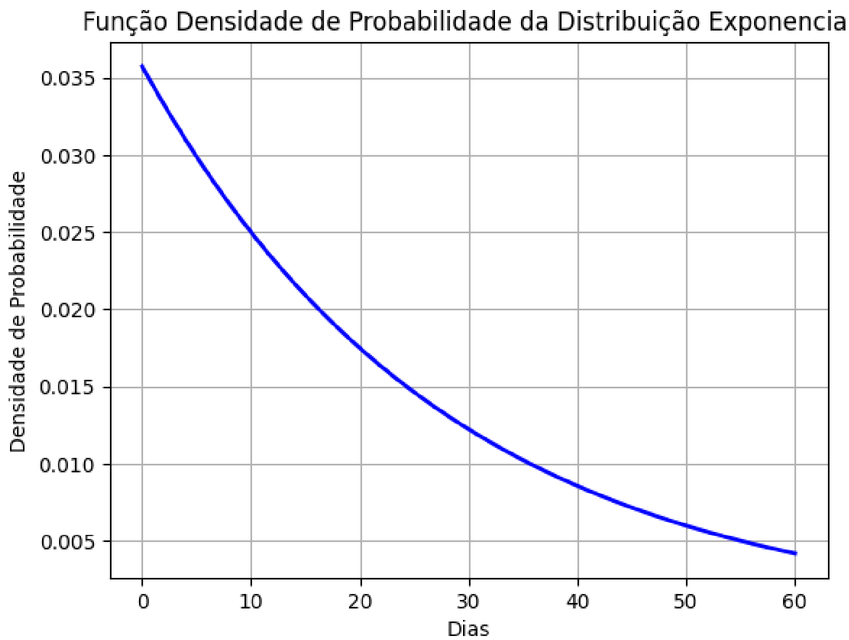


https://colab.research.google.com/drive/13MjnbPxtq15v2PHIKWto369YnDY8NFFC#scrollTo=mwDMtLiF9Phy

5) O número de dias que os viajantes compram com antecedência suas passagens aéreas pode ser modelado por uma distribuição exponencial com o tempo médio igual a 28 dias. Encontre a probabilidade de um viajante comprar uma passagem com menos de 4 dias de antecedência. Traçar a pdf da variável analisada.

$$P(X < 4) = 1 - e^{-\frac{1}{28} \cdot 4}$$

$$P(X < 4) = 1 - e^{-\frac{4}{28}} = 1 - e^{-\frac{1}{7}} \approx 0.1396$$



https://colab.research.google.com/drive/1XDVSdYznnlU45W9k-NoNw4HwaJQPQuFu#scrollTo=86j3AQ83AaNv

6) A distribuição discreta geométrica conta o número de tentativas até o primeiro sucesso. A pmf é dada por $f(x)=p(1-p)^{x-1}$, onde p representa a probabilidade de sucesso e x o numero de tentativas. Fazer um algoritmo para a geração das variáveis aleatórias geométricas. Com o algoritmo proposto calcular:

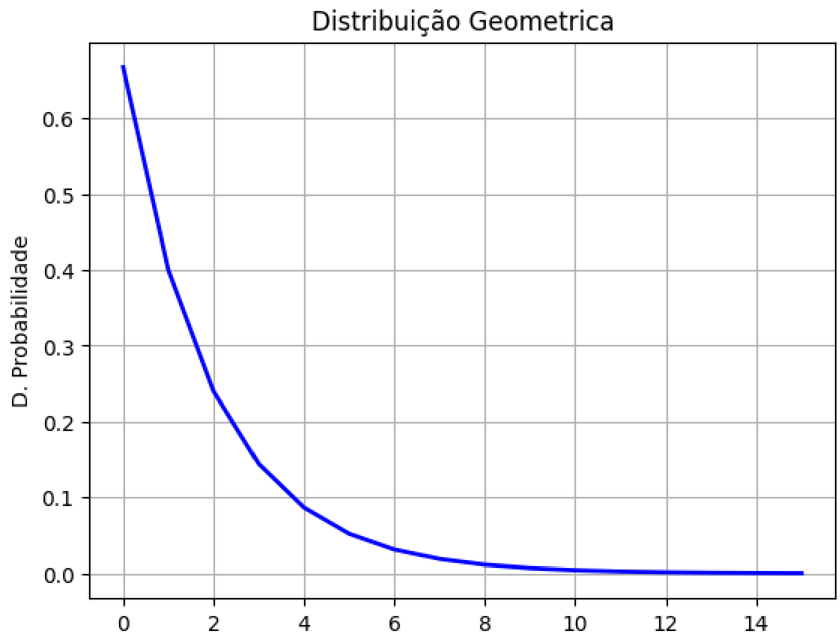
Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 bolas pretas. Qual a probabilidade de que a 6ª bola retirada com reposição seja a primeira bola preta?

p = 20 / (30 + 20) = 0.4

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$$

$$P(X = 6) = 0.4(1 - 0.4)^{6-1}$$

$$P(X = 6) = 0.031$$



https://colab.research.google.com/drive/1Z9mxdJCjWISf70WcJHhEbOAQ0dhxXsZG#scrollTo=Yiu4aPEfJqKR

7) Utilizando o método da inversa gerar amostras para a distribuição

$f(x)=e^x/((e^2-1))$ $0<=x<=2$.

$$f(x) = \frac{e^x}{e^2 - 1}$$

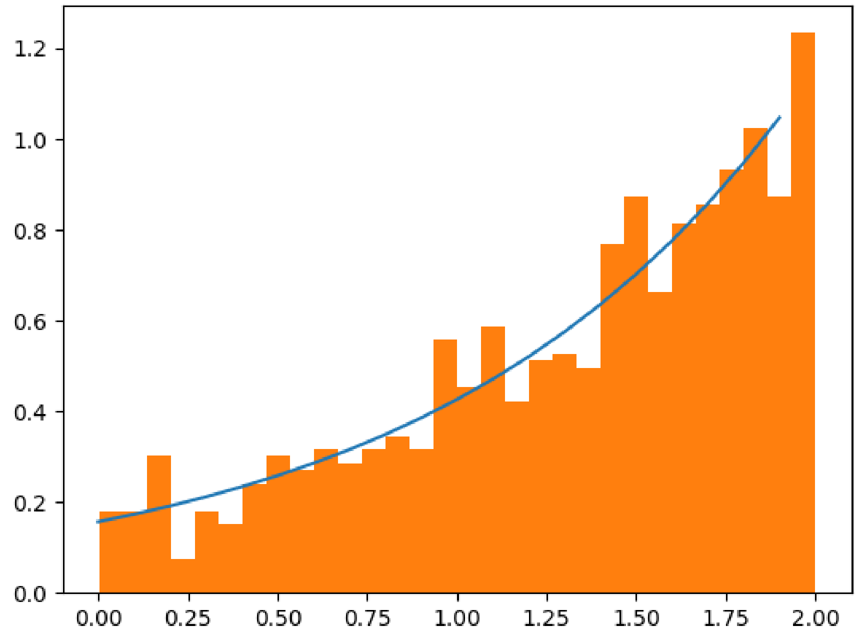
função de distribuição acumulada (CDF)

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \int_0^x \frac{e^x}{e^2 - 1} dx = \frac{e^x - 1}{e^2 - 1}$$

$$F(x) = u$$

$$\frac{e^x - 1}{e^2 - 1} = u$$

$$x = \ln[u(e^2 - 1) + 1]$$



https://colab.research.google.com/drive/1hYnQInA10mjZ4WA3759o9kMGKW2f0aw6#scrollTo=t6amTxYHRL17

8) Utilizando o método da aceitação/rejeição gerar amostras para a distribuição

$$f(x)=1.5x^2, -1<x<1$$

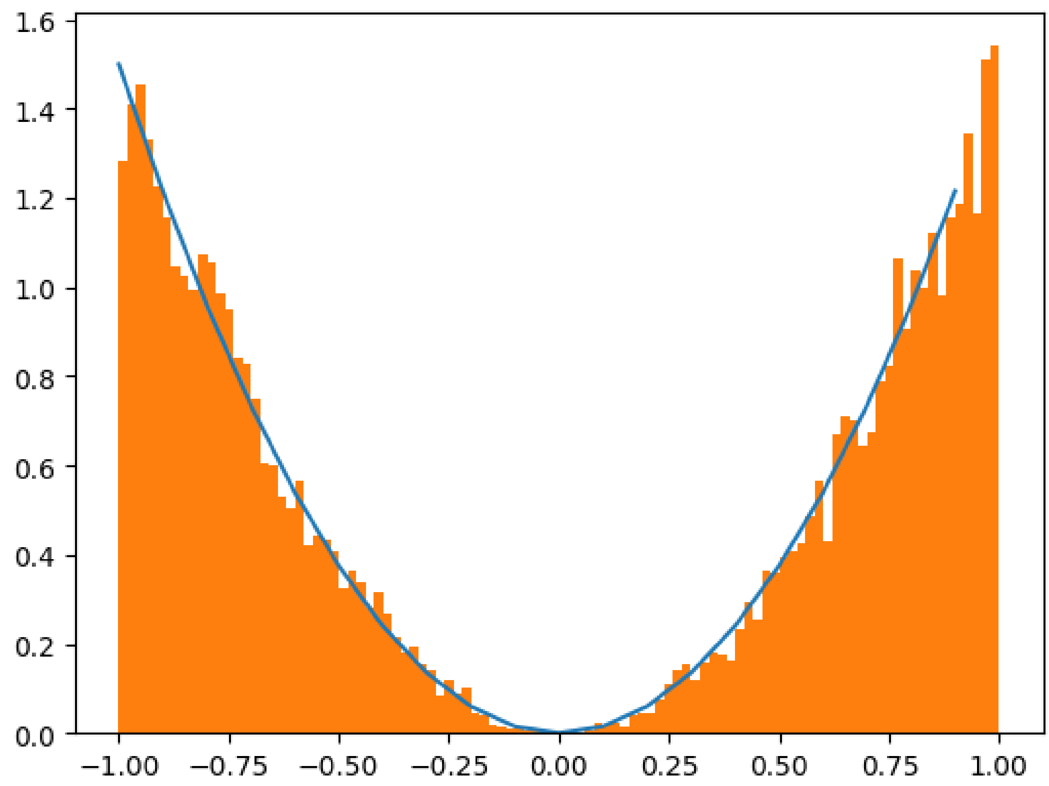
Plotar a pdf analitica e o histograma normalizado.

$$g(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}, -1<x<1$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=3x^2$$

$$c = max\frac{f(x)}{g(x)}=3x^2=3(3)^2=9$$

$$\frac{f(x)}{cg(x)}=\frac{1x^2}{9}$$



https://colab.research.google.com/drive/1eSme-r51V5ilfaeMjz_hEB3Dq4wP8TTv#scrollTo=ckhiMkPxqye2