8

Tverrsnittskonstanter

K. Bell: «Konstruksjonsmekanikk – Likevektslære» :

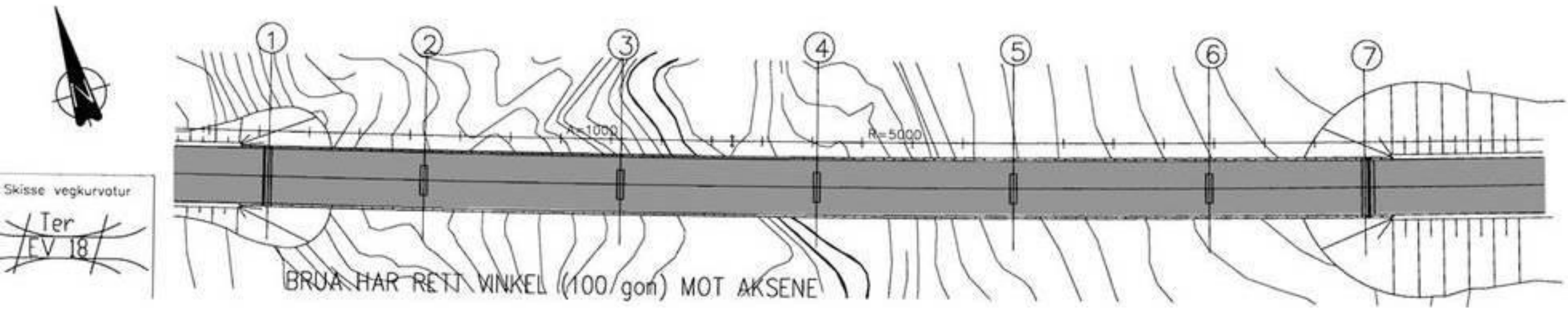
- Kapittel 10
  Avsnitt 10.1 – 10.2

Skjeggestad bru (E18)

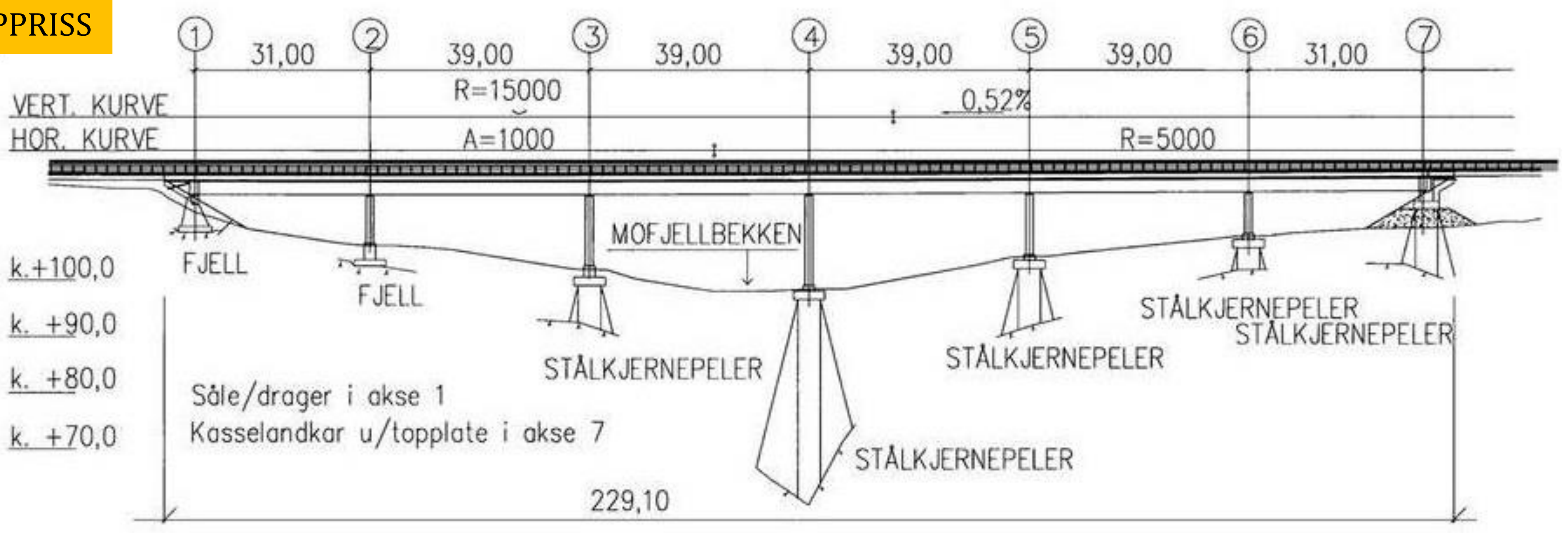
Skjeggestad bru (sørgående E18 ved Holmestrand) kollapset 2. februar 2015 pga. sideveis forskyvning av fundamentet under en av søylene. Sannsynlig årsak er kvikkleire-skred.

Skjeggestad bru (E18)

Grunnriss (Plan)

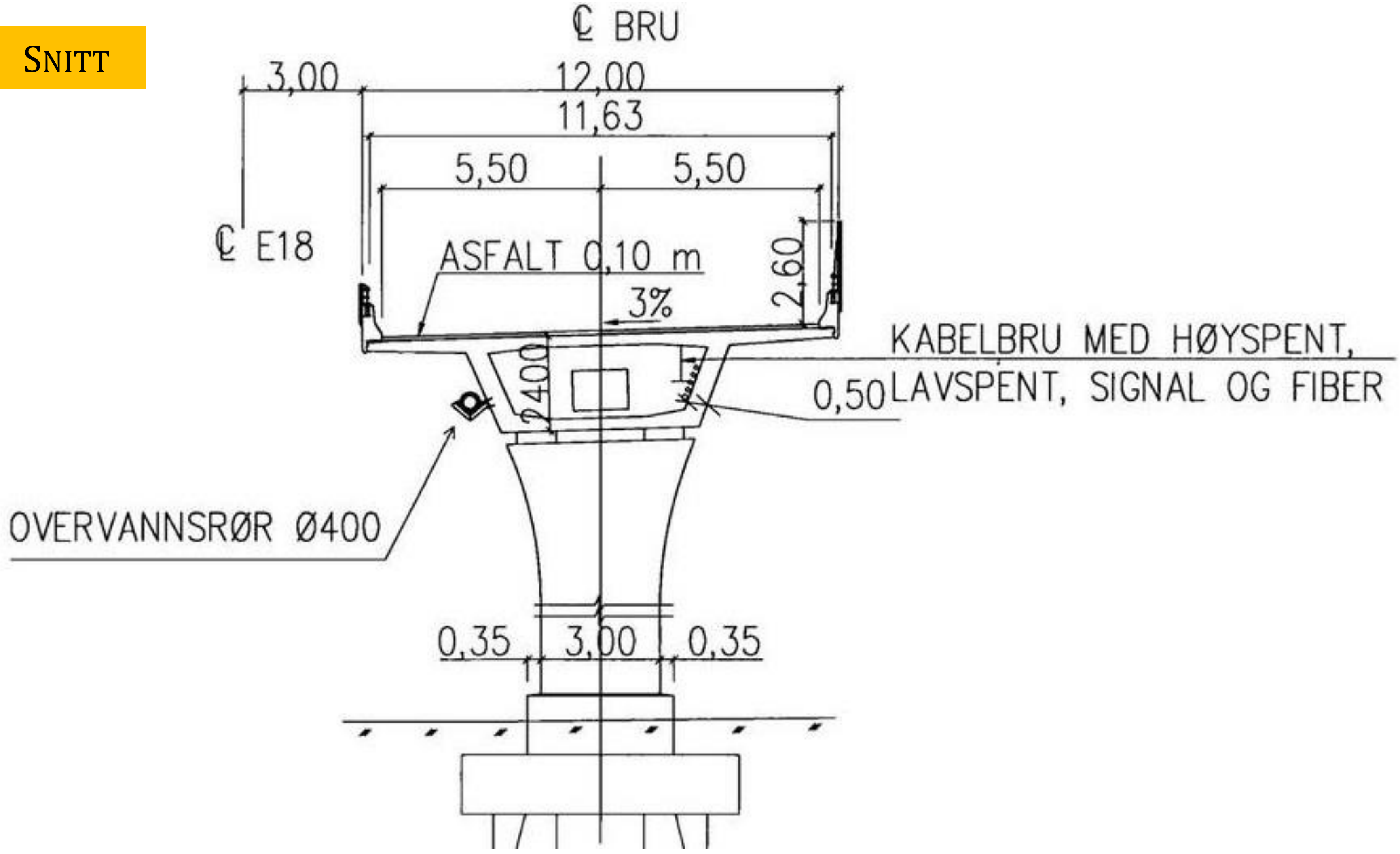


Oppriss



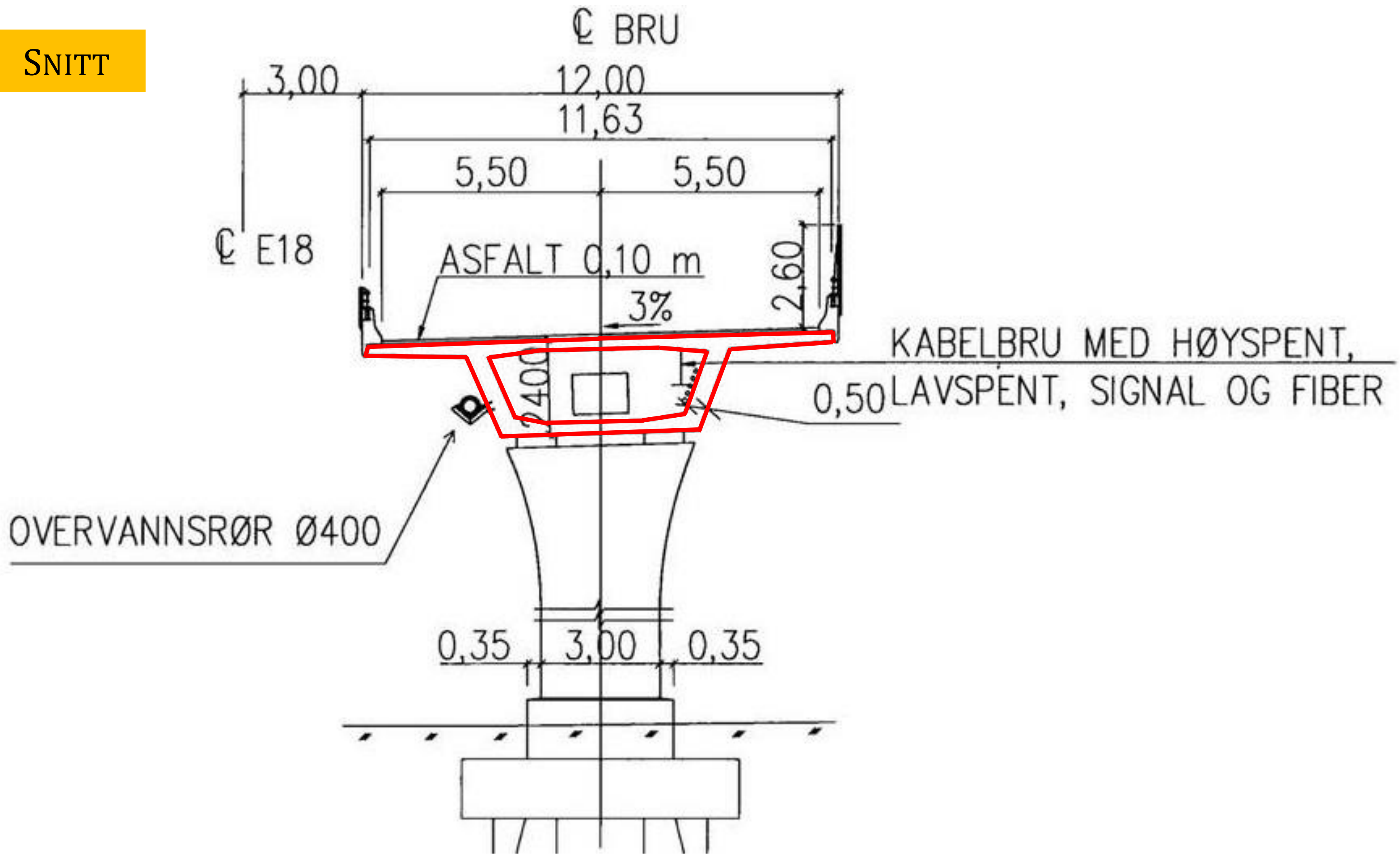
Skjeggestad bru (E18)

Snitt

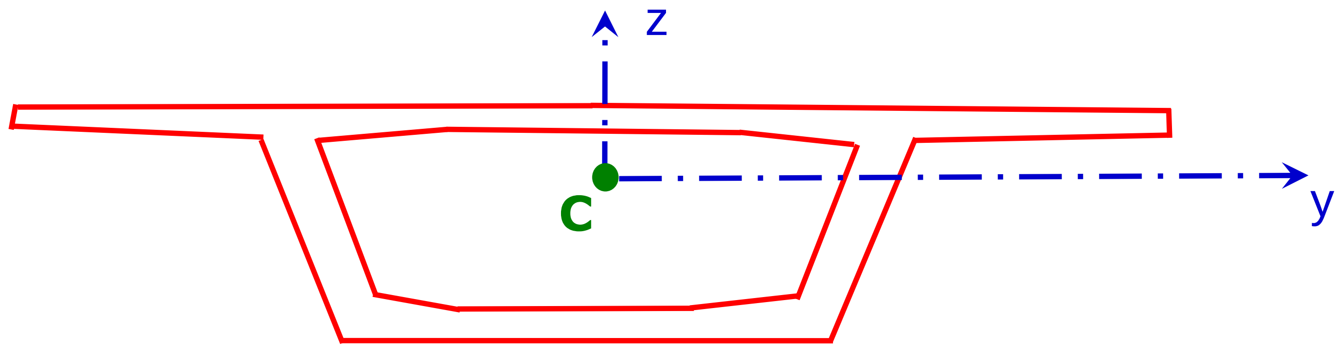


Skjeggestad bru (E18)

SNITT



Tverrsnitt til brubjelken



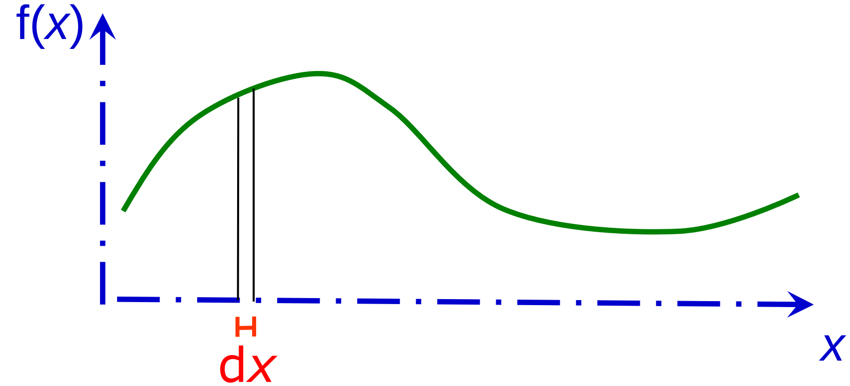
- Brubjelken spenner 39 meter mellom hver søyle
- Snittkrefter N, V og M pga. belastningen på brua (trafikk, egenvekt, vind) skal overføres gjennom brubjelken til søylene eller landkar
- Snittkreftene N, V og M gir spenninger i brubjelken
- Størrelsen på spenningene er avhengig av tverrsnittets <u>form</u> og <u>dimensjoner</u>
- Sentrale tverrsnittskonstanter (i elastisitetsteori) er:
  - **Areal** A $\Rightarrow$ Normalspenning pga N
  - **1. arealmoment** S_y (og S_z) $\Rightarrow$ Arealsenter C og skjærspenning pga V
  - **2. arealmoment** I_y (og I_z) $\Rightarrow$ Normalspenning pga M og nedbøyning
- Brubjelken (betong + armering = kompositt) må ha tilstrekkelig kapasitet for å ivareta kombinasjon av snittkreftene N, V og M

Dobbeltintegraler

Vanlig integral (en variabel *x*):

$$\int f(x)\,dx$$

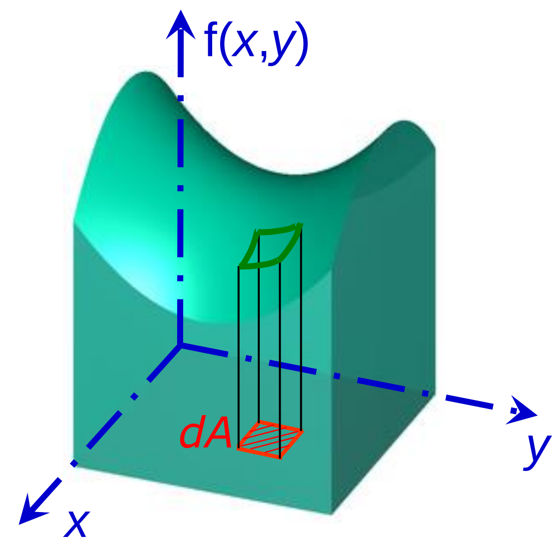
Integrerer en funksjon f(*x*) langs en koordinatakse (her: *x*-aksen)



Dobbeltintegral (to variable *x* og *y*):

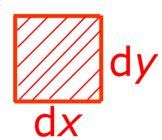
$$\int f(x,y)\,dA$$

Integrerer en funksjon f(*x*,*y*) over en plan flate (her: *xy*-planet)



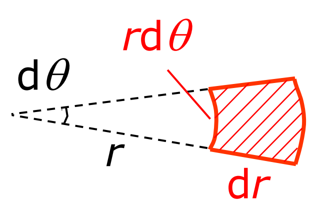
- Kartesiske koordinater:

  $dA = dxdy$



- Polarkoordinater:

  $dA = rdrd\theta$



Spesialtilfelle: f(*x*,*y*) = 1

$$\Rightarrow \int f(x,y)\,dA = \int dA = A$$

Arealmomenter

Areal («0. arealmoment»): $A = \int_A dA$

1. arealmoment: $S_y = \int_A z \, dA$ (om *y*-aksen)

$S_z = \int_A y \, dA$ (om *z*-aksen)

Anvendelse:

- Beliggenhet til arealsenter C
- Beregne skjærspenning τ pga. V (Mekanikk 2)

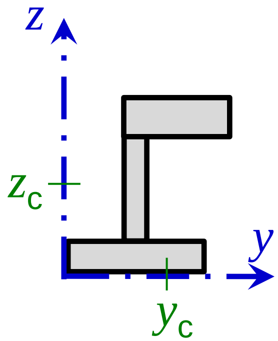
2. arealmoment: $I_y = \int_A z^2 \, dA$ (om *y*-aksen)

$I_z = \int_A y^2 \, dA$ (om *z*-aksen)

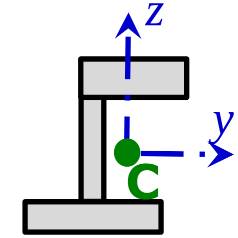
Anvendelse:

- Beregne normalspenning σ pga. M
- Beregning av deformasjoner (nedbøyning, vinkel)

Tverrsnittskonstanter

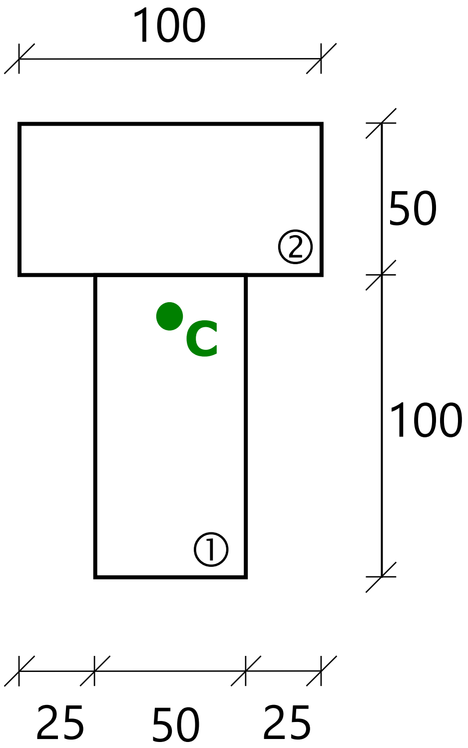


1. Regn ut arealet A av tverrsnittet
2. Velg et <u>foreløpig origo</u> for aksesystemet (y,z)
3. Bestem 1. arealmoment S_y og/eller S_z om <u>foreløpig</u> origo:
   - Sammensatt tverrsnitt: $S_y = \sum z_i \cdot A_i$ og $S_z = \sum y_i \cdot A_i$
   - Matematisk definisjon: $S_y = \int_A z dA$ og $S_z = \int_A y dA$
4. Bestem beliggenhet til arealsenter **C** relatert til origo i pkt. 2:
   - Koordinater (y_C , z_C): $y_C = \frac{S_z}{A}$ og $z_C = \frac{S_y}{A}$



5. <u>Flytt origo</u> til arealsenter **C**
6. Beregn 2. arealmoment I_y og/eller I_z om origo i **C**:
   - Sammensatt tverrsnitt: $I_y = \sum \left(I_{y,\text{lokal}} + e_z^2 \cdot A' \right)$ og $I_z = \sum \left(I_{z,\text{lokal}} + e_y^2 \cdot A' \right)$ (Steiner)
   - Matematisk definisjon: $I_y = \int_A z^2 dA$ og $I_z = \int_A y^2 dA$

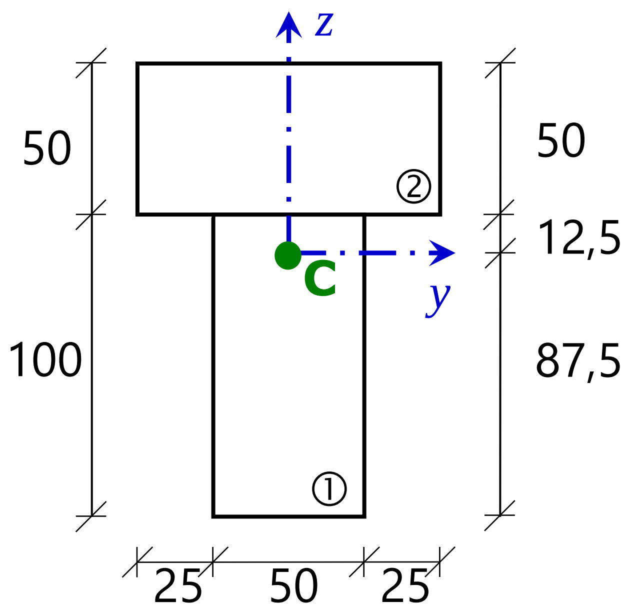
Eksempel: Arealsenter



Et T-formet tverrsnitt av tre er satt sammen av to rektangulære tverrsnitt ① og ② som begge har dimensjoner 50 mm × 100 mm (tilsvarer sånn ca 2″ × 4″).

Bestem beliggenheten til arealsenteret **C**.

Eksempel: Steiners teorem



Et T-formet tverrsnitt av tre er satt sammen av to rektangulære tverrsnitt ① og ② som begge har dimensjoner 50 mm × 100 mm (tilsvarer sånn ca 2″ × 4″). I et tidligere eksempel er det vist at arealsenteret **C** (og origo i yz-aksesystemet) ligger 87,5 mm over nedre kant av det sammensatte tverrsnittet.

Regn ut 2. arealmomentene I_y og I_z til det sammensatte tverrsnittet. Benytt Steiners teorem.

Beregning av I_y ved dobbeltintegrasjon (mer tungvint) er vist på neste lysark!

Eksempel: 2. arealmoment

Analytisk integrasjon av 2. arealmoment om z-aksen gjennom arealsenteret **C**:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$= \int_{A_1} z^2 dA + \int_{A_2} z^2 dA$$

$$= \int_{-25}^{25} \int_{-87.5}^{12.5} z^2 dz dy + \int_{-50}^{50} \int_{12.5}^{62.5} z^2 dz dy$$

$$= \int_{-25}^{25} \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{-87.5}^{12.5} dy + \int_{-50}^{50} \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{12.5}^{62.5} dy$$

$$= \int_{-25}^{25} 223,96 \cdot 10^3 dy + \int_{50}^{50} 80,73 \cdot 10^3 dy$$

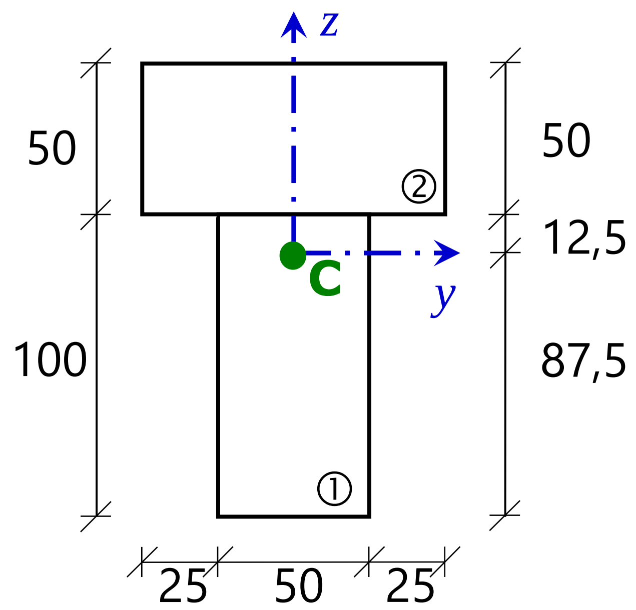
$$= 223,96 \cdot 10^3 \cdot [y]_{-25}^{25} + 80,73 \cdot 10^3 \cdot [y]_{-50}^{50}$$

$$= 223,96 \cdot 10^3 \cdot 50 + 80,73 \cdot 10^3 \cdot 100$$

$$= 11,20 \cdot 10^6 + 8,073 \cdot 10^6$$

$$= \underline{19,27 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}$$

Enklere: Bruk Steiners teorem



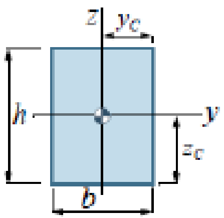
Som regel virker ytre last vertikalt slik at tverrsnittet bøyes om y-aksen – eller sagt på en annen måte: y-aksen skiller mellom delene av tverrsnittet som har strekk og trykk.

Når y-aksen er bøyningsakse, er I_y relevant for beregning av:

- Bøyespenninger σ pga. M
- Deformasjoner

Tverrsnittsparametre

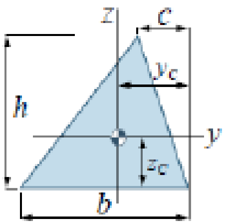
Formelark A2



Rektangel

$A = bh$ $\quad y_C = b/2$ $\quad z_C = h/2$

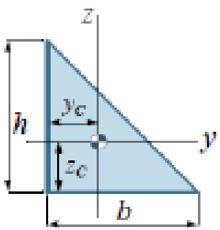
$$I_y = \frac{bh^3}{12} \qquad I_z = \frac{hb^3}{12}$$



Trekant

$A = bh/2$ $\quad y_C = (b+c)/3$ $\quad z_C = h/3$

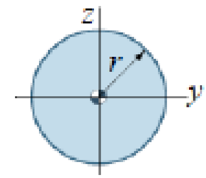
$$I_y = \frac{bh^3}{36} \qquad I_z = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$



Rettvinklet trekant

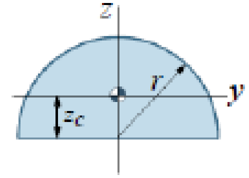
$A = bh/2$ $\quad y_C = b/3$ $\quad z_C = h/3$

$$I_y = \frac{bh^3}{36} \qquad I_z = \frac{hb^3}{36}$$



Sirkel

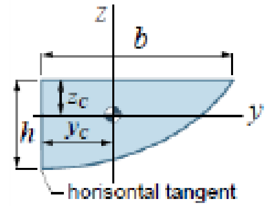
$A = \pi r^2$ $\qquad I_y = I_z = \pi r^4/4$



Halvsirkel

$A = \pi r^2/2$ $\qquad z_C = 4r/3\pi$

$$I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 \approx 0{,}1098\, r^4 \qquad I_z = \frac{\pi r^4}{8}$$

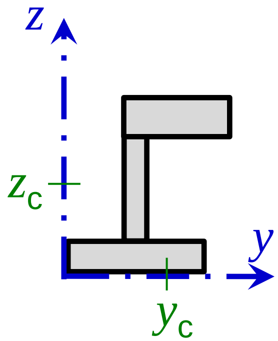


Konveks parabolsk flate

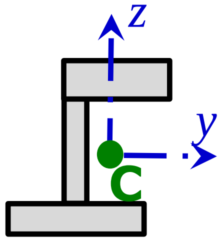
$A = 2bh/3$ $\quad y_C = 3b/8$ $\quad z_C = 2h/5$

$$I_y = \frac{8bh^3}{175} \qquad I_z = \frac{19hb^3}{480}$$

Tverrsnittskonstanter



1. Regn ut arealet A av tverrsnittet
2. Velg et <u>foreløpig origo</u> for aksesystemet (y,z)
3. Bestem 1. arealmoment S_y og/eller S_z om <u>foreløpig</u> origo:
   - Sammensatt tverrsnitt: $S_y = \sum z_i \cdot A_i$ og $S_z = \sum y_i \cdot A_i$
   - Matematisk definisjon: $S_y = \int_A z dA$ og $S_z = \int_A y dA$
4. Bestem beliggenhet til arealsenter **C** relatert til origo i pkt. 2:
   - Koordinater (y_C , z_C): $y_C = \dfrac{S_z}{A}$ og $z_C = \dfrac{S_y}{A}$



5. <u>Flytt origo</u> til arealsenter **C**
6. Beregn 2. arealmoment I_y og/eller I_z om origo i **C**:
   - Sammensatt tverrsnitt: $I_y = \sum\left(I_{y,\text{lokal}} + e_z^2 \cdot A'\right)$ og $I_z = \sum\left(I_{z,\text{lokal}} + e_y^2 \cdot A'\right)$ (Steiner)
   - Matematisk definisjon: $I_y = \int_A z^2 dA$ og $I_z = \int_A y^2 dA$

---

7. Videre beregninger:
   - Normalspenninger σ pga. M (bøyespenninger): $\sigma = \dfrac{M}{I_y} \cdot z$
   - Deformasjoner, f.eks.: $\Delta = \dfrac{5}{384} \dfrac{qL^4}{EI_y}$ (fritt opplagt bjelke med q = konstant)