7

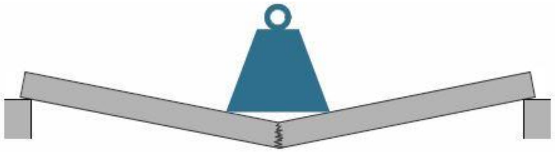
Introduksjon til fasthetslære

K. Bell: «Konstruksjonsmekanikk – Fasthetslære» :

- Kapittel 3
  Avsnitt 3.1, 3.3 – 3.4 (til side 65)

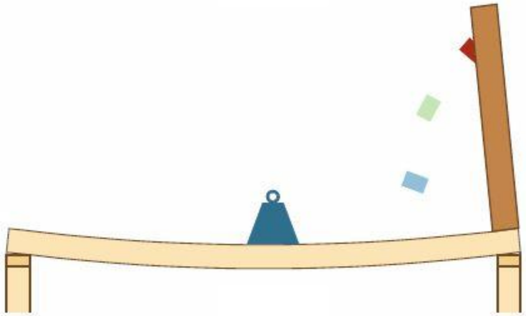
(Skjærspenning τ, skjærtøyning γ, skjærmodul G, kompresjonsmodul K og Lamés konstant λ er ikke pensum i TKT4118. Vi begrenser oss til normal-spenning σ og normaltøyning ε samt en-dimensjonal spenningstilstand. To- og tre-dimensjonal spenningstilstand kommer i TKT4122/TKT4123 Mekanikk 2)

Fasthetslære



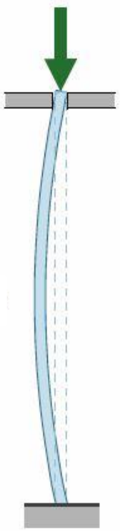
Er det fare for **brudd** i konstruksjonen/ komponenten?

Styrke ⇒ Flytespenning f_y



Er det akseptable **deformasjoner** i konstruksjonen/ komponenten?

Stivhet ⇒ Elastisitetsmodul E



Er det fare for at konstruksjonen/ komponenten kan **knekke**?

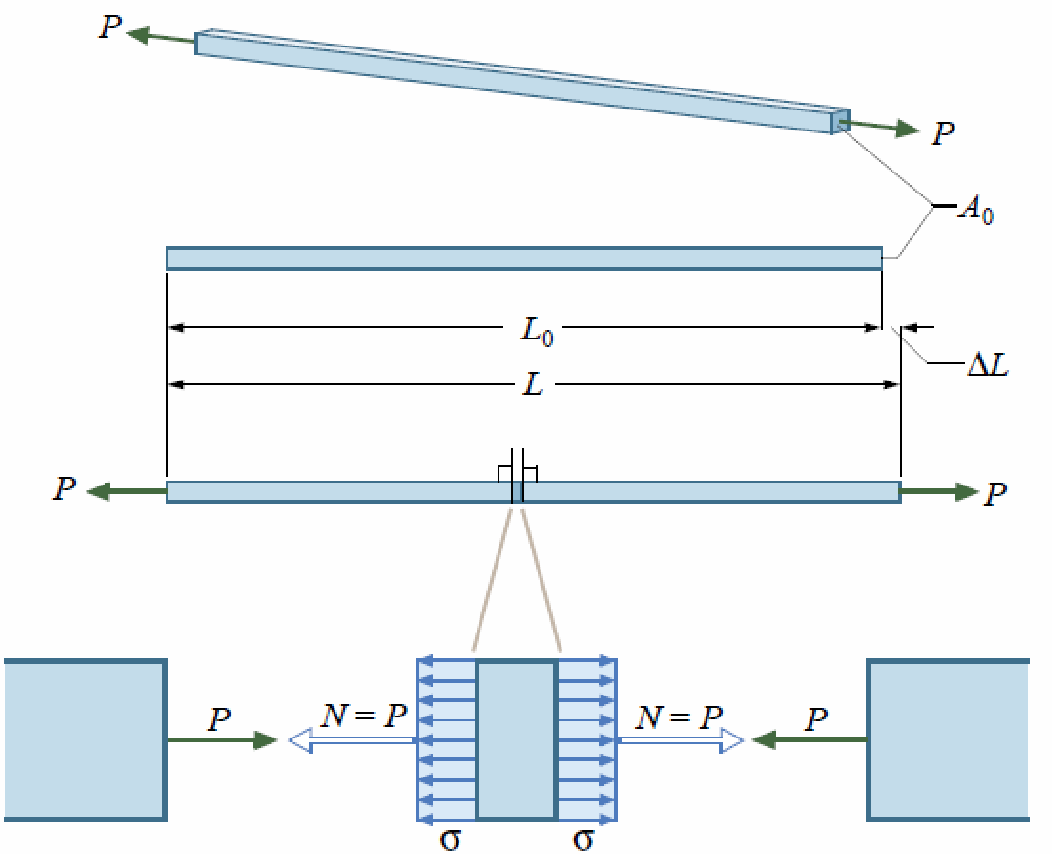
Stabilitet ⇒ Elastisitetsmodul E

FASTHETSLÆREN er verktøyet som gir svar på disse spørs-målene.

Nødvendig input er informasjon om:

- Lastvirkning (N-, V- og M-diagram)
  ⇒ Forelesn. kap. 6
- Materialoppførsel
  ⇒ Forelesn. kap. 7
- Geometri (tverr-snittet til kompo-nenten)
  ⇒ Forelesn. kap. 8

Spenning og tøyning



Spenning (normalspenning):

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A_0}}$$

Spenning har enhet **N/mm²** (= **MPa**)

Tøyning (lengdetøyning):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$$

Tøyning er **dimensjonsløs**

Kan evt. angis i **%** eller i **mm/mm**

Engelsk: Spenning = Stress
Tøyning = Strain

Materialtesting

To hovedtyper testmaskiner:

- Servohydrauliske
- Elektromekaniske

Måledata fra testmaskinen:

- Kraft
- Bakkeforskyvning

(www.zwick.no)

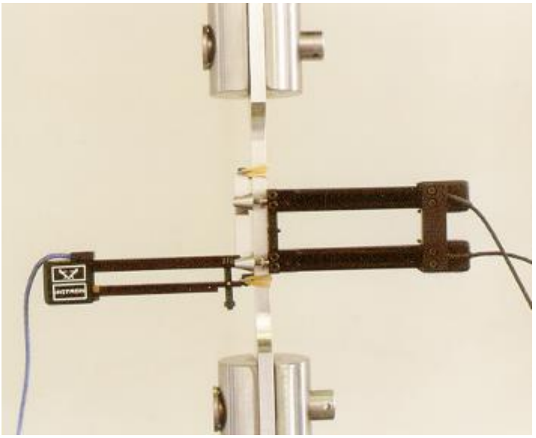
Tøyning kan bestemmes på flere måter:

- Ekstensometer (måler ΔL)
- Strekklapper (måler ε lokalt)
- Digitale foto (komplett tøyningsfelt)
- Bakkeforskyvning (unøyaktig ΔL)

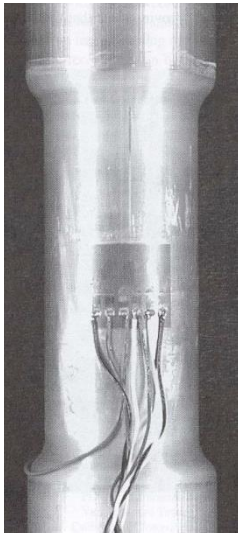
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$$

Spenning beregnes ved å dividere kraften *F* (målt av maskinen) med prøvestykkets udeformerte areal A_0

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A_0}}$$



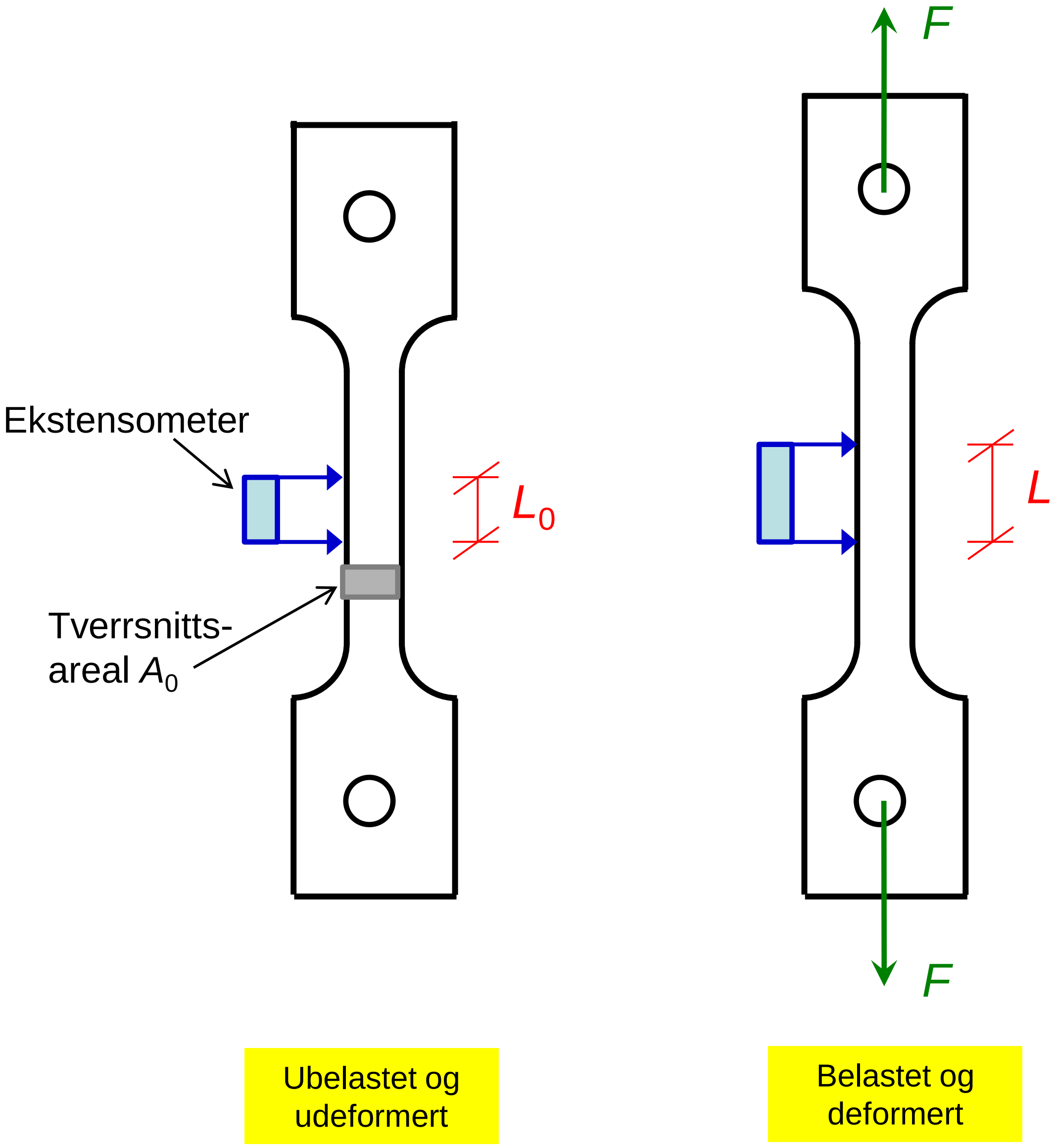
Ekstensometer



Strekklapp

(TKT4135 Materialmekanikk – Forelesning om strekktest)

Materialtesting



Spenning:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Tøyning:

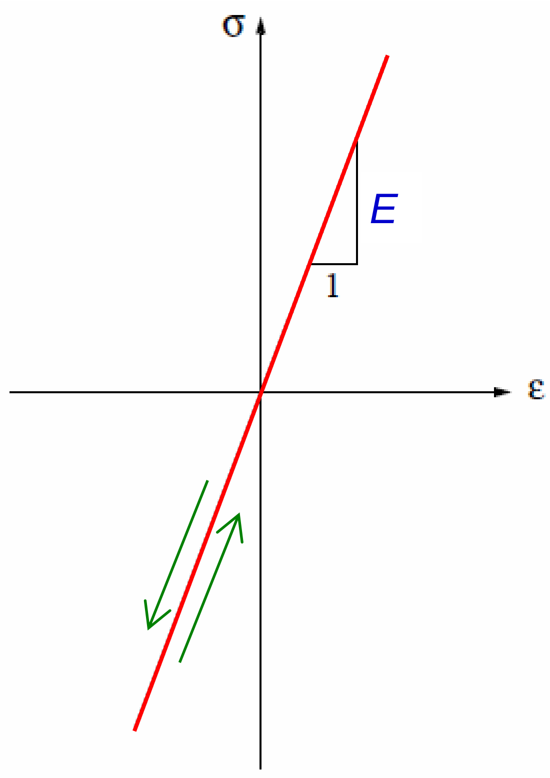
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Målelengden L_0 og arealet A_0 måles før forsøket

Ekstensometeret måler forlengelsen ΔL

Testmaskinen måler kraften F

Lineært-elastisk materialoppførsel



Karakteristisk for lineært-elastisk oppførsel:

- Lineær sammenheng mellom spenning og tøyning
- Reversibel prosess: Tilbake til null deformasjon hvis lasten fjernes
- Symmetri: Strekk = Trykk
- Materialer oppfører seg lineært-elastisk for små deformasjoner

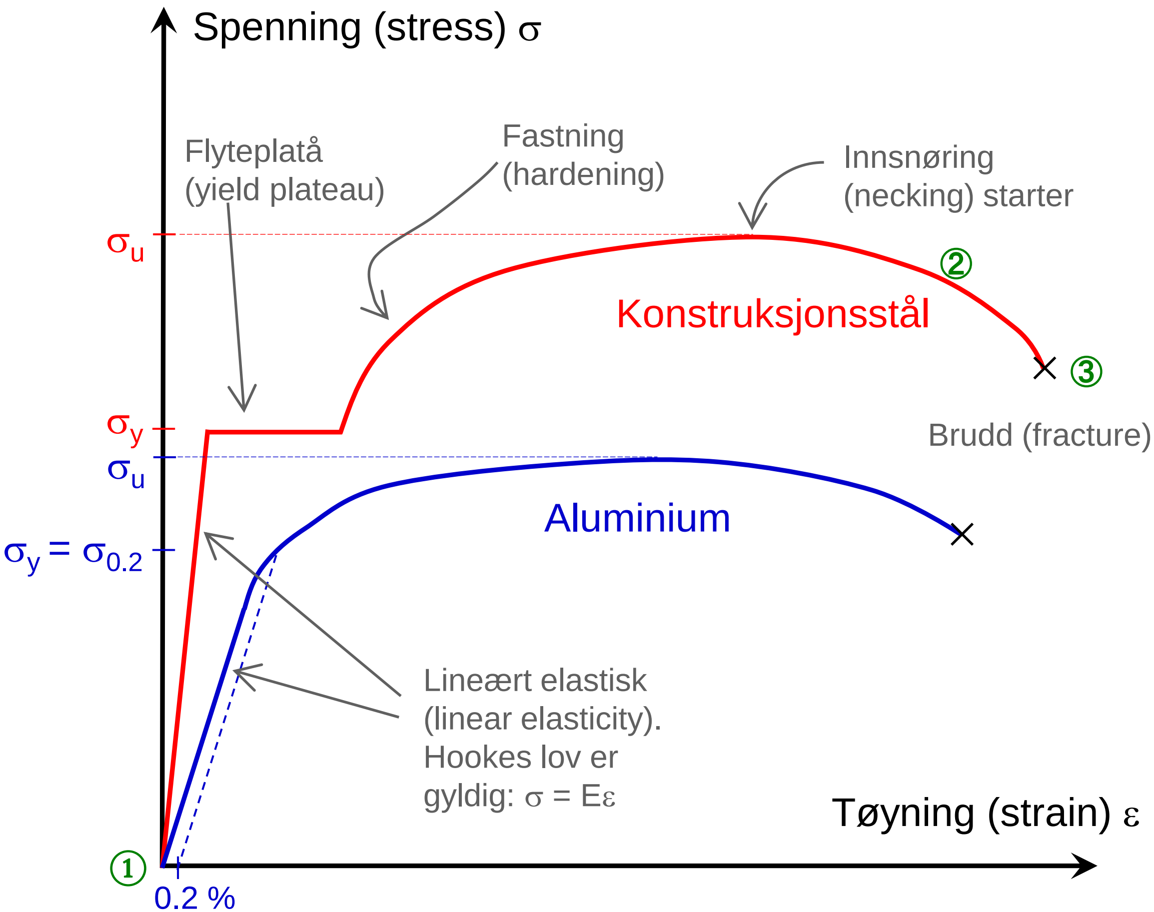
Hookes lov gir sammenhengen mellom tøyning og spenning i det lineært-elastiske området av spenning-tøyningskurven:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

Elastisitetsmodulen *E* har enhet **N/mm²** (evt. **MPa** eller **GPa**)

Engelsk:
Elastisitetsmodul = Young's modulus

Typisk materialoppførsel - metaller

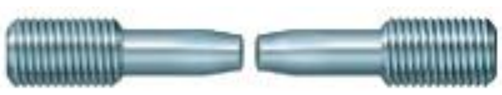


Flytespenning (yield stress):
- Betegnes σ_y eller f_y
- Slutten på elastisk område
- Ytterligere deformasjon er plastisk, dvs. permanent

Bruddspenning (ultimate stress):
- Betegnes σ_u eller f_u
- Får innsnøring, dvs. slutt på uniform deformasjon

① Udeformert

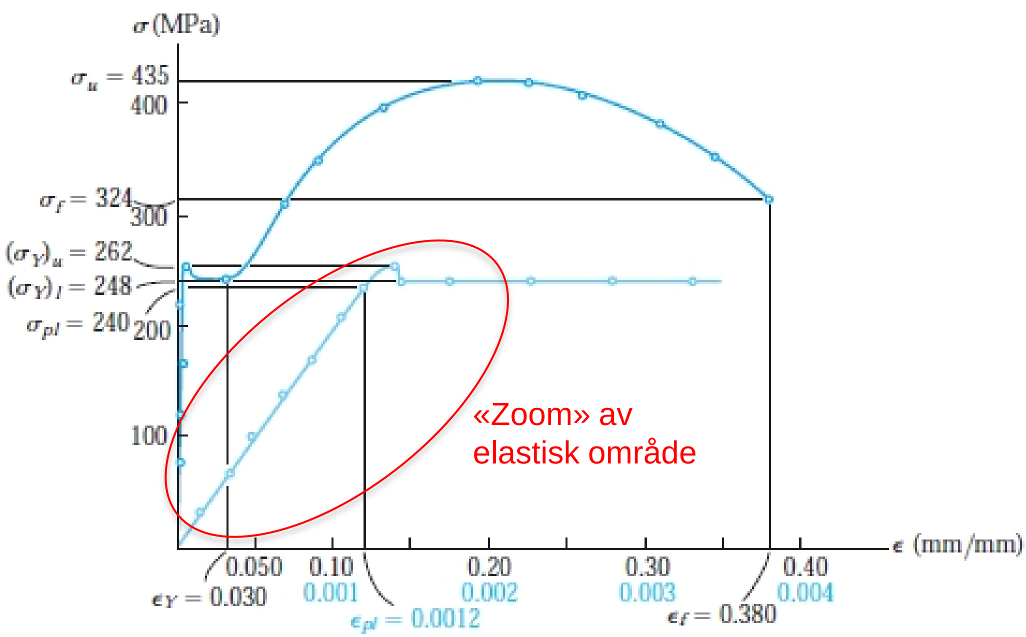
② Med innsnøring



③ Etter brudd

Spenning-tøyningskurver

Konstruksjonsstål



Stress-strain diagram for mild steel

Fig. 3–6

(Hibbeler: Mechanics of Materials)

Flytetøyningen for dette materialet er ca 0,0012 (dvs. 0,12%); se turkis skala. For konstruksjonsstål og andre duktile materialer er tøyningen ved brudd mange ganger høyere.

Ulike stålkvaliteter

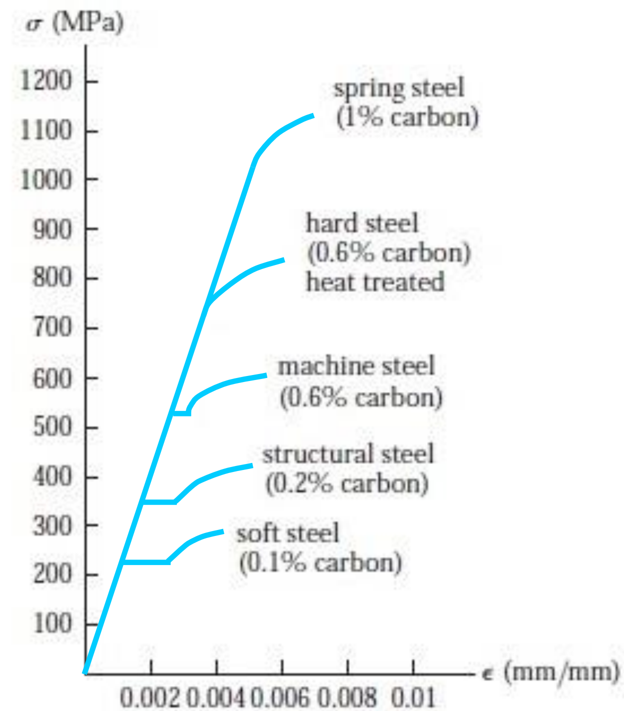


Fig. 3–13

(Hibbeler: Mechanics of Materials)

Betydelig forskjell i flytespenning f_y, men elastisitetsmodulen E er den samme for alle stålkvaliteter.

Spenning-tøyningskurver

Aluminium

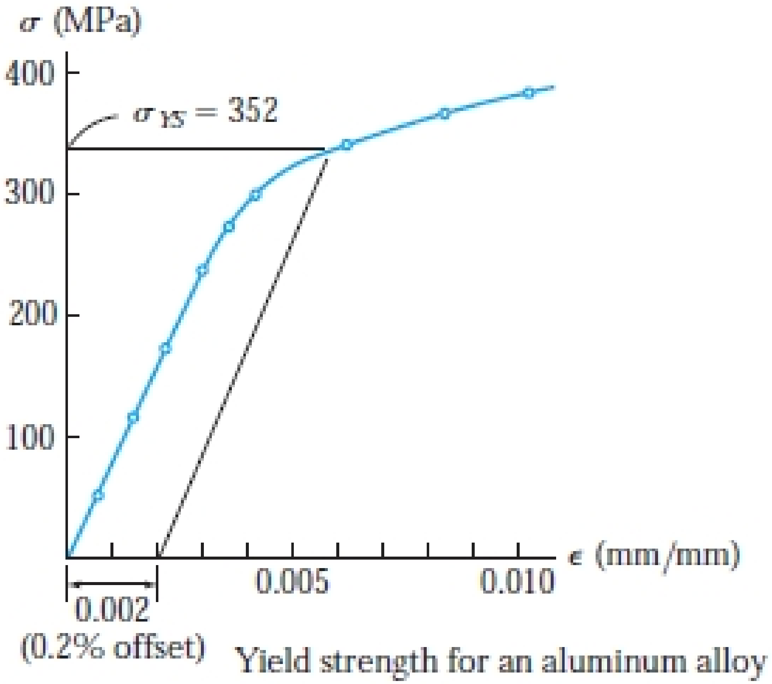


Fig. 3–7

(Hibbeler: Mechanics of Materials)

Gummi

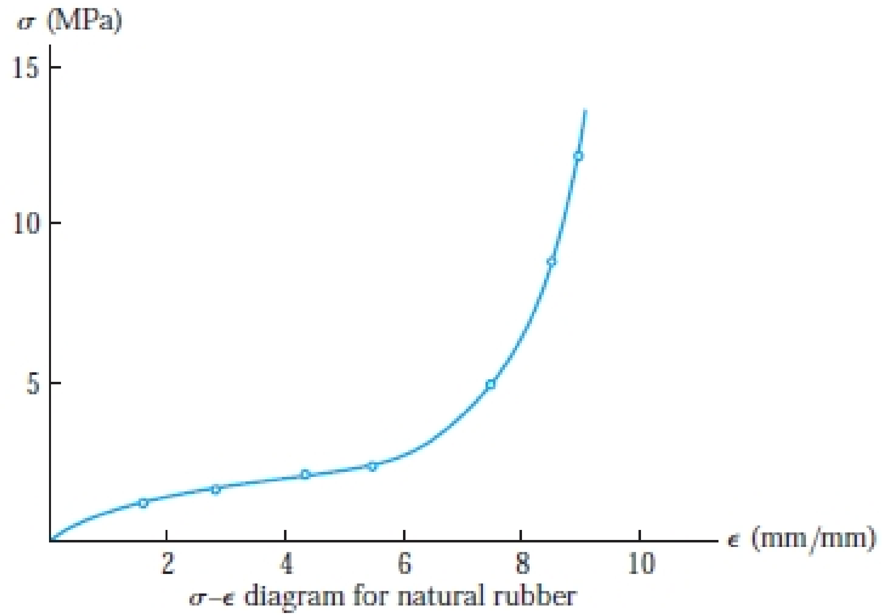


Fig. 3–8

(Hibbeler: Mechanics of Materials)

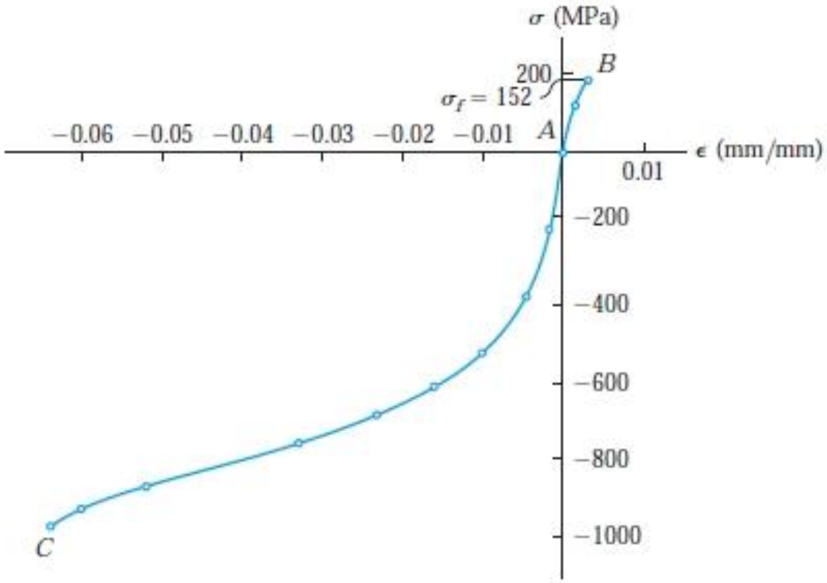
Mens konstruksjonsstål, se forrige lysark, har et flyteplatå, har aluminium og de fleste andre metaller en gradvis overgang fra elastisk til plastisk respons.

Karakteristisk for gummi er en meget lav initiell elastisitets-modul, en ikke-lineær sammenheng mellom spenning og tøyning, og all deformasjon er elastisk (dvs. reversibel).

Spenning-tøyningskurver

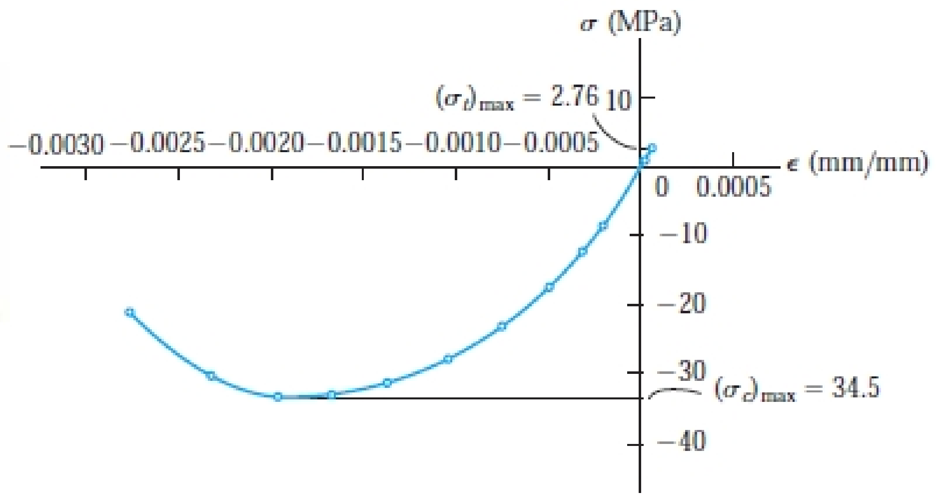
Støpejern

Betong



σ–ϵ diagram for gray cast iron

Fig. 3–9



σ−ϵ diagram for typical concrete mix

Fig. 3–11

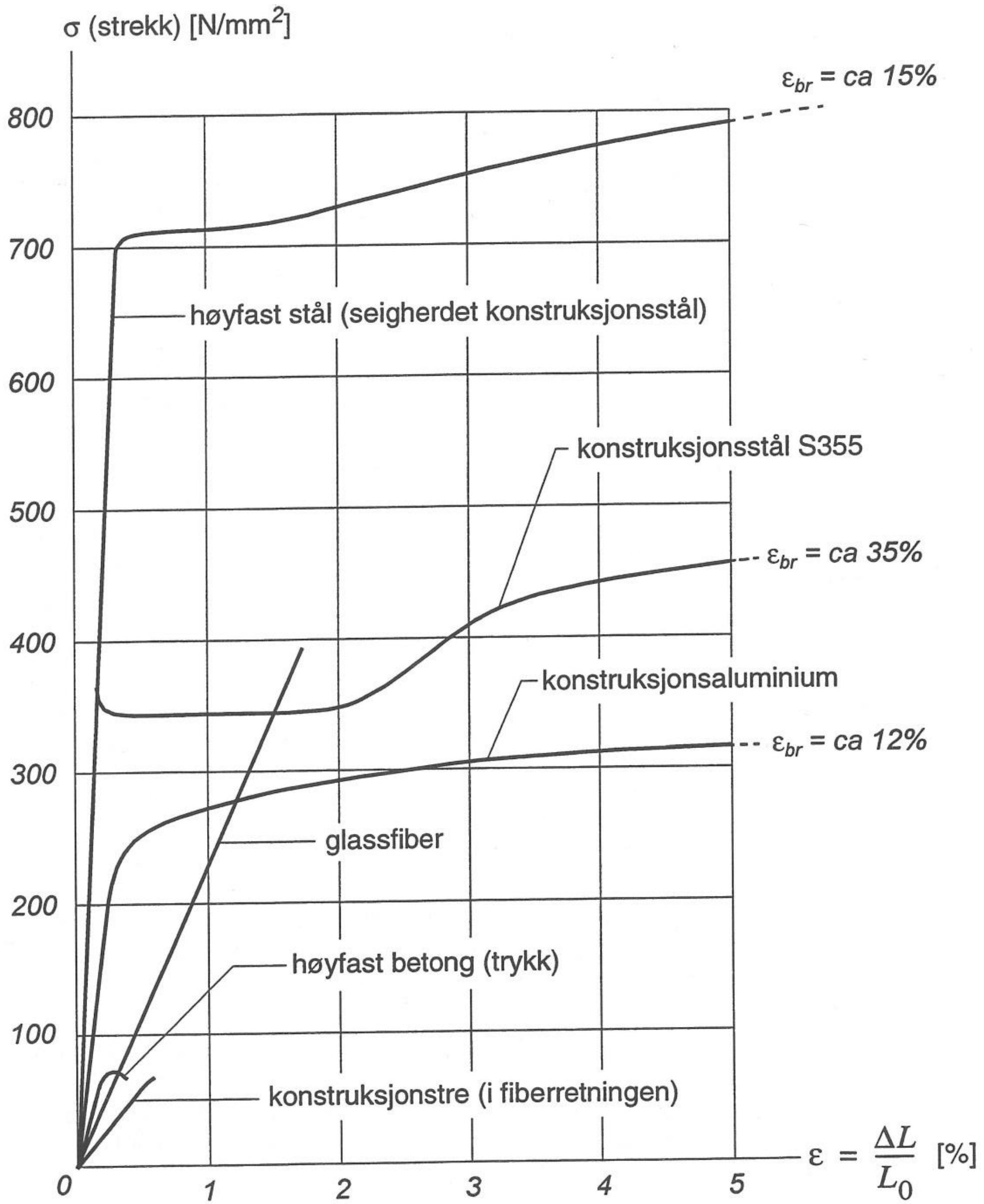
(Hibbeler: Mechanics of Materials)

(Hibbeler: Mechanics of Materials)

Støpejern er et sprøtt materiale som tåler mye i trykk, men som får brudd ved relativt lav spenning og tøyning i strekk. Støpejern er derfor uegnet som konstruksjonsmateriale.

Betong har nesten ikke fasthet i strekk, men betydelig styrke i trykk. Det må derfor legges inn armeringsjern på strekksiden i betongkonstruksjoner.

Spenning-tøyningskurver

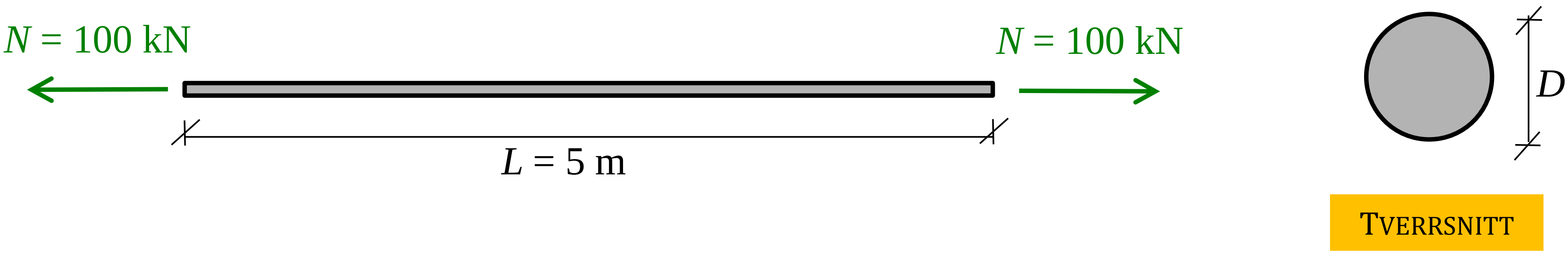


Observerer:

- Stål er stivt (høy E-modul) og sterkt (høy flytespenning)
- Metaller (aluminium og stål) er som regel duktile materialer (høy bruddtøyning)
- Glassfiber er et sprøtt materiale (lineært elastisk til brudd)
- Tre og betong er vesentlig mykere (lavere E) enn metaller
- Tre er anisotropt: Ulike egenskaper i ulike retninger (fiberretning, radielt)
- Betong har svært lav fasthet i strekk, men bra styrke i trykk

E-modul er en fysisk egenskap som ikke varierer mye mellom ulike legeringer av et gitt metall. Flytespenning er derimot en mekanisk egenskap som er avhengig av legeringsinnhold, varmebehandling osv.

Eksempel: Armeringsjern



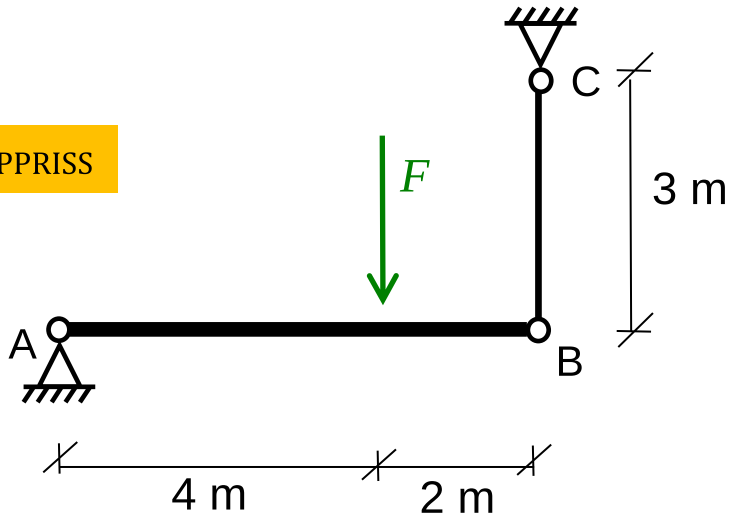
Et armeringsjern har lengde L = 5 m og diameter D = 20 mm, og er påkjent av en strekkraft på N = 100 kN.

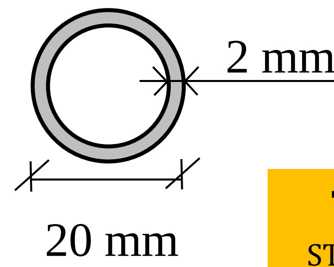
Data for stålmaterialet: Elastisitetsmodul E = 210 000 N/mm^2
Tverrkontraksjonstall ν = 0,3

- Beregn normalspenningen σ i armeringsjernet.
- Beregn normaltøyningen ε.
- Beregn forlengelsen ΔL.
- Beregn diameterreduksjonen ΔD.

Eksempel: Opphengt bjelke

OPPRISS





TVERRSNITT, STREKKSTAG BC

En uendelig stiv bjelke AB er hengt opp i et strekkstag BC. Staget har lengde L_s = 3 m, og er laget av et stålrør med ytre diameter D_y = 20 mm og veggtykkelse t = 2 mm. Stålet har flytespenning f_y = 355 N/mm² og elastisitetsmodul E = 210 000 N/mm².

Bjelken er belastet med en punktlast F som vist på figuren. Punkt B får en vertikalforskyvning Δ_B = 4,8 mm på grunn av lasten F.

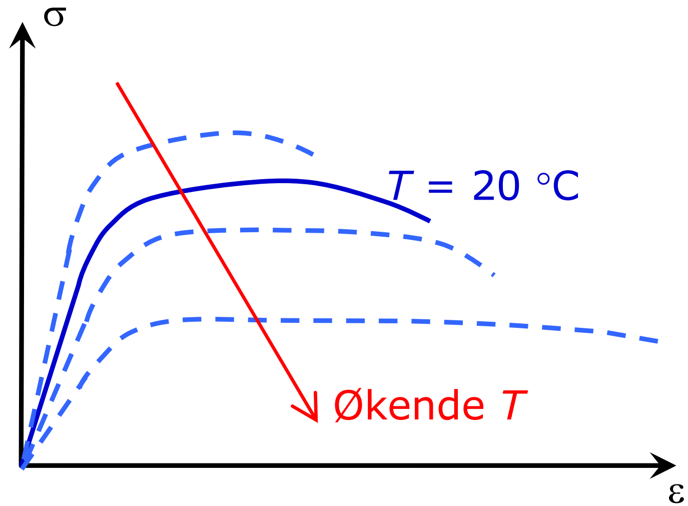
- Skisser deformasjonen til konstruksjonen.
- Hvor stor er lasten F ?
- Har staget tilstrekkelig kapasitet mot flytning?

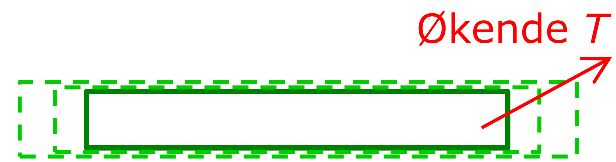
Temperatureffekter

Typisk respons ved endret temperatur *T* (metaller):

- **Stivheten** (E) avtar med økende *T*
- **Styrken** (f_y og f_u) avtar med økende *T*
- **Duktiliteten** (bruddtøyning) øker med økende *T*
- **Dimensjonene** (utstrekning) øker med økende *T*

«Smi mens jernet er varmt!»





Termisk tøyning: $\boxed{\varepsilon^T = \alpha \cdot \Delta T}$

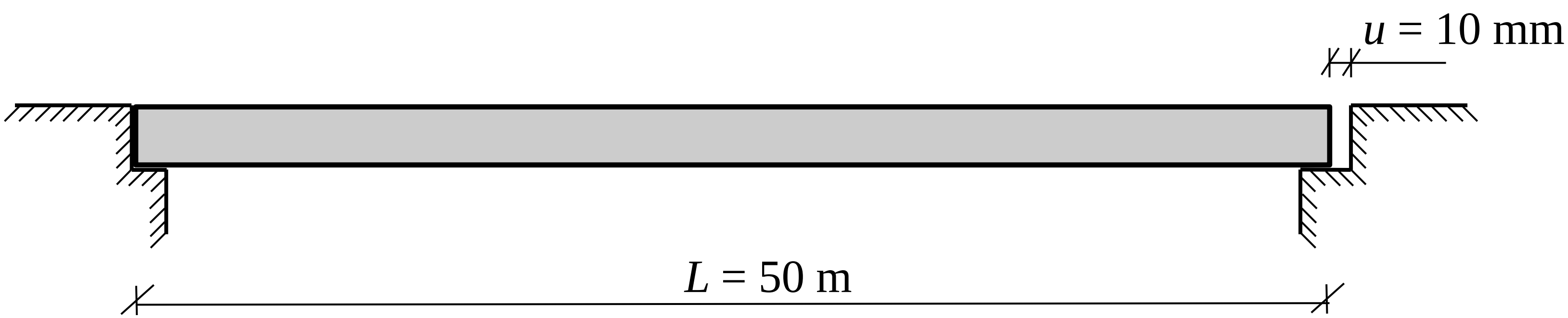
α = Termisk lengdeutvidelseskoeffisient [1/K]

For et isotropt materiale er den termiske tøyningen ε^T lik i alle retninger (lengde- og tverretning)

Det må tas hensyn til muligheten for brann (temperaturøkning som svekker bæreevne) i design av bygningskonstruksjoner

Det må tas hensyn til termisk utvidelse (ekspansjon kan gi tvangsspenninger) ved design av alle større konstruksjoner

Eksempel: Betongbru



En brubjelke av betong har lengde L = 50 m. Ved høyre landkar er det en ekspansjonsfuge med åpning u = 10 mm, se figuren.

Data for betong: Elastisitetsmodul E = 30 000 N/mm^2
Trykkfasthet f_c = 30 N/mm^2
Termisk lengdeutvidelseskoeffisient $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}

Hva skjer når brubjelken utsettes for en temperaturøkning ΔT = 60 °C?

Viktige relasjoner

Spenning (normalspenning): $\sigma = \dfrac{N}{A_0}$

Tøyning (lengdetøyning): $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0}$

Tverrtøyning (bredderetning): $\varepsilon_t = \dfrac{\Delta b}{b_0}$

Tilsvarende i tykkelsesretning

DEFINISJONER

Hookes lov (lineær elastisitet): $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Elastisitetsmodul [N/mm²]
(Young's modulus)

Tverrtøyning vs. lengdetøyning: $\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon$

Tverrkontraksjonstall [–]
(Poisson's ratio)

Termisk tøyning: $\varepsilon^T = \alpha \cdot \Delta T$

Termisk lengdeutvidelses-koeffisient [1/K]
(Coefficient of thermal expansion)

EMPIRISK

(Materialparametre er indikert med **blå** font)

Sann spenning og sann tøyning

Nominell spenning (ingeniørspenning):

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Refererer til udeformert areal A_0

Sann spenning (Cauchy-spenning):

$$\sigma_{sann} = \frac{F}{A}$$

Refererer til aktuelt (deformert) areal A

Nominell tøyning (ingeniørtøyning):

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Refererer til forlengelse ΔL relativt til udeformert lengde L_0

Sann tøyning (logaritmisk tøyning):

$$\varepsilon_{sann} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

Refererer til forlengelse dL relativt til deformert lengde L

$$\mathrm{d}\varepsilon_{sann} = \frac{\mathrm{d}L}{L} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{sann} = \int_{L_0}^{L} \frac{\mathrm{d}L}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

Rekkeutvikling av sann tøyning fra Rottmann:

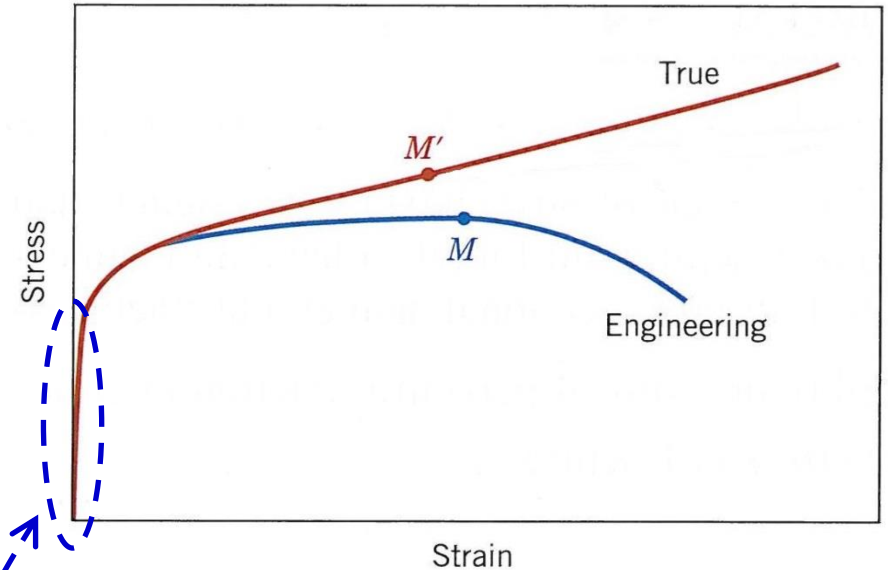
$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - ....$$

$$\varepsilon_{sann} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \left(\frac{L}{L_0} - 1\right) \underbrace{- \frac{1}{2}\left(\frac{L}{L_0} - 1\right)^2 + ...}_{\text{Neglisjerer høyereordens ledd}}$$

$$\approx \frac{L}{L_0} - 1 = \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} - 1 = \frac{\Delta L}{L_0} = \varepsilon$$

Rekkeutviklingen viser at $\varepsilon_{sann} \approx \varepsilon$ når $(L/L_0 - 1) << 1$, dvs. når $L \approx L_0$

Sann spenning og sann tøyning



(Callister & Rethwisch: Materials Science and Engineering)

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \qquad \sigma_{sann} = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad \varepsilon_{sann} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

(Innsnøring av prøvestykket starter ved punkt M / M')

I **elastisk område**, dvs. for små spenninger og tøyninger, er det neglisjerbar forskjell på sann spenning/tøyning og nominell spenning/tøyning. Den fysiske årsaken er at det er små geometriendringer, dvs. $A \approx A_0$ og $L \approx L_0$. Dette er tilfellet i **MEKANIKK 1** (og **MEKANIKK 2**).

Det er viktig å differensiere mellom sann og nominell spenning/tøyning i situasjoner hvor det er **store plastiske deformasjoner**. Dette er spesielt relevant i numeriske beregninger (elementmetoden) av plastisk respons.