

# 对拟阵的初步研究

浙江省杭州第二中学 刘雨辰



# 概览



- 第一部分：拟阵的基本概念
- 第二部分：拟阵的最优化问题
- 第三部分：一个任务调度问题
- 第四部分：拟阵实例
- 拓展部分：Shannon 开关游戏



吉祥慶

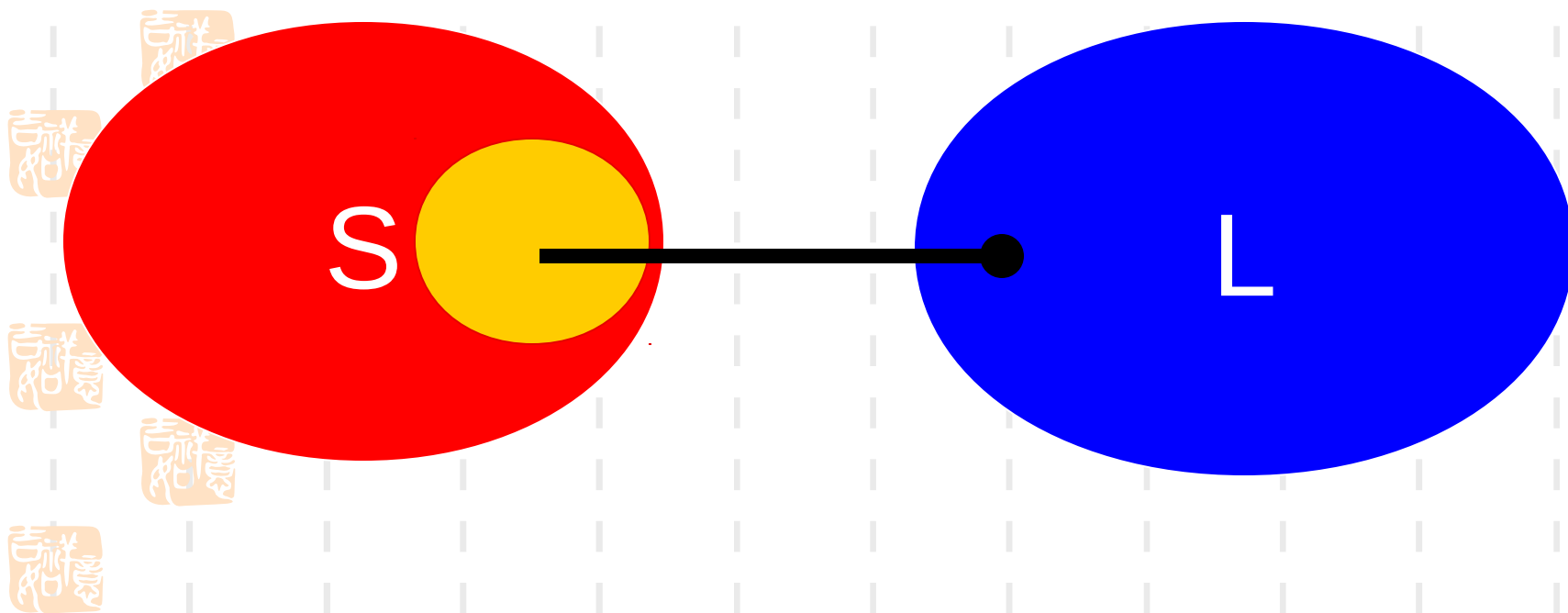
# 第一部分：拟阵的概念



拟阵是一个二元组  $M = (S, L)$

1、 $S$  是一个有限集。

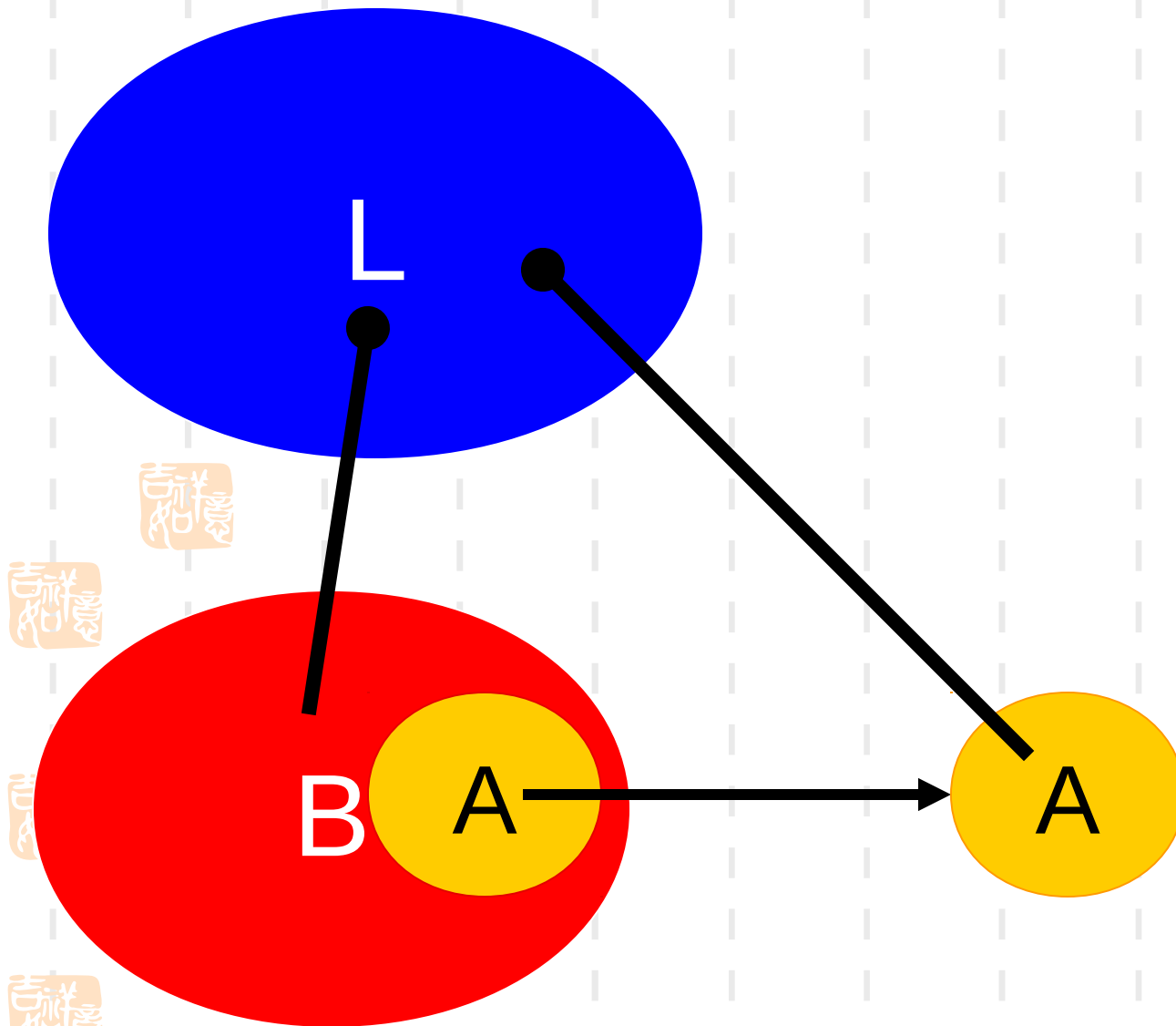
2、 $L$  是个以集合作为元素的集合，且它的元素必须是  $S$  的子集



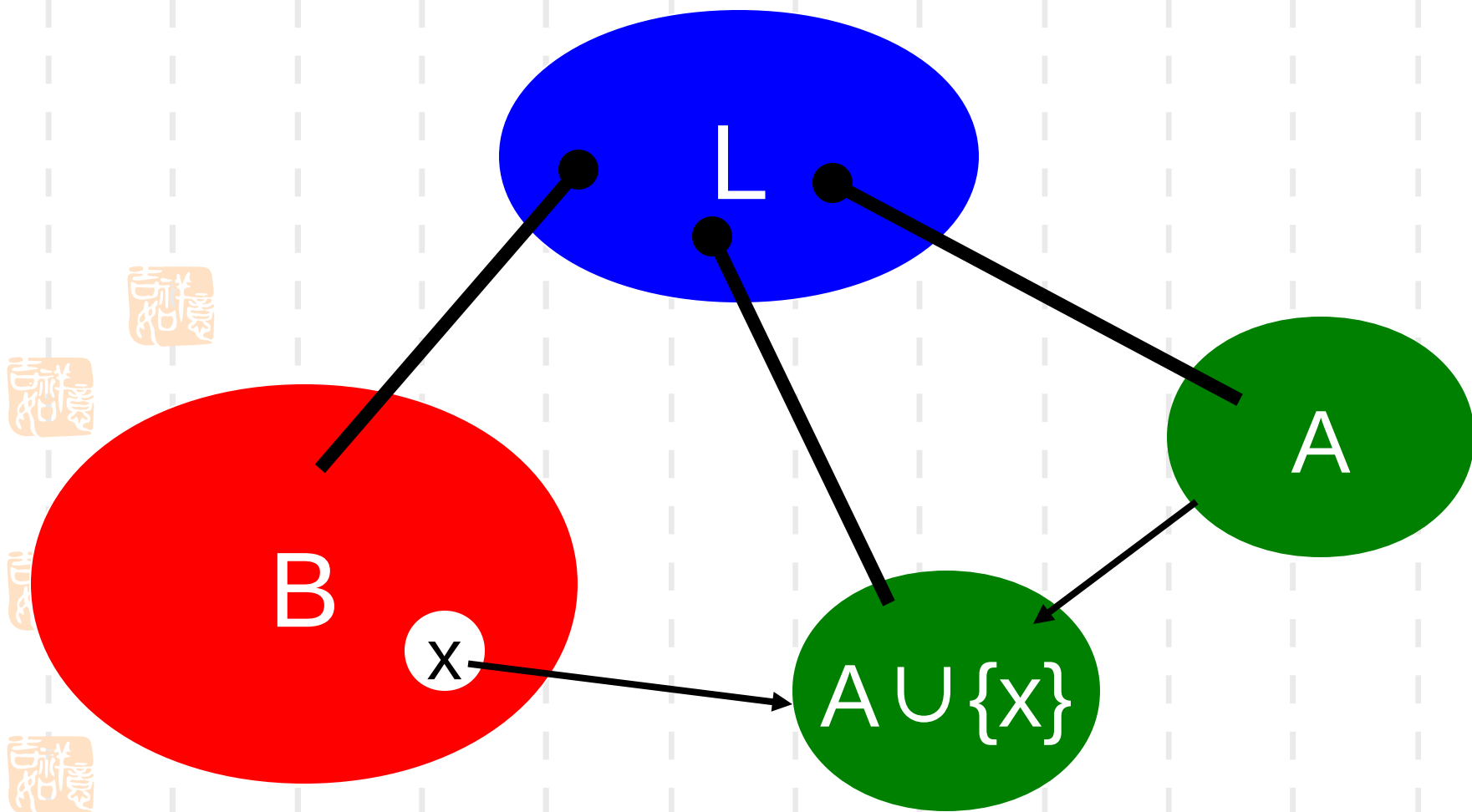
3、遗传性：对任意  $B \in L$

任意  $A \subseteq B$

有  $A \in L$



4、交换性：对任意  $A \in L, B \in L, |A| < |B|$   
存在一个  $x \in B - A$ ，使  $A \cup \{x\} \in L$



# 定义

拟阵是一个二元组  $M = (S, L)$ ，满足：

1、 $S$  是一个有限集。

2、 $L$  是由  $S$  的一些子集组成的有限非空集、遗传性：对任意  $B \in L$ ，任意  $A \subseteq B$  有  $A \in L$

4、交换性：对任意  $A \in L, B \in L, |A| < |B|$  存在一个  $x \in B - A$ ，使  $A \cup \{x\} \in L$

# 定义

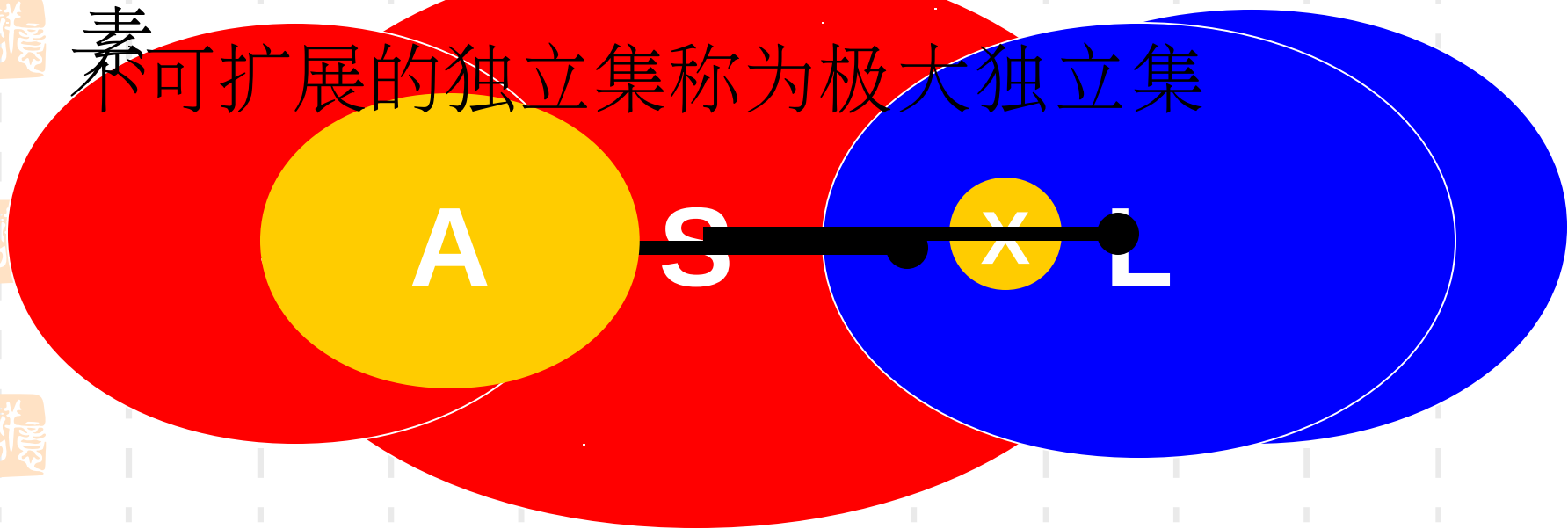
对于  $U \subseteq S$  如果  $U \in L$  那么称  $U$  为独立集

对于独立集  $A$ , 若存在  $x \in S - A$  满足

$A \cup \{x\} \in L$  则称  $A$  为可扩展

的  
满足此条件的  $x$  称为  $A$  的一个可扩展元

素  
不可扩展的独立集称为极大独立集





# 实例：图拟阵

考虑对于无向图  $G = (V, E)$

定义  $M = (S, L)$ :

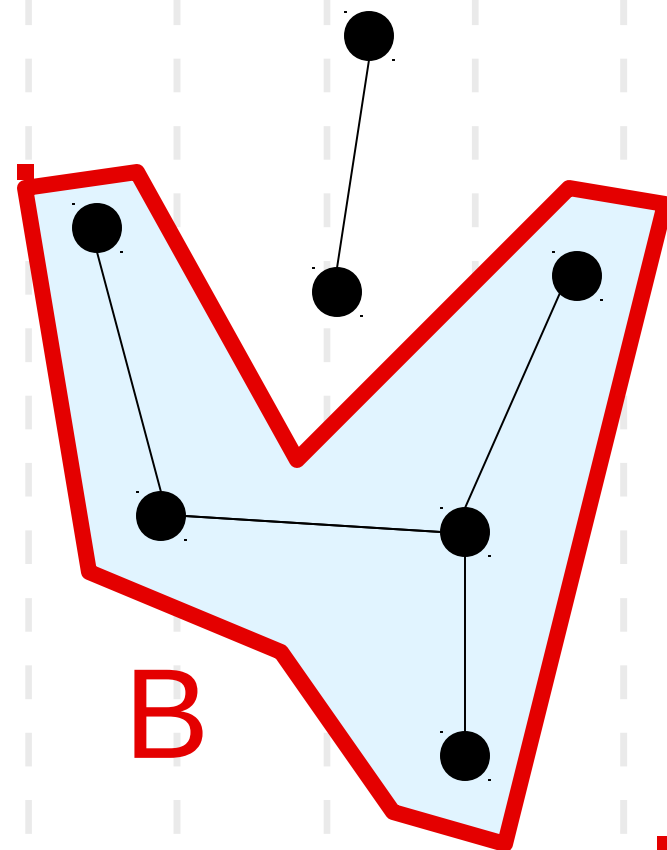
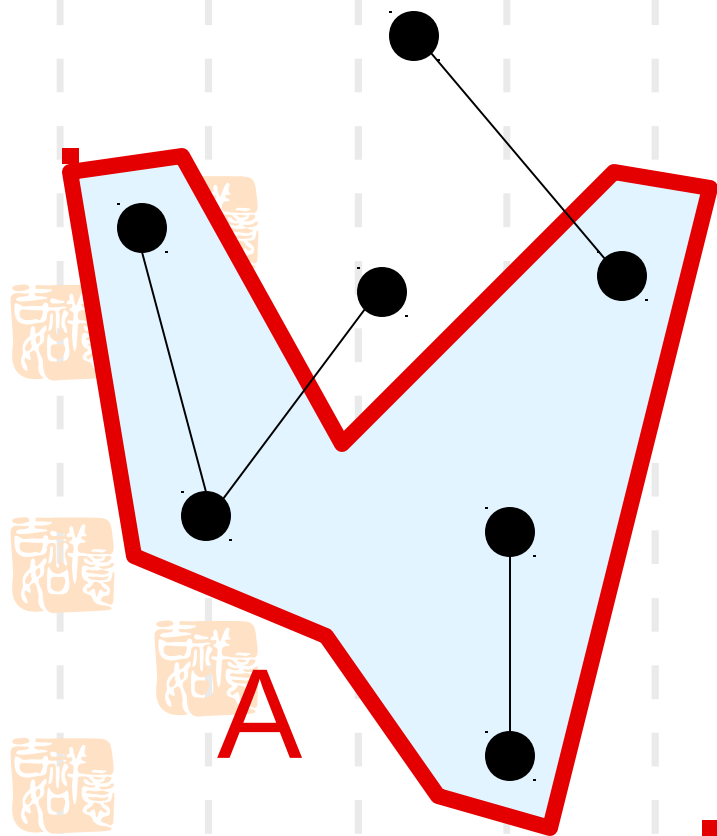
1、 $S$  是边集  $E$

2、 $L = \{x : x \subseteq E \text{ 且 } x \text{ 组成的图无环}\}$

无环的边集的子集必然无环，故满足遗传性

如果边集  $E$  中的边数远少于该分量在  $A$  中不连  
 通分量中的边数，那么边集  $E$  加入  $A$  中不形成环。  
 该边显然属于  $B-A$ 。交换性成立

$M$  是拟阵，称为图拟阵



吉祥如意

## 第二部分：拟阵上的最优化问题



# 问题提出

对于拟阵  $M = (S, L)$

$S$  的元素  $x$  有一个正整数权值  $w(x)$

$S$  的任意子集  $U$  的权值  $w(U) = \sum_{x \in U} w(x)$

目标：求权值最大独立集。

# 贪心算法

Greedy(M,w)

A := 空集

根据 w 按递减顺序对 S 排序

for 每个  $x \in S$  根据权  $w(x)$  的递减顺序 do

 if (  $A \cup \{x\} \in L$  ) then  $A := A \cup \{x\}$

 return A



# 时间复杂度



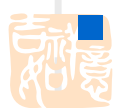
排序	$\Theta(n \log n)$
贪心	$\Theta(n)$ 次判断
若判断需	$\Theta(f(n))$
总复杂度	$\Theta(n \log n + n \times f(n))$



# 正确性证明

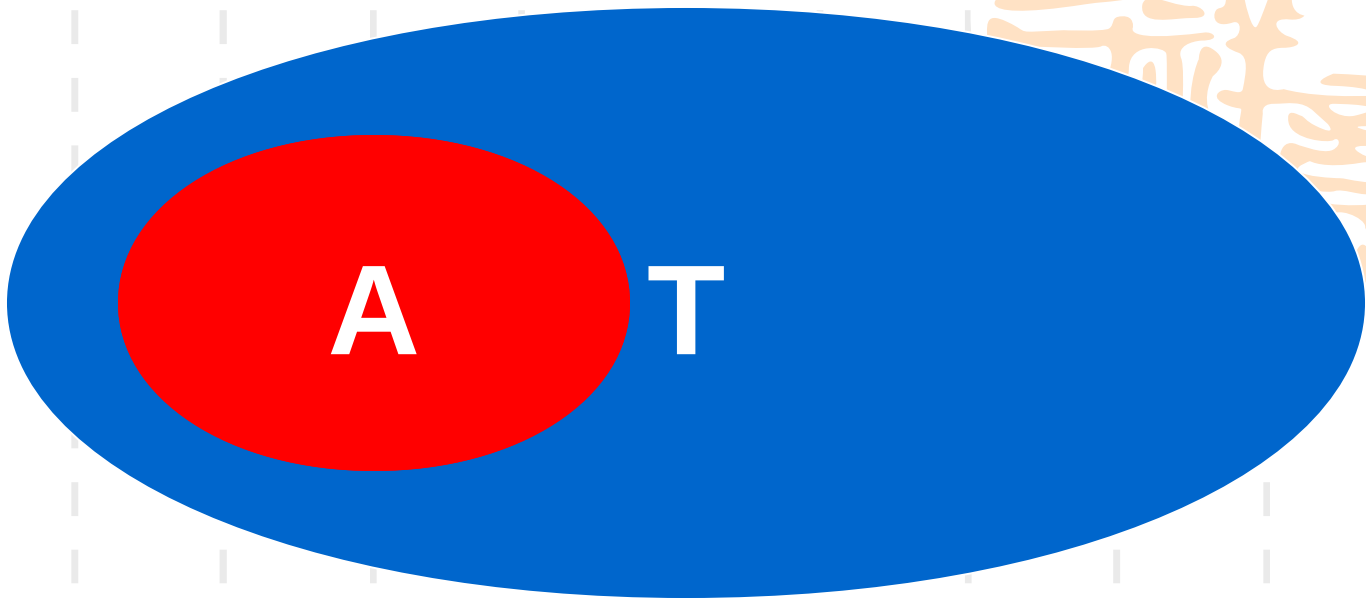


- 只需证明在算法的每一步  $A$  都是某个最优解的子集，那么当算法结束时  $A$  就是一个最优解
- 运用归纳思想
- 归纳基础：初始时  $A$  为空，满足要求
- 归纳：只需证明一个最优解的子集  $A$  经过一次循环后仍满足要求。





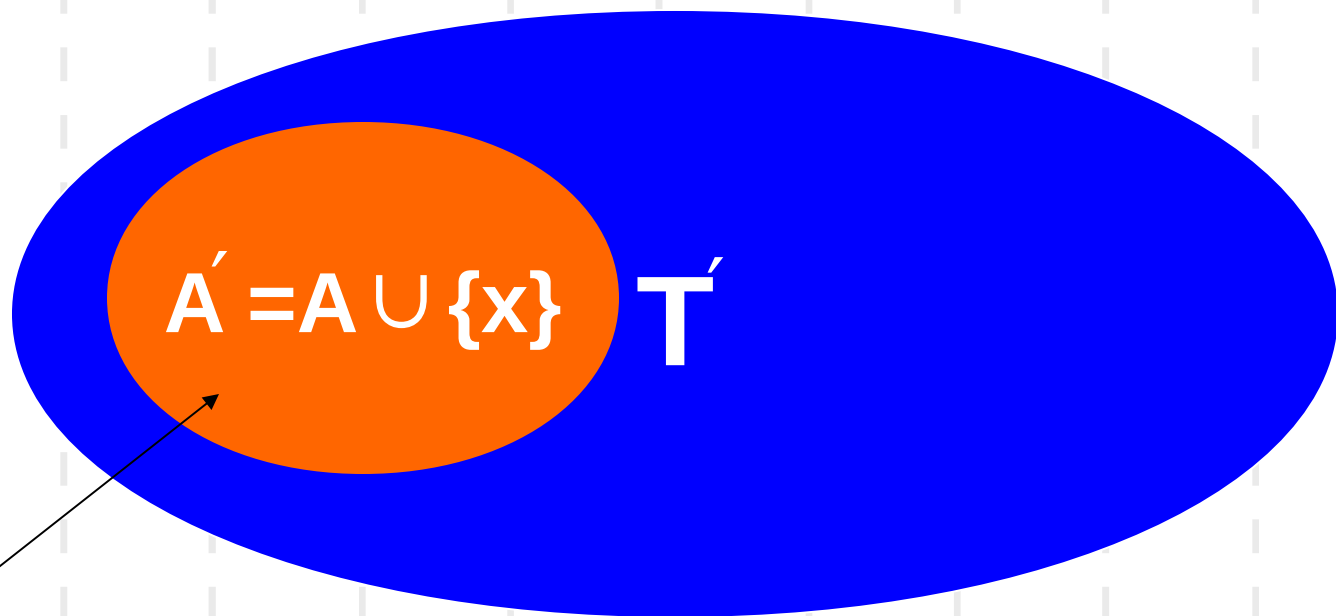
能使 **A** 扩展  
的最大元素



$$T' = T - \{y\} + \{x\}$$

$$w(y) \leq w(x)$$

$$w(T') \geq w(T)$$



T'



吉祥如意

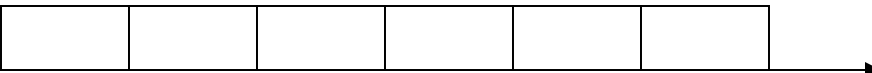
## 第三部分 任务调度问题



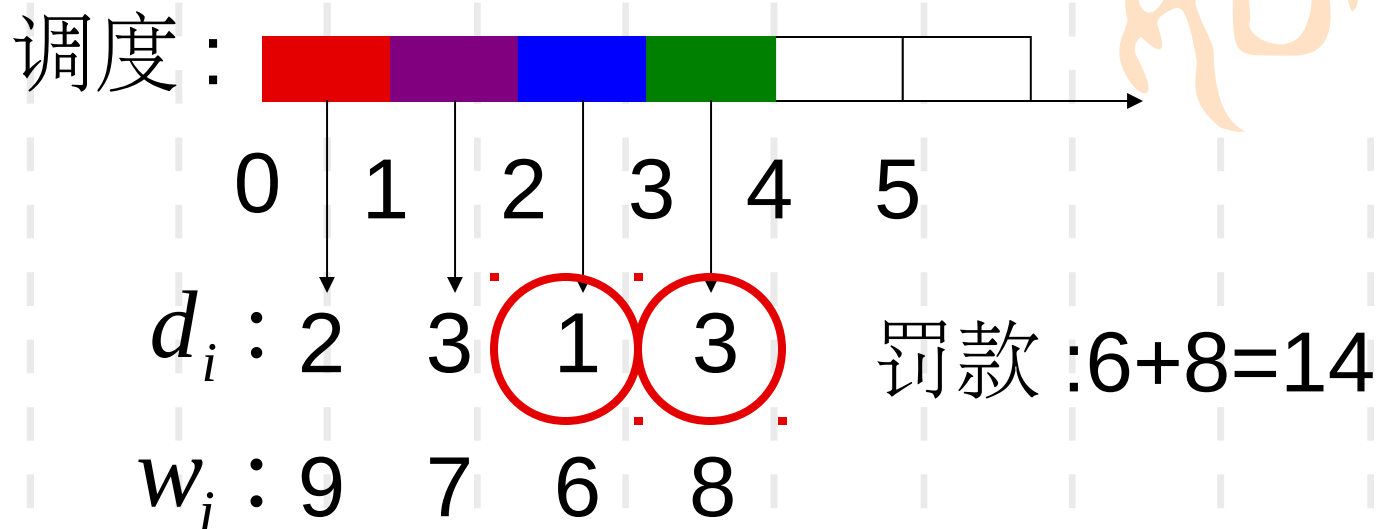
# 问题提出

- 给定一个单位时间任务的集合  $S$
- $S$  有  $n$  个任务  $1, 2, \dots, n$
- 对  $S$  的一个调度规定了各任务执行的顺序。
- 该调度第  $i$  个任务开始于时刻  $i-1$ , 结束于时刻

$S$ : 

调度:   
0 1 2 3 4 5

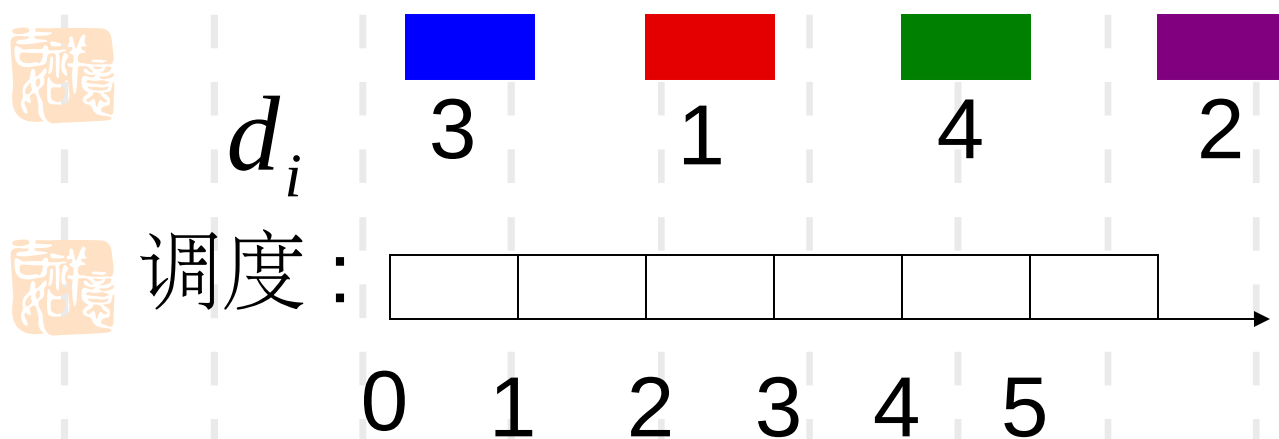
# 问题提出



有  $n$  个整数  $d_1, d_2, \dots, d_n$  ( $1 \leq d_i \leq n$ )， $d_i$  表示第  $i$  个任务的截止时刻。  
如果任务  $i$  的结束时刻超过截止时刻  $d_i$ ，则要交付罚款  $w_i$ 。  
求一个调度，使得罚款最少。  
 $w_i$  表示第  $i$  个任务的罚款。

# 分析

- 考虑这么一个问题：对于  $S$  的子集  $A$ ，是否存在调度方案使  $A$  中的任务都被完成。
- 将  $A$  按任务的截止时刻从小到大排序作为调度方案，如果按此调度无法全部完成  $A$  的任务，则其他任意调度方案都无法完成。



# 拟阵结构

- 对于给定的任务集合  $A$ ，能够有效地判断这些任务能否全部完成
- 能全部完成的任务集合  $A$  称为可行的

定义  $M = (S, L)$

$S$  就是所有任务的集合

$L = \{x : x \text{ 是 } S \text{ 的子集且 } x \text{ 是可行的}\}$

吉祥慶

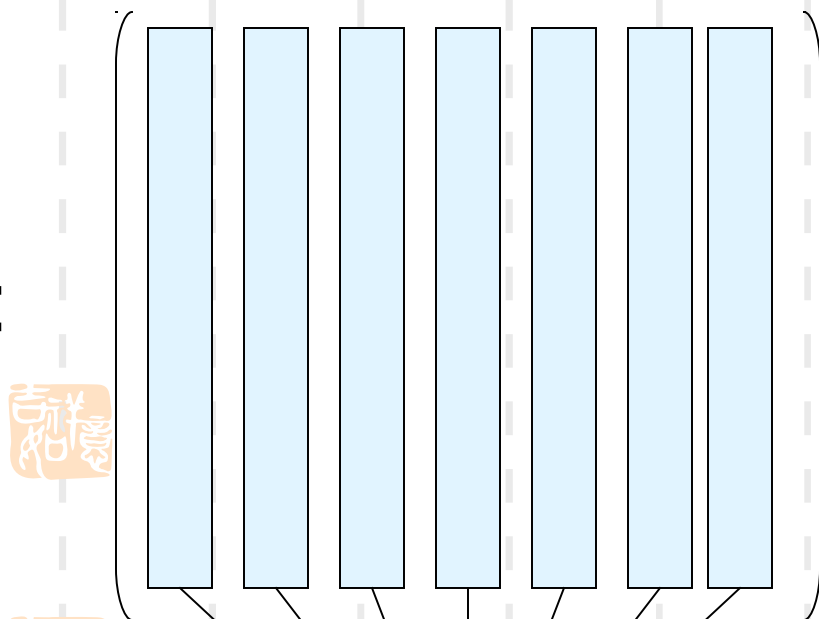
## 第四部分：拟阵实例



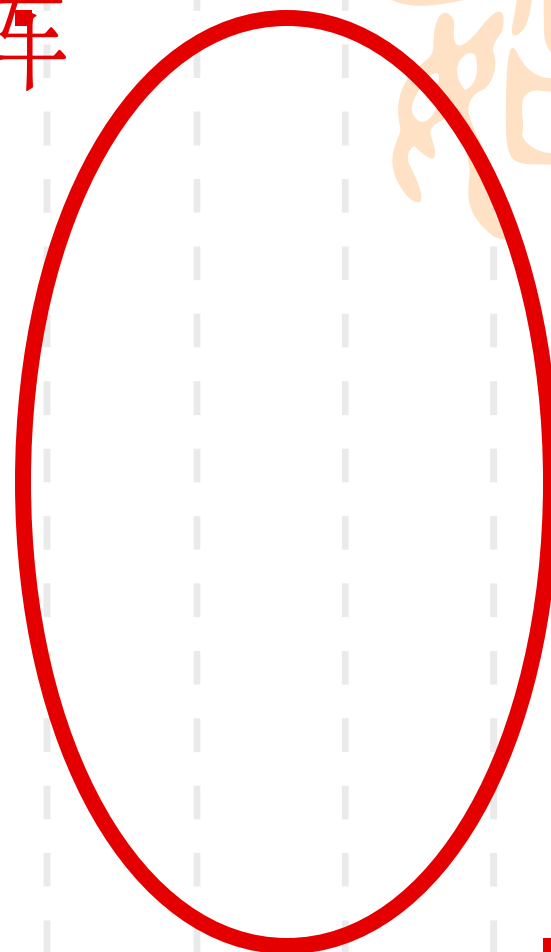
# 线性拟阵

吉祥如意

T:



S

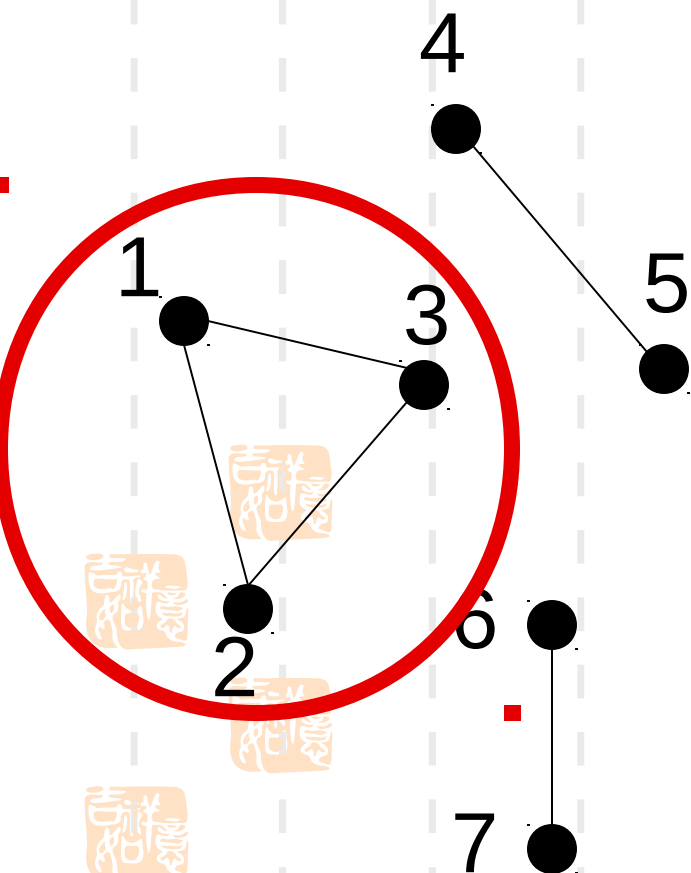


U

线性无关

.

# 图拟阵和线性拟阵



$G=(V,E)$

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	-1	0	-1	0
3	-1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	-1
6	0	0	1	0	0
7	0	0	-1	0	0

关联矩阵



# 图拟阵和线性拟阵

吉祥如意

图拟阵

线性拟阵

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

# 拓展部分 :Shannon 开关游戏浅 谈



总结

拟阵

遗传性

交换性

本

构造

相辅相成

反证

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

吉祥如意

# 总结

吉祥如意

最小生成树问题

任务调度问题

线性无关

共性 → 拟阵

拟阵很美



吉祥

谢谢

吉祥

吉祥

吉祥

吉祥

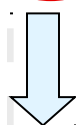
吉祥

吉祥

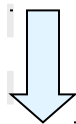
# 最小化问题转化为最大化问题

最小化问题  $\longrightarrow$  最大化问题

(12 -3 **19** 7 5 8)



(-12 3 -19 -7 -5 -8) + +1



(8 23 1 13 15 12)

