



模线性方程的应用

—— 用数论方法解决整数问题



引言

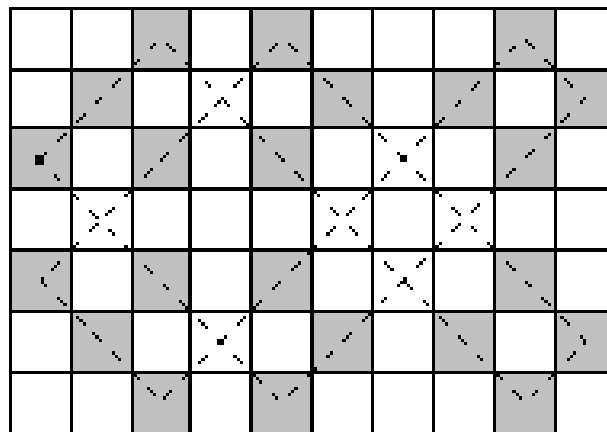
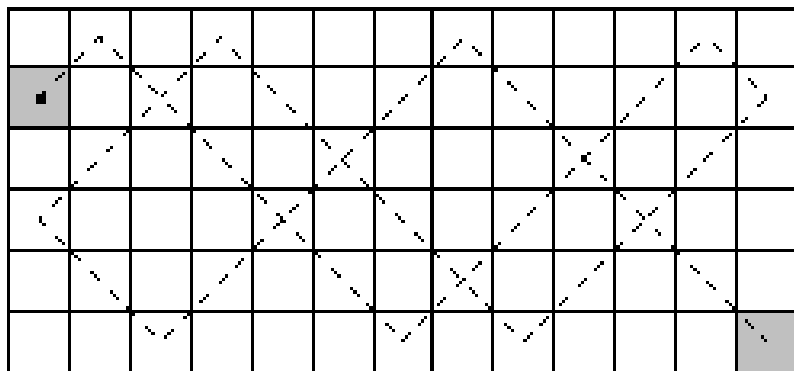
- 数论是数学的一支
- 它的研究对象是整数的性质



模线性方程

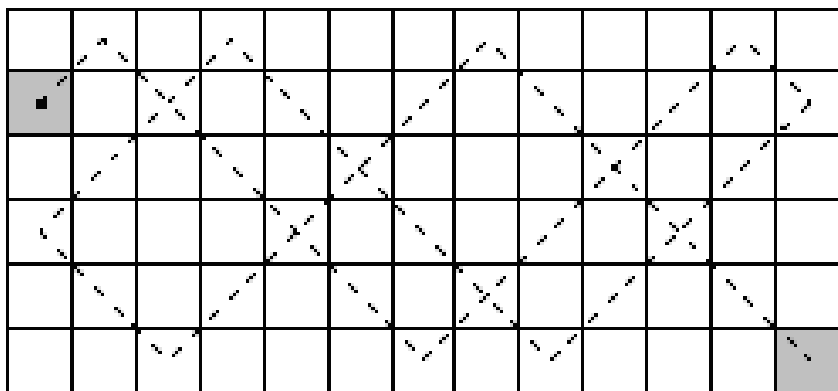
- 表现形式:
 - $ax \equiv c(\text{mod } b)$ 或 $ax+by=c$
- 定理:
 - 模线性方程有解的充要条件是 $\text{gcd}(a,b) | c$
 - 若模线性方程有解，从模的意义上讲有且只有一解。
- 实现:
 - Extended-Euclid 算法

例题 —— ball



- 小球从棋盘左侧或下侧的某格出发，斜向上运动
- 碰到棋盘的边规则反弹，碰到角落沿原路返回
- 问小球第一次回到起点时，有几个格子滚过奇数次？

转化

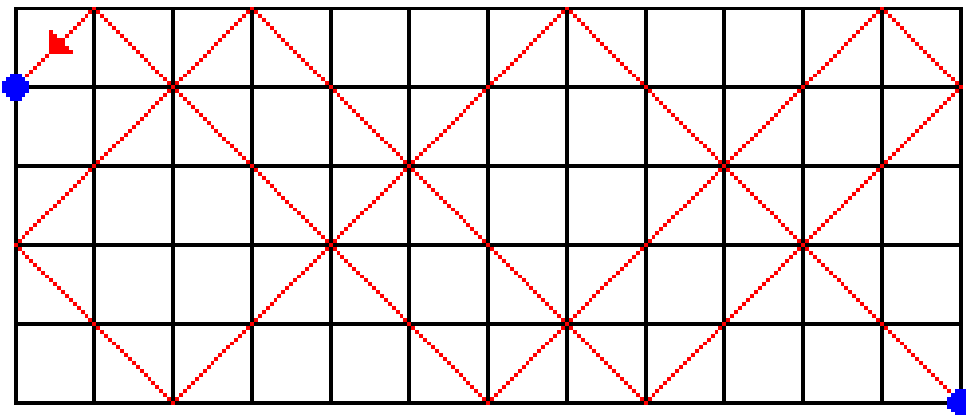




分析

- 设转化后的棋盘边长分别为 L 、 H ，则小球将会作周期为 $2L\text{cm}(L,H)$ 的周期运动。
- 小球的运动有两种：
 - 撞到角上，沿原线路返回，以和出发相反的方向回到起点。
 - 没有撞到角上，以和出发相同的方向回到起点。

情况 1：撞到角上



- 条件：
 $\gcd(L,H) \mid a$ 。

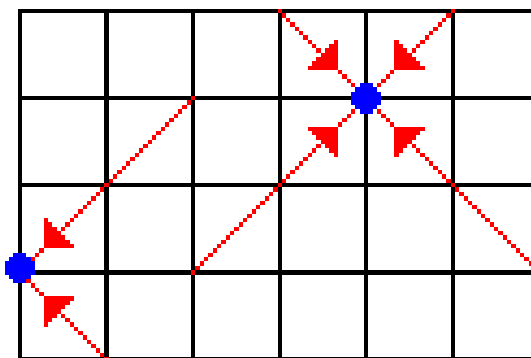
- 水平方向运动距离： qL
- 竖直方向运动距离： $pH-a$
- $qL=pH-a$ 即 $pH-qL=a$

- 结论：只有两个点经过了奇数次。

情况 2：没有撞到角上

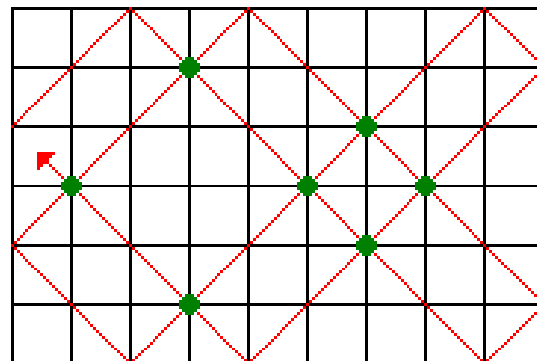
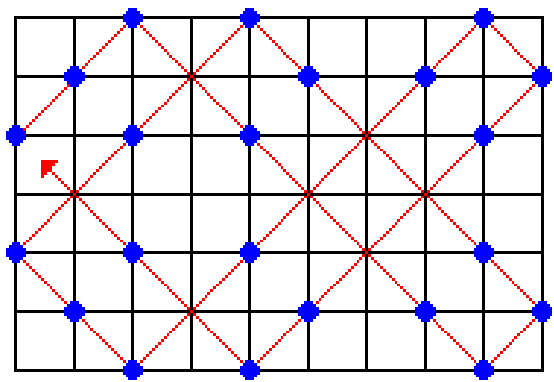
- 问题：小球滚过一个点至多几次？

- 推论 1：小球经过的能路称为方向滚过 $\text{cm}(L, H)$ 点两次



- 结论：滚过四边上的点至多一次，滚过中间的点至多两次。

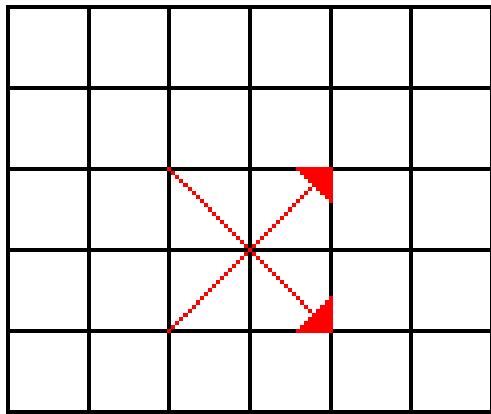
情况 2：没有撞到角上



- 小球经过奇数次的点的个数 $= 2L\text{cm}(L, H) -$
小球经过偶数次的点的个数 $\times 2$

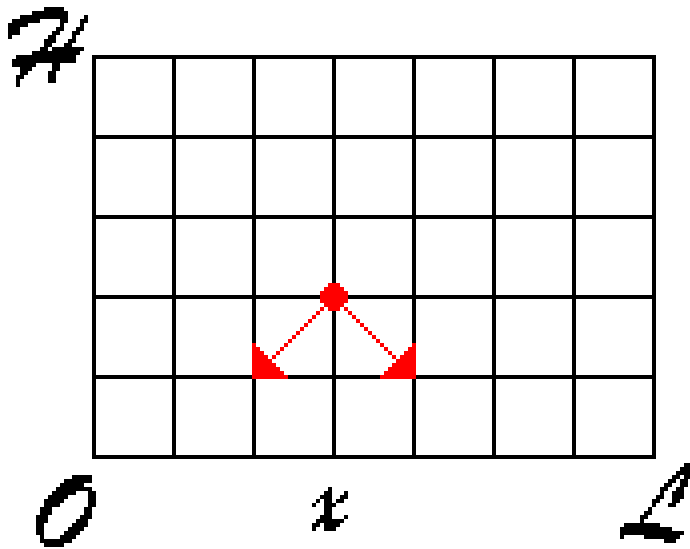


情况 2：没有撞到角上



- 经过一个点两次时
 - 子情况 1：水平方向相反，竖直方向相同；
 - 子情况 2：水平方向相同，竖直方向相反。

水平方向相反，竖直方向相同

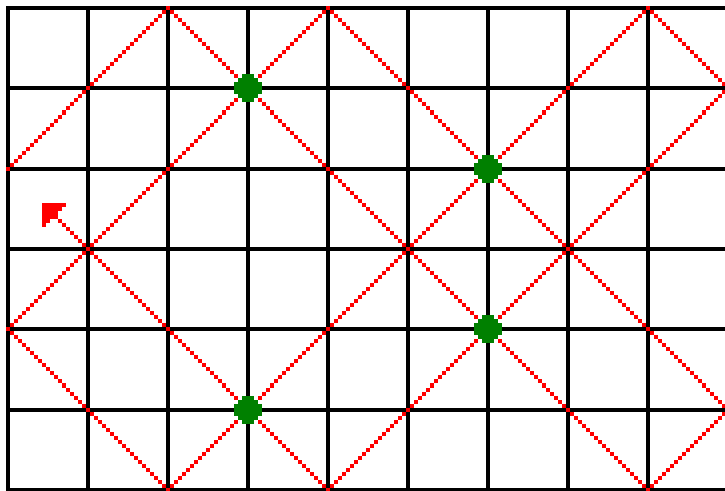


- 假设这个点在水平方向的投影为 x

- 水平向右运动
 - 距离: $2k_2L-x$
 - $0 \leq k_2 \leq H/g$

- $(2k_1L-x)(2k_2L-x)$
- $(2k_1+x)(2k_2+x)$

水平方向相反， 竖直方向相同



- $(2k_1L+x)-(2k_2L-x) \equiv 0 \pmod{2H}$
- $(k_1-k_2)L+x \equiv 0 \pmod{H}$
 $0 \leq k_1 < H/g$
 $0 < k_2 \leq H/g$

■ 条件: $\gcd(L,H) \mid x$

■ 结论: x 共有 $L/\gcd(L,H)-1$ 个



对于任意的 x

- $(k_1 - k_2)L + x \equiv 0 \pmod{H}$ $0 \leq k_1 < H/g$
 $0 < k_2 \leq H/g$
- $(k_1 - k_2) \equiv V \pmod{H/g}$ 只有一解。
- 无论 V 为何值，方程有且仅有 H/g 组解
- 结论：水平方向相反，竖直方向相同的情况下共有 $(L/g - 1) * H/g$ 组解



水平方向相同， 竖直方向相反

- 类似的可以得到：
 - 水平方向相同， 竖直方向相反的情况下共有 $(H/g-1)*L/g$ 组解



结论

- 所以问题的解为：当 $g|a$ ，答案为 2；否则为 $2LH/g - 2((L/g - 1) * H/g + (H/g - 1) * L/g)$ 。



小结

- 简化复杂的问题
- 模线性方程的解的判定定理
- 分类讨论的思想
- 从反面思考问题



总结

- 数论问题的特点
 - 和整数有关
 - 数据量大，无法用一般方法解决
- 数论问题解决方法
 - 建立数论模型
 - 对定理的熟练掌握
 - 各种思维方法

