由感性认识到理性认识

——透析一类搏弈游戏的解答过程

1、 游戏

- 游戏 A：

- 甲乙两人面对若干堆石子，其中每一堆石子的数目可以任意确定。例如图 1 所示的初始局面：共 n=3 堆，其中第一堆的石子数 $a_1=3$，第二堆石子数 $a_2=3$，第三堆石子数 $a_3=1$。两人轮流按下列规则取走一些石子，游戏的规则如下：

  - 每一步应取走至少一枚石子；
  - 每一步只能从某一堆中取走部分或全部石子；
  - 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。

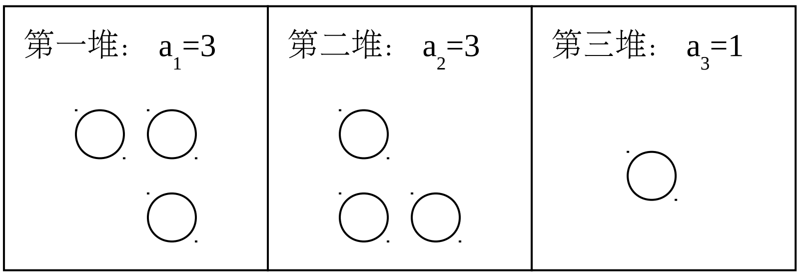


图 1 游戏的一个初始局面

- 游戏 B：

  - 甲乙双方事先约定一个数 m，并且每次取石子的数目不能超过 m 个；
  - 其余规则同游戏 A。

我们关心的是，对于一个初始局面，究竟是先行者（甲）有必胜策略，还是后行者（乙）有必胜策略。

下面，我们从简单入手，先来研究研究这个游戏的一些性质。

2、 从简单入手

- 用一个 **n** 元组$(\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n})$，来描述游戏过程中的一个局面。
  - 可以用 3 元组(3, 3, 1)来描述图 1 所示的局面。
- 改变这个 **n** 元组中数的顺序，仍然代表同一个局面。
  - (3, 3, 1)和(1, 3, 3)，可以看作是同一个局面。

- 如果初始局面只有一堆石子，则甲有必胜策略。
  - 甲可以一次把这一堆石子全部取完，这样乙就无石子可取了。
- 如果初始局面有两堆石子，而且这两堆石子的数目相等，则乙有必胜策略。
  - 因为有两堆石子，所以甲无法一次取完；
  - 如果甲在一堆中取若干石子，乙便在另一堆中取同样数目的石子；
  - 根据对称性，在甲取了石子之后，乙总有石子可取；
  - 石子总数一直在减少，最后必定是甲无石子可取。
- 对于初始局面(1)，甲有必胜策略，而初始局面(3, 3)，乙有必胜策略。

- 局面的加法：$\mathbf{(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m)}$。
  - (3) + (3) + (1) = (3, 3) + (1) = (3, 3, 1)。

- 对于局面 **A, B, S**，若 **S=A+B**，则称局面 **S** 可以分解为**“子局面”A** 和 **B**。
  - 局面(3, 3, 1)可以分解为(3, 3)和(1)。

如果初始局面可以分成两个相同的“子局面”，则乙有必胜策略。

- 设初始局面 S=A+A，想象有两个桌子，每个桌子上放一个 A 局面；
- 若甲在一个桌子中取石子，则乙在另一个桌子中对称的取石子；
- 根据对称性，在甲取了石子之后，乙总有石子可取；
- 石子总数一直在减少，最后必定是甲无石子可取。

- 初始局面(2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7)，可以分成两个(2, 5, 5, 7)，故乙有必胜策略。

- 对于局面 **S**，若先行者有必胜策略，则称**“S 胜”**。
- 对于局面 **S**，若后行者有必胜策略，则称**“S 负”**。
  - 若 A=(1)，B=(3, 3)，C=(2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7)，则 A 胜，B 负，C 负。
  - 我们所关心的，就是如何判断局面的胜负。

如果局面 **S** 胜，则必存在取子的方法 **S→T**，且 **T** 负。

如果局面 **S** 负，则对于任意取子方法 **S→T**，有 **T** 胜。

- 设初始局面 S 可以分解成两个子局面 A 和 B（分解理论）。

- 若 **A** 和 **B** 一胜一负，则 **S** 胜。
  - 不妨设 A 胜 B 负；
  - 想象有两个桌子 A 和 B，桌子上分别放着 A 局面和 B 局面；
  - 因为 A 胜，所以甲可以保证取桌子 A 上的最后一个石子；
  - 与此同时，甲还可以保证在桌子 B 中走第一步的是乙；
  - 因为 B 负，所以甲还可以保证取桌子 B 中的最后一个石子；
  - 综上所述，甲可以保证两个桌子上的最后一个石子都由自己取得。
- 若 **A** 负 **B** 负，则 **S** 负。
  - 无论甲先从 A 中取，还是先从 B 中取，都会变成一胜一负的局面；
  - 因此，乙面临的局面总是“胜”局面，故甲面临的 S 是“负”局面。
- 若 B 负，则 S 的胜负情况与 A 的胜负情况相同。
- 若 **A** 胜 **B** 胜，则有时 **S** 胜，有时 **S** 负。

- 如果 S=A+C+C，则 S 的胜负情况与 A 相同。
  - 令 B=C+C，则 S=A+B 且 B 负，故 S 的胜负情况与 A 相同。

- 图 1 所示的初始局面(3, 3, 1) = (3) + (3) + (1)，与局面(1)的胜负情况相同。
- 图 1 中所示的初始局面(3, 3, 1)是“胜”局面，甲有必胜策略。

- 称一个石子也没有的局面为“空局面”。

- 空局面是“负”局面。

- 如果局面 S 中，存在两堆石子，它们的数目相等。用 T 表示从 S 中把这两堆石子拿掉之后的局面，则称“S 可以简化为 T”。
    - 局面(2, 2, 2, 7, 9, 9)可以简化为(2, 2, 2, 7)，还可以进一步简化为(2, 7)。

- 一个局面的胜负情况，与其简化后的局面相同。
    - 三个局面(2, 2, 2, 7, 9, 9)、(2, 2, 2, 7)和(2, 7)，胜负情况都相同。

- 不能简化的局面称为“最简局面”。
    - 局面 (2, 7)是最简局面。

- 最简局面中不会有两堆相同的石子，故可以用一个集合来表示最简局面。
    - 最简局面(2, 7)可以用集合{2, 7}来表示。

- 如果只关心局面的胜负，则一个局面可以用一个集合来描述。
    - 图 1 所示的局面(3, 3, 1)，可以用集合{1}来描述。

如果用搜索（搏弈树）的方法来解这个游戏，则采用集合来表示一个局面，比采用多元组来表示一个局面，搜索量将有所减少，但时间复杂度仍然很高。

能不能进一步简化一个局面的表示呢?

3、 类比与联想

- 二进制加法[1]
  - 1 + 0 = 1;
  - 0 + 1 = 1;
  - 0 + 0 = 0;
  - 1 + 1 = 0。

- 二进制的加法 VS 局面的加法
  - 大写字母 AB 表示局面，小写字母 ab 表示二进制
  - 若 A 和 B 相同，则 A+B 负；若 a 和 b 相等，则 a+b=0
  - 若 A 胜 B 负，则 A+B 胜；若 a=1 且 b=0，则 a+b=1
  - 若 B 胜 A 负，则 A+B 胜；若 b=1 且 a=0，则 a+b=1
  - 若 A 负 B 负，则 A+B 负；若 a=0 且 b=0，则 a+b=0
  - ……

- 如果用二进制 1 和 0，分别表示一个局面的胜或负

[1] 本文的“二进制加法”，是指不进位的二进制加法，也可以理解为逻辑里的“异或”操作。

✍ 局面的加法，与二进制的加法有很多类似之处。

- ✘ 若 A 胜 B 胜，则 A+B 有时胜，有时负；若 a=1 且 b=1，则 a+b=0。

二进制数的加法：对二进制数的每一位，都采用二进制的加法。

$$\begin{array}{r} 0011 \\ +\ 1010 \\ \hline 1001 \end{array}\quad,\quad\begin{array}{r} 1010 \\ +\ 1010 \\ \hline 0000 \end{array}\quad。$$

二进制数的加法 VS 局面的加法

- 大写字母 AB 表示局面，小写字母 ab 表示二进制数
- 若 A 和 B 相同，则 A+B 负；若 a 和 b 相等，则 a+b 为 0
- 若 A 胜 B 负，则 A+B 胜；若 a≠0 且 b=0，则 a+b≠0
- 若 B 胜 A 负，则 A+B 胜；若 b≠0 且 a=0，则 a+b≠0
- 若 A 负 B 负，则 A+B 负；若 a=0 且 b=0，则 a+b=0
- 若 A 胜 B 胜，则 A+B 有时胜，有时负
- 若 a≠0 且 b≠0，则有时 a+b≠0，有时 a+b=0
- ……

如果用二进制数 s 来表示一个局面 S 的胜或负，S 胜则 s≠0，S 负则 s=0

- 局面的加法，与二进制数的加法，性质完全相同。

- 能否用一个二进制数，来表示一个局面呢？

- 用符号 **#S**，表示局面 **S** 所对应的二进制数。

- 如果局面 S 只有一堆石子，则用这一堆石子数目所对应的二进制数来表示 S。
  - #(5)=5=101。

- 若局面 **S=A+B**，则 **#S=#A+#B**。
  - 局面(3, 3)=(3)+(3)，所以#(3, 3)=#(3)+#(3)=11+11=0。
  - 局面(3, 3, 1)=(3, 3)+(1)，所以#(3, 3, 1)=#(3, 3)+#(1)=0+1=1。

- 函数 **f**：若局面 **S** 只有一堆石子，设 **S={a_1}**，则 **f(a_1)=#S**，即 **f(a_1)=#(a_1)**。
  - 对于游戏 A 来说，#(5)=101，所以 f(5)=101。
  - 对于游戏 A 来说，f(x)就是 x 所对应的二进制数。换句话说，f(x)=x。

- 设局面 **S=(a_1, a_2, …, a_n)**，即 **S=(a_1)+(a_2)+…+(a_n)**，则 **#S=f(a_1)+f(a_2)+…+f(a_n)**。
  - #(3, 3, 1)=#((3)+(3)+(1))=#(3)+#(3)+#(1)=f(3)+f(3)+f(1)=11+11+1=1。

- 对于局面 **S**，若 **#S=0**，则 **S** 负；若 **#S≠0**，则 **S** 胜。

4、 证明

- 二进制数 a, b，若 a + b = 0，当且仅当 a = b。

$$\begin{array}{rr} & 1011 \\ + & 1011 \\ & 0000 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1011 \\ + & 1001 \\ & 0010 \end{array}$$

- 二进制数 a, b, s，若 a + b = s，则 a = b + s。

$$\begin{array}{rr} & 0011 \\ + & 1010 \\ & 1001 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1001 \\ + & 1010 \\ & 0011 \end{array}$$

- 二进制数 $a_1+a_2+\ldots+a_n=p\neq 0$，则必存在 k，使得 $a_k+p<a_k$。
  - 因为 $p\neq 0$，所以 p 的最高位是 1；
  - 设 p 的最高位是第 q 位；
  - 至少存在一个 k，使得 a_k 的第 q 位也是 1；
  - a_k+p 的第 q 位为 0，所以 $a_k+p<a_k$。

11001

a_1 01101 a_k

01101 + 00110 p

a_k 01011 a_k+p

+ 10010 q

a_3

00110

若#S=0，则无论先行者如何取子 **S→T**，都有**#T≠0**。

q

- 先行者只能从某一堆中取若干石子，不妨设他选择的就是第 1 堆；
- 设先行者从第 1 堆中取了 x 个石子，用 T 表示取完之后的局面；
- 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，则 $T=(a_1-x, a_2, \ldots, a_n)$；
- $\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)=0$，故 $f(a_1)=\#(a_2, \ldots, a_n)$；
- $\#T=f(a_1-x)+\#(a_2, \ldots, a_n)=f(a_1-x)+f(a_1)$；
- $x>0 \to f(a_1)\neq f(a_1-x) \to f(a_1)+f(a_1-x)\neq 0 \to \#T\neq 0$。

00101 00101 a_1 $x\neq a_1$

a_1

10011 00101 a_1

a_2 $a_2+a_3+a_4=a_1$ +

10111 + p≠0

a_3 00000 p=0

+ 00001 a_4

00000

若#S≠0，则先行者必然存在一种取子方法 **S→T**，且**#T=0**。

p=0

- 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$p=\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$；
- 因为 $p\neq0$，所以必然存在 k，使得 $f(a_k)+p<f(a_k)$，不妨设 $k=1$，$f(a_1)+p=x$；
- 先行者将第 1 堆的石子的数目从 a_1 变成 x，用 T 表示这个局面；
- $p=\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)$，故 $\#(a_2, \ldots, a_n)=f(a_1)+p=x$；
- $\#T=f(x)+\#(a_2, \ldots, a_n)=f(x)+x=0$。

00**1**01 a_1
10**0**11 a_2
00**1**11 a_3
+ 10**1**11 a_4
00**1**10 $p\neq0$

00**1**01 a_1
00**0**11 x
+ 00**1**10 p
p=0

$x=a_2+a_3+a_4=a_1+p<a_1$

- 若 S 是空局面，则#S=0。

✉ **若#S=0**，则 **S** 负；若**#S≠0**，则 **S** 胜。

- #(1, 2, 3)=01+10+11=0，故局面(1, 2, 3)负。

 #(1, 2, 3, 4)=001+010+011+100=100，故局面(1, 2, 3, 4)胜。

对于游戏 A 来说，任意的一个初始局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，我们把这里的 a_i 都看成是二进制数。令 $\#S=a_1+a_2+\ldots+a_n$。若 $\#S\neq0$，则先行者（甲）有必胜策略；否则 $\#S=0$，这时后行者（乙）有必胜策略。

下面把这个结论推广到游戏 B。

 函数 f：f(x)=x mod (m+1)；把函数 f 的值看作是二进制数。

 对于任意初始局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，令 $\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$。

 若 $\#S\neq0$，则先行者（甲）有必胜策略；否则后行者（乙）有必胜策略。

 类似游戏 A 的证明。

 游戏 B 的解法与游戏 A 十分类似。这是因为两个游戏的规则相当类似。

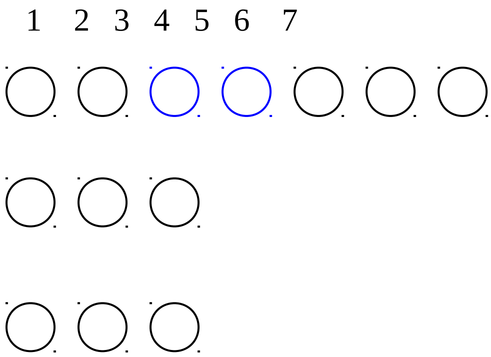
5、 推广

 游戏 C：

 甲乙两人面对若干排石子，其中每一排石子的数目可以任意确定。例如图 2 所示的初始局面：共 n=3 排，其中第一排的石子数 $a_1=7$，第二排石子数 $a_2=3$，第三排石子数 $a_3=3$。两人轮流按下列规则取走一些石子，游戏的规则如下：

- 每一步必须从某一排中取走两枚石子；
- 这两枚石子必须是紧紧挨着的；

➢ 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。



第一排，$a_1=7$

第二排，$a_2=3$

第三排，$a_3=3$

图 2 游戏的一个初始局面

- 如果甲第一步选择取第一排 34 这两枚石子，之后无论是甲还是乙，都不能一次取走 25 这两枚石子。换句话说，如果取了 34 这两枚石子，等价于将第一排分成了两排，这两排分别有 2 个和 3 个石子。

我们只关心，对于一个初始局面，究竟是先行者（甲）有必胜策略，还是后行者（乙）有必胜策略。

游戏 C 的规则和游戏 A 并不那么相似。但是，前面所列出的，游戏 A 的关键性质，游戏 C 却都具有。比如说，图 2 所示的初始局面可以用三元组(7, 3, 3)来表示，它的胜负情况与初始局面(7)相同。

游戏 A 的解答是由它的性质得出来的。因此，我们猜想游戏 C 是否也能用类似的方法来解。

6、 精华

- 回忆游戏 A 的结论，以及它在游戏 B 上的推广，对于游戏 C，我们的想法是

- 设计一个函数 f，把函数 f 的值看作是二进制数。对于任意一个初始局面 S，

设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，令 $\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$。若 $\#S\neq 0$，则先行者（甲）有必胜策略；否则 $\#S=0$，这时后行者（乙）有必胜策略。

- 游戏 A 中，$f(x) = x$。
- 游戏 B 中，$f(x) = x \bmod (m + 1)$。
- 游戏 C 中，$f(x) = ?$。

- 关键就在于如何构造一个满足要求的函数 **f**。

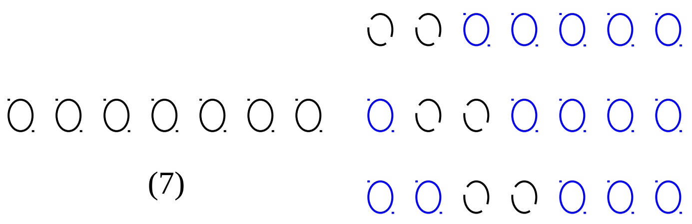
- 回忆关于游戏 A、B 的结论的证明过程

函数 **f** 是否满足要求，关键在于 **#S** 是否满足下面的条件。

- 若 $\boldsymbol{\#S=0}$，则无论先行者如何取子 $\boldsymbol{S\to T}$，都有 $\boldsymbol{\#T\neq 0}$。
- 若 $\boldsymbol{\#S\neq 0}$，则先行者必然存在一种取子方法 $\boldsymbol{S\to T}$，且 $\boldsymbol{\#T=0}$。

- 用符号 **$(x)**，表示局面 **(x)** 的下一步所有可能出现的局面的集合。
  - 在游戏 A 中，$\$(3)=\{(2), (1), (0)\}$。
  - 在游戏 B 中，若 $m=4$，则 $\$(9)=\{(8), (7), (6), (5)\}$，$\$(2)=\{(1), (0)\}$。
  - 在游戏 C 中，$\$(7)=\{(5), (1, 4), (2, 3)\}$。
- 定义集合 **g(x)**：设 $\boldsymbol{\$(x)=\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}}$，则 $\boldsymbol{g(x)=\{\#S_1, \#S_2, \ldots, \#S_k\}}$。
  - 在游戏 A 中，$\$(3)=\{(2), (1), (0)\}$，故 $g(3)=\{\#(2), \#(1), \#(0)\}=\{10, 01, 00\}$。

- 在游戏 B 中，若 m=4，则 g(9)={#(8), #(7), #(6), #(5)}，g(2)={#(1), #(0)}。
- 在游戏 C 中，g(7)={#(5), #(1, 4), #(2, 3)}。



(5)
(1, 4)
(7) (2, 3)

$(7)={(5), (1, 4), (2, 3)}
g(7)={#(5), #(1, 4), #(2, 3)}

➢ 若**#S=0**，则无论先行者如何取子 **S→T**，都有**#T≠0**。

- 设 S=(a_1, a_2, …, a_n)，由于先行者只能选择一堆石子，不妨设选择了 a_1；
- 因为#S=f(a_1)+#(a_2, …, a_n)=0，所以 f(a_1)=#(a_2, …, a_n)；
- 先行者可能将局面(a_1)变为局面(b_1, …, b_m)，#(b_1, …, b_m)属于集合 g(a_1)；
- 设这时的局面为 T，我们有 T=(b_1, …, b_m)+(a_2, …, a_n)；
- #T=#(b_1, …, b_m)+#(a_2, …, a_n)=#(b_1, …, b_m)+f(a_1)；
- 如果要求#T≠0，则必然有#(b_1, …, b_m)≠f(a_1)；
- 因此，函数 **f(a_1)**的值，不属于集合 **g(a_1)**。（充要）

00101 00101 f(a_1) #(b_1, b_2, …,
f(a) b)∈g(a)

10011 00101 $f(a_1)$

$f(a_2)$ + $f(a_1)$

10111 00000 p=0 +

$f(a_3)$ p≠0

- 若 **#S≠0**，则先行者必然存在一种取子方法 **S→T**，且 **#T=0**。

+ 00001 $f(a_4)$

  - 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$p=\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$；

00000

p=0

  - 因为 $p\neq 0$，所以必然存在 k，使得 $f(a_k)+p<f(a_k)$，不妨设 $k=1$，$f(a_1)+p=x$；
  - 因为 $p=\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)$，故 $(a_2, \ldots, a_n)=p+f(a_1)=x$；
  - 如果先行者把局面 (a_1) 变为局面 $(b_1, \ldots, b_m)$，$\#(b_1, \ldots, b_m)$ 属于集合 $g(a_1)$；
  - 设这时的局面为 T，我们有 $T=(b_1, \ldots, b_m)+(a_2, \ldots, a_n)$；
  - $\#T=\#(b_1, \ldots, b_m)+\#(a_2, \ldots, a_n)=\#(b_1, \ldots, b_m)+x$；
  - 如果要使 $\#T=0$，相当于要找到 $(b_1, \ldots, b_m)$，使得 $\#(b_1, \ldots, b_m)$ 等于 x；
  - 如果可以保证 x 属于集合 $g(a_1)$，则肯定可以找到相应的的 $(b_1, \ldots, b_m)$；
  - 因为 $x<f(a_1)$，所以，x 属于集合 $\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$；
  - 如果集合 **$g(a_1)$** 包含集合 **$\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$**，则 **x** 一定属于 **$g(a_1)$**。（充分）

- 函数 **f** 满足要求的一个充分条件

  - **$f(a_1)$** 不属于集合 **$g(a_1)$**。
  - 集合 **$g(a_1)$** 包含集合 **$\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$**。

00101 00101 $f(a_1)$ $\#(b_1, b_2, \ldots, b_m)=x$

$f(a_1)$

10011 00011 x 如果 $x\in g(a_1)$

$f(a_2)$ $x=f(a_1)+p<f(a_1)$ +

00111 + p=0

$f(a_3)$ 00110 p

+ 10111 $f(a_4)$

p≠0

- 如果 **$g(a_1)=\{0, 1, 2, 5, 7, 8, 9\}$**，则 **$f(a_1)=3$**，满足要求。

- 用大写字母 N 表示非负整数集，即 N={0, 1, 2, …}。

- 令 N 为全集，集合 G(x)表示集合 g(x)的补集。

- 定义函数 **f(n)**：**f(n)=min{G(n)}**，即 **f(n)**等于集合 **G(n)**中的最小数。

- 设局面 **$S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$**，**$\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$**，采用二进制数的加法。

- 若 **#S=0**，则 **S** 负；若 **#S≠0**，则 **S** 胜。

- 游戏 C 的 f 值：
  - g(0)={}，G(0)={0, 1, …}，f(0)=0；
  - g(1)={}，G(1)={0, 1, …}，f(1)=0；
  - g(2)={#(0)}={f(0)}={0}，G(2)={1, 2, …}，f(2)=1；
  - g(3)={#(1)}={f(1)}={0}，G(2)={1, 2, …}，f(3)=1；
  - g(4)={#(2), #(1, 1)}={f(2), f(1)+f(1)}={1, 0}，G(4)={2, 3, …}，f(4)=2；
  - g(5)={#(3), #(1, 2)}={f(3), f(1)+f(2)}={1, 1}，G(5)={0, 2, 3, …}，f(5)=0；
  - g(6)={#(4), #(1, 4), #(2, 2)}={2, 1, 0}，G(6)={3, 4, …}，f(6)=3；
  - g(7)={#(4), #(1, 4), #(2, 3)}={2, 2, 0}，G(7)={1, 3, 4, …}，f(7)=1；

- 图 2 所示的局面 S=(7, 3, 3)，有#S=f(7)+f(3)+f(3)=1+1+1=1，故 S 胜。
- 游戏 C 的初始局面 S=(3, 4, 6)，有#S=1+2+3=01+10+11=0，故 S 负。

7、 结论

- 此类搏弈游戏的一般性解法：
  - 用一个 n 元组(a_1, a_2, …, a_n)，来描述游戏过程中的一个局面。
  - 用符号#S，表示局面 S 所对应的二进制数。
  - 用符号$(x)，表示局面(x)的下一步所有可能出现的局面的集合。
  - 定义集合 g(x)：设$(x)={$S_1$, S_2, …, S_k}，则 g(x)={#S_1, #S_2, …, #S_k}。
  - 令非负整数集为全集，集合 G(x)表示集合 g(x)的补集。
  - 定义函数 f(n)：f(n)=min{G(n)}，即 f(n)等于集合 G(n)中的最小数。
  - 设局面 S=(a_1, a_2, …, a_n)，#S=f(a_1)+f(a_2)+…+f(a_n)，采用二进制数的加法。

✉ 若**#S≠0**，则先行者有必胜策略；若**#S=0**，则后行者有必胜策略。

- 适用范围和限制条件：
  - 甲乙两人取石子游戏及其类似的游戏；
  - 每一步只能对某一堆石子进行操作；

- 每一步操作的限制，只与这堆石子的数目或一些常数有关；
- 操作在有限步内终止，并不会出现循环；
- 谁无法继续操作，谁就是输家。

- 游戏 D（POI'2000，Stripes）：
- 一排石子有 L 个，甲乙两人轮流从中取“紧紧挨着的”A 或 B 或 C 枚石子。谁不能取了，谁就是输家。已知 A, B, C, L，问甲乙二人谁有必胜策略。

☺ 有了前面的结论，这个游戏就难不倒我们了。

8、 总结

1. 从算法优化的角度

取石子游戏属于一类典型的搏弈游戏。穷举所有的局面，理论上可以求得最优策略。但穷举的时空复杂度太高，本文所提出的解法，有效的控制了算法的时空复杂度，可以看作是对穷举法的一个优化。

优化算法的过程，可以看作是在优化局面的表示。首先，我们用一个 n 元组表示一个局面，这是很直观很容易想到的。因为我们只关心局面的胜负，于是得到了第一个性质：这个 n 元组是无序的。进一步分析发现，n 元组中如果出现两个相同的数字，则把它们消去，不影响局面的胜负。于是，我们改用集合来表示一个局面。最后，通过与二进制数的对比，又简化到用一个数来表示一个局面。

优化局面的表示，使得搜索量大大减少。那么，减少的搜索量都到哪里去了呢？举个例子，对于游戏 A 中的 5 个局面：(3, 3, 1), (1, 3, 3), (5, 5, 1), (2, 3)：

a. 采用 n 元组：这 5 个局面互不相同；

b. 采用无序 n 元组：局面(3, 3, 1)和(1, 3, 3)相同；

c. 采用集合：局面(3, 3, 1), (1, 3, 3), (5, 5, 1)都相同，可以用集合{1}表示；

d. 采用二进制数：4 个局面所对应的二进制数都是 1，故都相同。

算法的优化，本质上是避免穷举相同的局面，即避免重复搜索。而优化的关键，就在于“相同局面”的定义。

“相同局面”的定义，必须能够反映游戏的性质。我们没有简单的按照局面的胜负，来对局面归类，就是这个原因。

2. 从算法构造的角度

人们认识事物的过程中，开始只是看到了各个事物的现象。这就是认识的感性阶段。在这个阶段中，还不能作出合乎逻辑的结论。随着研究的深入，这些感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的脑子里生起了一个认识过程中的突变，最后产生出合乎逻辑的结论。这就是认识的理性阶段。

人们认识事物的过程，就是由感性认识上升到理性认识的过程。具体到解这类游戏，就是要从简单入手。当我们遇到了一个复杂的问题，或许人人都知道从简单入手，但却并不是每个人都能从中得到一般性的规律。那么，我们究竟是如何由浅入深的呢?

两堆数目相等的石子——这是个很简单的局面。我们就由此入手，将一堆石子与一个子局面相类比，并得出了两个子局面相等时的结论。在此基础上，我们研究了局面的胜负和其子局面的关系，并得出结论：可以用集合来描述一个局面。但我们并没有停留在这一步，而是将局面的分解与二进制数的加法相类比，从而发现了局面与二进制数之间的关系。我们称这个过程为“由此及彼”。

通过分析“用集合来表示一个局面”的结论，我发现这实质上是简化了局面的表示，从而联想到能否进一步化简，比如说用一个数来表示。在解游戏 C 时，我们并不在意它与游戏 A 的规则有多大的区别，而是注意到它与游戏 A 有着相似的性质，从而想到用类似的方法解游戏 C。我们称这个过程为“由表及里”。

在解游戏 A 和 B 的过程中，我们积累了很多经验。但在解游戏 C 时，我们却仅仅提到了解游戏 A 和 B 的精华：构造一个函数 f。这就是“去粗取精”。

将局面与二进制数相类比，我们先试着把局面的胜负直接与二进制的 1 和 0 相类比。发现不妥后，再将其改为与二进制数来类比。这一步叫“去伪存真”。

“由此及彼、由表及里、去粗取精、去伪存真”，这就是由感性认识上升到

理性认识的关键。