

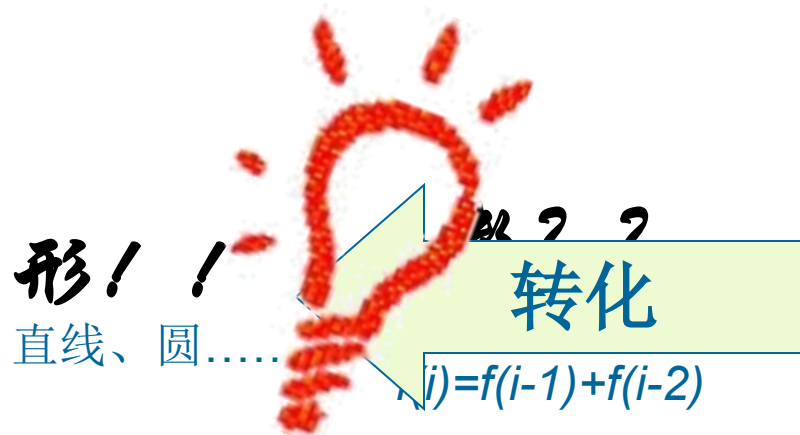
浅谈数形结合思想 在信息学竞赛中的应用

安徽 周源

引子

- 数与形是数学中最基本的对象面：
- 数形结合又是一种重要的数学思想。以形助数
- 在算法和程序设计[例一]中，Raney的证明巧妙地运用数形结合思想，可以顺利地解决最大平均值问题，化难为易。[例二]画室题目的解题思路。

以形助数



- 繁杂代数关系后常隐藏着丰富的几何背景
- 借助背景图形的性质，可以使原本复杂的数量关系和抽象的概念显得直观，从而找到设计算法的捷径。

[例二]最大平均值问题(USACO)

- 读入一系列正数, a_1, a_2, \dots, a_N , 以及数 F
 - 求一段长度大于等于 F 且 **平均值最大** 的子串
- 定义若 $i \leq j$, $\text{ave}(i, j) = (a_i + \dots + a_j) / (j - i + 1)$
- 目标: $\text{Max}\{\text{ave}(a, b) \mid a \leq b - F + 1\}$
- 范围: $F \leq N \leq 100\ 000$
- 例如 $N=4$ 的序列中, $F=2$
 - 2, 5, 2, 5
 - $\text{ave}(2, 4) = (5 + 2 + 5) / 3 = 4$ 最大

初步分析

– $O(N^2)$ 算法

– 枚举一个 b

- 枚举符合条件 a

- 条件即为 $a \leq b - F + 1$

- 同时检查 $\text{ave}(a, b)$

: 称为检查点

: 称为被检查点,
检查集合

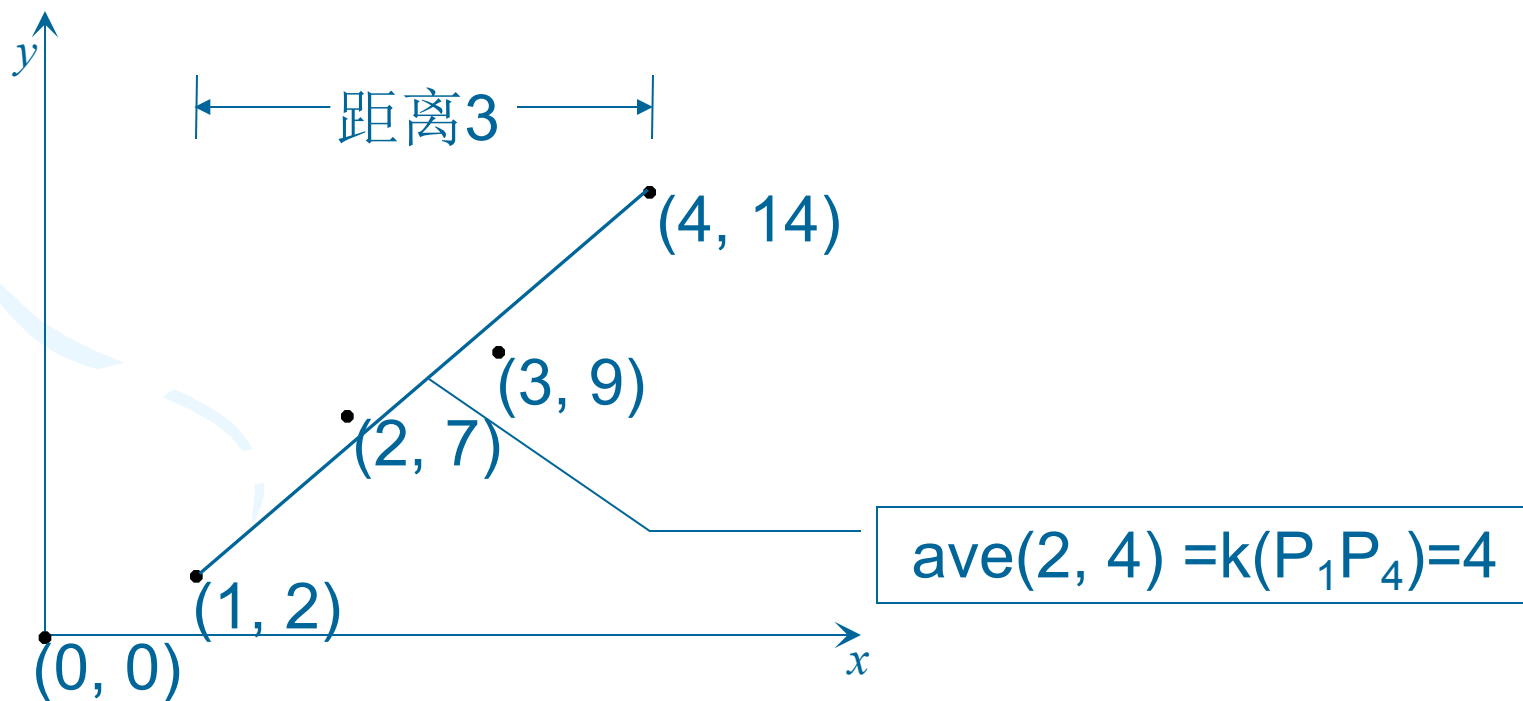
目标图形化

斜率公
式!

- 设部分和序列 S_i 为 $\{a_i\}$ 前 i 项和, $S_0=0$
- $\text{ave}(i, j) = [S_j - S_{i-1}] / [j - (i-1)]$
- 过两点的直线: $P_{i-1}(i-1, S_{i-1}), P_j(j, S_j)$
- 问题转化:
- 平面上已知 $N+1$ 个点, $P_i(i, S_i), 0 \leq i \leq N$
- 求横向距离大于等于 F 的两点连线的最大斜率

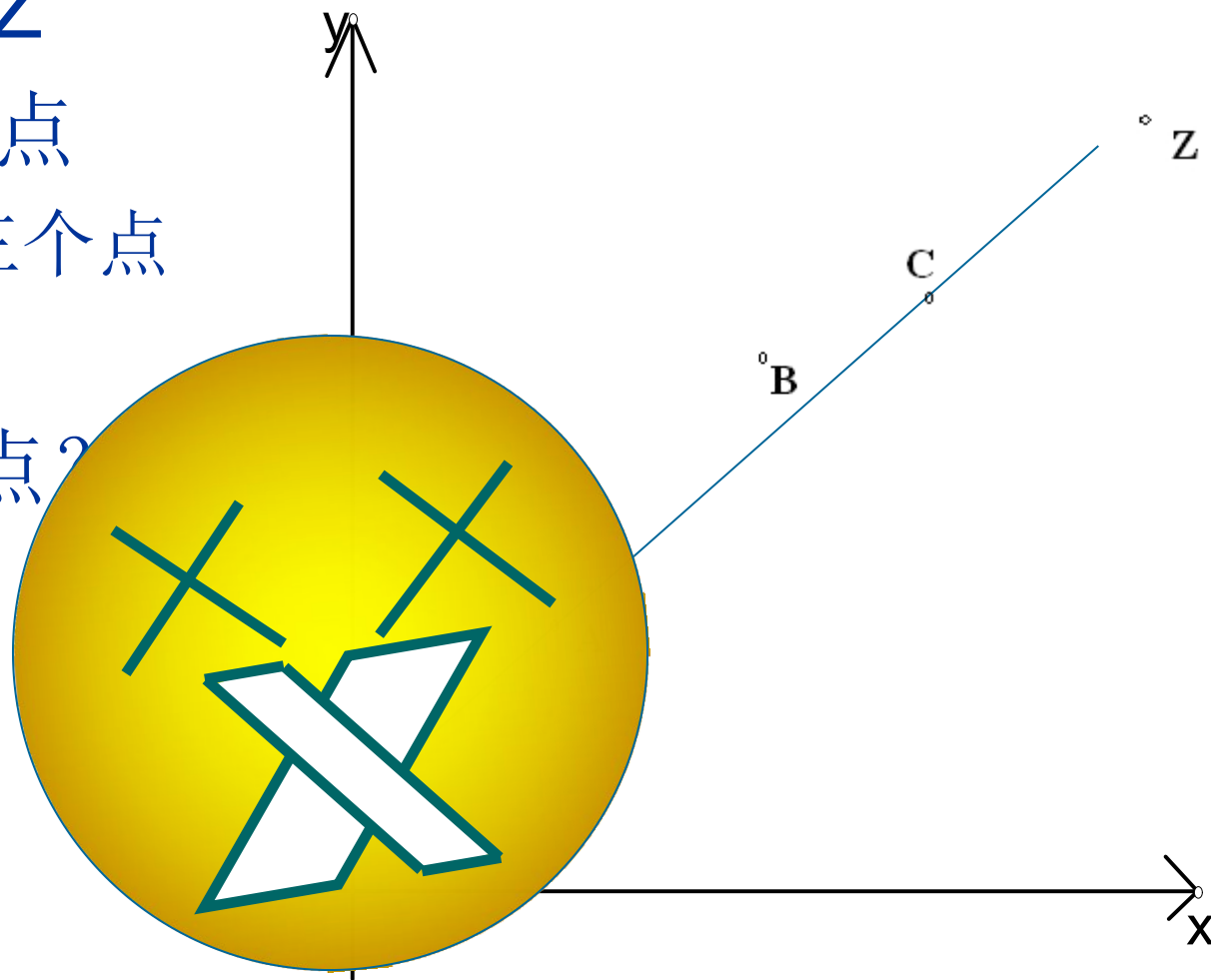
目标图形化

- 数列 $\{a_i\}=(2, 5, 2, 5)$, $F=2$
- 部分和 $\{S_i\}=(0, 2, 7, 9, 14)$



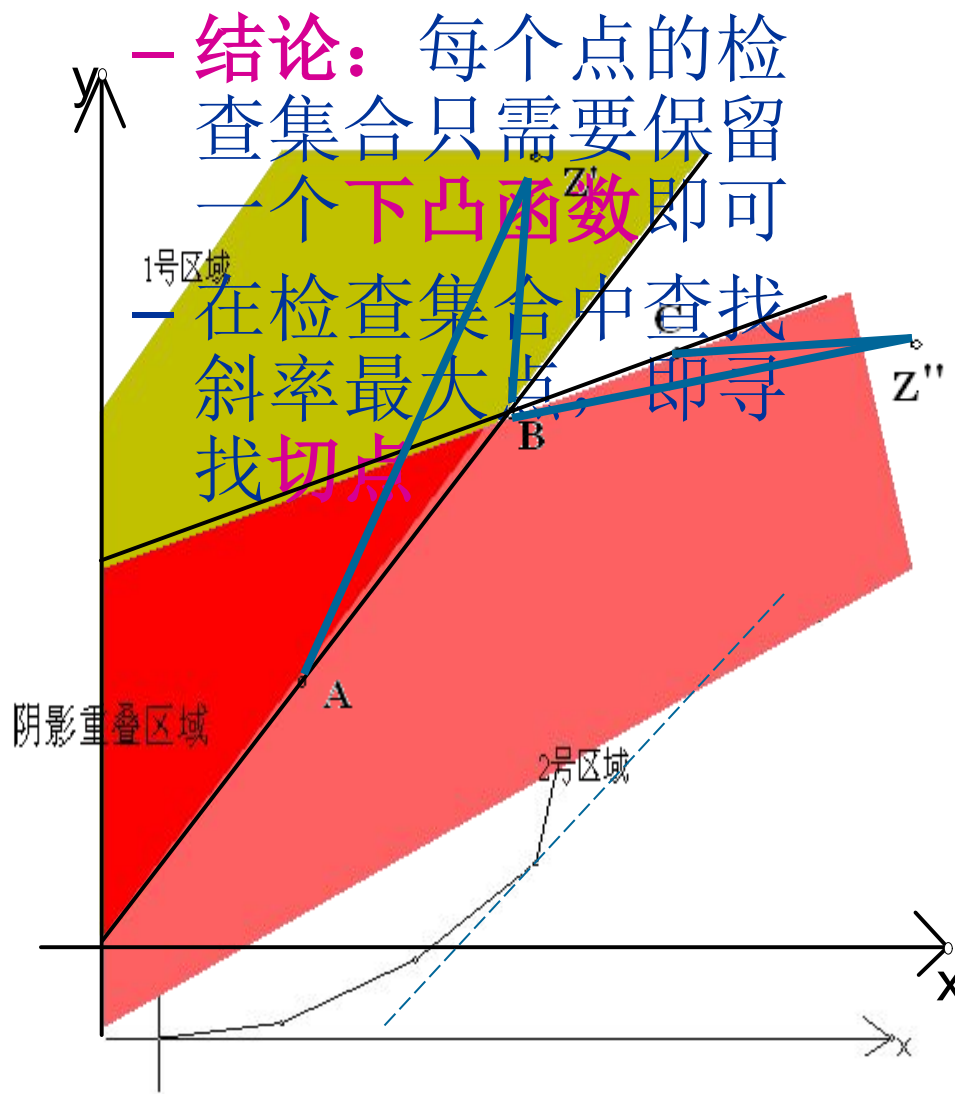
构造下凸折线

- 考察检查点Z
- 三个被检查点
 - 从左到右三个点
 - A, B, C
- 若B是上凸点?



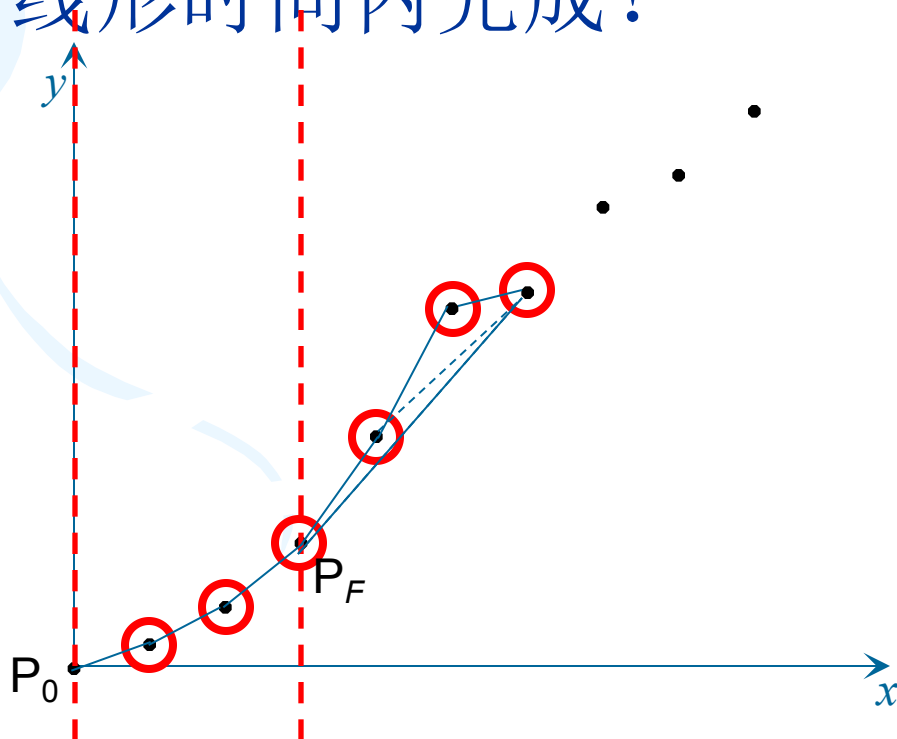
构造下凸折线

- 若B不多余
 - $k(BZ)$ 有可能最大
- 若 $k(BZ)$ 大于 $k(AZ)$
 - Z在1号区域
- 若 $k(BZ)$ 大于 $k(CZ)$
 - Z在2号区域
- 若 $k(BZ)$ 最大
 - Z在阴影重叠区域!
- 与B在Z左方矛盾
 - B多余



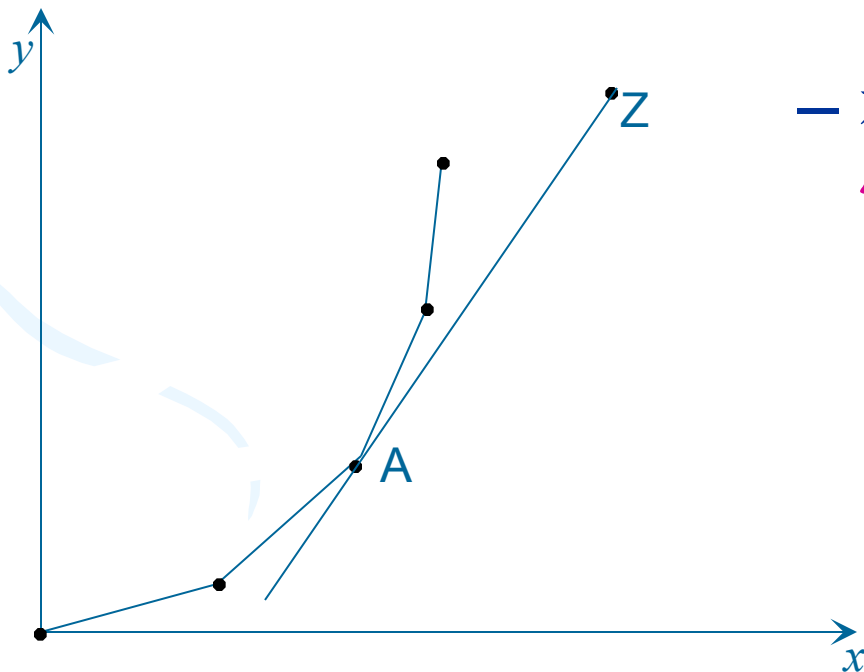
维护下凸折线

- **目标：** 得到每一个检查集合的下凸折线
- 类似于求凸包过程
- 线形时间内完成！



最后的优化：利用单调性

- 每次如何寻找切线？
- 二分法：
 $O(\log_2 N)$
- 利用折线斜率单调性： $O(1)$
 - 更快，更简单
 - 请同学们自行思考

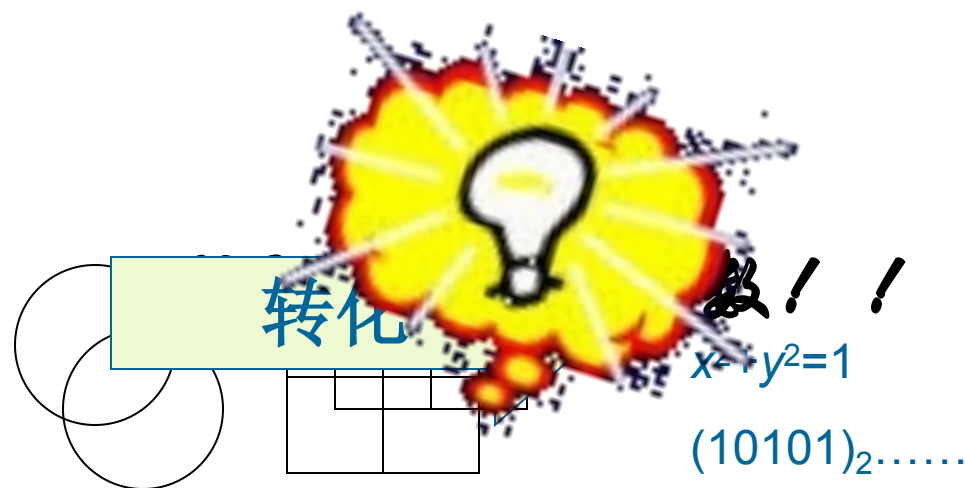


[例二]最大平均值问题(USACO)

— 小结

- 一开始就确立了以**平面几何**为思考工具的正确路线
 - 围绕**平面几何**为中心，以**斜率**为主线
- **重要结论：**检查集合中有点构成的点构成一个下凸函数，一气呵成
- 类似于计算几何中代数式变换的方法维护一个下凸折线
 - 避免了令人头晕的代数式变换
 - 堪称以形助数的经典例题。
- 利用下凸函数**斜率单调性**得到找切线的简单方法

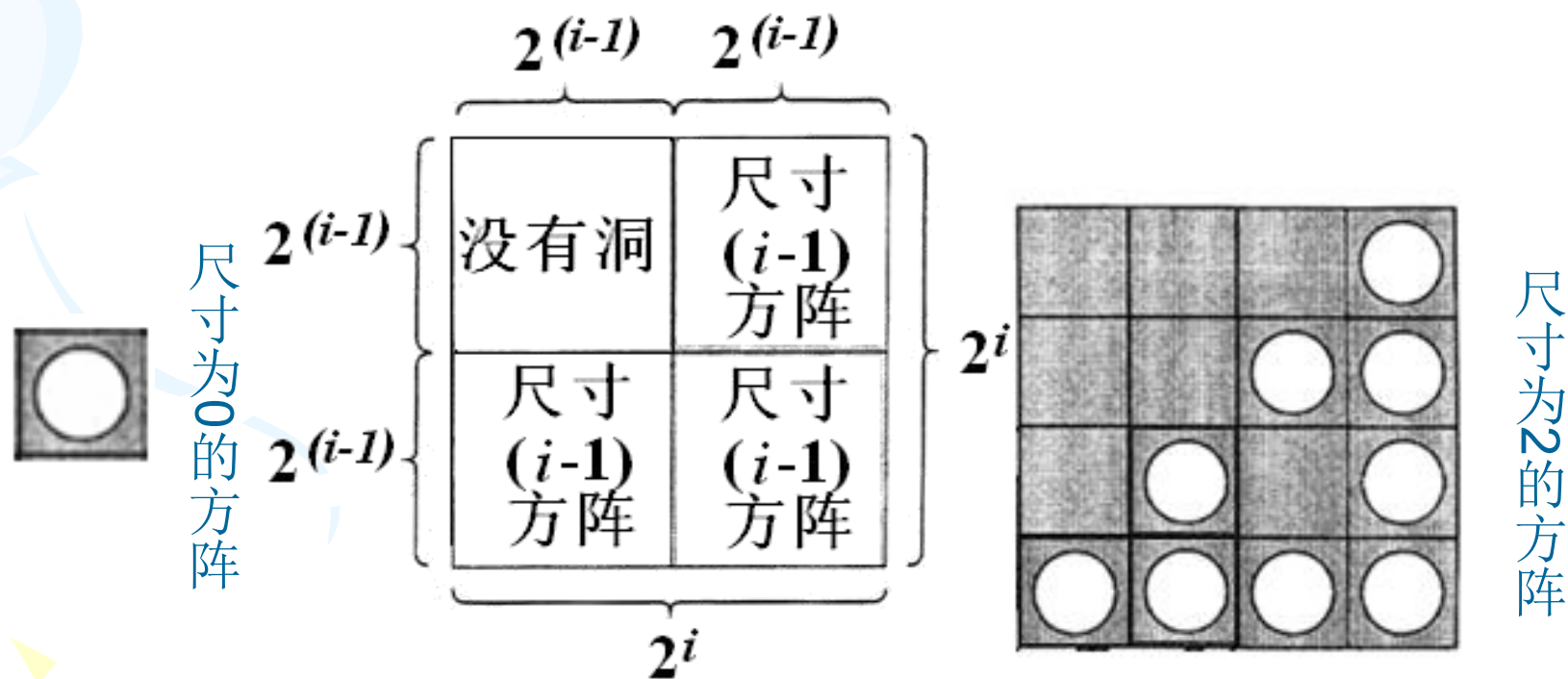
以数助形



- 一些试题给出的描述中图形极为复杂，容易使选手陷入“迷魂阵”
- 以数助形，一举抓住其本质特征，不失为解题的一种好方法。

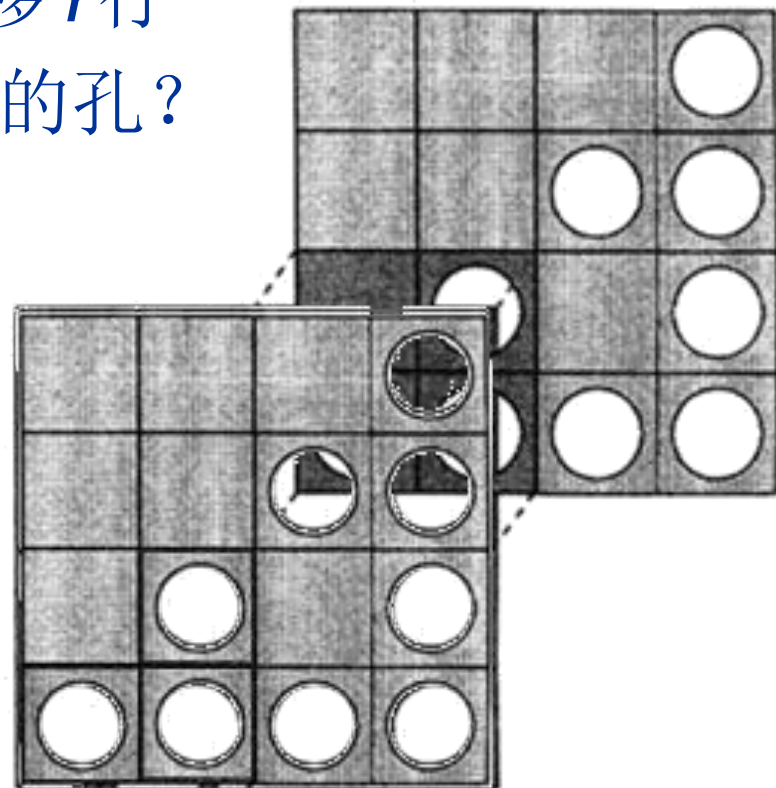
[例三]画室 (POI oi V Stage I)

- 定义尺寸为0的方阵为一个 1×1 的矩阵，在其唯一的一个方格中有一个小孔。
- 对于 $i > 0$ ，递归的定义尺寸为 i 的方阵：



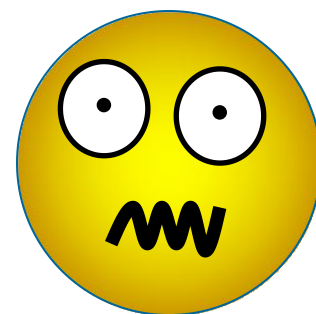
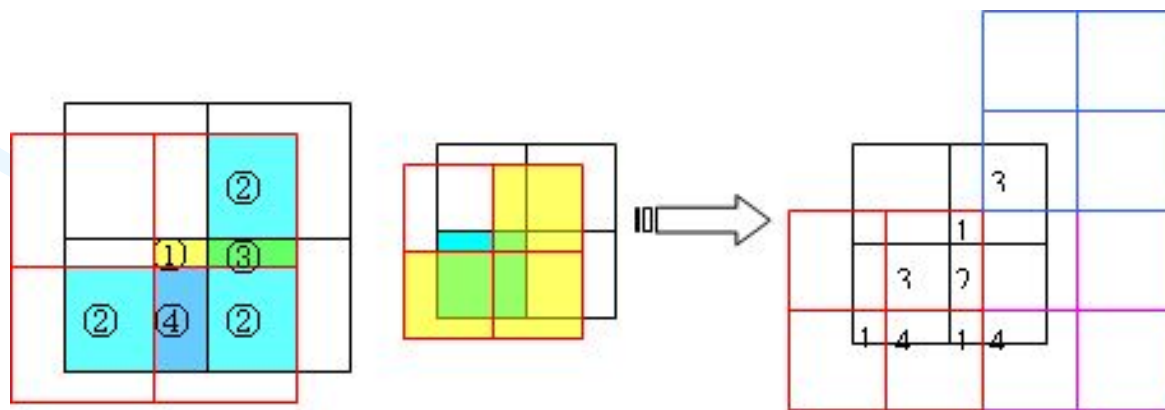
[例三]画室 (POI oi V Stage I)

- 已知尺寸 N ，和两个参数 X 和 Y
- 准备两个尺寸为 N 的方阵叠放在一起
- 上面的方阵右移 X 列，上移 Y 行
- 求两个方阵有多少个公共的孔？
- 如 $N=2, X=2, Y=2$
- 有3个公共孔



初步分析

- 直接分析两个方阵相交后的情况是可行的
- 集训队前辈解题报告的一个附图
- 结论：“形”的路子很坎坷



目标数值化

- 将行列按图示方法从0开始编号
- 每个方格都有唯一坐标 $P(x, y)$
- $P(x, y)$ 内有小孔 $\Leftrightarrow ?$

				↑
				3
				2
				1
				0
列: 0	1	2	3	→ 行
	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)

尺寸为2的方阵

目标数值化

— 将 x, y 化为二进制

- $a_1a_2a_3\dots a_N$ 和 $b_1b_2b_3\dots b_N$

— 考察 a_1 和 b_1 对方格位置的影响

- $a_1=0$ 且 $b_1=1$ 时方格内必无孔！

— 方格的有孔性质

- 当且仅当不存在 $1 \leq i \leq N$

- 满足 $a_i=0$ 且 $b_i=1$ 时

- 方格 P 内有小孔。

(0, 1)	(0, 1)
(1, 0)	(1, 1)

(a_1, b_1) 分布图

动态规划解题

简单的动态规划算法!

— 题目即求满足下列条件的方格 $P(x, y)$ 个数

- $0 \leq x, y, x+X, y+Y \leq 2^N-1$
- $(x, y), (x+X, y+Y)$ 都满足有孔性质

— 算法简述

- 以位数为阶段
- 通过记录 $x+X$ 和 $y+Y$ 进位情况保证无后效性
- 时间复杂度: $O(N)$
- 空间复杂度: $O(1)$

[例三]画室 (POI oi V Stage I)

— 小结

- “形”：情况复杂，不宜讨论
 - “数”：方格的有孔性质和有公共孔性质
 - 更简单的解题
- ## — 面对复杂的图形
- ## — 化形归数
- ## — 往往是抓住题目要害的好方法

总结

客观事物

抽象

数学

数

形

数形结合思想

总结



数形结合思想

多元性

个体差异性

以数助形

[例三]画室

解法不唯一

但是较好的

不同的人对难度
感觉不同

以形助数

[例二]最大平均值问题

一定程度上

唯一的解法

总结

数

形

辩证矛盾关系

数形结合思想

多元性

个体差异性

将抽象的数学、计算机语言与直观的图形结合起来

将抽象思维与形象思维结合起来

实现抽象概念与具体形象的联系和转化

更快更好更简单的解决实际问题



谢谢大家

Thanks

[例二]关于找切线的方法

— 利用折线斜率单调性：

— 若已知一条切线ZA

— A左方点可删去

— 平摊复杂度 $O(1)$

— 实现方法

- 设一个不回溯指针

