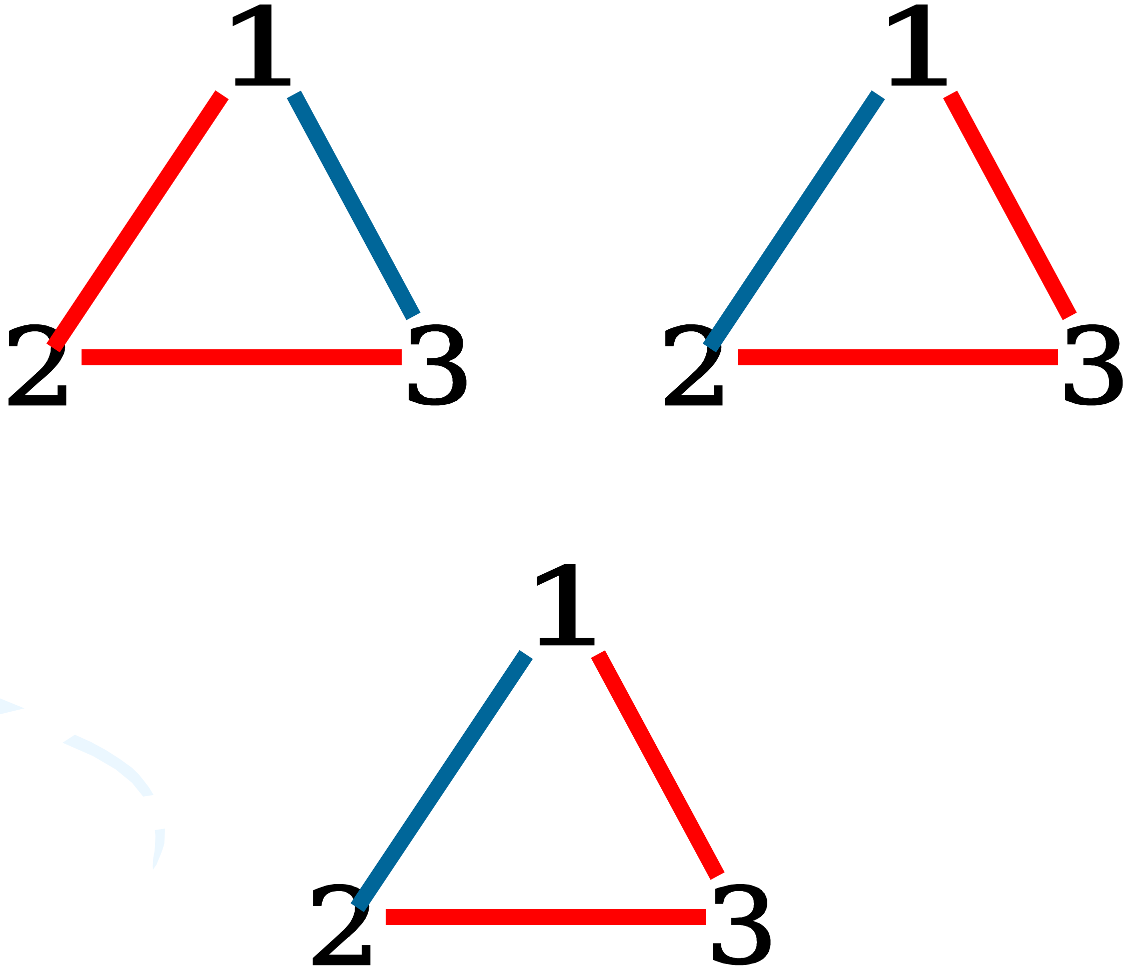
Pólya 计数法的应用

南京外国语学校 陈瑜希

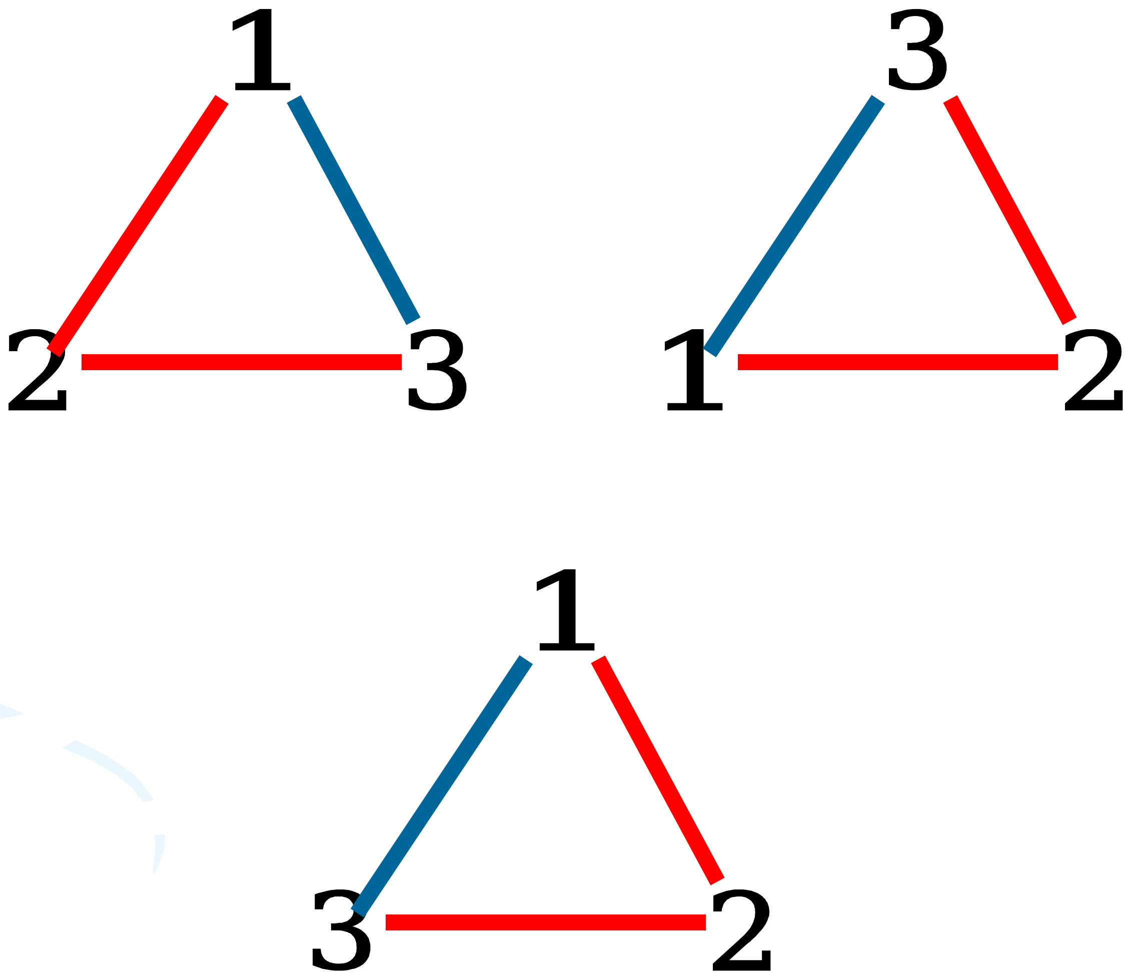
问题描述

- 06 年江苏上海选拔赛
- 染色图是无向完全图，且每条边可被染成 k 种颜色中的一种。
- 两个染色图是同构的，当且仅当可以改变一个图的顶点的编号，使得两个染色图完全相同。
- 问 N 个顶点，k 种颜色，本质不同的染色图个数（模质数 $N<P<10^9$）。
- $N \leq 53$

问题描述

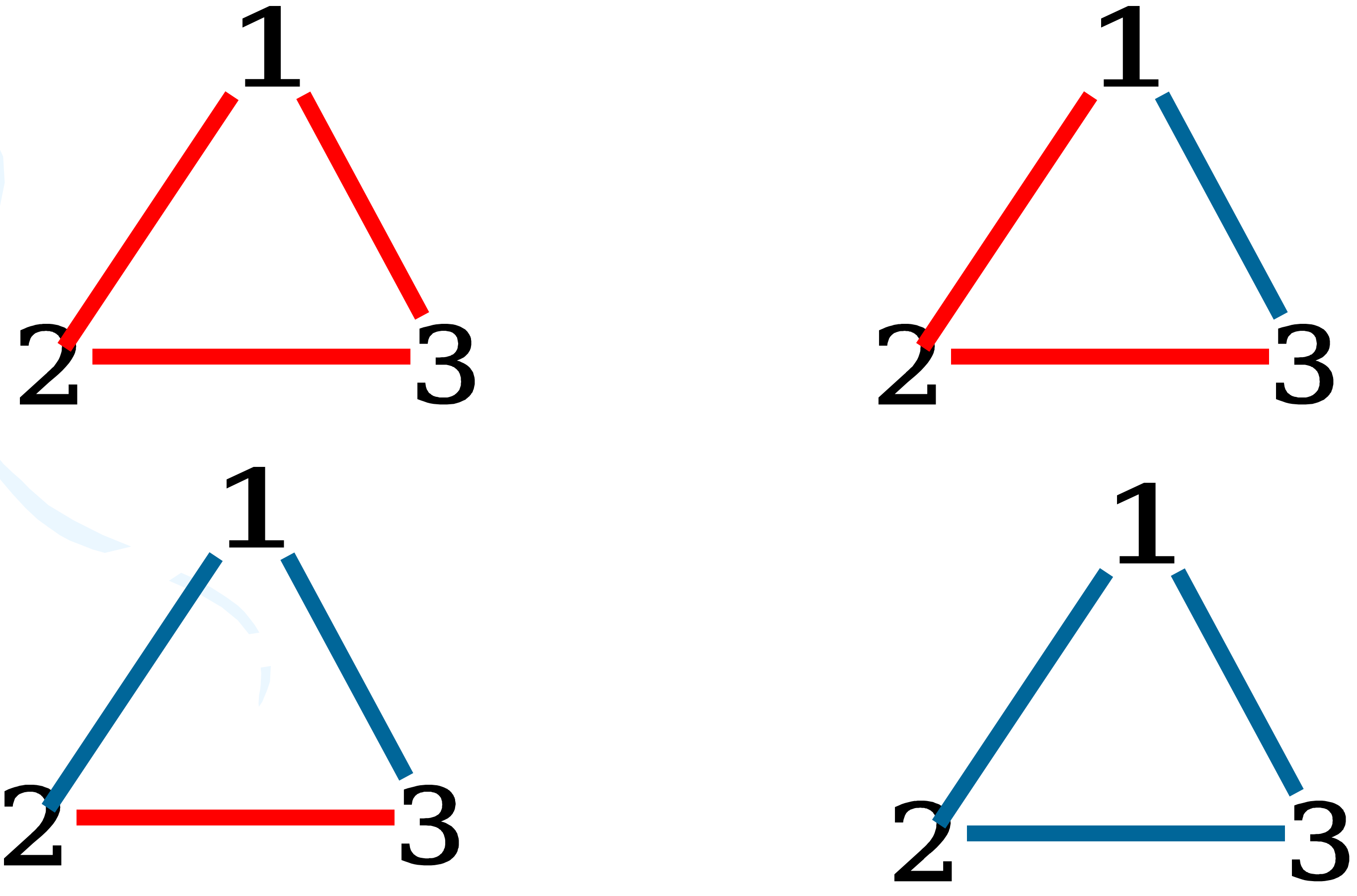


问题描述



问题描述

- N=3 K=2



简单分析

- 枚举会超时
- 普通的乘法原理无法求解

Burnside 引理

- 设 G 是置换群， C 是 G 的着色集合。
- C 中的不等价着色数为：使着色通过 G 中的置换保持不变的着色的平均数。

$$Answer = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{s} D(a_j)$$

Pólya 定理

- 假设有 k 种不同的颜色，某个置换的循环数为 c，则对于这个置换，通过它保持不变的着色数为，k 的 c 次方。

$$D(a_j) = k^{c(a_j)}$$

例题分析

- 放在这个问题中，置换群中的对象就是所有的边，染成 *k* 种颜色，G 就是由点的置换引起的边的置换的群。

分析

- 例如 N=3 时一共有 3 条边。
- 点的不同排列有 3!=6 种。
- 由点的置换而引起的对应的边的置换如下：

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,2,3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (1,2),(1,3),(2,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,3,2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (1,3),(1,2),(2,3) \end{pmatrix}$$

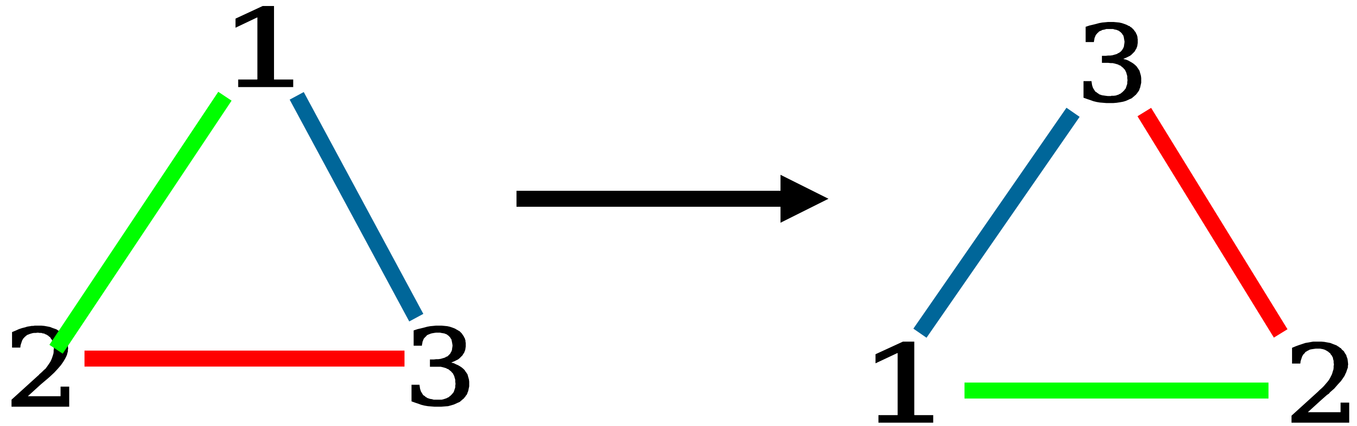
$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,1,3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (1,2),(2,3),(1,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,3,1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (2,3),(1,2),(1,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,1,2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (1,3),(2,3),(1,2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,2,1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (2,3),(1,3),(1,2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}(1,2),(1,3),(2,3)\\(1,3),(2,3),(1,2)\end{pmatrix}$$



分析

- 先求出每个置换的循环数 *c*
- 根据 Pólya 定理，可求出本质不同的方案数：

$$Answer = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{s} k^{c(a_j)}$$

分析

- 这个算法十分直观，直接套用了 Pólya 定理，但需要枚举每个对于点的置换，并求循环数。时间复杂度为 $O(N!N^2)$。
- 对于本题 $N \le 53$ 的数据范围，这个算法会超时。

分析

- 再进一步分析问题，会发现，其实这 $M!$ 个置换中，有许多是类似的，比如：

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,3,2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (1,3),(1,2),(2,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,1,3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (1,2),(2,3),(1,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,2,1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} (1,2),(1,3),(2,3) \\ (2,3),(1,3),(1,2) \end{pmatrix}$$

分析

- 观察这些对于点的置换，发现它们都是由一个长度为 1 和一个长度为 2 的循环组成。
- 显然它们对应的边的置换，也是类似的。如果把每个置换都处理一遍，是很浪费的。
- 这 3 个，只要处理一个即可。

分析

- 枚举出所有本质不同的对于点的置换，并对每种置换求下面 2 个值
  - 1 、该种置换的对应边的置换的循环节数
  - 2 、与该种置换类似的置换总数

分析

- 要保证枚举出来的对于点的置换各不相同，只需枚举它的所有循环节长度，设为L_i，并保证
- $0 < L_1 \le L_2 \le \ldots \le L_m$
- $L_1+L_2+\ldots+L_m=N$
- N=53 时，一共要需要枚举 329921 种不同情况。

分析

- 然后需要把对应点的循环信息转化成对应边的置换的循环节数

分析

- 假设点 i 与点 j 同属于一个长度为 L 的循环中，则 (i,j) 组成的置换中循环节个数为 $\left[\frac{L}{2}\right]$
- 有一个长度为 5 的循环 (1,2,3,4,5)
- (1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)
- (1,3),(2,4),(3,5),(4,1),(5,2)

分析

- 假设点 i 与点 j 各属于长 L_1 和 L_2 的两个不同循环中，则这样的边 (i,j) 组成的置换中循环节个数为 (L_1,L_2) 。
- (1,2) (3,4,5,6)
- (1,3),(2,4),(1,5),(2,6)
- (1,4),(2,5),(1,6),(2,3)

分析

- 还需要求出与其类似的置换数
- 假设已确定了 $0 < L_1 \le L_2 \le \ldots \le L_m$ ，接下来就是将 $1 \ldots N$ 这 N 个点分别放入这 m 个循环节中，满足第 i 个循环中恰含有 L_i 个点，这相当于 m 个圆排列问题，可知一共有 $\dfrac{N!}{L_1 L_2 \ldots L_m}$ 种不同方式。

分析

- 如果有 $L_i=L_{i+1}=\ldots=L_j$，那么每 $(j-i+1)!$ 种方案又是重复的，所以还要除以 $(j-i+1)!$

分析

- 所以总的置换个数就是

$$\frac{N!}{L_1 L_2 \ldots L_m s_1! s_2! \ldots s_t!}$$

- 每个循环的长度为 L
- 每组 $L_i=L_{i+1}=\ldots L_j$ s 为 $j-i+1$

分析

- 需要计算很多 $T2^{-1}$，其中 T2 很大，而且是 -1 次的，难道要分解质因数了吗?
- P 是质数，且满足 N<P 。
- 所以 T2 也与 P 互质
- 由数论知识可知:
- $T2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
- $T2^{-1} \equiv T2^{p-1} \times T2^{-1} = T2^{p-2} \pmod p$
- 所以可以把 $T2^{-1}$ 转化为求 $T2^{p-2}$，可用倍增的方法在 O(Logp) 的时间内求解。

本题总结

- 这个问题遇到了这样的困难：
- 置换的个数偏多而导致不能对每个置换都算其循环数
- 解决的方法，就是找出置换群中相似的置换，而不重复计算
- 这个去除冗余运算的方法在 Pólya 计数问题中经常用到
- 对于每类相似置换个数的计算，也需要扎实的数学功底。

全文总结

- 信息学竞赛中经常出现这类问题。比如
  - Transportation is fun (spoj 419)
  - He’s Circles (sgu 294)
  - Cubes (uva 10601)
- 它们在直接使用公式时往往会遇到一些困难。这些困难虽然不同，但也有一些相似之处。

全文总结

- Pólya 计数法不仅仅能解决许多计数问题，它的证明过程也是相当有意思的。
- 灵活使用 Pólya 计数法，不仅仅需要熟练掌握此类问题的性质，还要有扎实的数学功底和分析问题能力。
- 数学方法是解决问题的工具，而分析问题能力是算法的源泉。

分析

- 下面讨论一下如何计算：
- 一部分是 M^{T1}，其中 T1 并不大， M^{T1} mod P 可以用倍增的思想在 log(T1) 时间内计算。

证明

- 设 c 为$\mathcal{C}$ 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数等于 G 中的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数。

证明

- 定理 1： 对于每一种着色 c， c 的稳定核 G(c) 是一个置换群，而且对 G 中任意置换 f 与 g， g*c=f*c 当且仅当 $f^{-1}g$ 属于 G(c) 。

证明

- 假设 f*c=g*c 则

$$(f^{-1}\circ g)*c=f^{-1}*(g*c)=f^{-1}*(f*c)=(f^{-1}\circ f)*c=\iota*c=c$$

- 所以 $f^{-1}\circ g$ 使 c 不变，因此，$f^{-1}\circ g$ 属于 G(c)。
- 反之，假设 $f^{-1}g$ 属于 G(c)，通过类似的计算可证得 f*c=g*c

证明

- 推论：设 c 为 $\mathcal{C}$ 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数等于 G 中的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数。

证明

- 设 f 是 G 中的一个置换，根据定理 1，满足 g*c=f*c 的置换 g 实际上就是 $\{f \circ h: h \in G(c)\}$ 中的那些置换。
- 由消去律，则从 f∘h=f∘h′ 得到 h=h′ 。
- 集合中 $\{f \circ h: h \in G(c)\}$ 的置换个数等于 G(c) 中置换的个数。
- 因为总共有 |G| 个置换，所以，与 c 等价的着色数等 $\frac{|G|}{|G(c)|}$

证明

- 我们要数使 f 保持 c 不变即 f*c ＝ c 的对偶 (f,c) 的个数。

证明

- 一种计数的方式是考察 G 中的每个 f ，并计算 f 保持着色不变的着色数，然后相加所有的量。设 D(f) 是通过 f 保持着色不变的着色集，所以用这种方式计数得到

$$\sum_{j=1}^{s} D(a_j)$$

证明

- 另一种计数的方式按等价类将着色归类。
- 在同一等价类中，两种着色对和贡献了同样的量，每个等价类的总贡献是 |G| 。
- 因此，不同等价类数目就是：
- 通过每个置换保持着色不变的着色除以置换总数。

证明

- 要得到在置换下稳定不动的方案，即把置换的每个循环节都染上相同的颜色。
- 假设有 k 种不同的颜色，某个置换的循环数为 c，则对于这个置换，通过它保持不变的着色数为，k 的 c 次方。