由对称性解 2-SAT 问题

2-SAT:

- 2-SAT 就是 2 判定性问题，是一种特殊的逻辑判定问题。
- 2-SAT 问题有何特殊性？该如何求解？
- 我们从一道例题来认识 2-SAT 问题，并提出对一类 2-SAT 问题通用的解法。

Poi 0106 Peaceful Commission [和平委员会]

- 某国有 n 个党派，每个党派在议会中恰有 2 个代表。
- 现在要成立和平委员会 ，该会满足：
- 每个党派在和平委员会中有且只有一个代表
- 如果某两个代表不和，则他们不能都属于委员会
- 代表的编号从 1 到 2n ，编号为 2a-1 、 2a 的代表属于第 a 个党派

- 输入 n（党派数），m（不友好对数）及 m 对两两不和的代表编号
- 其中 $1 \le n \le 8000$，$0 \le m \le 20000$

- 求和平委员会是否能创立。
- 若能，求一种构成方式。

例：输入：3 2

1 3

2 4

输出：1

4

5

分析：

- 原题可描述为：
  有 n 个组，第 i 个组里有两个节点 A_i, A_i' 。需要从每个组中选出一个。而某些点不可以同时选出（称之为不相容）。任务是保证选出的 n 个点都能两两相容。
  - （在这里把 A_i, A_i' 的定义稍稍放宽一些，它们同时表示属于同一个组的两个节点。也就是说，如果我们描述 A_i ，那么描述这个组的另一个节点就可以用 A_i' ）

初步构图

- 如果 A_i 与 A_j 不相容，那么如果选择了 A_i，必须选择 A_j'；同样，如果选择了 A_j，就必须选择 A_i'。

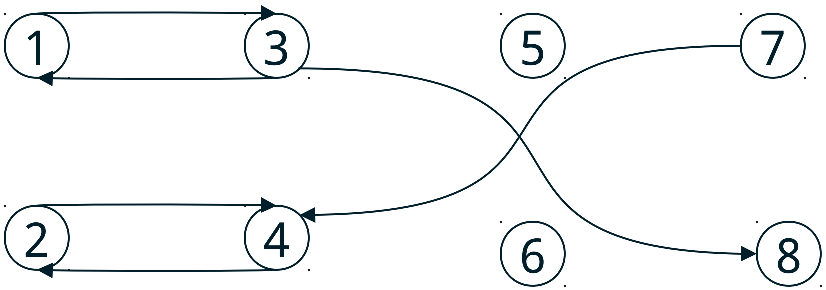
  $A_i \longrightarrow A_j'$

  $A_j \longrightarrow A_i'$

  这样的两条边**对称**

- 我们从一个例子来看：

- 假设 4 个组，不和的代表为： 1 和 4 ， 2 和 3 ， 7 和 3 ，那么构图：



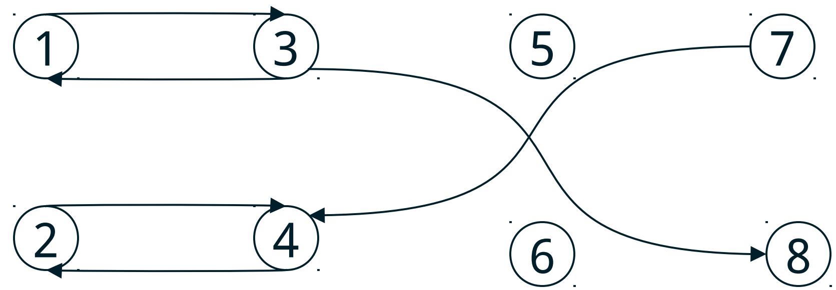
假设：

首先选 1

→3 必须选， 2 不可选

→8 必须选， 4 、 7 不可选

5 、 6 可以任选一个



- **矛盾**的情况为：

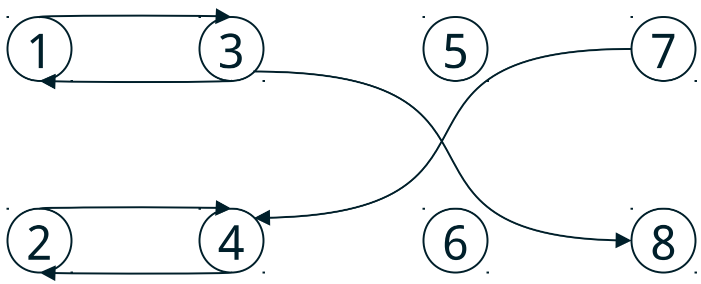
存在 A_i ，使得 A_i 既必须被选又不可选。

- 得到**算法 1** ：
- 枚举每一对尚未确定的 A_i, A_i' ，任选 1 个，推导出相关的组，若不矛盾，则可选择；否则选另 1 个，同样推导。若矛盾，问题必定无解。

- 此算法正确性简要说明：
- 由于 A_i, A_i' 都是尚未确定的，它们不与之前的组相关联，前面的选择不会影响 A_i, A_i' 。

- 算法的时间复杂度在最坏的情况下为 O(nm) 。
- 在这个算法中，并没有很好的利用图中边的**对称**性

- 先看这样一个结构：



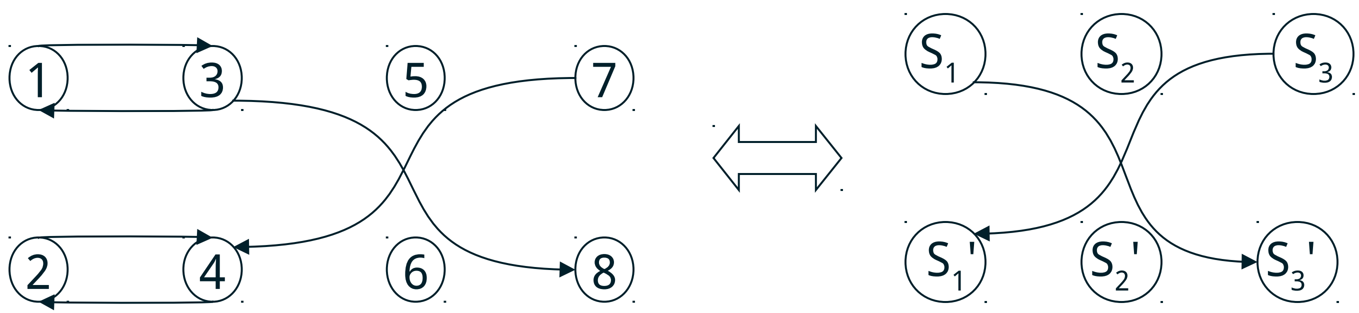
此图中 1 和 3 构成一个**环**，这样 1 和 3 要么都被选择，要么都不被选
。
2 和 4 同样如此。

- 更一般的说：
- 在每个一个环里，任意一个点的选择代表将要选择此环里的每一个点。不妨把环收缩成一个子节点（规定这样的环是**极大强连通子图**）。新节点的选择表示选择这个节点所对应的环中的每一个节点。

图的收缩

- 对于原图中的每条边 $A_i \longrightarrow A_j$（设 A_i 属于环 S_i，A_j 属于环 S_j）如果 $S_i \neq S_j$，则在新图中连边：

$$S_i \longrightarrow S_j$$



- 这样构造出一个新的**有向无环图。**
- 此图与原图**等价。**

图的收缩

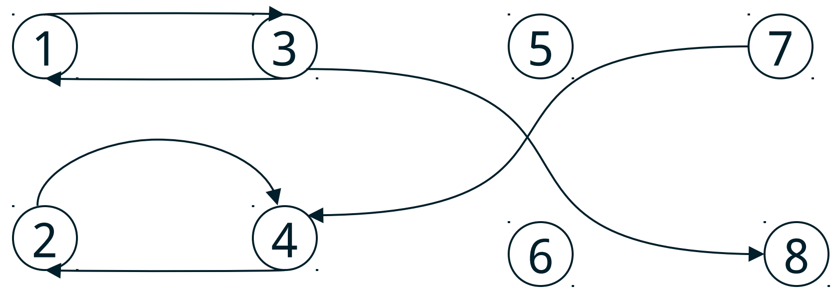
- 通过求强连通分量，可以把图转换成新的有向无环图，在这个基础上，介绍一个新的算法。

- 新算法中，如果存在一对 A_i, A_i' 属于同一个环，则判无解，否则将采用拓扑排序，以自底向上的顺序进行推导，一定能找到可行解。

- 至于这个算法的得来及正确性，将在下一段文字中进行详细分析。

新算法的提出

深入分析：



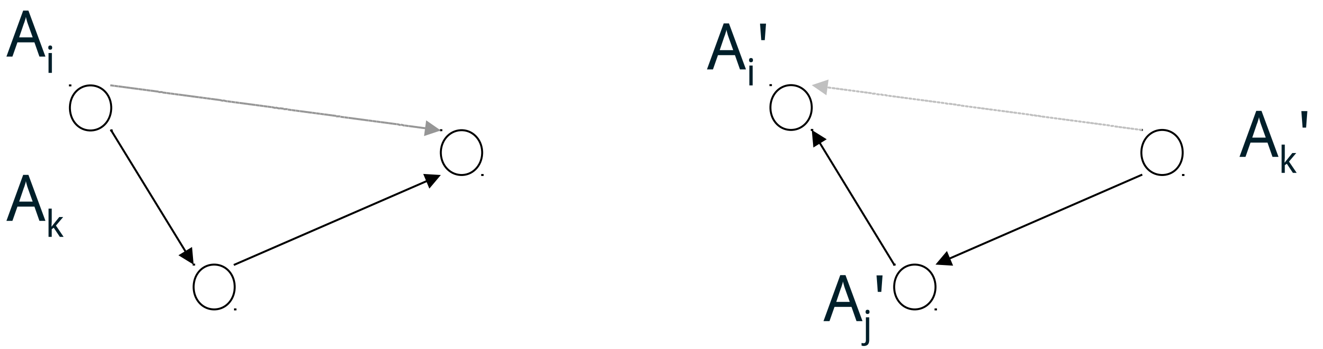
- 回忆构图的过程：
- 对于两个不相容的点 A_i, A_j，构图方式为：

$$A_i \longrightarrow A_j'$$

$$A_j \longrightarrow A_i'$$

- 前面提到过，这样的两条边**对称**，也就是说：
- 如果存在 $A_i \longrightarrow A_j$，必定存在 $A_j' \longrightarrow A_i'$。

引理：原图具有对称传递性



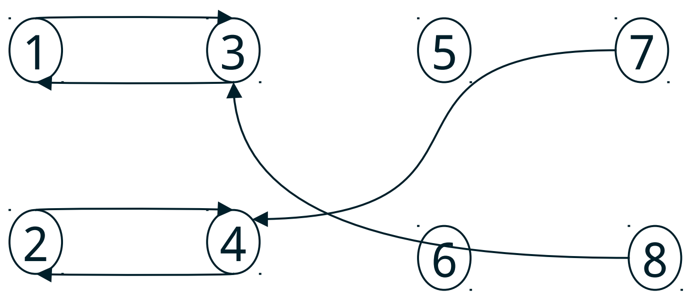
- 等价于：$A_i \longrightarrow A_k$ A_j

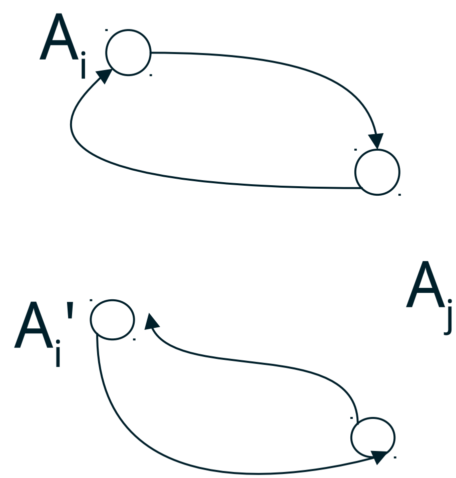
  $A_k' \longrightarrow A_i'$

- 方便起见，之后“$\longrightarrow$”代表这样一种传递关系

猜测 1 ：图中的环分别对称

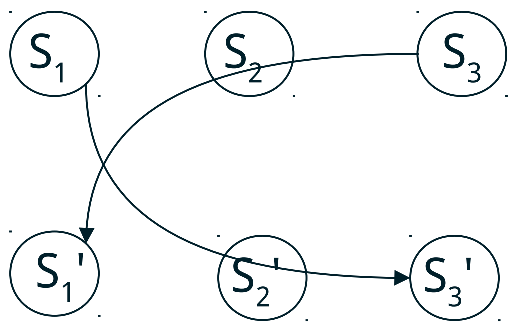
- 如果存在 A_i,A_j ， A_i,A_j 属于同一个环（记作 S_i ），那么 A_i' , A_j' 也必定属于一个环（记作 S_i' ）。



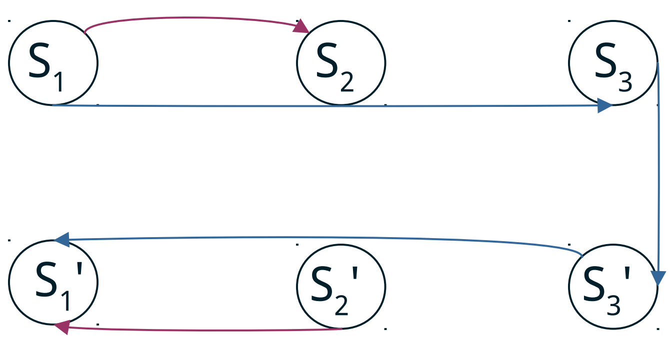


再根据前面的引理，不难推断出每个环分别对称。

推广 1 ：新图中，同样具有**对称**传递性。



证明方式与引理相类似

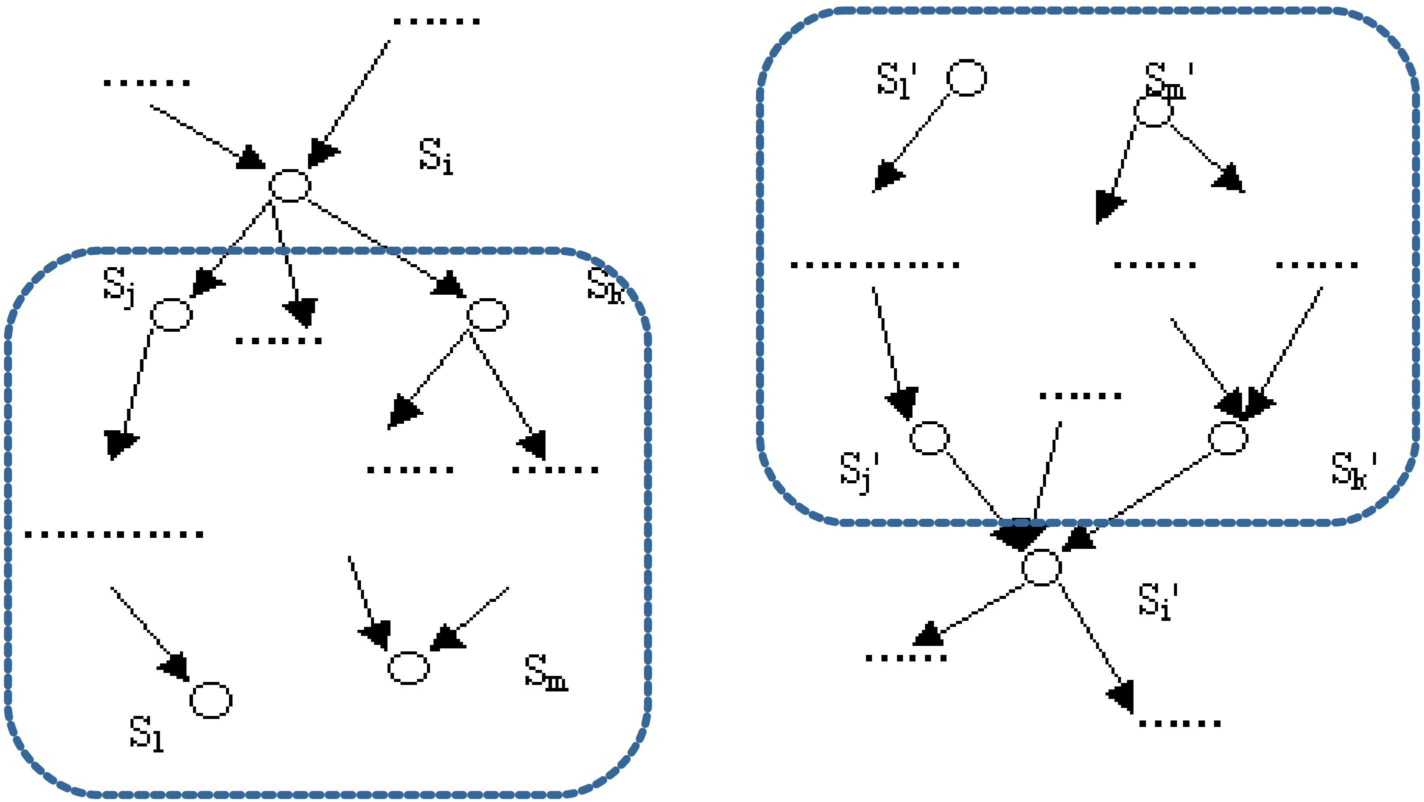


一个稍稍复杂点的结构

其中红、蓝色部分分别为两组**对称**的链结构

- 分开来看，更加一般的情况，即下图：

（说明：此图中 S_i' 有可能为 S_i 的后代节点）



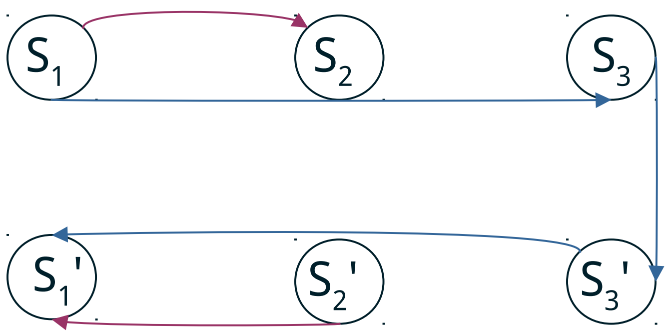
- 于是可以得到
- **推广 2 ：对于任意一对 S_i, S_i' ，S_i 的后代节点与 S_i' 的前代节点相互对称。**

- 继而提出
- **猜测 2 ：若问题无解，则必然存在 A_i, A_i' ，使得 A_i, A_i' 属于同一个环。**
- 也就是，如果每一对 A_i,A_i' 都不属于同一个环，问题必定有解。下面给出简略证明：

问题的关键

- 先提出一个跟**算法 1** 相似的步骤：
- 如果选择 S_i，那么对于所有 $S_i \longrightarrow S_j$，S_j 都必须被选择。
- 而 S_i' 必定不可选，这样 S_i' 的所有前代节点也必定不可选（将这一过程称之为**删除**）。
- 由**推广2**可以得到，这样的删除不会导致矛盾。

对称性的利用



假设选择 S_3'

→ 选择 S_3' 的后代节点，S_1'

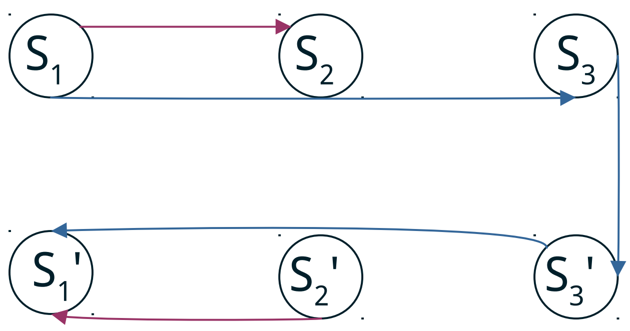
→ 删除 S_3

→ 删除 S_3 的前代节点 S_1

S_1 与 S_1' 是**对称**的

- 每次找到一个未被确定的 S_i，使得不存在 $S_i \longrightarrow \mathbf{S_i'}$ 选择 S_i 及其后代节点而删除 S_i' 及 S_i' 的前代节点。一定可以构造出一组可行解。
- 因此**猜测 2** 成立。

- 另外，若每次盲目的去找一个未被确定的 S_i ，时间复杂度相当高。
- 以**自底向上**的顺序进行选择、删除，这样还可以免去“**选择 S_i 的后代节点**”这一步。
- 用**拓扑排序**实现自底向上的顺序。



一组可能的拓扑序列
（自底向上）

S_1' S_2 S_2' S_3' S_3 S_1

算法 2 的流程：

- 1．构图
- 2．求图的极大强连通子图
- 3．把每个子图收缩成单个节点，根据原图关系构造一个有向无环图
- 4．判断是否有解，无解则输出（退出）
- 5．对新图进行拓扑排序
- 6．自底向上进行选择、删除
- 7．输出

小结：

- 整个算法的时间复杂度大概是 O(m) ，解决此问题可以说是相当有效了。
- 在整个算法的构造、证明中反复提到了一个词：**对称**。发现、利用了这个图的特殊性质，我们才能够很好的解决问题。

- 并且，由 2-SAT 问题模型变换出的类似的题目都可以用上述方法解决。

全文总结：

- 充分挖掘图的性质，能够更好的解决问题。
- 不仅仅是对于图论，这种思想可以在很多问题中得到很好的应用。
- 希望我们能掌握此种解题的思想，在熟练基础算法的同时深入分析、灵活运用、大胆创新，从而解决更多更新的难题。