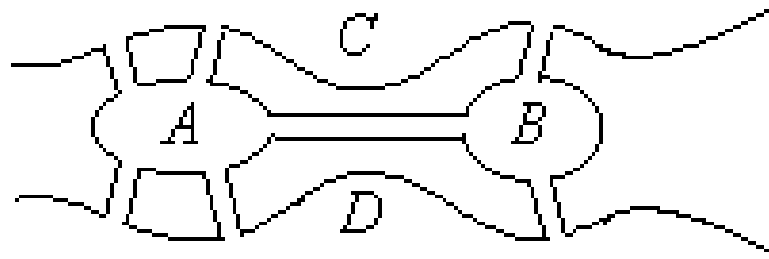


欧拉回路性质与应用探究

湖南师大附中
仇荣琦

欧拉回路与七桥问题

- 欧拉回路是最古老的图论问题之一，它诞生于十八世纪的哥尼斯堡。
- 当时城中有七座桥，人们想从某个位置出发，不重复地走遍每一座桥，最后回到出发点。这便是最初的欧拉回路问题。



相关概念

- 欧拉回路 不重复地经过每条边的回路。
- 欧拉路径 不重复地经过每条边的路径。
- 欧拉图 存在欧拉回路的图。
- 半欧拉图 存在欧拉路径的图。

无向欧拉图的判定

- 无向图存在欧拉回路的充要条件：
连通且没有奇点。
- 无向图存在欧拉路径的充要条件：
连通且奇点个数为 **2**。

有向欧拉图的判定

- 有向图存在欧拉回路的充要条件：
基图连通且所有顶点入度等于出度。
- 有向图存在欧拉路径的充要条件：
基图连通且存在某顶点入度比出度大 **1**，
另一顶点出度比入度大 **1**，其余顶点入度
等于出度。

求无向图欧拉回路的算法

1. 在图中任意找一个回路 C ;
2. 将图中属于 C 的边删除;
3. 在残留图的各个极大连通分量中求欧拉回路;
4. 将各极大连通分量中的欧拉回路合并到 C 上。

例题一 单词游戏

- 有 N 个盘子，每个盘子上写着一个仅由小写字母组成的英文单词。
- 你需要给这些盘子按照合适的顺序排成一行，使得相邻两个盘子中，前一个盘子上面单词的末字母等于后一个盘子上面单词的首字母。
- 请你编写一个程序，判断是否能达到这一要求。如果能，请给出一个合适的顺序。

样例

mouse

malform

acm

样例

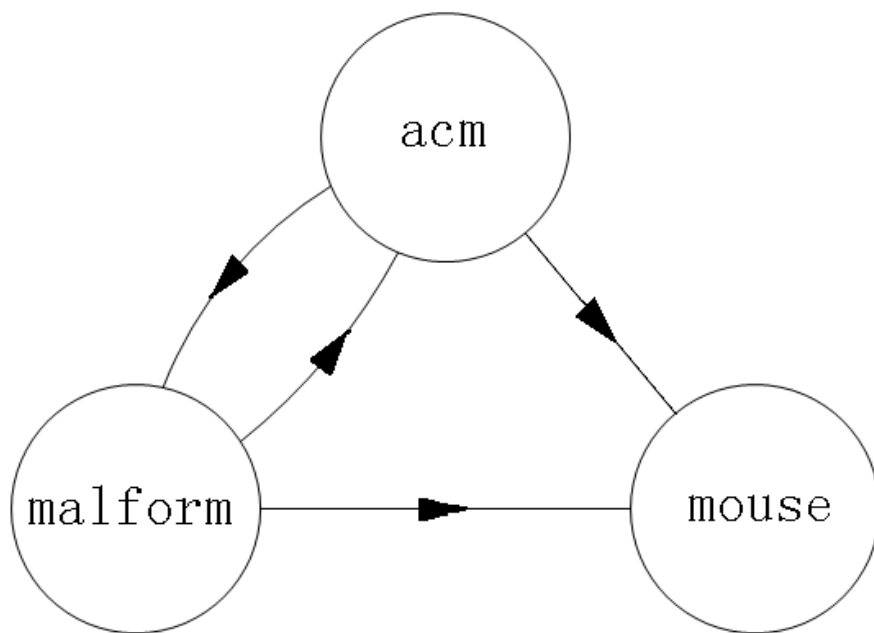
ac**m**

mmalform**m**

mmouse

模型 1

- 将每个盘子看作一个顶点。
- 如果盘子 **B** 能连接在盘子 **A** 后面，那么从 **A** 向 **B** 连一条有向边。

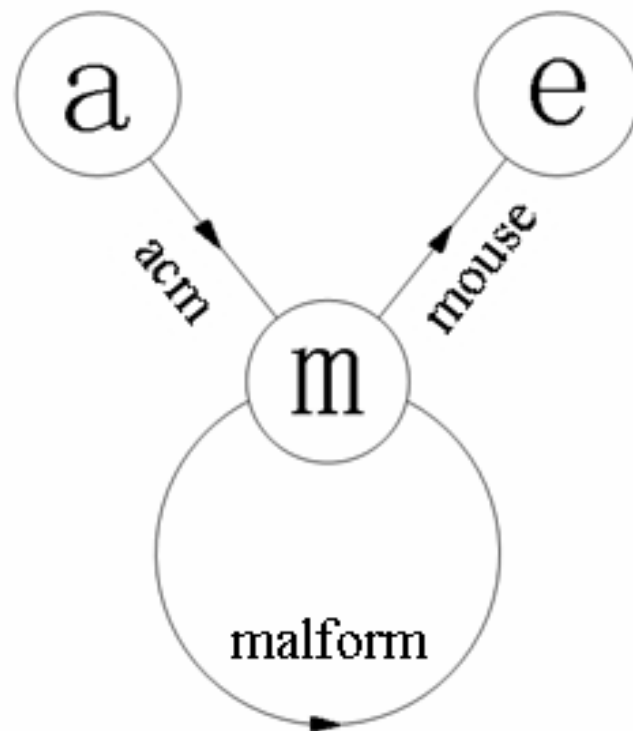


模型 1

- 问题转化为在图中寻找一条不重复地经过所有顶点的路径，即哈密尔顿路。
- 但是，求哈密尔顿路是一个十分困难的问题，这样的建模没有给解题带来任何便利。我们必须另辟蹊径。

模型 2

- 以 26 个英文字母作为顶点。
- 对于每一个单词，在图中从它的首字母向末字母连一条有向边。



模型 2

- 问题转化为在图中寻找一条不重复地经过所有边的路径，即欧拉路径。
- 这个问题能够在 $O(|E|)$ 时间内解决。

小结

- 比较以上两个模型，模型 1 过于直接，模型 2 则打破了“顶点表示元素，边表示元素之间关系”的思维定势，将元素表示在边上，而顶点则起到连接各个元素的作用。

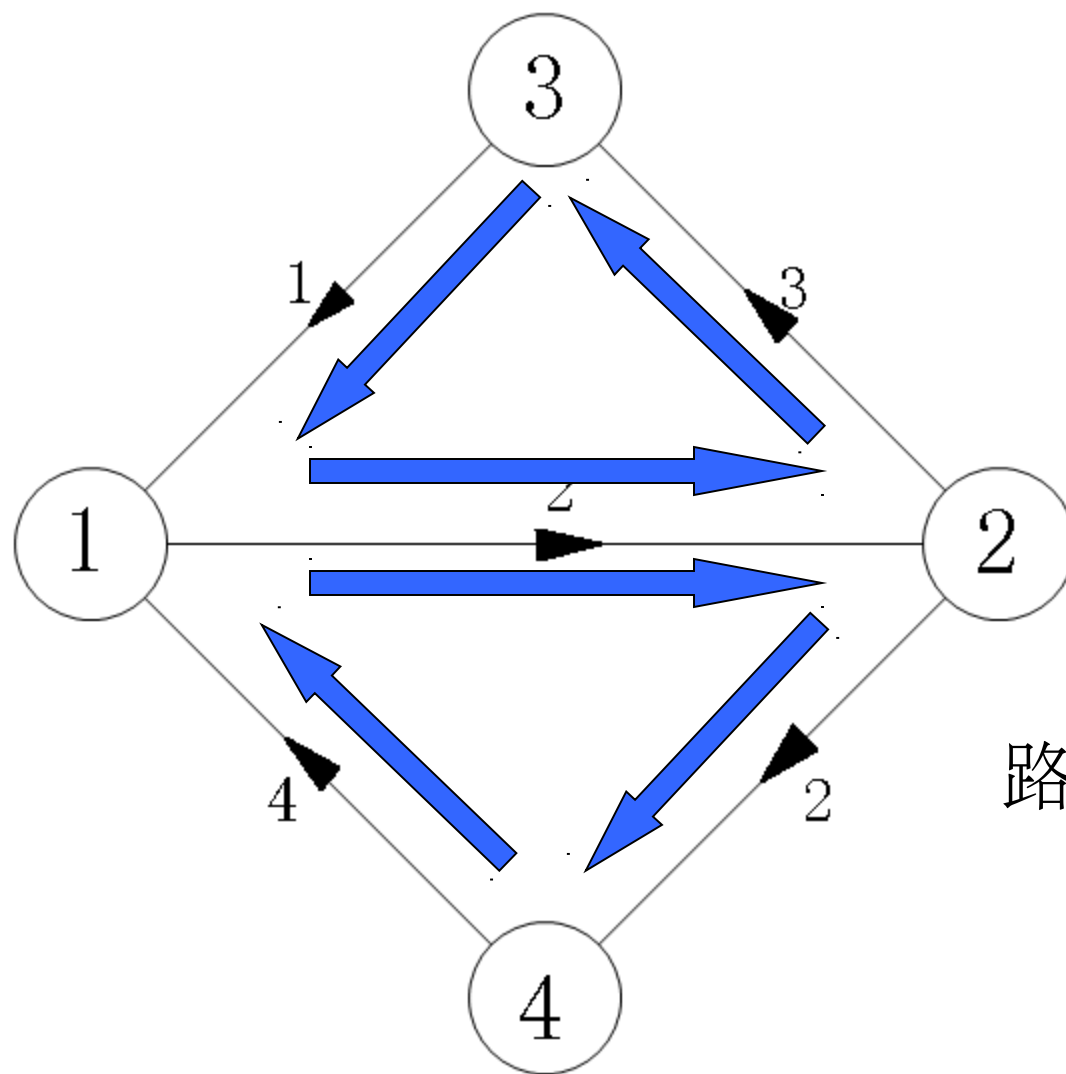
例题二 中国邮递员问题

- A 城市的交通系统由若干个路口和街道组成，每条街道都连接着两个路口。
- 所有街道都只能单向通行。
- 每条街道都有一个长度值。

例题二 中国邮递员问题

- 一名邮递员传送报纸和信件，要从邮局出发经过他所管辖的每一条街道，最后返回邮局。每条街道可以经过不止一次。
- 他应该如何安排自己的路线，使得走过的总长度最短呢？

样例



路线总长度为 14

分析

- 容易看出题目给出的的是一个图的模型。
- 在有向图中找一条权值最小的回路，使得它经过图中的每条边至少一次。

分析

- 如果问题有解，那么一定满足以下条件：
 - 1、基图连通；
 - 2、不存在某个顶点入度为 0 或出度为 0。



分析

- 为了简化问题，我们暂时不考虑边的权值。
- 问题的核心条件是：“每条边经过至少一次”
 -
- 转化为如下形式：将图中的某些边拆分成若干条平行边，使得图中存在欧拉回路。

分析

- 设顶点 v 的入度与出度之差为 $p(v)$ 。
- 对于 $p(v) > 0$ 的顶点，需要增加 $p(v)$ 条从 v 出发的边；
- 对于 $p(v) < 0$ 的顶点，需要增加 $-p(v)$ 条到 v 结束的边；
- 对于 $p(v) = 0$ 的顶点，需要增加相等数量的从 v 出发的边和到 v 结束的边。

分析

- $p(v) > 0$  ○ 网络的源点，向网络发出 $p(v)$ 单位的流；
- $p(v) < 0$  ○ 网络的汇点，从网络接收 $-p(v)$ 单位的流；
- $p(v) = 0$ ○ 网络的中间结点，接收的流量等于发出的流量。

分析

- 原问题转化为多源多汇的最大流问题。
- 我们可以通过附加超级源 s 和超级汇 t 的方法将其转化为单源单汇的经典最大流问题。

分析

- 下面我们考虑边的权值。
 - 对于原图中的边 e ，将其费用值 $w(e)$ 赋为对应边的长度；
 - 其余的边不产生费用，将其费用值赋为 0。
-
- 求网络中从 s 到 t 的最小费用最大流。
 - 最后，我们只需根据各边的流量情况将原图进行改造，并在新图中求欧拉回路即可。

小结

- 本题的解答过程中，运用了欧拉图的一些性质对题目进行分析，通过联想、类比将问题对应到一个流网络模型上，并使用最小费用最大流算法解决问题。

拓展

- 如果将条件改成“所有街道都能够双向通行”，该如何解决？
- 如果将条件改成“部分街道能够双向通行，部分街道只能单向通行”呢？

例题三 赌博机

- 一台赌博机由 n 个整数发生器 T_1, T_2, \dots, T_n 组成。
- T_i 能够产生的整数集合为 S_i ， S_i 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集。
- 游戏开始时只有 T_1 处于活动状态。

例题三 赌博机

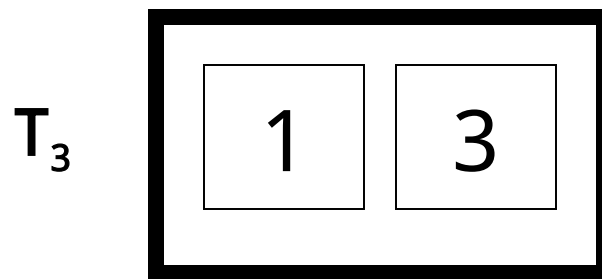
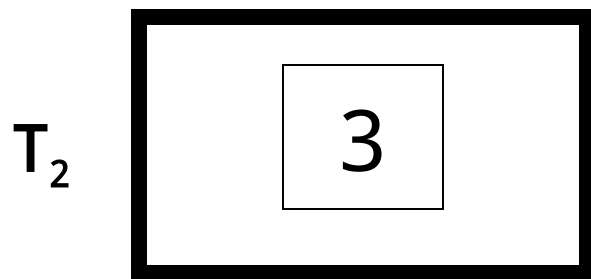
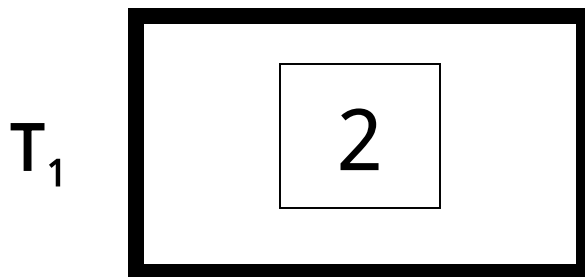
- 设当前的活动发生器为 T_i :
- 若 $S_i \neq \Phi$, 游戏者可以在 S_i 中选择一个数 r , 然后将 r 从 S_i 中删除, 且活动状态转移到 T_r ;
- 若 $S_i = \Phi$, 那么游戏结束。

例题三 赌博机

- 如果游戏结束时，最后一个活动发生器是 T_1 ，并且所有 $S_i = \Phi$ ，那么游戏者失败，否则获胜。
- 对于一台给定的赌博机，请你判断能否获胜。如果能，给出一个获胜的策略。

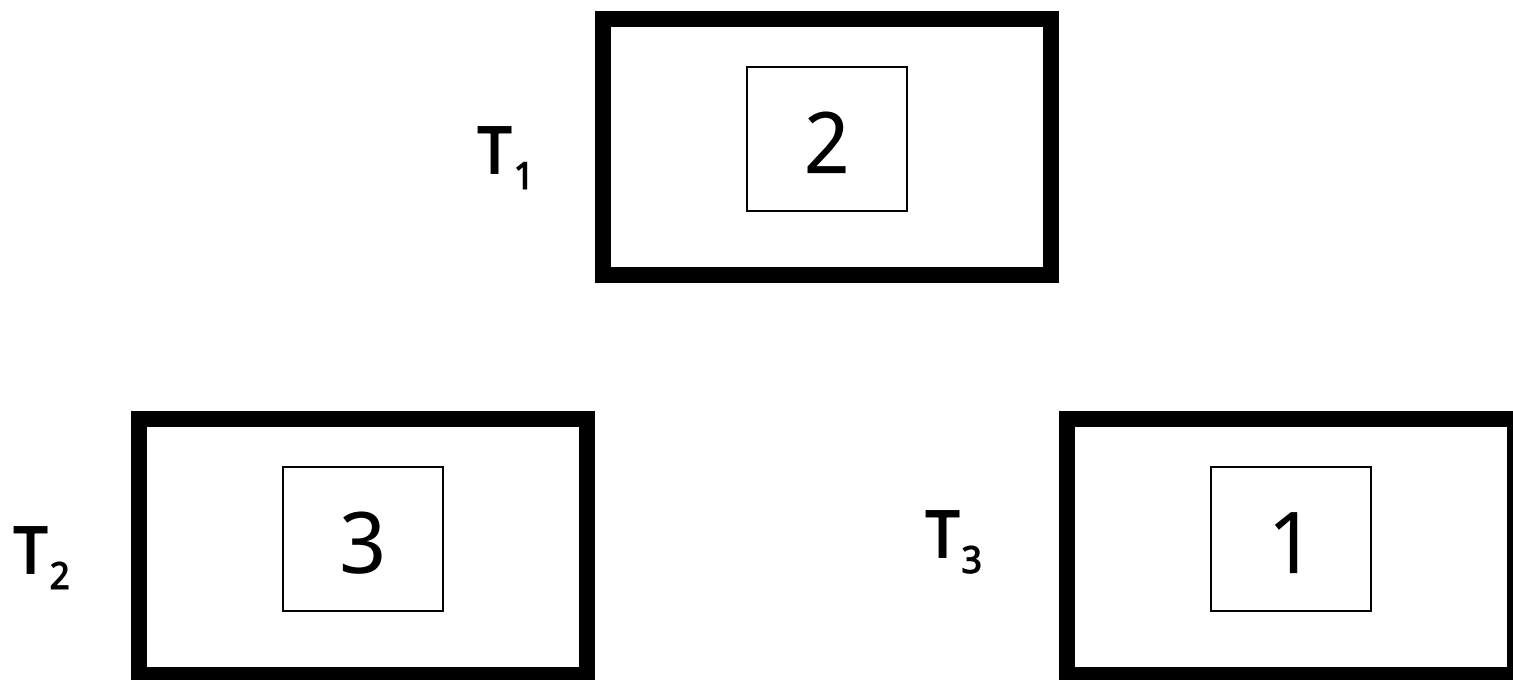
样例

- 下图是一个能够获胜的赌博机。
一种选数方案为：2 3 1



样例

- 下图则是一个不可能获胜的赌博机。



分析

- 将问题抽象为一个图模型。
- 以 n 个整数发生器作为顶点。
- 如果 T_i 能够产生数 j ，那么从 v_i 向 v_j 连一条有向边。
- 一次游戏过程在图中对应一条简单路径。

分析

- 一台赌博机不存在获胜策略

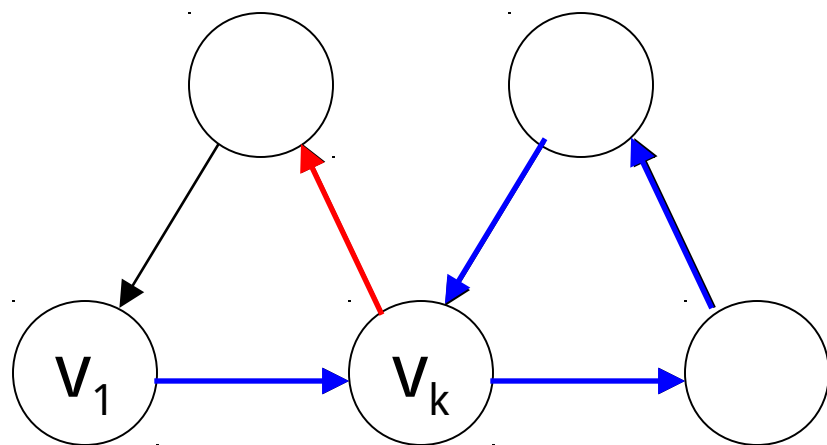
等价于

- 在图中从 v_1 出发，不管怎么走，如果不重复走一条边，一定会走出一条欧拉回路。
- 这类图称为随机欧拉图。

分析

- 显然，随机欧拉图是欧拉图的一种特例。
- 以下考虑如何在欧拉图的基础上判定随机欧拉图。
- 通过分析我们得出一个重要的结论：
- 任何一次游戏过程在图中对应的路径一定是一条回路！

分析



进入 v_k 的次数: ~~0~~

离开 v_k 的次数: 0

- 如果结论不成立，假设最后一个经过的顶点是 $v_k(k>1)$ ，则路径中进入 v_k 的次数比离开 v_k 的次数大 1。而 v_k 的入度等于出度，所以此时一定存在一条离开 v_k 的边没有被访问过，这与游戏结束的条件不符！

分析

- 假设某次游戏过程在图 G 中对应回路 C 。
- 将 C 从图 G 中删去得到残留图 G_0 。
- 显然， G_0 中 v_1 的度为 0 （否则游戏不会结束）。
- 若 G_0 中边数为 0 ，那么这是一次失败的游戏过程；
- 否则， G_0 至少存在一个不经过 v_1 的回路。

分析

- 游戏者能够获胜，当且仅当图 **G** 中存在一条不经过 v_1 的回路。
- 我们只需任意找一条这样的回路，将其从图 **G** 中删去，然后在残留图中寻找一条欧拉回路即可。
- 如果不存在，则游戏必然失败。

总结

- 欧拉回路的应用主要有以下几个方面：
 - 通过巧妙的构图，将问题转化为在图中寻找欧拉回路；
 - 利用欧拉图的性质作为解题的突破口，使得看似棘手的问题迎刃而解；
 - 通过研究欧拉图的各种变形来解决问题。

总结

○ 欧拉回路的优点是：

- 简洁、清晰
- 应用范围广
- 算法高效

以不变应万变

○ 欧拉回路的缺点是：

- 思维难度大

