

# 组合游戏略述

## —— 浅谈组合游戏的若干拓展及变形

石家庄二中 北校区

高三 18 班 贾志豪

# 内容概述 content introduction

## ❖ 组合游戏的规则拓展

- 走完最后一步者输—— **Anti-SG** 游戏和 **SJ** 定理
- 可以将一堆石子分成多堆—— **Multi-SG** 游戏
- 每一个可移动的棋子都要移动—— **Every-SG** 游戏

## ❖ 组合游戏的模型变形

- 翻硬币图删边游戏
- 无向图删边游戏

# Every-SG 游戏

❖ 何为 **Every-SG** 游戏？？？

- 有 **N** 个单一游戏，游戏者轮流进行决策；
- 游戏者的决策必须满足：对于所有还没有结束的单一游戏，游戏者必须对该单一游戏进行一步操作；
- 无路可走者输

怎么办？  
怎么办？  
怎么办？？？

# Every-SG 游戏

## ❖ 贪心策略：

- 对于某一个单一游戏，如果当前是先手必胜局，那么先手不会放弃游戏的胜利！！！！
- 那么，游戏者需要做的，就是让自己可以取得胜利的游戏尽可能长的玩下去，让自己不能取得胜利的游戏尽可能短的玩下去！！！！



# Every-SG 游戏

## ❖ 解决方法:

- 对于 **SG** 值为 **0** 的点，我们需要知道最少几步能将游戏带入终止状态；
- 对于 **SG** 值不为 **0** 的点，我们需要知道最多几步游戏会被带入终止状态；
- 以上两个值，我们都用 **step** 来表示

$$\text{step}(v) = \begin{cases} 0 & v \text{ 为终止状态} \\ \max(\text{step}(u)) + 1 & SG(v) > 0 \wedge u \text{ 为 } v \text{ 的后继状态} \wedge SG(u) = 0 \\ \min(\text{step}(u)) + 1 & SG(v) = 0 \wedge u \text{ 为 } v \text{ 的后继状态} \end{cases}$$

# Every-SG 游戏

## ❖ 结论:

- 先手必胜当且仅当 **step** 值最大的单一游戏为先手必胜游戏

## ❖ 思考:

- **step** 值最大的既有先手必胜游戏，又有先手必败游戏时，是否意味着平局？？？

**所有先手必胜的游戏的 *step* 值为奇数  
！所有先手必败的游戏的 *step* 值为偶数！**

# Every-SG 游戏

## ❖ 发现宝藏（长与短的博弈）

- 一般的组合游戏只有输与赢的博弈；
- 而 **Every-SG** 游戏又增加了长与短的博弈，这使得 **Every-SG** 游戏更有嚼头，更有味道

输 赢 长 短

# Cutting Edges 游戏

## ❖ 退化版:

- ▣ 给出一个有  $N$  个点的树，有一个点作为树的根节点。
- ▣ 游戏者轮流从树中删去边，删去一条边后，不与根节点相连的部分将被移走。
- ▣ 谁无边可删谁输

如何做??  
如何做??  
如何做??



# Cutting Edges 游戏

## ❖ 从树结构入手 ??

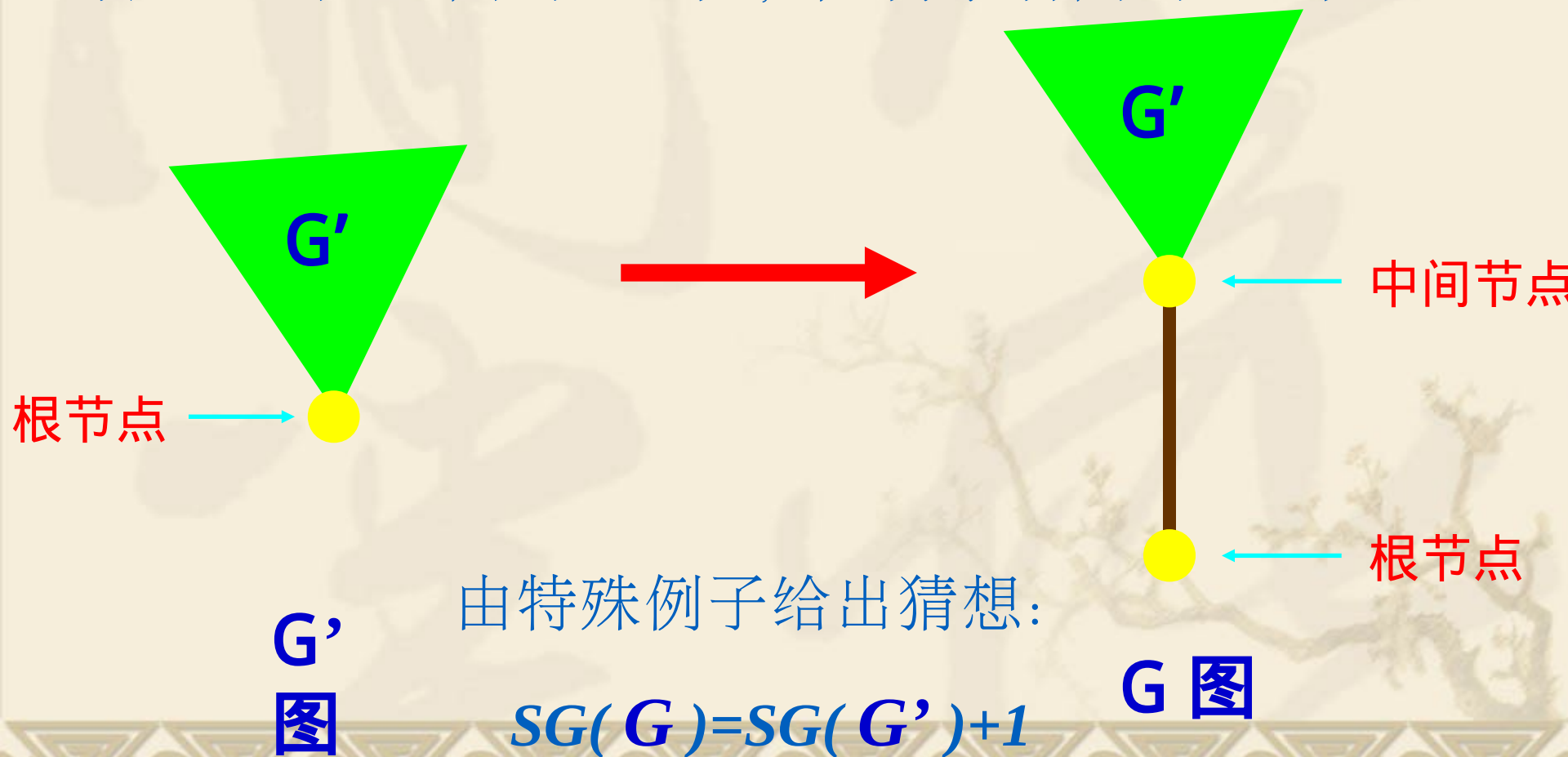
▣ 树结构是一种特殊的拓扑结构

## ❖ 从最简单的例子入手 ??

▣ 根节点只有一个分支

# Cutting Edges 游戏

考虑：已知左图的 **SG** 值，如何求右图的 **SG** 值

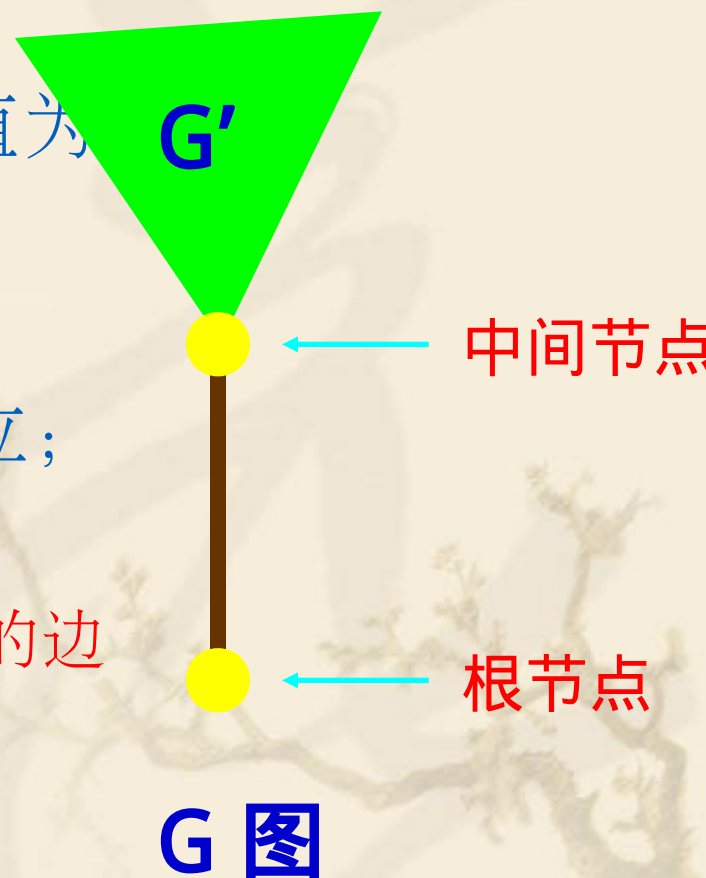


# Cutting Edges 游戏

## ❖ 证明猜想（数学归纳法）

- 即证：它的后继状态的 **SG** 值为 **0** 到  $SG(G')$  的所有值；
- 以树中节点个数作为阶段；
- 一个节点和两个节点显然成立；
- 假设 **N** 个节点时成立，

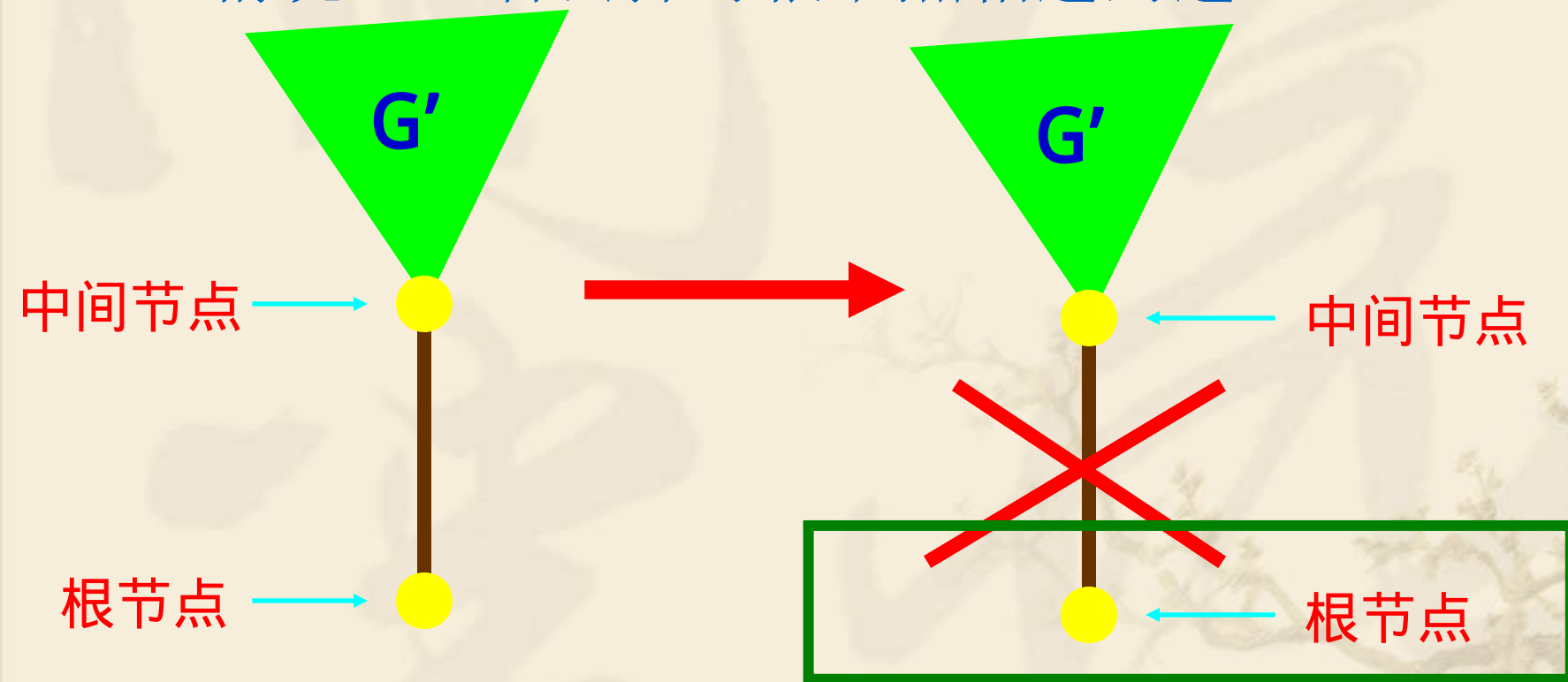
❖ 情况一：若去掉与根节点相连的边



**G 图**

# Cutting Edges 游戏

情况一：若去掉与根节点相连的边





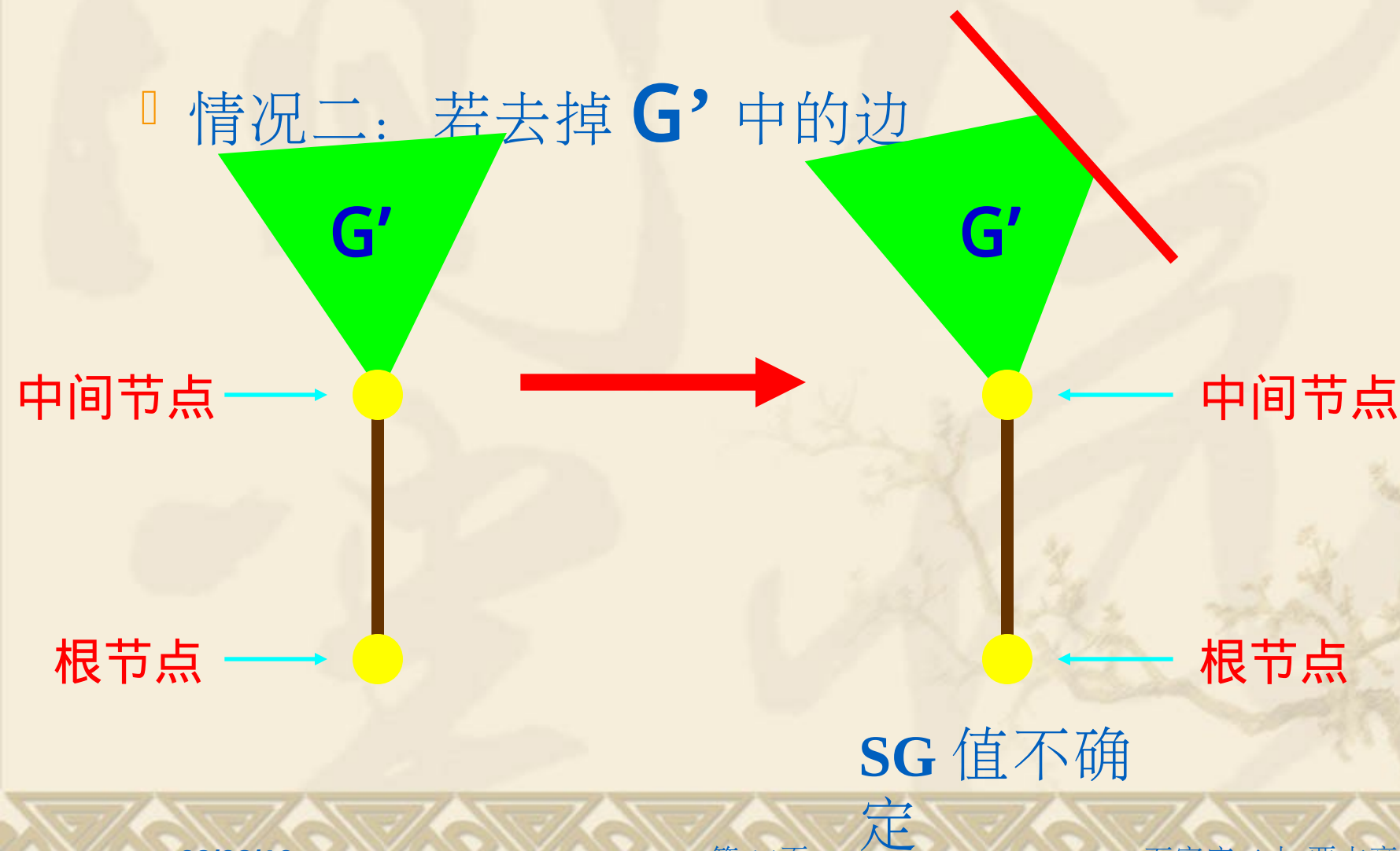
# Cutting Edges 游戏

## ❖ 证明猜想（数学归纳法）

- 以树中节点个数作为阶段；
- 一个节点和两个节点显然成立；
- 假设 **N** 个节点时成立，
  - ❖ 情况一：若去掉与根节点相连的边
  - ❖ 情况二：若去掉 **G'** 中的边

# Cutting Edges 游戏

情况二：若去掉  $G'$  中的边



# Cutting Edges 游戏

考虑左图的 **SG** 值意味着什么??

定理:  $SG(G) = SG(G') + 1$

至多有  $N$  个点

由归纳假设

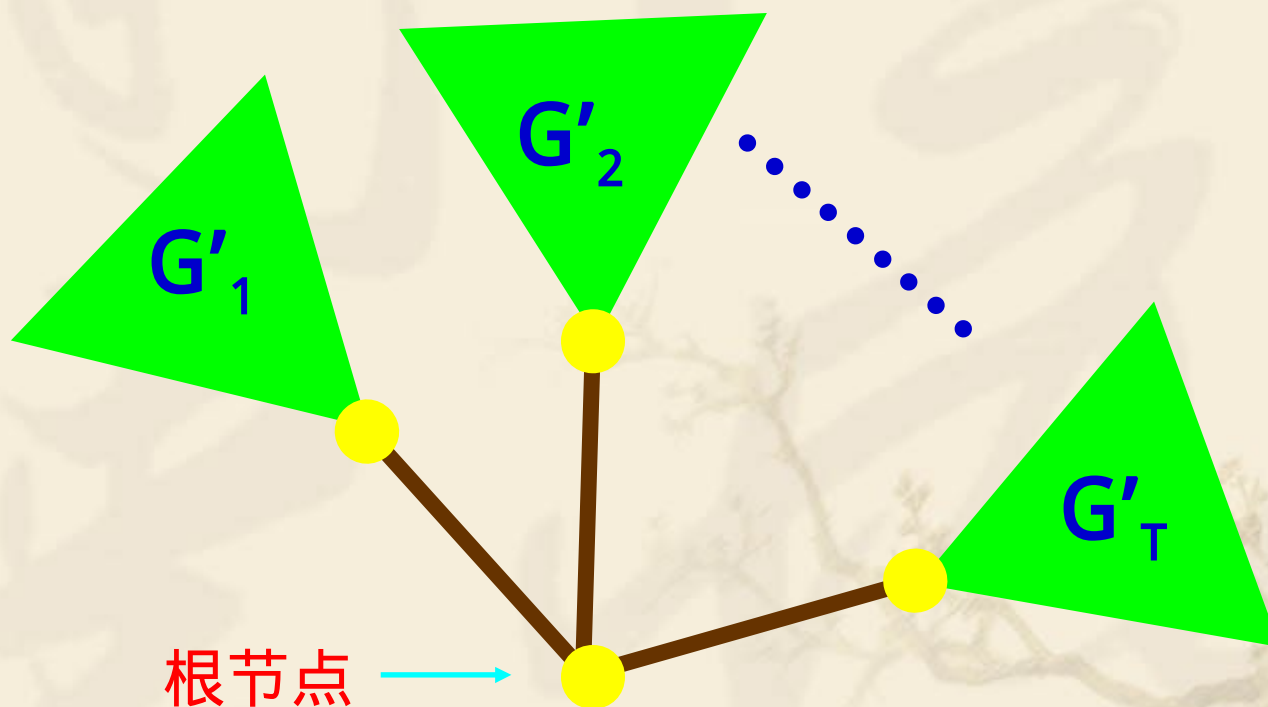
至多有  $N-1$  个点

$SG$  值为  $0$  到  $SG(G') - 1$ , 取不到  $SG(G')$

$SG$  值为  $1$  到  $SG(G')$ , 取不到  $SG(G') + 1$

# Cutting Edges 游戏

更复杂的情况





# Cutting Edges 游戏

- ❖ 根据树结构的拓扑性
- ❖ 试着去对 **G** 图进行拆分

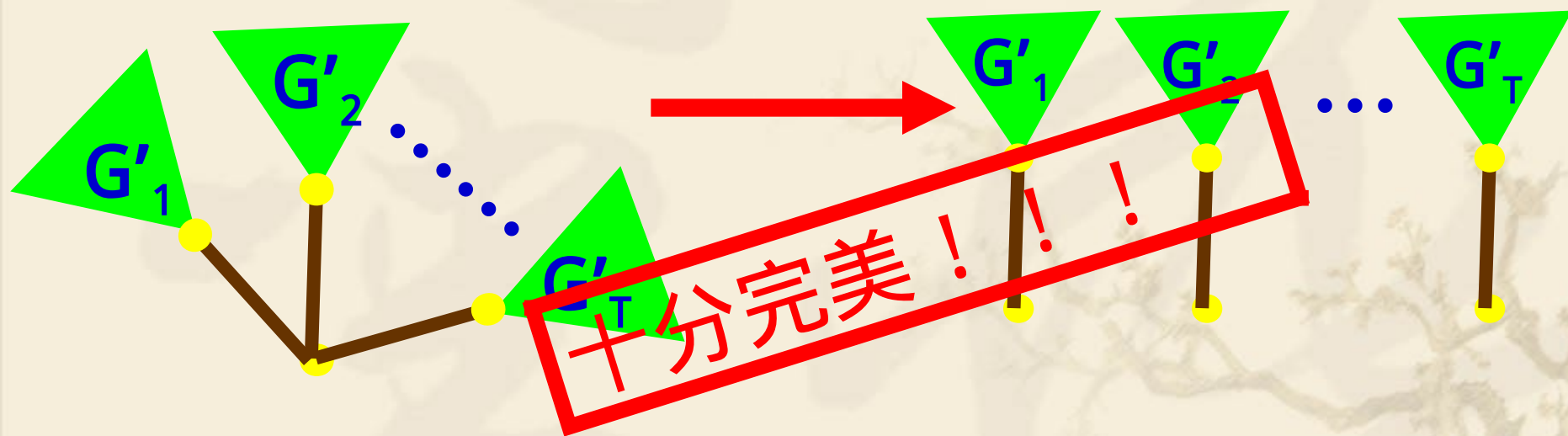
□ 拆法一（一般树形结构拆法）



# Cutting Edges 游戏

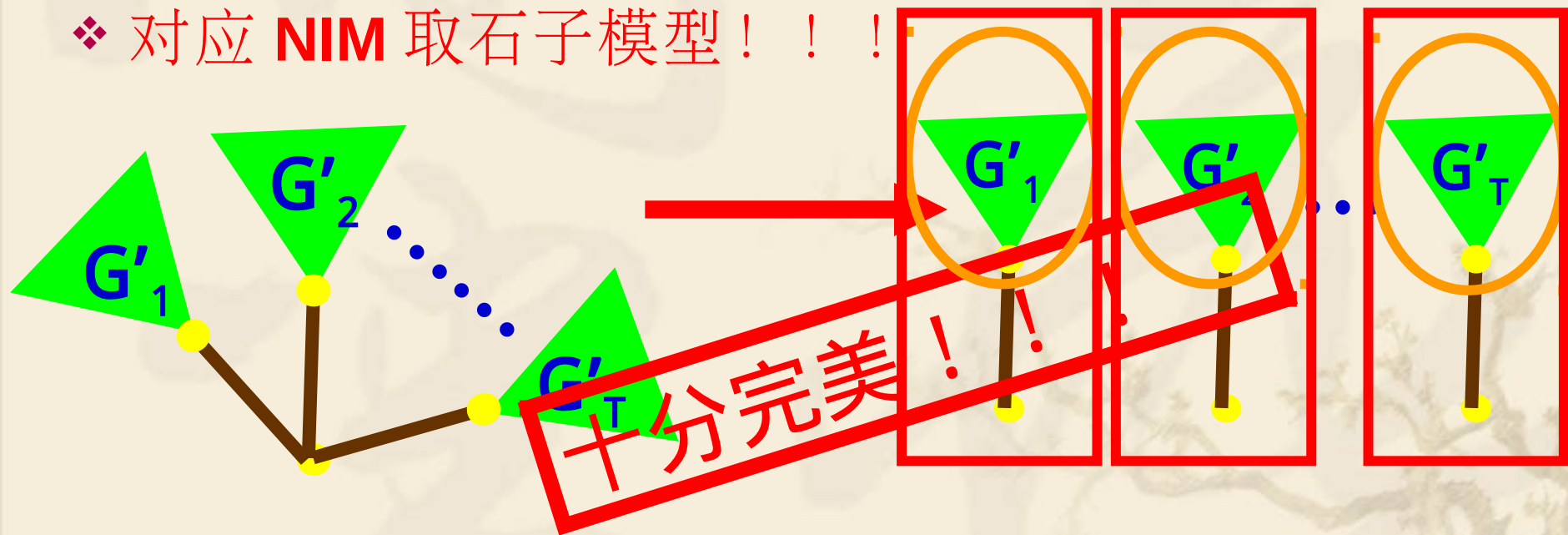
❖ 试着去对 **G** 图进行拆分

□ 拆法二（很大胆的尝试）

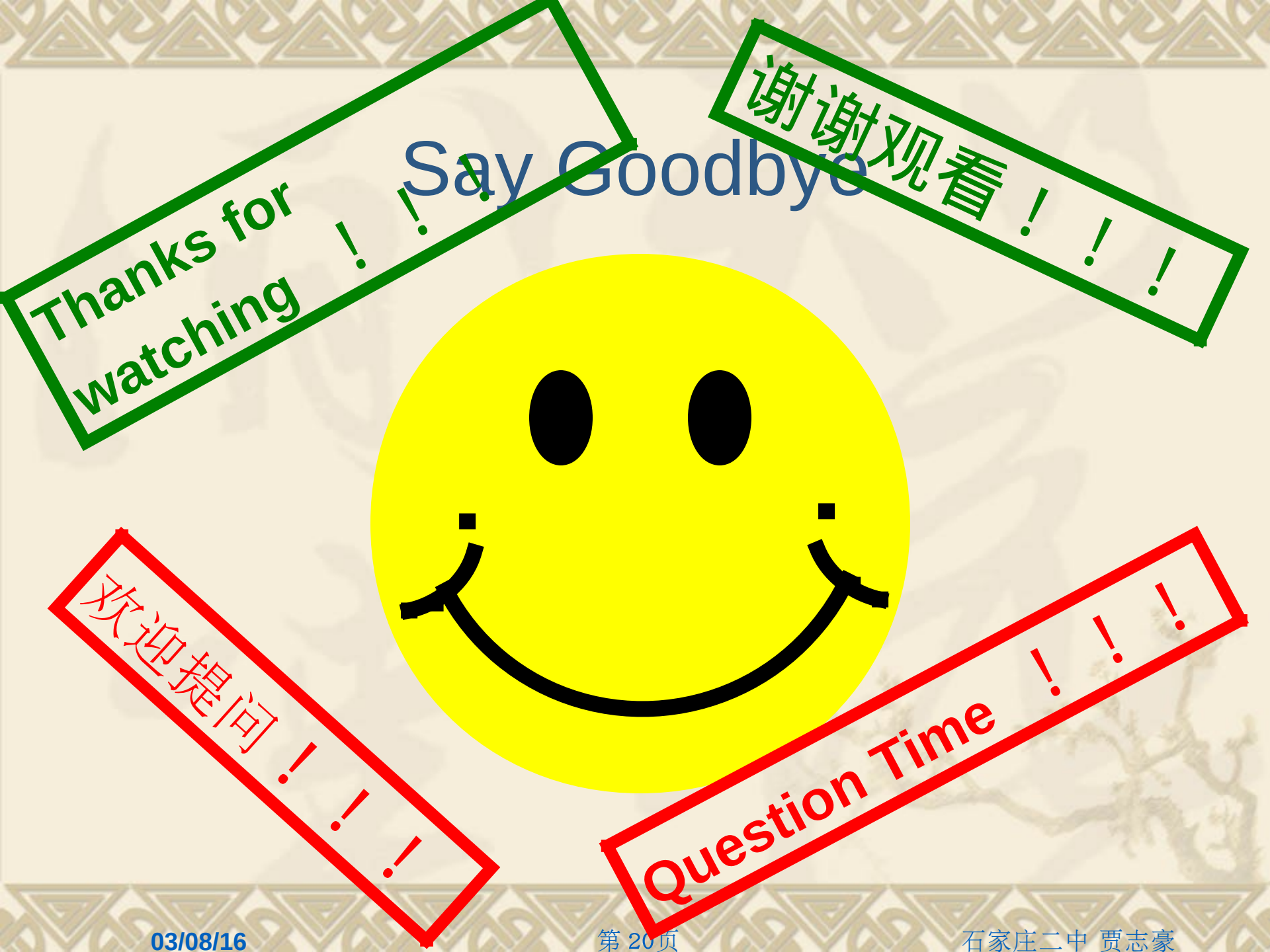


# Cutting Edges 游戏

- ❖ 完美在哪了???
- ❖ 哦。。。
- ❖ 对应 **NIM** 取石子模型!!!



$$SG(G) = (SG(G'_1) + 1) \oplus \dots \oplus (SG(G'_T) + 1)$$



Thanks for watching !!!

谢谢观看!!!

Say Goodbye



欢迎提问!!!

Question Time !!!

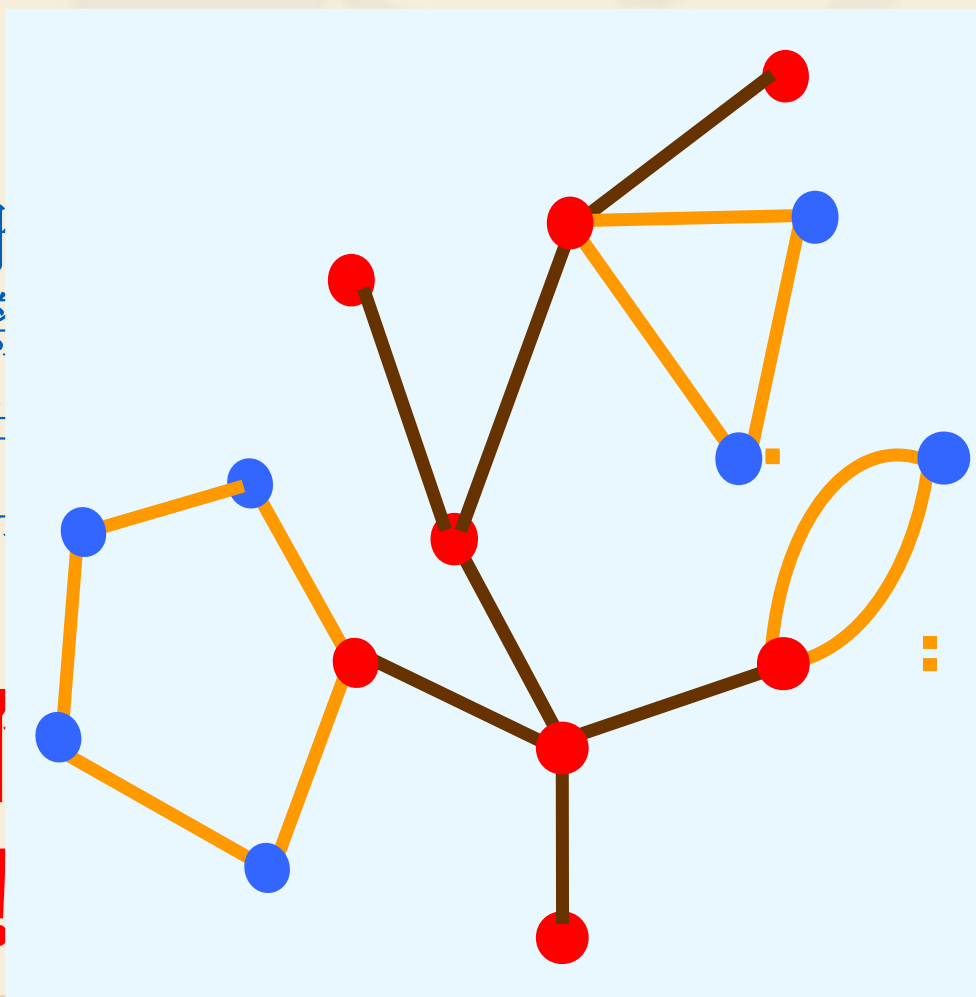


# Cutting Edges 游戏

❖ 稍加拓展：

- **A** 和 **B** 轮流从图中删根节点相连的部分将
- 图是通过从基础树中
- 所有形成的环保证不一个公共点。

不要慌！不要慌！



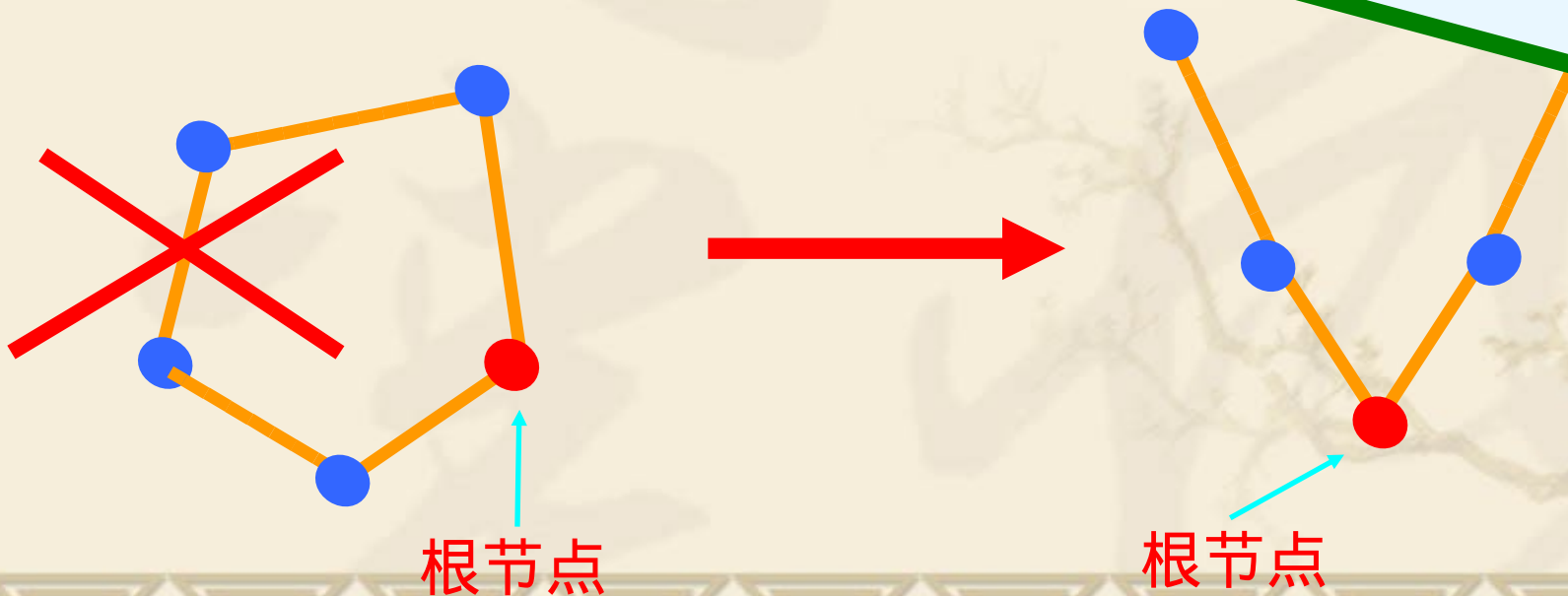
# Cutting Edges 游戏

❖ 环的处理成为关键

❖ 惊人发现，

□ 任何奇环的 **SG** 值为 **1**

奇环删边后，左右两个  
分支的边数同奇偶，异  
或值不可能为 **1**



# Cutting Edges 游戏

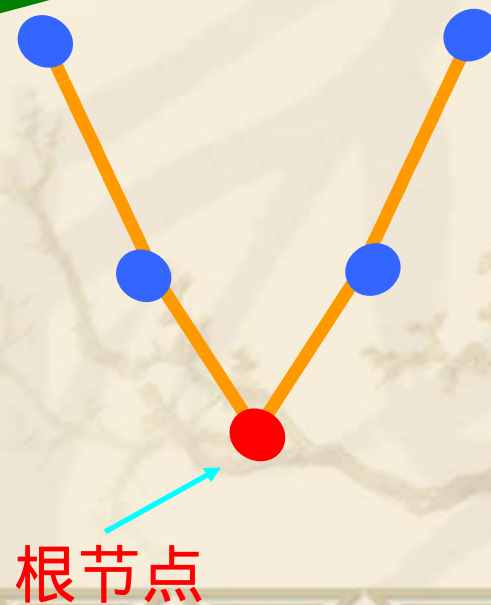
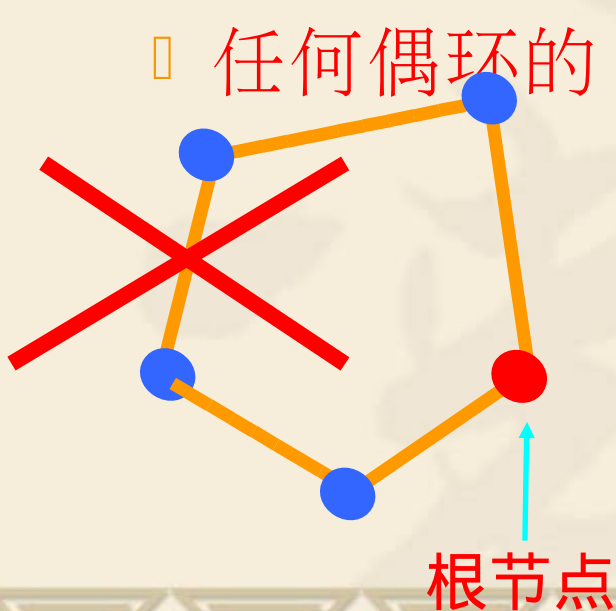
❖ 环的处理成为关键

❖ 惊人发现,

□ 任何奇环的 **SG** 值为

□ 任何偶环的 **SG** 值为 **0**

偶环删边后, 左右两个  
分支的边数异奇偶, 异  
或值不可能为 **1**



# Cutting Edges 游戏

❖ 环的处理成为关键

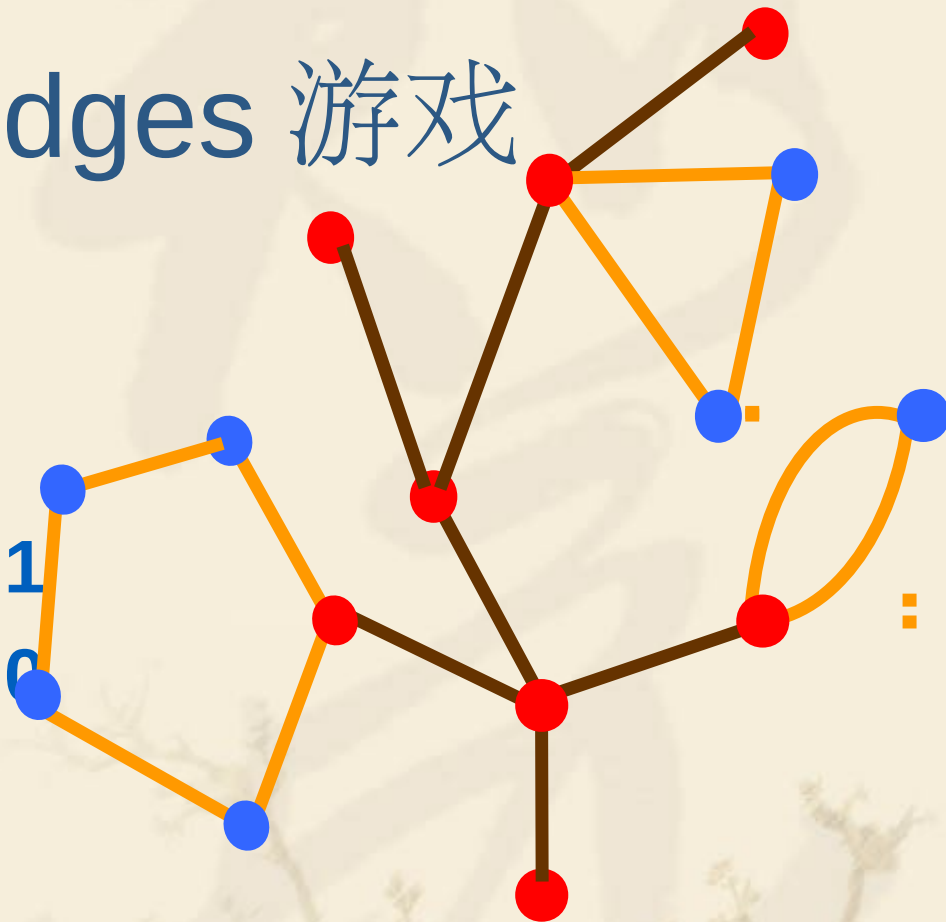
❖ 惊人发现，

□ 任何奇环的 **SG** 值为 **1**

□ 任何偶环的 **SG** 值为 **0**

❖ 策略

□ 将偶环删去，将奇环替换成一条边！！！！





# Cutting Edges 游戏

❖ 环的处理成为关键

❖ 惊人发现，

□ 任何奇环的 **SG** 值为 **1**

□ 任何偶环的 **SG** 值为 **0**

❖ 策略

□ 将偶环删去，将奇环替换成一条边！！！！



# Cutting Edges 游戏

变成了树！

❖ 环的处理成为关键

❖ 惊人发现，

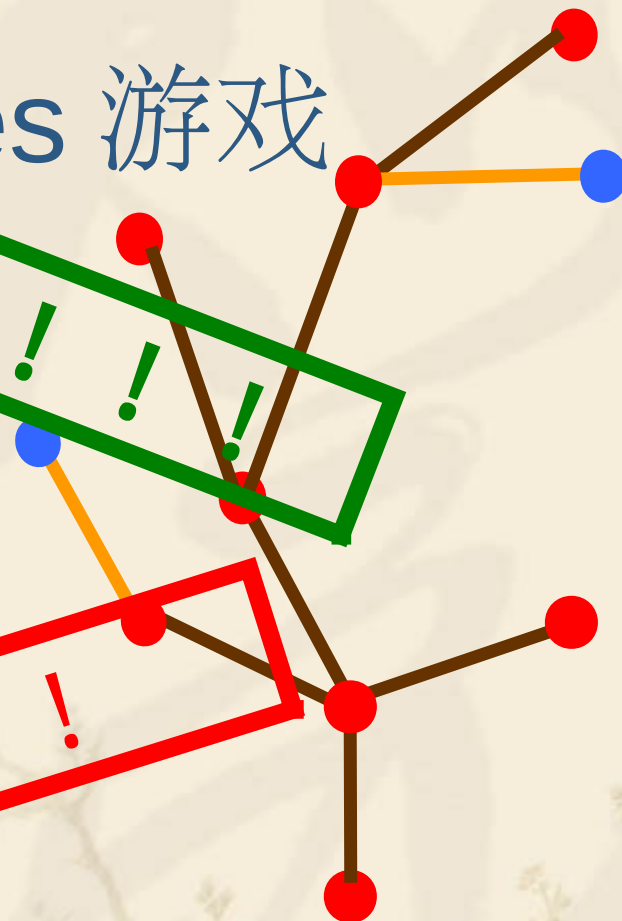
▣ 任何奇环的 **SG** 值为 **1**

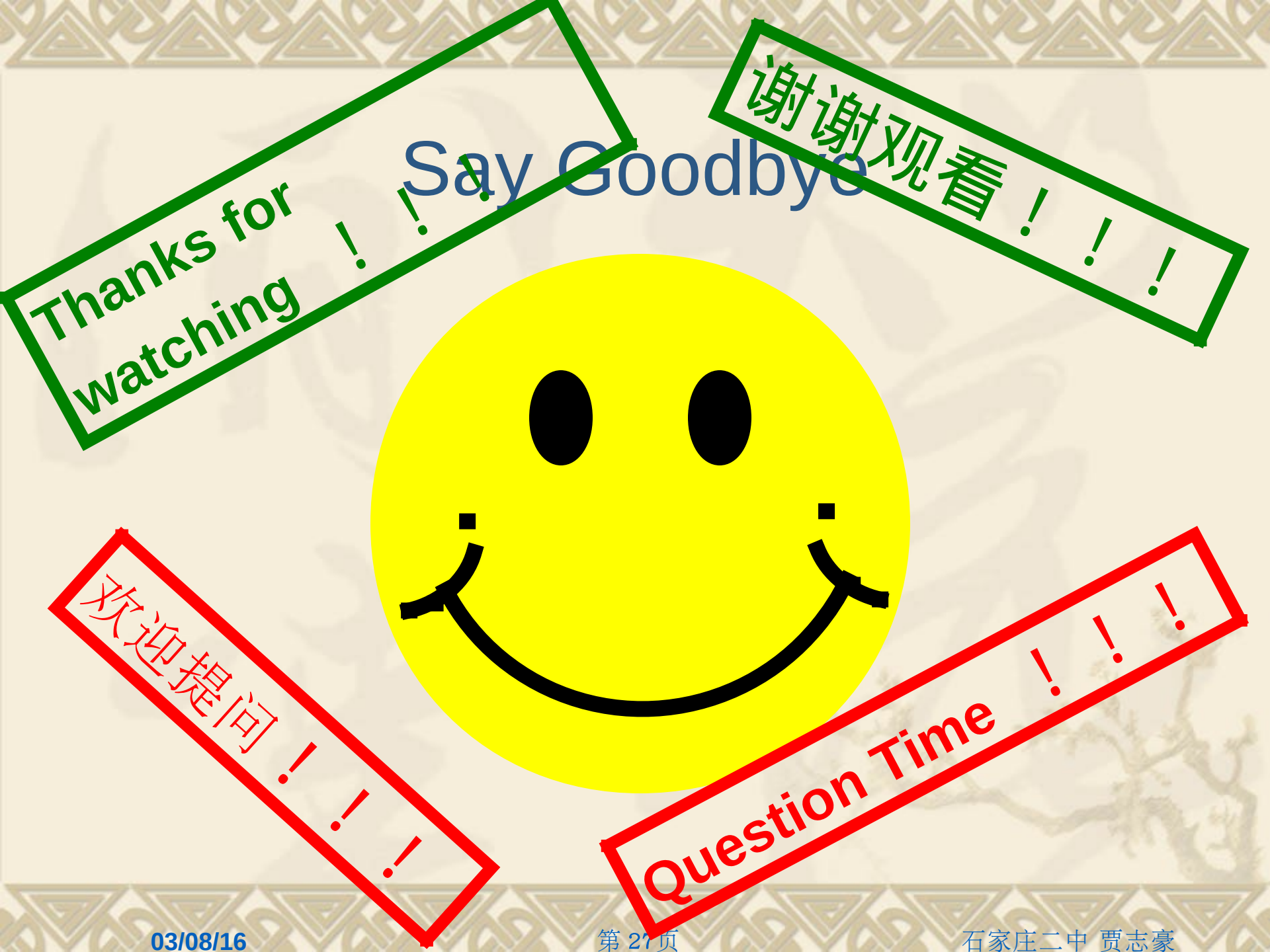
▣ 任何偶环的 **SG** 值为 **0**

❖ 策略

▣ 将偶环删去，将奇环替换成一条边！！！！

转换成功！！！！





Thanks for watching !!!

谢谢观看!!!

Say Goodbye



欢迎提问!!!

Question Time !!!

# Cutting Edges 游戏

## ❖ 再次拓展

- 一个无相联通图，有一个点作为图的根。
- 游戏者轮流从图中删去边，删去一条边后，不与根节点相连的部分将被移走。

## ❖ 怎么办？

好难！ 好难！ ！ ！ ！



# Cutting Edges 游戏

- ❖ 考虑上题给出的提示
  - 将环处理掉即可
- ❖ 时间原因，直接给出方法。

# Cutting Edges 游戏

缩成一个点!!!

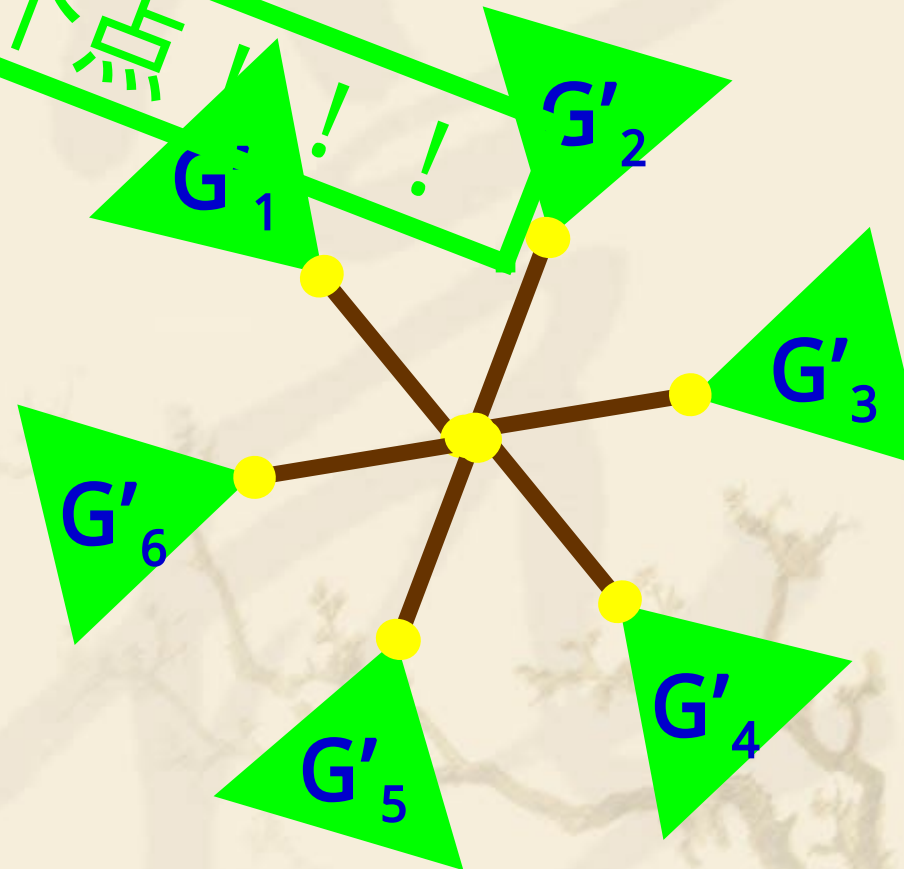
❖ 对于偶环



# Cutting Edges 游戏

缩成一个点!!!

❖ 对于偶环



# Cutting Edges 游戏

缩成点加边!!!

❖ 对于奇环

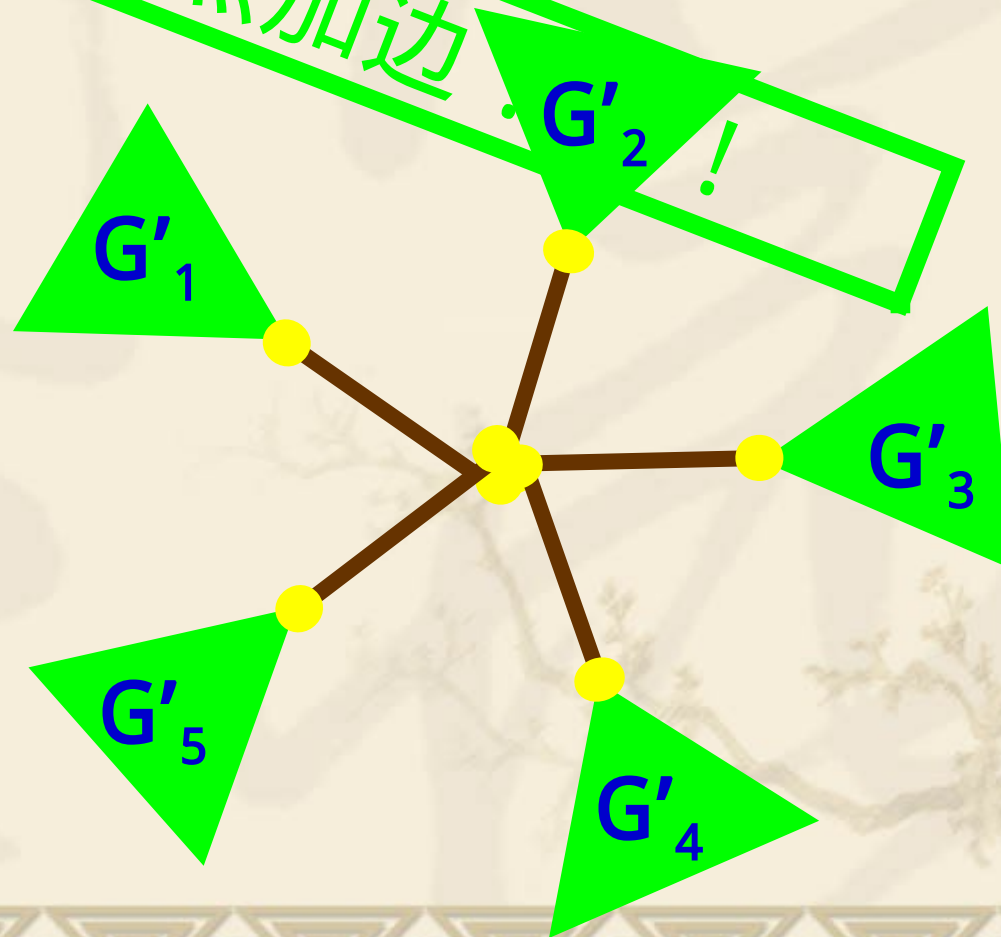


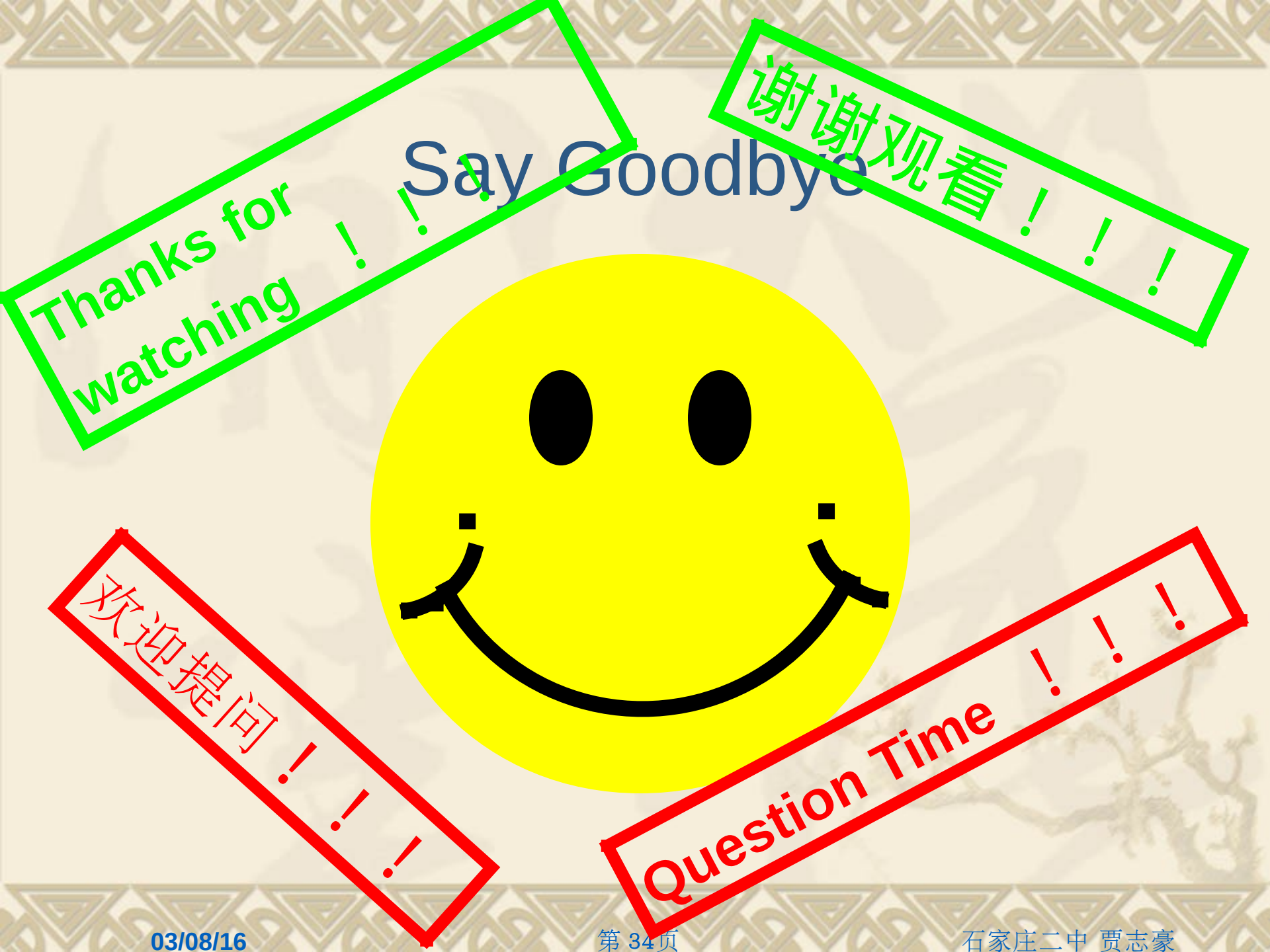


# Cutting Edges 游戏

缩成点加边

❖ 对于奇环

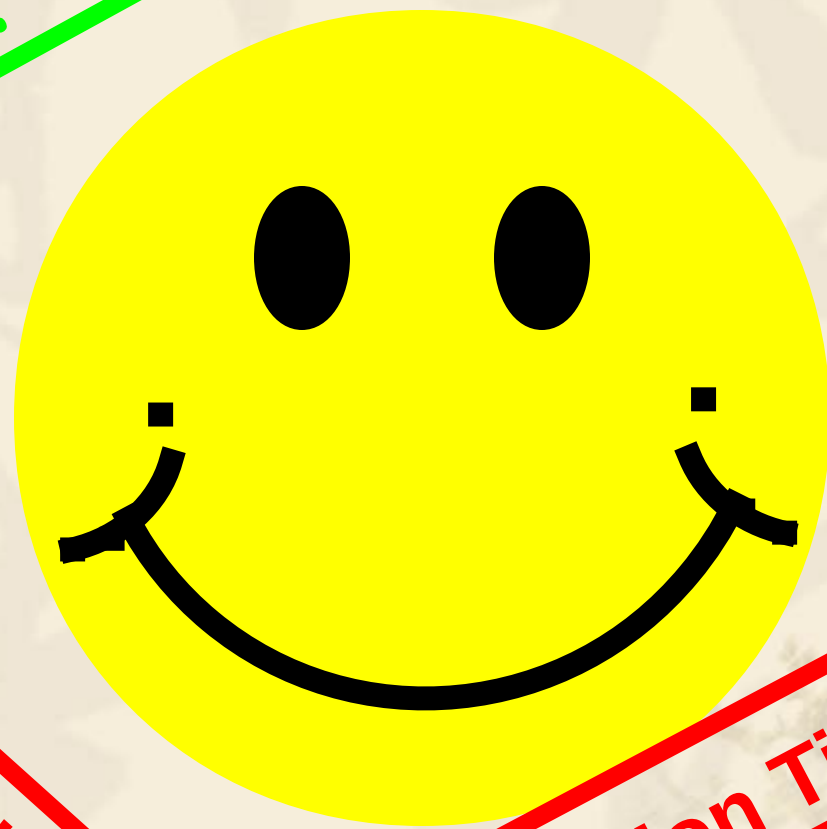




Thanks for watching !!!

谢谢观看!!!

Say Goodbye



欢迎提问!!!

Question Time !!!