最小生成树问题的拓展

安徽省芜湖市第一中学

汪汀

回顾

- 设G=(V, E, ω)是连通的无向图，图G中权值和最小的生成树称为最小生成树。
- Prim算法　　　　$O(V\log_2 V+E)$
- Kruskal算法　　$O(E\log_2 V)$

拓展问题

- 本文主要讨论两类拓展问题

- **最小度限制生成树**
- **次小生成树**

例一 通讯线路

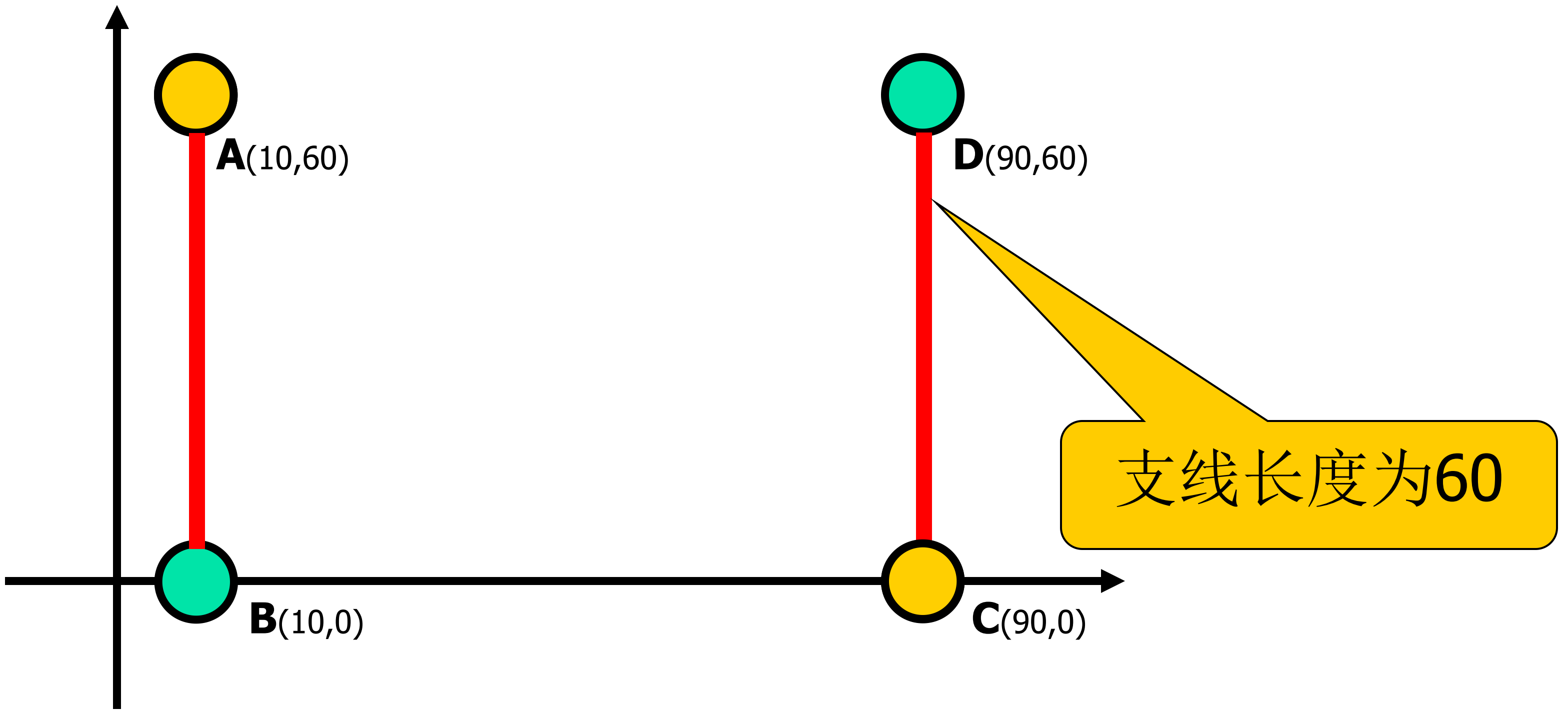
- 某地区共有n座村庄，每座村庄的坐标用一对整数(x，y)表示，现在要在村庄之间建立通讯网络。通讯工具有两种，分别是需要铺设的普通线路和卫星设备。卫星设备数量有限，只能给k个村庄配备卫星设备。拥有卫星设备的村庄互相间直接通讯；铺设了线路的村庄之间也可以通讯。卫星分配是不受限制的。

例一 通讯线路

- 问怎样合理的分配卫星和铺设线路，使得在保证每两座村庄之间都可以直接或间接地通讯的前提下，**铺设线路的总长度最短**。

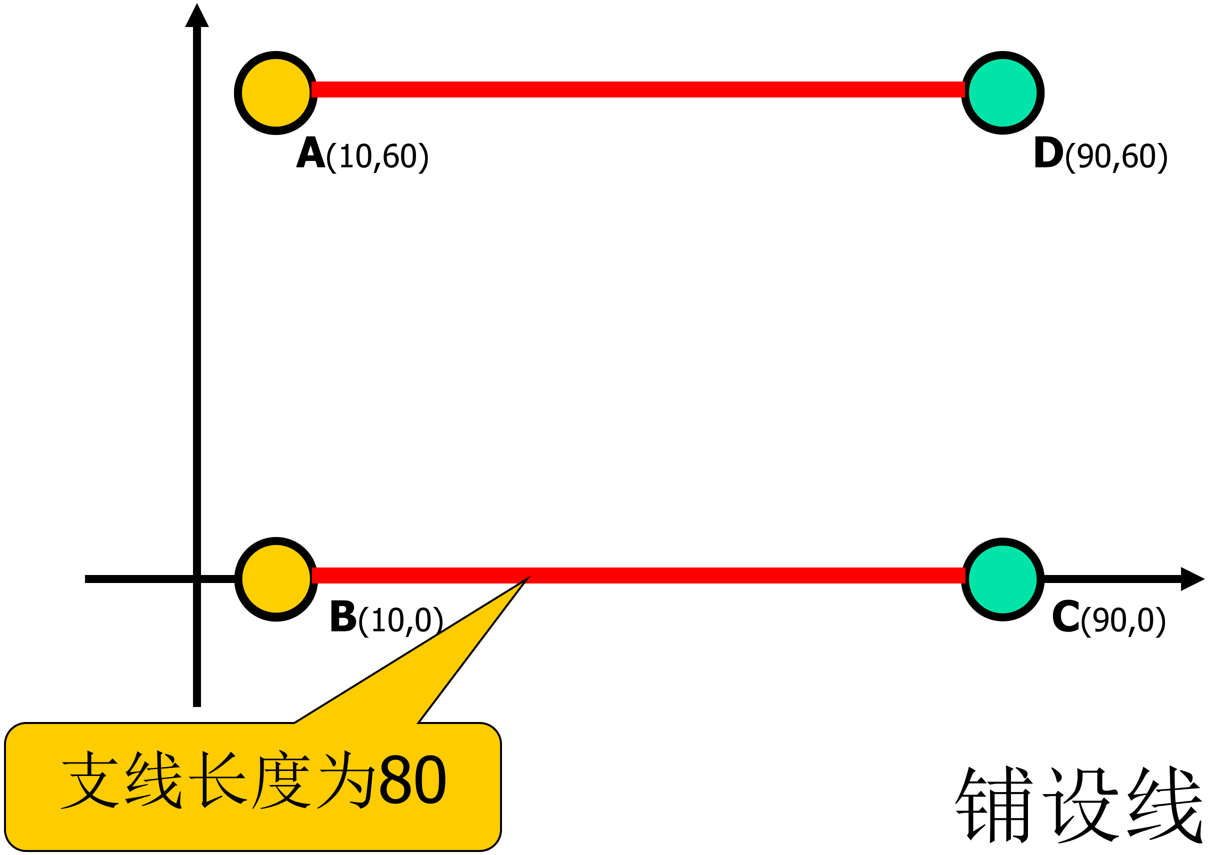
- 范围：$0 \le k \le n \le 5000$

方案一



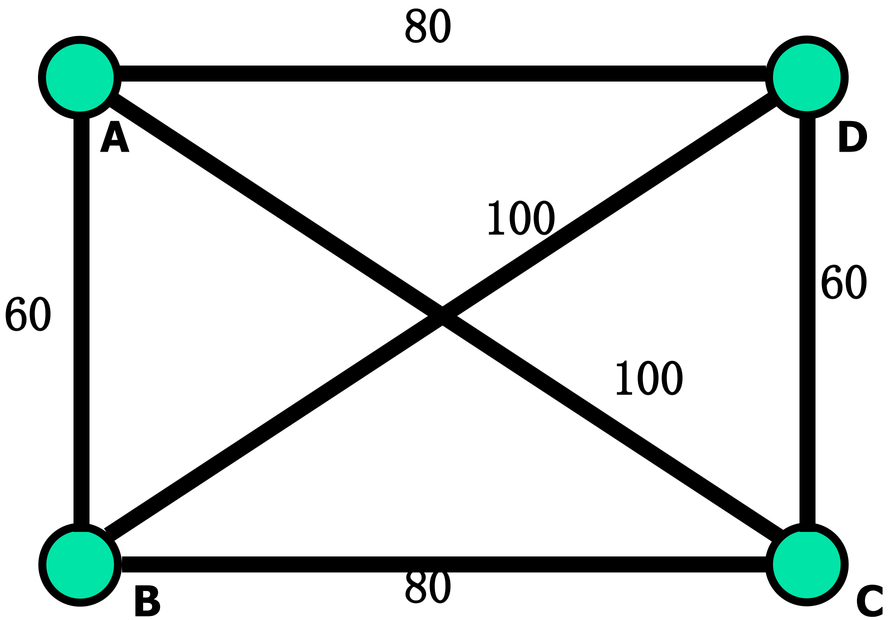
铺设线路总长120

方案二

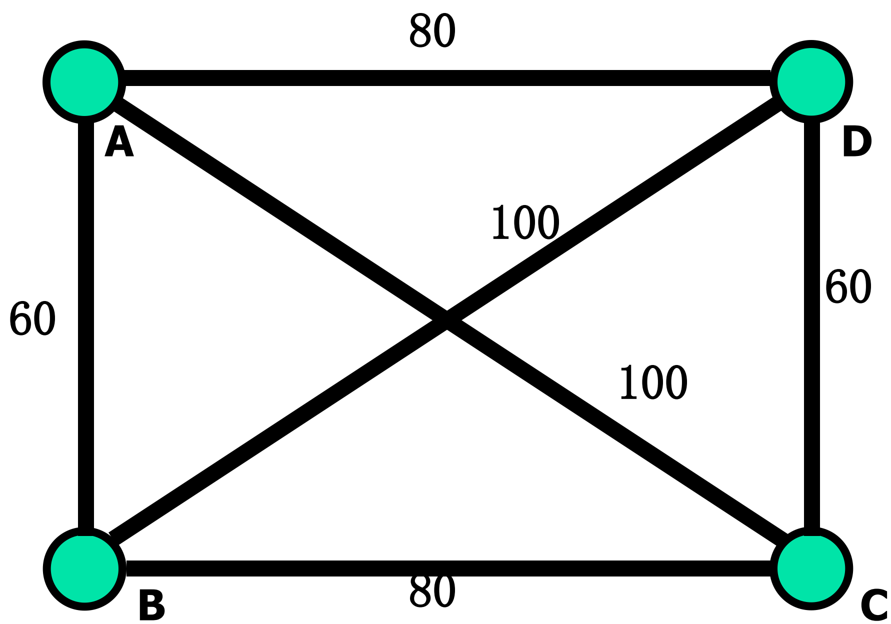


铺设线路总长160

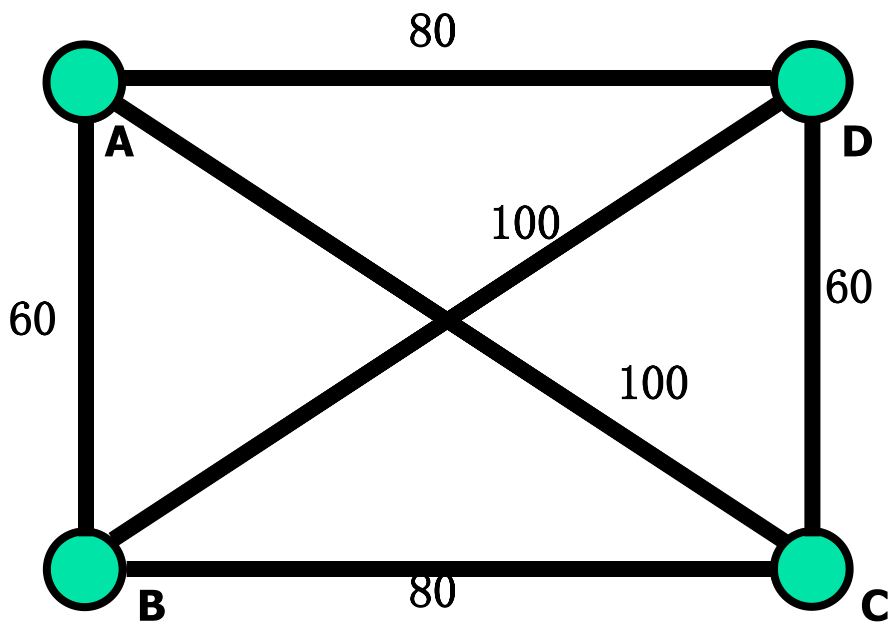
图的模型



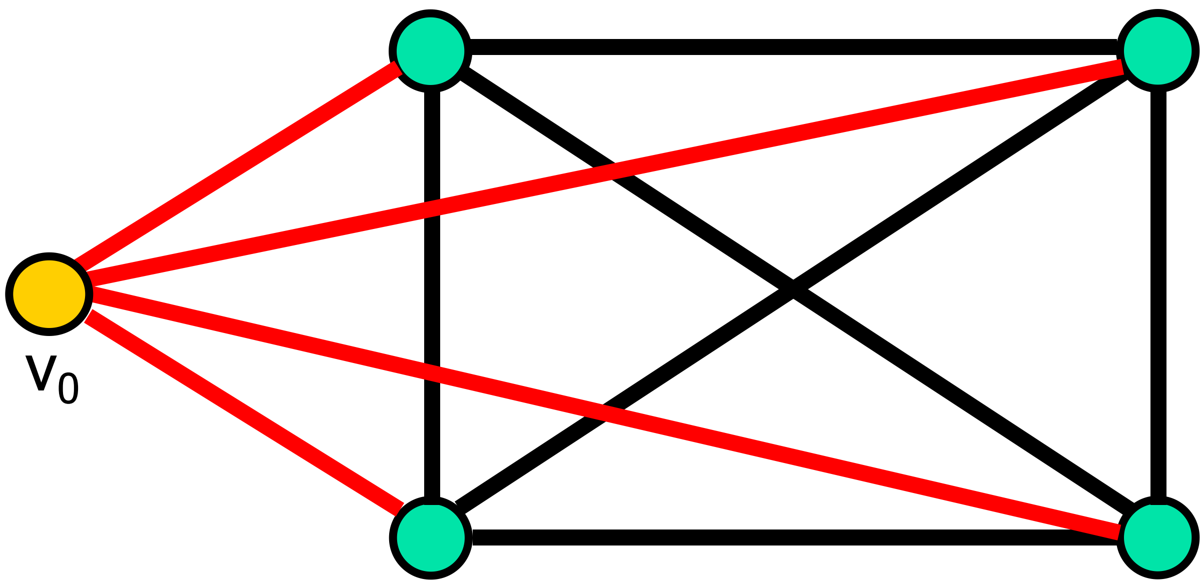
如果没有卫星设备，原题等价于求该图的最小生成树。



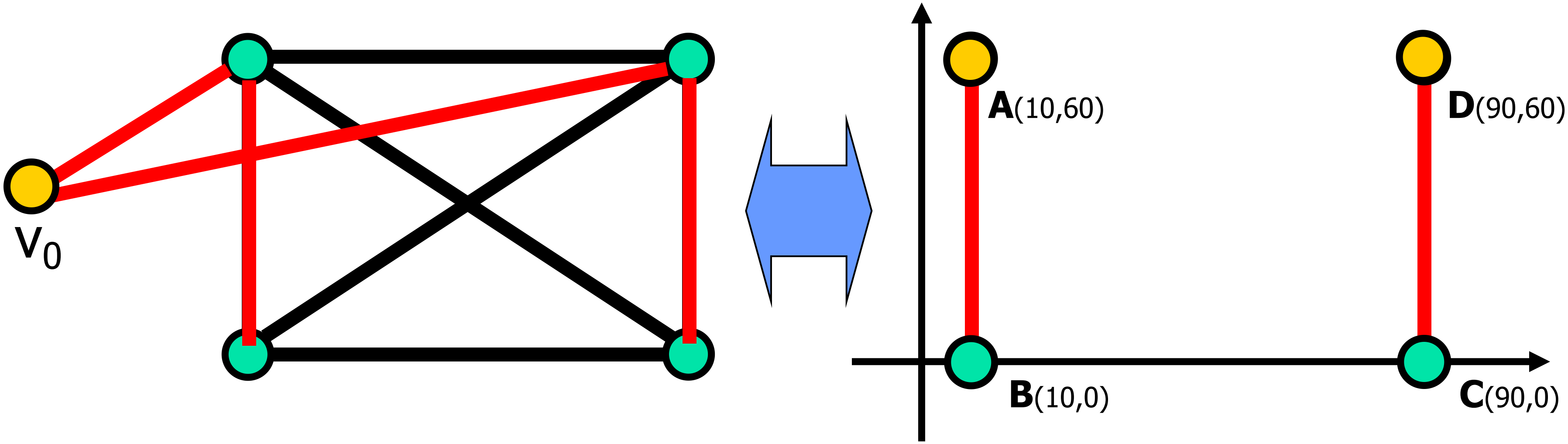
卫星设备



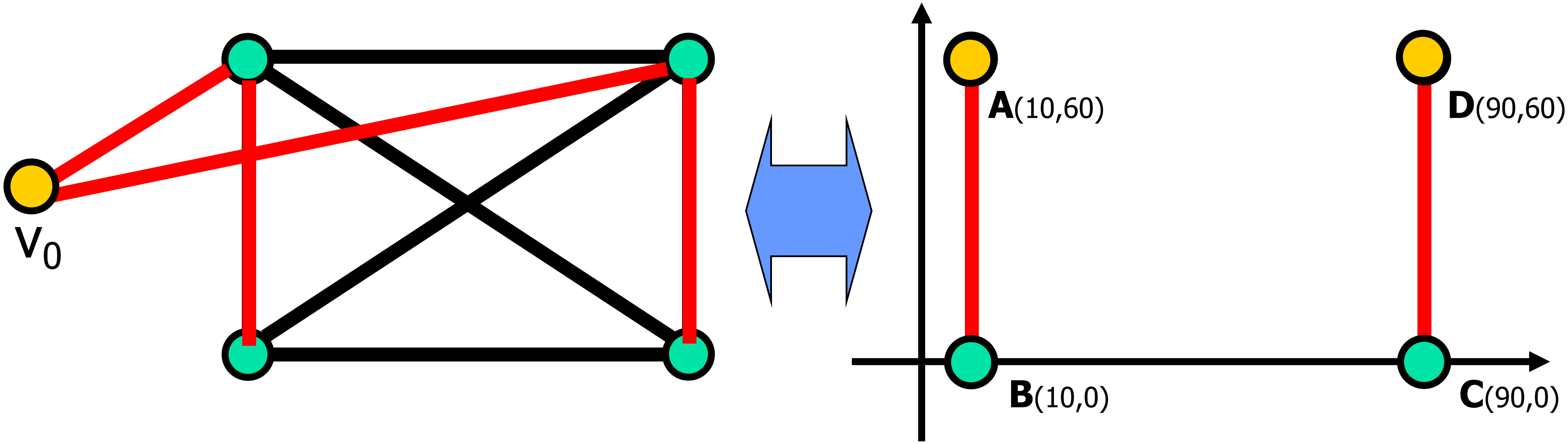
改造图的模型



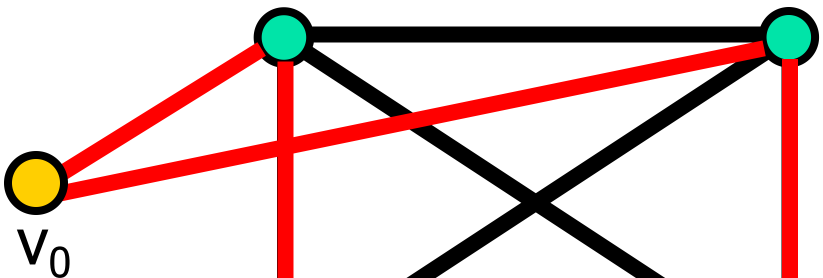
图中的一个生成树唯一对应一种可行方案
一种可行方案唯一对应图中的一个生成树

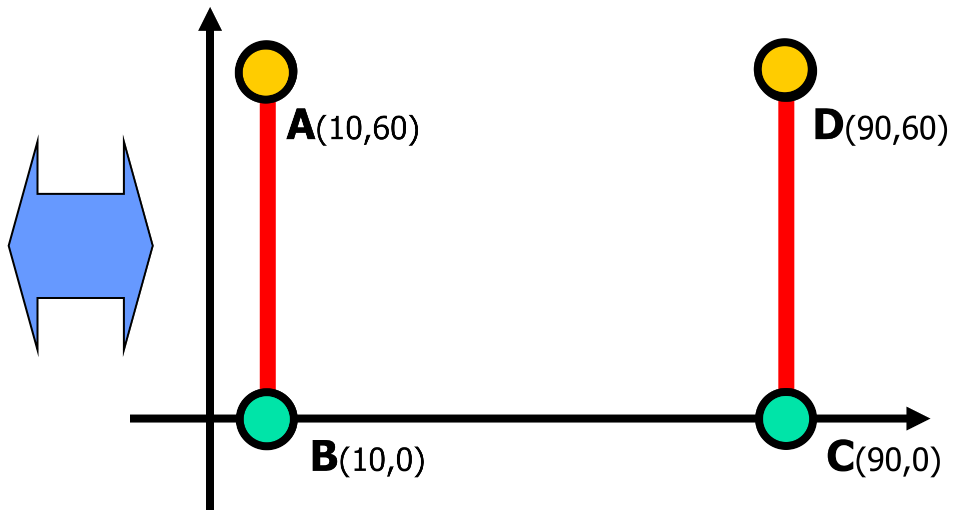


可行方案与生成树之间是一一对应的



铺设线路的长度就是其对应生成树的权值和，生成树中与v_0关联的点为分配有卫星设备的村庄





- 原问题转化为：
  当$D_T(v_0)=k$时的权值和最小的生成树

这就是最小度限制生成树的模型

最小度限制生成树

- 设G=(V, E, ω)是连通的无向图，$v_0 \in V$是特别指定的一个顶点, k为给定的一个正整数。如果T是G的一个生成树且$d_T(v_0)=k$，则称T为G的k度限制生成树。G中权值和最小的k度限制生成树称为G的最小k度限制生成树。

明确几个概念

- T为图G的一个生成树，T+a-b记作(+a,-b)，如果T+a-b仍然是一个生成树，则称(+a,-b）是T的一个可行交换。

- T为图G的一个生成树，由T进行一次可行交换得到的新的生成树所组成的集合，称为T的邻集,记为N(T)。

定理

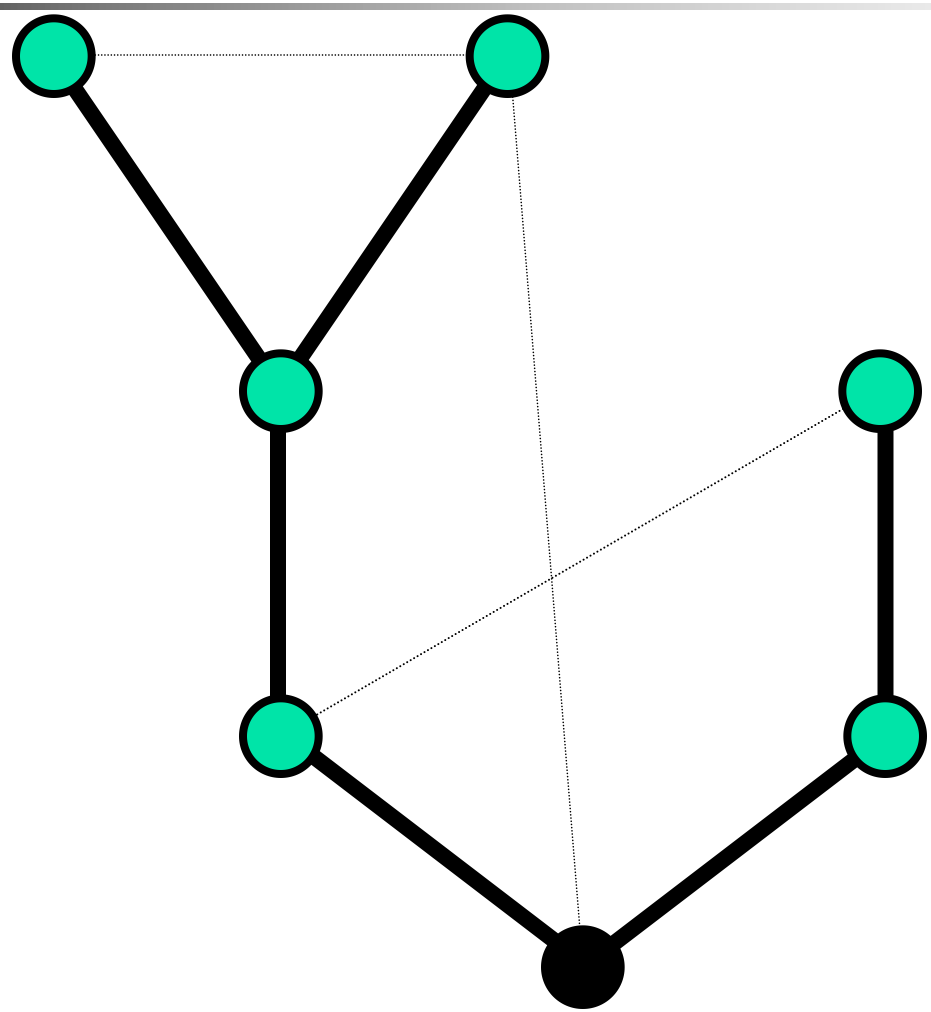
- 定理：设T是图G的最小k度限制树，E_0是G中与v_0有关联的边的集合，$E_1=E_0\setminus E(T)$，$E_2=E(T)\setminus E_0$，$A=\{(+a,-b) \mid a\in E_1, b\in E_2\}$，设$\omega(a')-\omega(b')=\min\{\omega(a)-\omega(b) \mid (+a,-b)\in A\}$，则$T+a'-b'$是G的一个最小k+1度限制生成树。
- 即最小p+1度限制生成树属于最小p度限制生成树的邻集。

- 假设我们已经得到了最小p度限制生成树，如何通过它来求最小p+1度限制生成树呢？

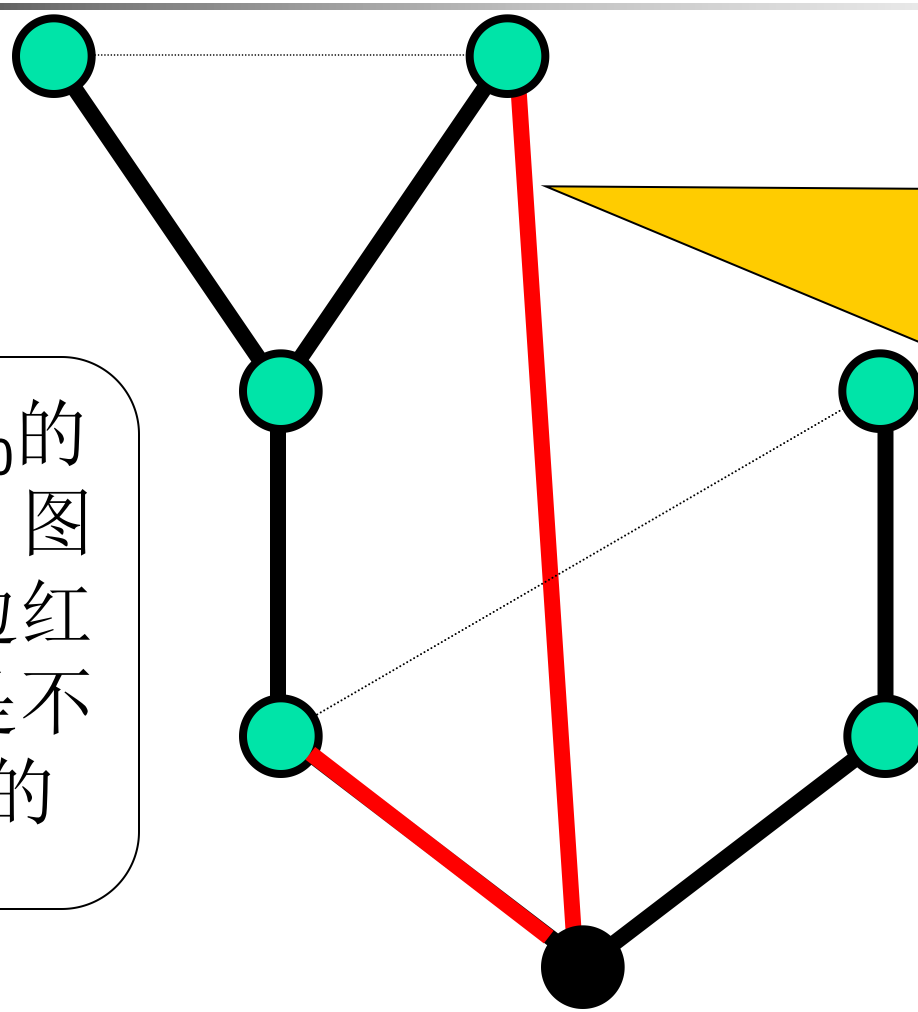
- 由定理可知最小p+1度限制生成树属于最小p度生成树的邻集，因此它可以通过枚举最小p度生成树上的一次可行交换求得。

- 为了使v_0的度增加，枚举的可行交换中必须有一条边与v_0关联。

如图，假设我们已经得到了v_0点度为2时的最小生成树，现在要求v_0度为3时的最小生成树。



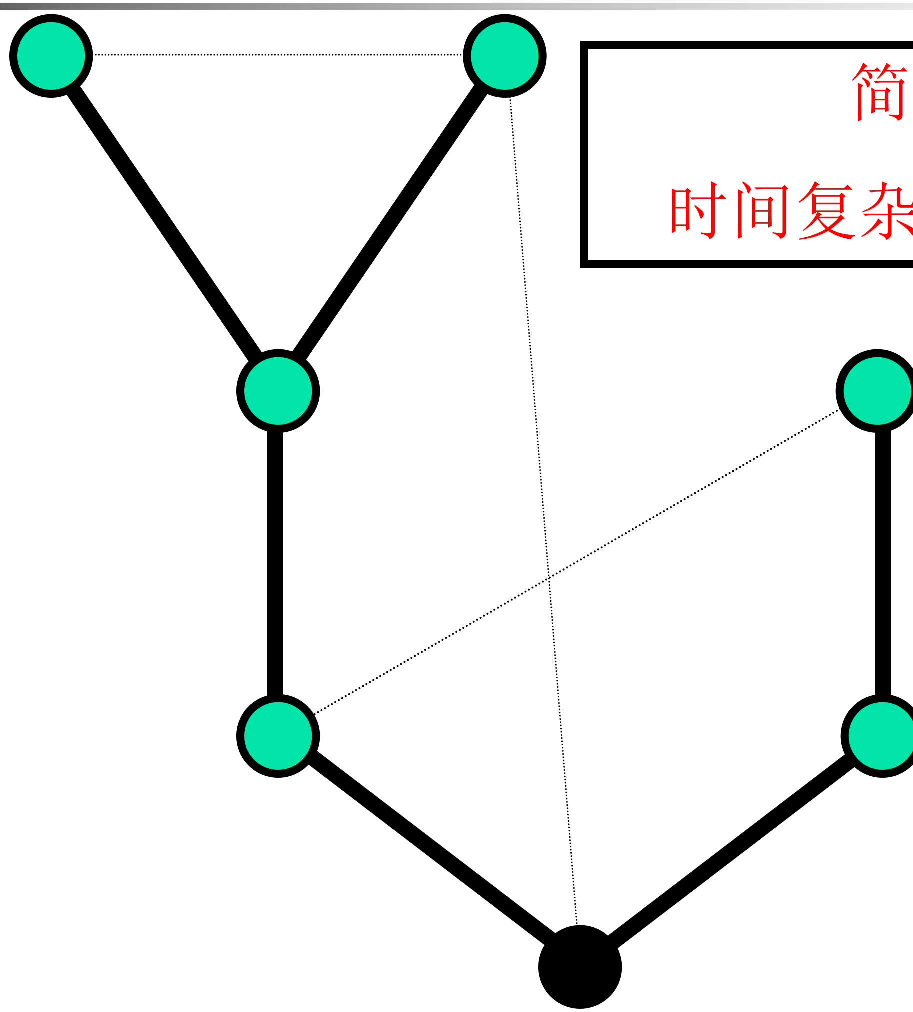
我们枚举于V_0关联且不在树上边，分别添加到树上，例如：



这样就形成了一个环。只有删除环上的边，才能保证得到的仍然是生成树

为了使V_0的度增加，图中两条边红色的边是不能删除的

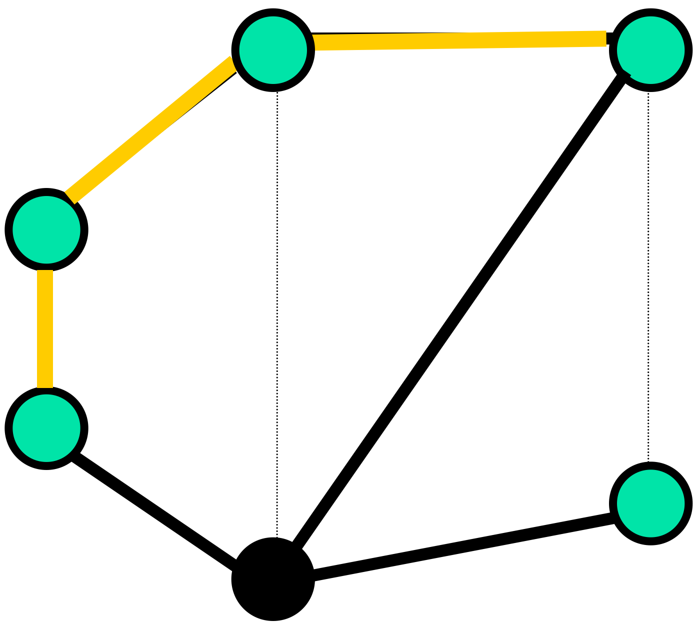
删去边的权值越大，所得到的生成树的权值和就越小，因此，需要找到环上可删除的权值最大的边并将其删除。



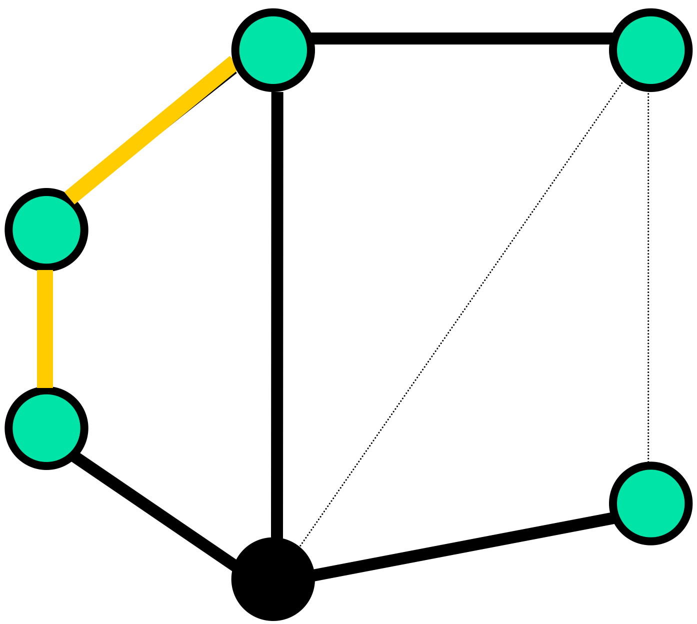
简单的枚举

时间复杂度非常高！！！

造成时间复杂度高的主要原因是有大量的重复计算

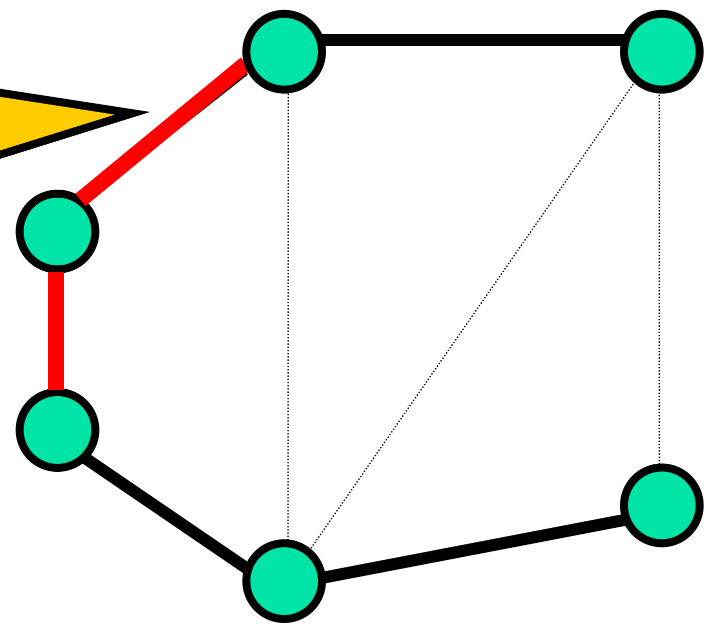


造成时间复杂度高的主要原因是有大量的重复计算



造成时间复杂度高的主要原因是有大量的重复计算

红色的边
被处理了
两次



如何避免重复计算

动态规划！！！

动态规划

- 设最小p度限制生成树为T, T是无根树，为了简便，我们把v_0作为该树的根。
- 定义Father(v)为T中v的父结点，Father(v_0)无意义。
- 设Best(v)为路径v_0->v上与v_0无关联且权值最大的边。

动态规划

- Best(v)的状态转移方程为

Best(v)=max(Best(Father(v)), ω(Father(v),v))

- 边界条件为

$Best[v_0]=-\infty$， $Best[v']=-\infty \mid (v_0, v') \in E(T)$。

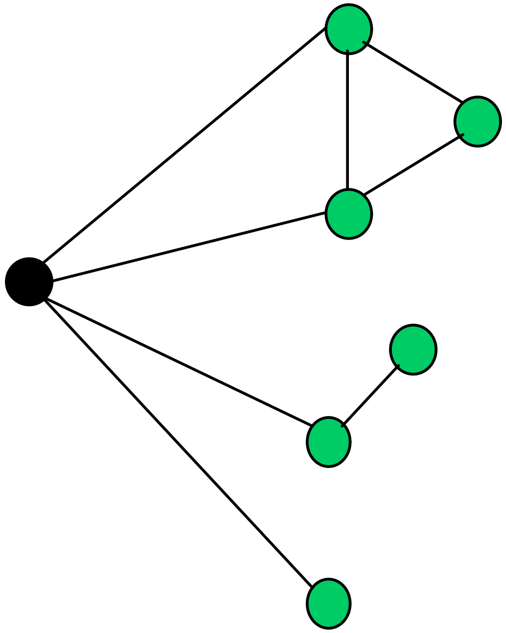
动态规划

- 状态总共|V|个，而状态转移的时间复杂度为O(1),因而总的时间复杂度是O(V),即通过最小p度限制生成树求最小p+1度限制生成树的时间复杂度是O(V)。

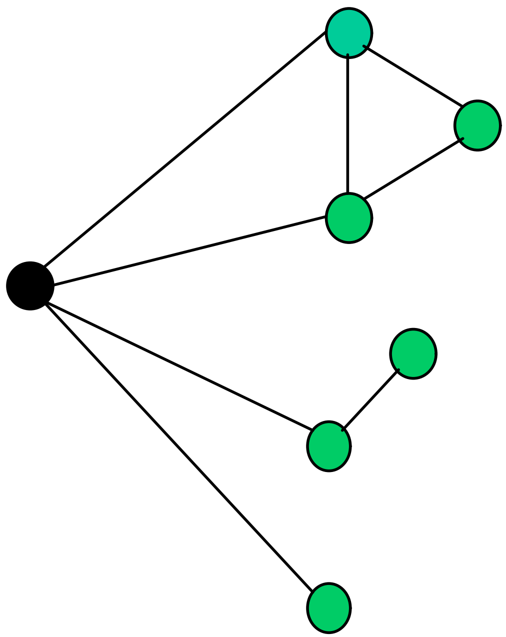
边界情况

- $k>D_G(v_0)$，问题无解
- 总存在k度限制生成树，$k\in[1,D_G(v_0)]$

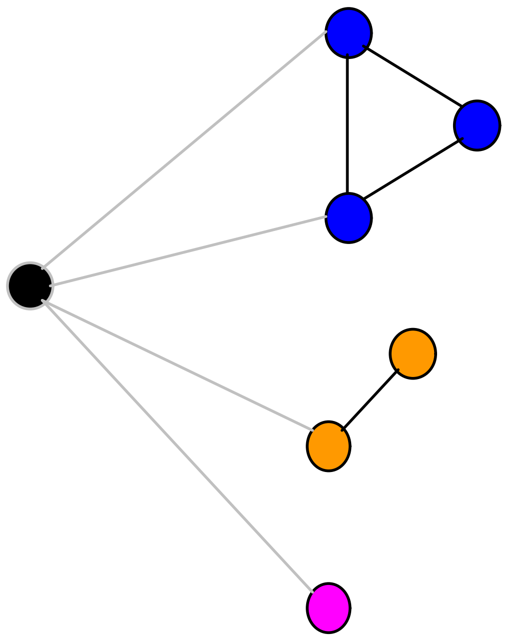
观察下图



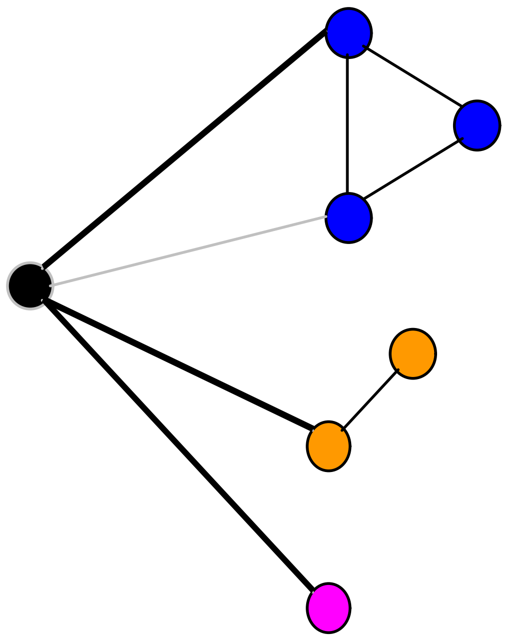
k≤2, 不存在k度限制生成树



将v_0从图中删去，图中将会出现3个连通分量

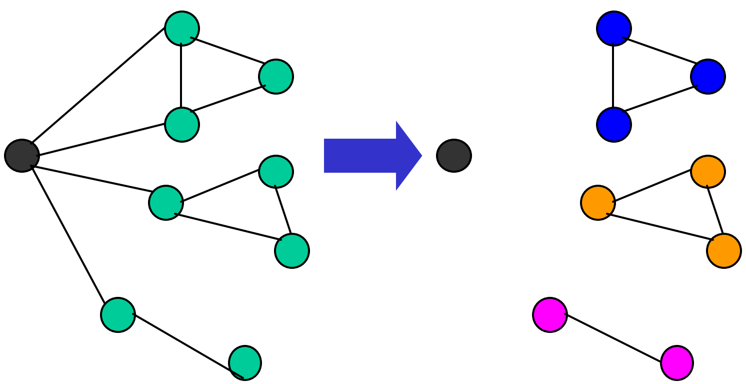


而这3个连通分量必须通过v_0来连接，k<3无解

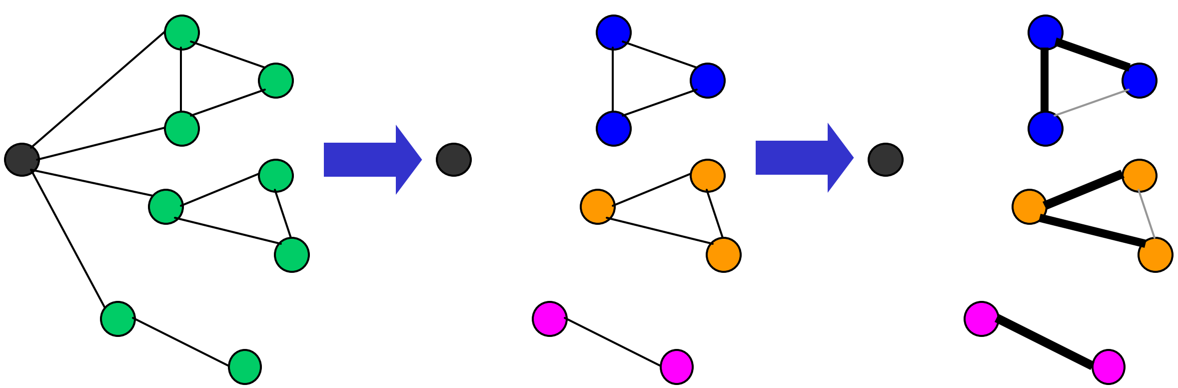


如何求最小m度限制生成树

删去v_0, 图中出现m个连通分量, k=m是问题有解的最小值。

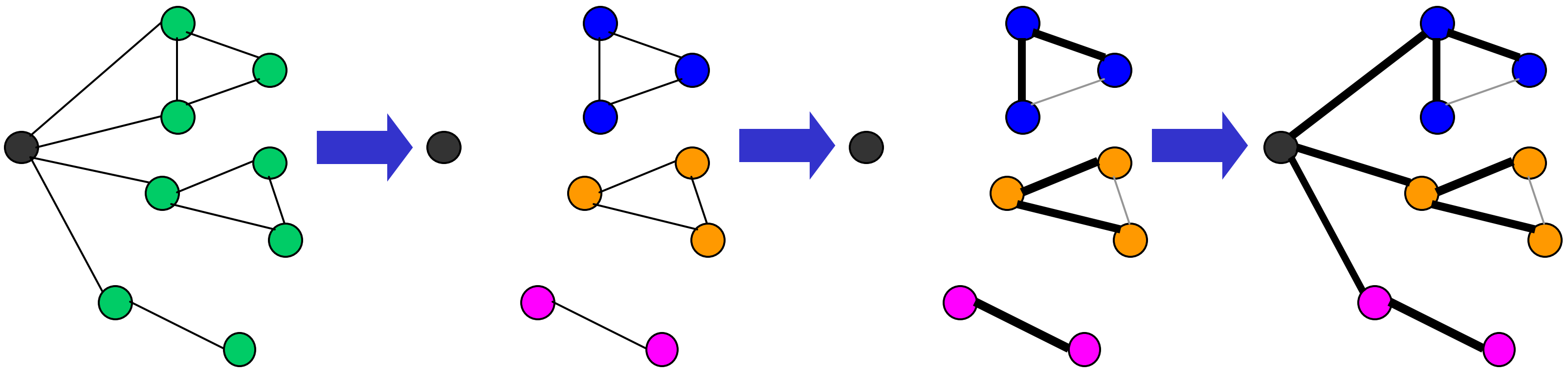


我们先分别对m个连通分量求最小生成树。



最小m度限制生成树

每个连通分量中找一条与v_0关联的权值最小的边与v_0连接。



流程

确定问题有解时k的最小值m

$O(V\log_2 V+E)$

最小m度限制生成树

$O(V)$

最小m+1度限制生成树

$O(V)$

最小m+2度限制生成树

$O(V)$

……

$O(V)$

最小k度限制生成树

$O(V\log_2 V+E)$的操作一次

$O(V)$的操作k次

总复杂度为

$O(V\log_2 V+E+kV)$

例题

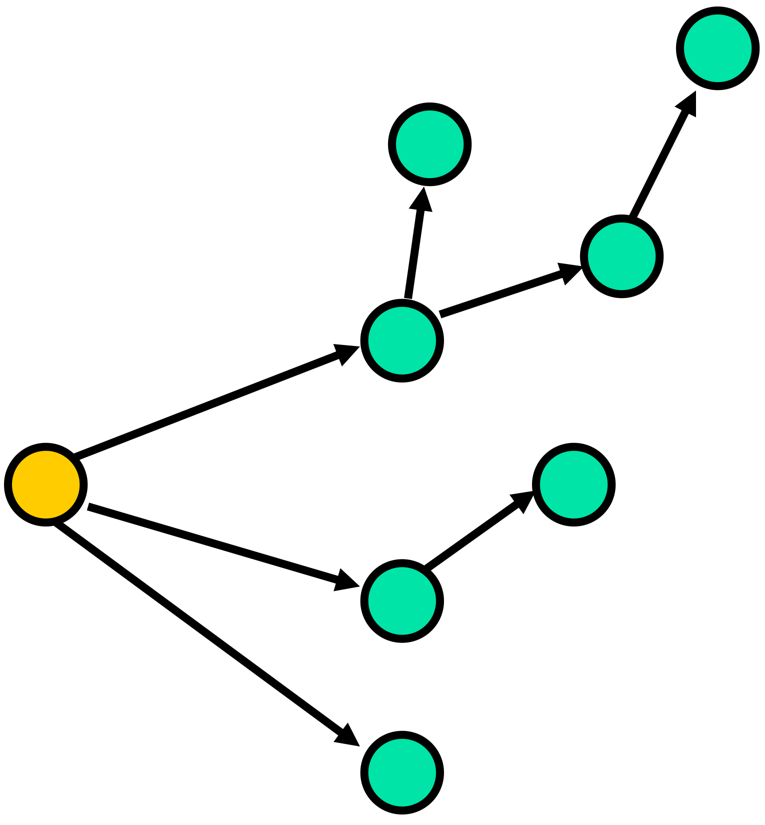
- 时间复杂度O(N^2)
- 空间复杂度O(N)

应用范围

- 问题与最小生成树模型联系紧密
- 某个对象有特殊限制
- 实际生活：铺设电话线，运输货物等

例二 秘密的牛奶运输

Farmer John要把他的牛奶运输到各个销售点。运输过程中，可以先把牛奶运输到一些销售点，再由这些销售点分别运输到其他销售点，如此下去。



例二 秘密的牛奶运输

运输的总距离越小，运输的成本也就越低。低成本的运输是Farmer John所希望的。不过，他并不想让他的竞争对手知道他具体的运输方案，所以他希望采用费用第二小的运输方案而不是最小的。现在请你帮忙找到该运输方案。

- 最小生成树可以求运输费用最小的方案。
- 原问题等价于求次小生成树。

次小生成树

- 设G=(V, E, ω)是连通的无向图，T是图G的一个最小生成树。如果有另一棵树T_1，满足不存在树T’，T’≠T, ω（T’）<ω（T_1），则称T_1是图G的次小生成树。

定理

- 定理：设T是图G的最小生成树，如果T_1满足$\omega(T_1)=\min\{\omega(T')\mid T'\in N(T)\}$,则$T_1$是G的次小生成树。

- 也就是说，最小生成树邻集中权值和最小的一棵生成树即为该图的次小生成树。

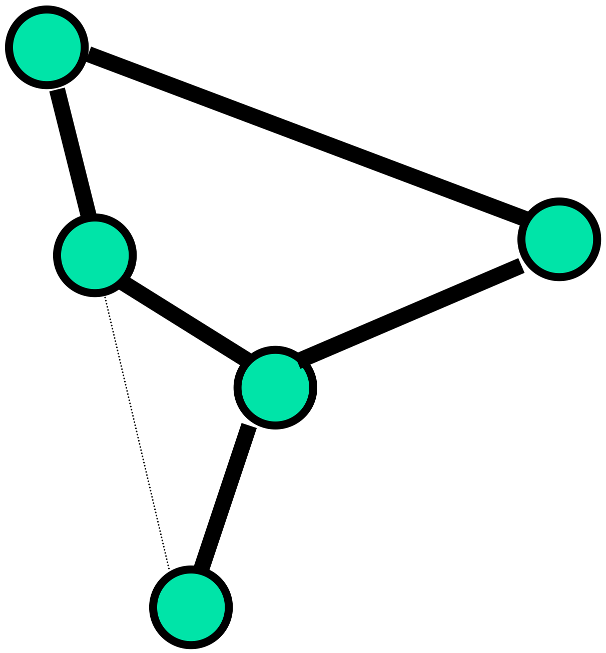
通过上述定理，自然就得到了解题的思路

分两步进行：

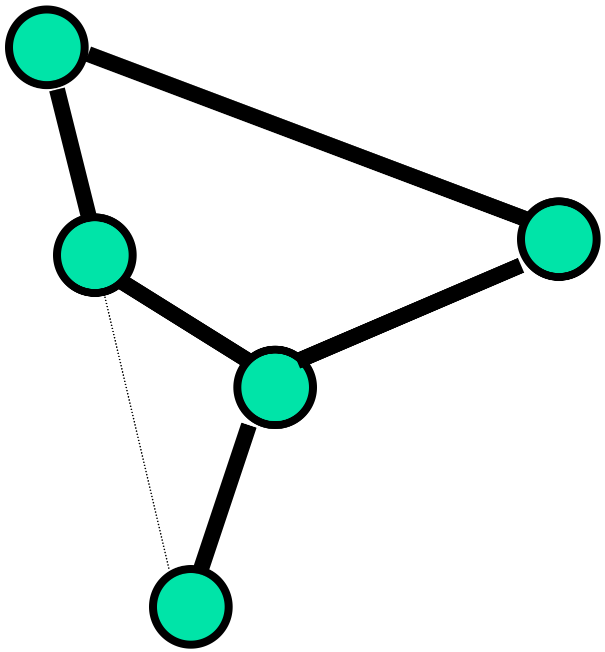
- 首先求出图G的最小生成树T
- 接着求出T的邻集中权值和最小的生成树

第二步如何高效地实现是问题的关键

先来看一个例子，如下图



图上出现了一个环。显然我们需要删去环上权值最大的边（添加的边是不允许被删除的）。



与上一个问题的情况十分相似

预处理

- 最后，考虑如何预处理。
- 因为树上两点间的路径是唯一的，所以可以直接通过BFS求得。
- 预处理的时间复杂度是$O(V^2)$。

- 记Best(v_1, v_2)为最小生成树T的路径v1->v2上权值最大的边。
- 可以通过预处理计算出Best。
- 这样，对于枚举的边，可以用O(1)的时间找到所形成环上的权值最大的边。于是枚举的复杂度降为O(E)。

流程

- 下面给出求次小生成树的流程。

首先求图G的最小生成树T $O(V\log_2 V+E)$

↓

预处理，求出树T中每两个点间路径上的权值最大的边 $O(V^2)$

↓

枚举不在树上的边添加到树上，计算出环上的权值最大的边 $O(E)$

那么，该算法总的时间复杂度为$O(V^2)$

总结

- 两类拓展问题的讨论至此告一段落。
- 在上文的两个例题中，我们通过对最小生成树模型的拓展，成功的解决了问题。
- 最小生成树问题的拓展是多种多样的。

总结

- 不能拘泥于经典模型，而是要根据实际情况，适当地对经典模型加以拓展，建立出符合题目本身特点的模型。
- 一切拓展都是建立在原模型基础上的，两者间有着密切的联系。
- 扎实的基本功； 大胆的创新

谢谢大家