计算几何中的二分思想

贵阳市第一中学 程芃祺

引言

- 二分思想，古已有之，邵子曰：“一分为二，二分为四，四分为八也。”正是根据这样的思想，我们的祖先创造了太极八卦。
- 在当今的信息时代中，这一古老的智慧依旧闪耀着光芒，通过渗透到各门新兴学科中发扬光大，计算几何学就是其中之一。

引言

- 经典算法:

1. 分治法求凸包
2. 最近点对
3. 三角剖分
4. 空间分区二叉树
5. etc…

引言

- 在近年来的各类信息学竞赛中，不断涌现了大批关于计算几何的试题，其中许多复杂的题目可以利用二分思想得到简单解决。掌握了这一思想，无疑是多了一把解决相关问题的利器。

例题解析

例一、 Simplified GSM Network

例二、 Collecting Luggage

例三、 Heliport

例四、 Flight Safety

例题解析

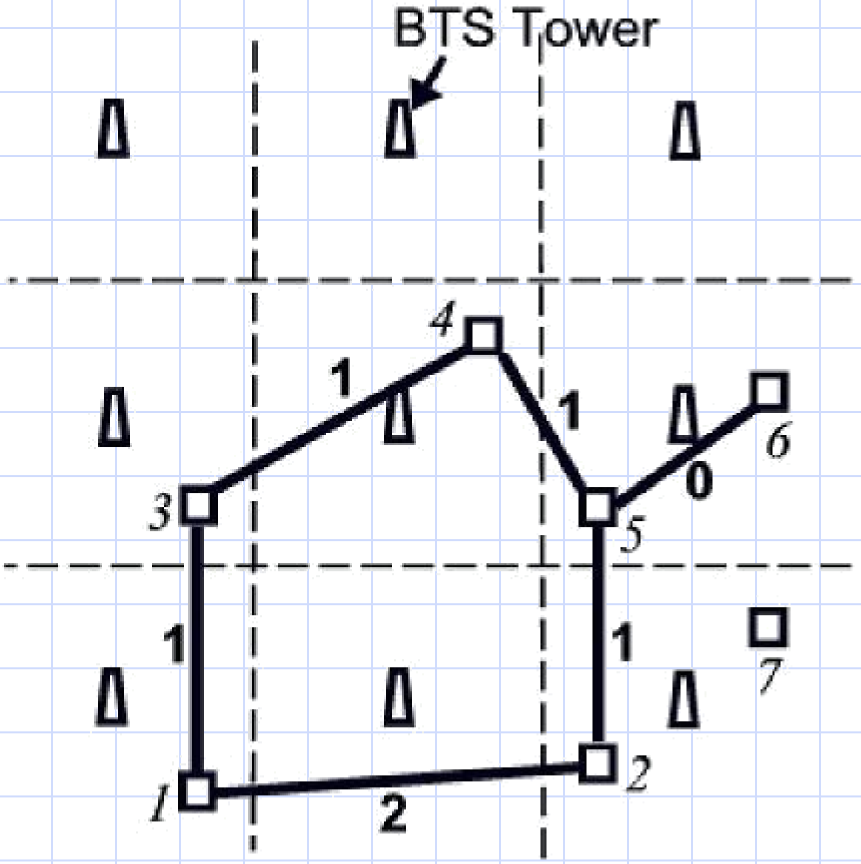
- 例一、 Simplified GSM Network
- 例二、 Collecting Luggage
- 例三、 Heliport
- 例四、 Flight Safety

例一、 Simplified GSM Network

- 已知 B （$1\le B\le 50$）个信号站和 C （$1\le C\le 50$）座城市的坐标，坐标的绝对值不大于 1000，每个城市使用最近的信号站。给定 R （$1\le R\le 250$）条连接城市线路的描述和 Q （$1\le Q\le 10$）个查询，求相应两城市间通信时最少需要转换信号站的次数。

例一、 Simplified GSM Network

- 如右图所示，从城市 1 到城市 6 最少需要转换 2+1+0=1+1+1+0 =3 次信号。



例一分析

- 最短路问题
- 怎样计算边的权值?
- “ 每个城市使用最近的信号站”

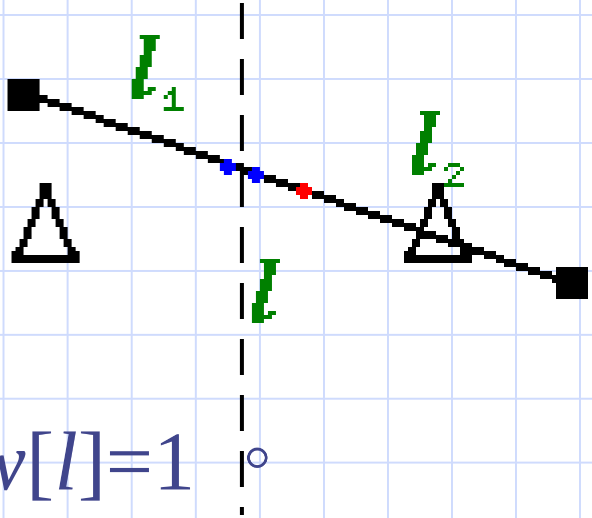
——Voronoi 图

- 转换信号站⇔穿过一条 Voronoi 边
- 边权＝两点连线段穿过 Voronoi 边的次数

例一分析——解法一

- 通过以上的分析，不难得出以下算法：①求 Voronoi 图；②求最短路。
- 思维清晰、时间效率高
- 代码量大、不易编程和调试
- 杀鸡焉用牛刀！！
- 能不能不求 Voronoi 图？？

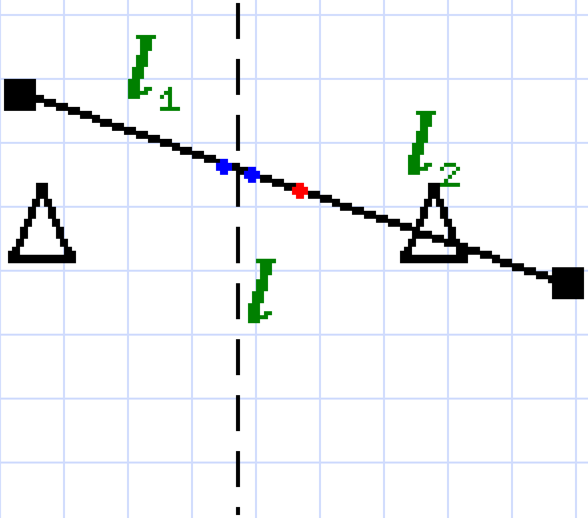
例一分析——解法二



- 二分！
- l 的两端点所属信号站相同： $w[l]=0$ 。
- 否则若 $|l|<\varepsilon$ （蓝）： $w[l]=1$ 。
- 否则，将线段 l 沿中点（红）分开：$l=l_1+l_2$， $w[l]=w[l_1]+w[l_2]$ 。
- 对 l_1 与 l_2 进行同样操作。

例一分析——解法二

- 对于每条边，通过上述方法，可以不用作 Voronoi 图，求出各边权值。再套用最短路算法，问题即可解决。

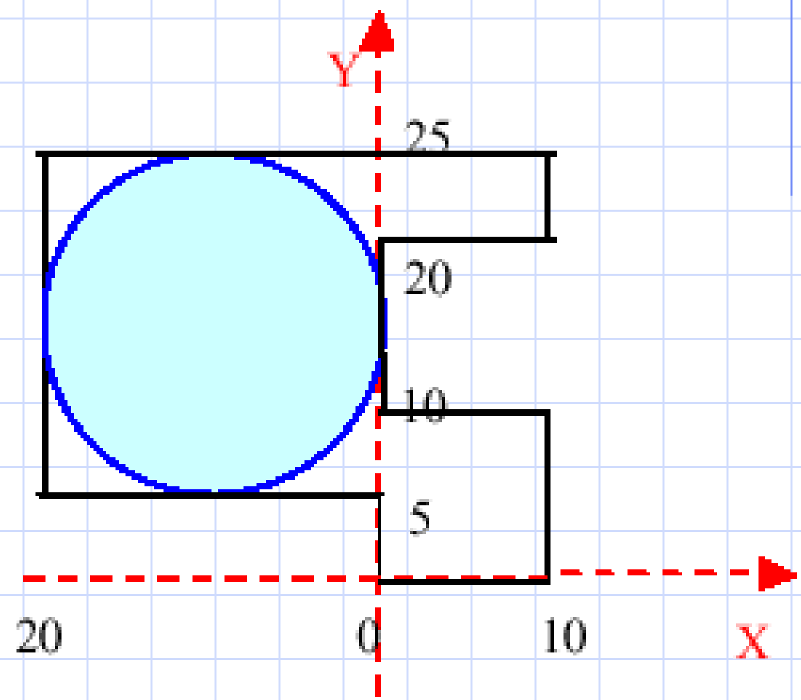


例一小结

- Voronoi 图→经典模型
- 方便思考
- 陷入固有的思维定势，难以自拔
- 二分思想→线段一分为二
- 化繁为简，易于编程
- 避开求作 Voronoi 图的套路

例三、 Heliport

- 已知一个只由水平边和垂直边构成的（简单） N （ $1 \le N \le 20$ ）边形屋顶，每边长为不超过 50 的正整数，要在上面修建一个圆形直升机场，求最大半径（图中为 10 ）。



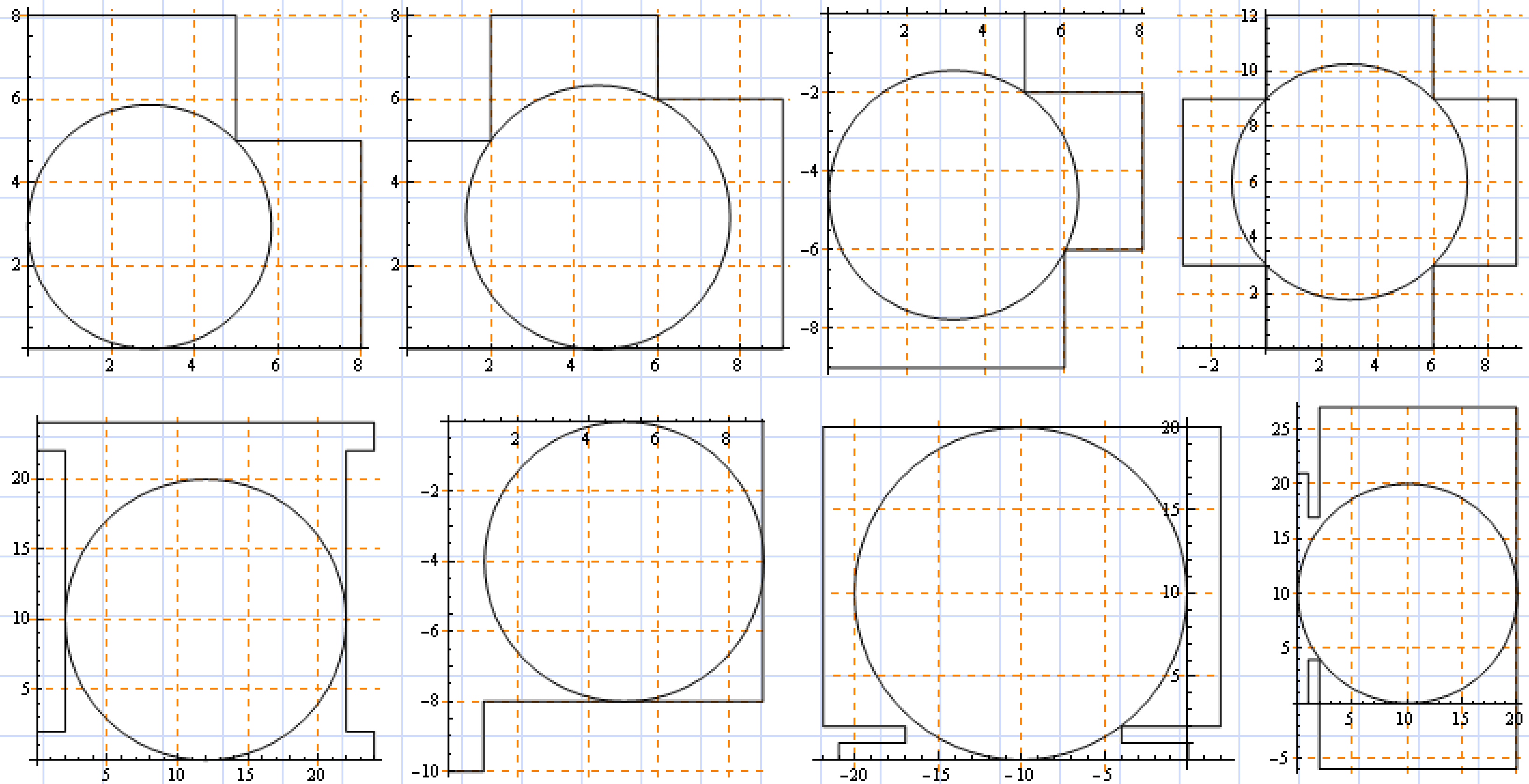
例三分析——解法一

- 最大内切圆
- 最优解必定贴住三个顶点或边
- $d_1=d_2=d_3$，两个方程，两个未知数（x，y），分别求解。
- d_i 为圆心到点（记作 P）、水平边（记作 H）或垂直边的距离（记作 V）。

例三分析——解法一

- 共十种组合：PPP 、 PPH 、 PPV 、 PHH 、 PVV 、 PHV 、 HHV 、 HVV 、 HHH 、 VVV 。
- HHH 与 VVV 不成立，故有八种。
- 列出八种方程，解出圆心坐标和半径。
- 思维复杂度低
- 计算复杂、容易出错、情况繁多

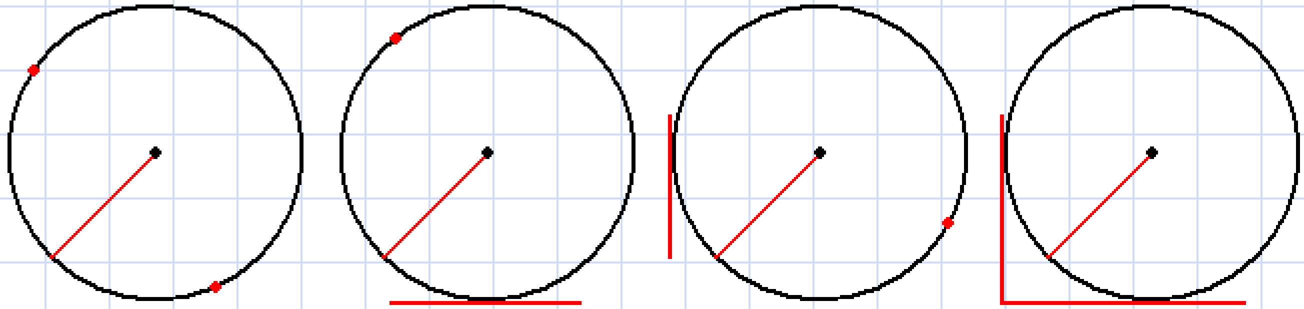
例三分析——解法一



例三分析——解法二

- 还能减少一些情况吗?
- $d_1=d_2=d_3=r$ ➔ $d_1=d_2=r$
- 半径未知，两个方程，三个未知数。
- 方程类型：八种 ➔ 四种

（ PP 、 PH 、 PV 、 HV ）



例三分析——解法二

- r 从哪里来?
- 二分！
- 算法：二分半径，代入每种情况的方程求解圆心坐标，判断是否存在解，调整直到满足精度要求。

例三小结

- 计算几何
- 细节
- “ 差之毫厘，失之千里”
- 二分思想，化零为整
- 简化计算，降低思维复杂度和编程复杂度

总结

- 计算几何学博大精深，相关的题目可谓是千变万化，解法也无定势可言，一些经典问题稍加修改之后，用传统方式解题可能就毫无优势可言。这要求我们必须跳出思维定势，采用全新的思想，二分思想就是其中不可或缺的一员。

总结

- 通过对以上几个例题的分析，我们对二分思想在计算几何中的应用又有了新的认识。具备了这一思想，可以使题目化繁为简、化动为静、化零为整、化求为证，用简单方法解答题目，减省了纷繁的细节处理和约束关系，简洁高效地得到令人满意的结果。可以说，二分带给我们一种全新的思路，是成功解决计算几何问题的一把利器。

八种方程的解

$$PPP\begin{cases} x = \dfrac{\left(x_1{}^2 + y_1{}^2\right)\left(y_2 - y_3\right) + \left(x_2{}^2 + y_2{}^2\right)\left(y_3 - y_1\right) + \left(x_3{}^2 + y_3{}^2\right)\left(y_1 - y_2\right)}{2\left(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3\right)} \\ y = \dfrac{\left(x_1{}^2 + y_1{}^2\right)\left(x_3 - x_2\right) + \left(x_2{}^2 + y_2{}^2\right)\left(x_1 - x_3\right) + \left(x_3{}^2 + y_3{}^2\right)\left(x_2 - x_1\right)}{2\left(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3\right)} \end{cases}$$

$$PHV\begin{cases} x = h + x' - y' \pm \sqrt{2\left(v - x'\right)\left(h - y'\right)} \\ y = v - x' + y' \mp \sqrt{2\left(v - x'\right)\left(h - y'\right)} \end{cases} \vee \begin{cases} x = x' + y' - h \pm \sqrt{-2\left(v - x'\right)\left(h - y'\right)} \\ y = x' + y' - h \pm \sqrt{-2\left(v - x'\right)\left(h - y'\right)} \end{cases}$$

八种方程的解

$$PPH\begin{cases} x=\dfrac{h(x_1-x_2)-x_1y_2+x_2y_1\pm\sqrt{(h-y_1)(h-y_2)\left[(x_1-x_2)^2(y_1-y_2)^2\right]}}{y_1-y_2} \\ y=\left\{(y_1+y_2)\left[(x_1-x_2)^2(y_1-y_2)^2\right]-2h(x_1-x_2)^2 \mp 2(x_1-x_2)\sqrt{(h-y_1)(h-y_2)\left[(x_1-x_2)^2(y_1-y_2)^2\right]}\right\}\Big/2(y_1-y_2)^2 \end{cases} \quad (y_1\neq y_2)$$

$$PPH\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{4y'^2-4h^2+(x_1-x_2)^2}{8(y'-h)} \end{cases}(y_1=y_2=y')$$

八种方程的解

$$PPV\begin{cases} x = \left\{ (x_1+x_2)\left[(x_1-x_2)^2(y_1-y_2)^2\right] - 2v(y_1-y_2)^2 \mp 2(y_1-y_2)\sqrt{(v-x_1)(v-x_2)\left[(x_1-x_2)^2(y_1-y_2)^2\right]} \right\} \Big/ 2(x_1-x_2)^2 \quad (x_1 \neq x_2) \\ y = \dfrac{v(y_1-y_2) + x_1y_2 - x_2y_1 \pm \sqrt{(v-x_1)(v-x_2)\left[(x_1-x_2)^2(y_1-y_2)^2\right]}}{x_1-x_2} \end{cases}$$

$$PPV\begin{cases} x = \dfrac{4x'^2 - 4v^2 + (y_1-y_2)^2}{8(x'-v)} \\ y = \dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases} \quad (x_1 = x_2 = x')$$

八种方程的解

$$PVV\begin{cases} x = \dfrac{v_1 + v_2}{2} \\ y = y' \pm \sqrt{-(x' - v_1)(x' - v_2)} \end{cases}$$

$$HHV\begin{cases} x = \dfrac{2v \pm (h_1 - h_2)}{2} \\ y = \dfrac{h_1 + h_2}{2} \end{cases}$$

$$PHH\begin{cases} x = x' \pm \sqrt{-(y' - h_1)(y' - h_2)} \\ y = \dfrac{h_1 + h_2}{2} \end{cases}$$

$$HVV\begin{cases} x = \dfrac{v_1 + v_2}{2} \\ y = \dfrac{2h \pm (v_1 - v_2)}{2} \end{cases}$$

四种方程的解

$$PP\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(x_1+x_2\pm(y_1-y_2)\sqrt{\dfrac{4r^2-(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}\right) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(y_1+y_2\mp(x_1-x_2)\sqrt{\dfrac{4r^2-(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}\right) \end{cases}$$

$$PH\begin{cases} x=x' \\ y=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2) \end{cases} \qquad PV\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2) \\ y=y' \end{cases} \qquad HV\begin{cases} x=x'\pm r \\ y=y'\pm r \end{cases}$$

更多例子

- ACM/ICPC Asia Regional (Tokyo), 1998

  Problem F: Triangle Partition
- CEOI 2002 *A highway and the seven dwarfs*
- ACM/ICPC World Finals 2003

  Problem I: The Solar System
- POJ Monthly Special – 2006.06.25

  Problem C: Convex Hull and Triangle