消防站解题报告

广东中山纪念中学 陈启峰

【问题描述】

Z 国有 n 个城市，从 1 到 n 给这些城市编号。城市之间连着高速公路，并且每两个城市之间有且只有一条通路。不同的高速公路可能有不同的长度。最近 Z 国经常发生火灾，所以当地政府决定在某些城市修建一些消防站。在城市 k 修建一个消防站须要花费大小为 $W(k)$ 的费用。函数 W 对于不同的城市可能有不同的取值。如果在城市 k 没有消防站，那么它到离它最近的消防站的距离不能超过 $D(k)$ 。每个城市在不超过距离 $D($这个城市）的前提下，必须选择最近的消防站作为负责站。函数 D 对于不同的城市可能有不同的取值。为了节省钱，当地政府希望你用最少的总费用修建一些消防站，并且使得这些消防站满足上述的要求。

【问题分析】

【数学模型】

首先，以 n 个城市为结点、高速公路为边，高速公路长为边权构造成一个图由性质“每两个城市之间有且只有一条通路”可知这个图是一棵树。

令 $dis(i,j)$ 为结点 i 和结点 j 之间的距离。任务是找出一个 01 序列 $X_1, X_2, X_3 ......X_n$ ，使得对于 $1 \le i \le n$,都有

$$\min\{dis(i,j) \mid X_j = 1\} \le D(i)$$

并且使得目标函数

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \times W(i)$$

最小化。

【算法模型分析】

由于这题涉及到距离和图论等方面，便可猜想这是一道用图论算法解决的问题。可是在尝试过许多图论算法之后却发现这种猜想是走不通的。

这时就要充分地利用问题的特殊性。我们知道这图是一棵树，并且这题是求目标函数最小化的问题。根据这些特性，我们基本上可以肯定这题的算法是树型动态规划。

【确定动态规划时的矛盾】

用动态规划算法解题首先要做的是确定好状态，这应该是不容置疑的，因为状态表示是动态规划中的重中之重。一般地，树型动态规划的状态中会有一个参数 $Root$，$Root$ 表示此状态的研究对象是以 $Root$ 为根的子树。

但是，如果仅用 F_{Root} 表示在以 $Root$ 为根的子树中，修建符合要求(子树中的所有结点到最近消防站的距离不超过其对应的函数 D 值)的消防站的最小费用——即状态只用上述的一个参数，那么状态转移方程是无法找到的。因为这种状态表示无法反映出在哪里修建了消防站、离 $Root$ 最近的消防站的详细情况。

为了解决这种情况，我们通常会增加一个参数，可称作增加一维。这时应该增加的参数既可以是 $Root$ 到最近消防站的距离，又可以是 $Root$ 的最近消防站的编号，也可以是树内的最近消防站的编号，同样可以是树外的最近消防站的编号。到底更加哪个参数是可行的呢?

可是事与愿违！所有的这些状态表示都无法找到动态规划转移方程。难道状态还要增加一个参数吗？还是这题本身是 NP 完全性问题、而不是用动态规划题目？别急，先来做个分析吧。

【初步分析】

分析上面找不到状态转移方程的原因。在分析中便会发现产生这些矛盾的主要原因是，在状态转移时不能保证 $Root$ 到最近消防站的距离或编号与定义的一致——换句话说，就是状态的定义太严格了——再换句话说，题目的要求太严格了。

所以，此时当务之急是放宽题目的要求。

【“放宽”方法转化限制】

现在面对的主要障碍无疑是，“每个城市在不超过距离 D(这个城市）的前提下，必须选择最近的消防站作为负责站”这一严格限制在状态转移中起着干扰作用。其实，我们并不须要知道最近的消防站是哪个，而只要保证在距离 D(这个城市）内至少有一个消防站就足够了。于是可以尝试放宽这个限制：把这个限制转化为“每个城市在不超过距离 D(这个城市）的前提下，可以选择任意一个消防站作为负责站”。

转化后，求出的最优解与转化前的是一样的。原因在于在转化后，必定存在一个最优解满足性质“每个城市在不超过距离 D(这个城市）的前提下，必须选择最近的消防站作为负责站”。

现在每个城市都享有一定的“自由权”了，可以在自己的活动范围内自由地选择消防站作为负责站。此时就有必要把状态表示重新定义一下——令 $F_{i,j}$ 表示

1 在以 i 为根的子树里修建一些消防站；
2 在结点 j 必须修建一个消防站；
3 以 i 为根的子树内的每个结点在不超过距离 D(这个结点）的前提下,选择一个在子树内或结点 j 上的消防站作为负责站；
4 结点 i 必须选择结点 j 上的消防站作为负责站；

的最少总费用（如果 j 在树外则不算在 $F_{i,j}$ 内）。自然而然地“最近的消防站”这几个字在定义中消失了，这为以后确定动态规划转移方程提供了很大的方便。

【进一步分析】

经过“放宽”方法放宽限制后，状态表示基本上已经定下来了。进而要做的是确定动态规划转移方程。但是此时要确定下转移方程还是遇到了一点困难，总觉得欠缺一些性质、关系之类的。相信聪明的读者已经挖掘出原因了，那就是此时的限制过于宽松。

【“约制”方法增添限制】

动态规划算法讲求拓扑顺序和无后效性。然而现在每个城市对负责站的选取

是任意的，于是就不妨对策略选取增添限制——假设城市 P_1 选取城市 P_m 的上消防站作为负责站，令 P_1 到 P_m 的路径为 $P_1\ P_2\ P_3\ldots\ldots P_m$，那么对于任意 $i\in[1,m]$ 都有 P_i 的负责站为 P_m。如果我们证明总是在一个最优解满足上述的性质，那么此限制就能被增添了。下面将证明必有一个最优解满足上述的性质。

证明：

令某个最优解对应的 01 序列为 $X_1,X_2,X_3\ldots\ldots X_n$。

构造：在 01 序列 $X_1,X_2,X_3\ldots\ldots X_n$ 的布局下，首先增加一个结点 S，在 S 和有消防站的结点之间连一条权值为 0 的边。然后以 S 为源点做一次 Dijkstra，并记录下前驱结点。对于每个结点，如果结点有消防站则选择其上的消防站为负责站，否则选择前驱的负责站为其负责站。

满足上述性质和必要限制：

1、 设任意一个结点到源点的路径为 $P_1\ P_2\ P_3\ldots\ldots P_m\ S$，易知任意 $i\in[2,m]$ 都有 P_i 为 P_{i-1} 的前驱，而 P_m 的负责站为 $P_m\Rightarrow P_{m-1}$ 的负责站为 $P_m\ldots\ldots\Rightarrow P_1$ 的负责站为 P_m，所以任意 $i\in[1,m]$ 都有 P_i 的负责站为 P_m。

2、 由于每个结点都选择最近的消防站，所以它与负责站的距离不超过 D(这个结点）。

3、 而构造选取的消防站与最优解是一样的，所以总费用是最少的。

综上所述，总是在一个最优解(构造出来的方案)满足上述的性质。

证毕。

如今，上述的限制终于可以被正确地增添上了。

【确定动态规划转移方程】

经过两番转化后，动态规划转移方程已经可以被确定下来了。为了转移方便先定义一个简单的辅助状态 $Best$， $Best_i$ 表示在以 i 为根的子树中，修建合符要求(子树中所有结点到其树内的负责站的距离不超过其对应的函数 D 值)的消防站的最小费用。明显地

$$Best_i=\min\{F_{i,j}\mid j\text{在以}i\text{为根的子树中}\}$$

下面对 F 进行分析：

①当 $dis(i,j) > D(i)$ 时，$F_{i,j} = +\infty$，这表示不存在状态 $F_{i,j}$；

②当 $dis(i,j) \le D(i)$ 时，

⑴当 j 在以 i 为根的子树外时，对于 i 的每个儿子 k 都有两种选择：选择以 k 为根的子树内或外的消防站为负责站。当选择以 k 为根的子树内的消防站为负责站时，其子树所需的最少费用为 $Best_k$，当选择以 k 为根的子树外的消防站为负责站时，根据新添的限制易知 k 只可以选择 j 上的消防站作为负责站，此时其子树所需的最少费用为 $F_{k,j}$。综上得到

$$F_{i,j} = \sum_{k为i的儿子} \min\{Best_k, F_{k,j}\}$$

⑵当 $i = j$ 时，i 的每个儿子的选择情况与⑴中的一样。此时还要加上修建 j 上的消防站的费用。因此

$$F_{i,j} = W(j) + \sum_{k为i的儿子} \min\{Best_k, F_{k,j}\}$$

⑶当 $i \ne j$ 并且 j 在以 i 为根的子树内时，此时 j 必定在 i 的某个儿子 $child$ 的子树里。对于 i 的每个不是 $child$ 的儿子其选择情况与⑴中的一样，而对于 $child$，根据新添的限制它只能选择 j 作为负责站。综上得到

$$F_{i,j} = F_{child,j} + \sum_{\substack{k为i的儿子 \\ 并且k\ne child}} \min\{Best_k, F_{k,j}\}$$

复杂度分析：时间复杂度为 $O(n^2)$，空间复杂度为 $O(n^2)$。

【小结】

“放宽”方法和“约制”方法不总是互相排斥、矛盾的，它们往往会互相补充。它们各自可以在需要它们的方面发挥特长——应用“放宽”方法确定状态；应用“约制”方法确定状态转移方程。在保证能找到答案的前提下，对于过于严格而阻挠前进的条件、限制，我们对它进行“放宽”；对于过于宽松而茫无头绪的条件、限制，我们对它进行“约制”——这就是所谓的一张一弛了。一张一弛不仅是文武之道，更是解题之道。