五边形数定理 [编辑]

维基百科，自由的百科全书

五边形数定理是一个由欧拉发现的数学定理，描述欧拉函数展开式的特性[1] [2]。欧拉函数的展开式如下：

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{k(3k-1)}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{k(3k\pm1)}{2}}$$

亦即

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}+\cdots.$$

欧拉函数展开后，有些次方项被消去，只留下次方项为1, 2, 5, 7, 12, ...的项次，留下来的次方恰为广义五边形数。

若将上式视为幂级数，其收敛半径为1，不过若只是当作形式幂级数来考虑，就不会考虑其收敛半径。

和分割函数的关系 [编辑]

欧拉函数的倒数是分割函数的母函数，亦即：

$$\frac{1}{\phi(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k$$

其中$p(k)$为k的分割函数。

上式配合五边形数定理，可以得到

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}+\cdots)(1+p(1)x+p(2)x^2+p(3)x^3+\cdots)=1$$

考虑x^n项的系数，在 n>0 时，等式右侧的系数均为0，比较等式二侧的系数，可得

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)+\cdots=0$$

因此可得到分割函数p(n)的递归式

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+\cdots$$

以n=10为例

$$p(10)=p(9)+p(8)-p(5)-p(3)=30+22-7-3=42$$