



上海中学

Shanghai High School

# 从“ $k$ 倍动态减法游戏”出发探究一类组合游戏问题

上海市上海中学 曹钦翔

指导教师：上海市上海中学 毛黎莉





上海中学

Shanghai High School

# 目录

- 一：引言
- 二：问题的提出
- 三：动态规划的通式解法
- 四：基于动态规划的优化
  - 4.1 利用单调性解决“k 倍动态减法游戏”
- 五：不基于动态规划的思考
  - 5.2 利用贪心解决 BOI2008 game





上海中学

Shanghai High School

## NP 状态

- 所谓 N 状态，是指当前即将操作的玩家有必胜策略（N 来源于 Next player wins.）。
- 所谓 P 状态，是指先前刚操作完的玩家有必胜策略（P 来源于 Previous player wins.）。
- 定理：P 状态的一切后继都为 N 状态，N 状态拥有至少一个后继是 P 状态。







上海中学

Shanghai High School

## 通式动态规划解法

- 步骤 1：把所有“胜利终止状态”标记为 P 状态，“失败终止状态”标记为 N 状态。
- 步骤 2：找到所有的未定状态中，所有后继都被确定是 N 状态的状态，设置为 P 状态。
- 步骤 3：找到所有的未定状态中，可以一步到达 P 状态的状态，都设置为 N 状态。
- 步骤 4：若上两步中没有产生新的 P 状态或 N 状态，程序结束，否则回到步骤 2。
- 时间复杂度——所有状态的决策数之和





上海中学

Shanghai High School

## k 倍动态减法游戏

有一个整数  $S$  ( $\geq 2$ )，先行者在  $S$  上减掉一个数  $x$ ，至少是 1，但小于  $S$ 。之后双方轮流把  $S$  减掉一个正整数，但都不能超过先前一回合对方减掉的数的  $k$  倍，减到 0 的一方获胜。  
问：谁有必胜策论。





上海中学

Shanghai High School

A 第一回合減去 2

A 获胜

B 第一回合減去 4

A 第二回合減去 1

K=2







上海中学

Shanghai High School

## 通式解法

- $NP(m,n)$  表示  $S$  还剩下  $m$  且接下去即将操作的玩家最多能减去  $n$  的状态，则初始状态为  $NP(S,S-1)$ 。
- 规定，若在  $NP(m,n)$  状态下，即将操作的玩家必胜则  $NP(m,n)=1$ ，否则  $NP(m,n)=0$ 。
- 若用动态规划计算所有  $NP(m,n)$ ，则判定胜负的时间复杂度为  $O(n^3)$ 。





上海中学

Shanghai High School

# 优化 1

状态单调性



状态  $NP(m,n)$  是关于关于  $n$  单调不减的。







上海中学

Shanghai High School

记  $f(m) = \min\{n \mid NP(m, n) = 1\}$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

图4-1  $k=1$ 时 $NP(m, n)$ 的情况 红色格表示 $f(m)$



上海中学

Shanghai High School

# 优化 1

若  $NP(m, n) = 0$ ,

则

对于任意  $r=1, 2, 3 \dots n$  有  $m-r > 0$  且  $NP(m-r, kr) = 1$ 。

动态转移方程:  $NP(m, n) = \min \{ NP(m-n_0, 1), k(n_0-n) \}$

时间复杂度:  $O(S^2)$





图4-2  $k=1$ 时 $NP(m, n)$ 的情况  $NP(m, n)=0$ 的连续的格子就像一堵堵墙







上海中学

Shanghai High School

# 优化 2— 决策单调性

- 所有这些直线是平行的
- 随着  $m$  增大逐渐向下向右移
- 每一堵墙都是固定的、右端有界的



用栈  
储存  
墙





上海中学

Shanghai High School

# 优化 2— 决策单调性

- 逐个检验栈中的“墙”
- 若某堵“墙”不能挡住从  $(m,0)$  格子出发斜率为  $k^{-1}$  的直线，那么该“墙”出栈
- 否则，若这堵“墙”能挡住斜线，则循环结束并得出  $f(m)$  的值。
- 最后，根据  $f(m)$  可确定一堵新“墙”的位置和长度，新“墙”入栈。
- 时间复杂度：  $O(S)$





上海中学

Shanghai High School

## BOI 2008 game

- 一个  $n*n$  的棋盘，每个格子要么是黑色要么是白色。白格子是游戏区域，黑格子表示障碍。
- 指定两个格子 AB，分别是先手方和后手方的起始格子。A 和 B 这两格子不重合。
- 游戏中，双方轮流操作。每次操作，玩家向上下左右四个格子之一走一步，但不能走进黑色格子。有一种特殊情况，当一方玩家，恰好走到当前对方所在的格子里，他就可以再走一步（不必是同一方向），“跳过对手”。
- 胜负的判定是这样的，若有一方走进对方的起始格子，就算获胜，即使是跳过对方，也算获胜。







上海中学

Shanghai High School

## 通式解法

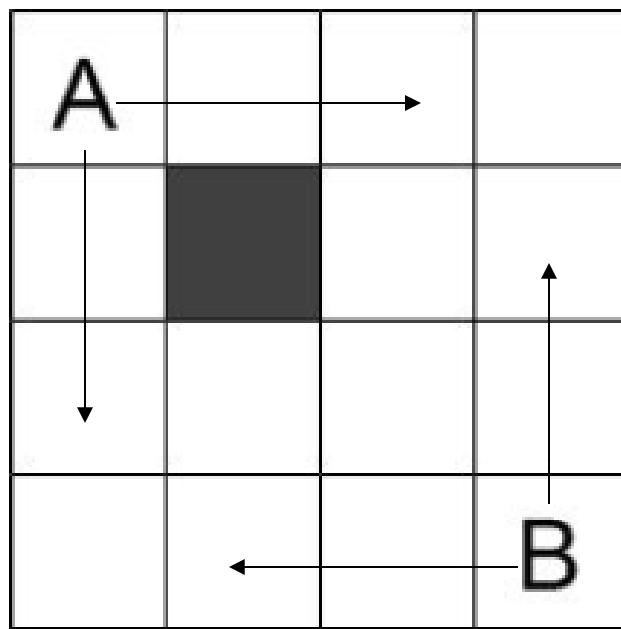
- 用  $(x1, y1, x2, y2)$  表示状态。
- 其中  $(x1, y1)$  是 A 的当前位置， $(x2, y2)$  是 B 的当前位置。另外，还需要一位状态表示当前的操作这是 A 或 B。
- 因此，状态总数至少为  $O(n^4)$  个，尽管每个状态的状态转移代价为  $O(1)$ ，但总时间复杂度为  $O(n^4)$ ，太高了。
- 而且状态数为  $O(n^4)$  也意味着动态规划已经没有优化的余地，算法的设计必须跳出动态规划的框架。





上海中学

Shanghai High School



如果先行方 A  
如果后手方 B 能  
注意到

则 A 获胜；  
“径直走  
跳过 A”，则 B  
相等的

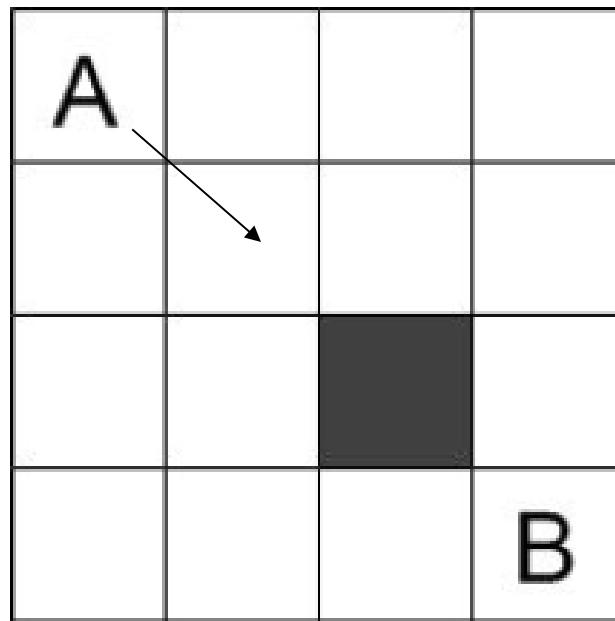
所以如果没有“跳过对手”的规则，先行者将必胜！





上海中学

Shanghai High School







上海中学

Shanghai High School

## BOI 官方解答

- 记  $d$  为  $AB$  之间最短路的距离。
- 若  $d$  为奇数， $A$  必胜！所以只要考虑  $d$  为偶数的情况
- 用数组  $LA_i$  存贮，在  $AB$  最短路径上，且与距离  $A$  为  $i$  的格子。
- 记  $NP\_A[i,j,k]$  表示，轮到  $A$  操作时， $A$  在  $LA_i$  中的第  $j$  个格子上， $B$  在  $LA_{d-i}$  中的第  $k$  个格子上的状态。
- $NP\_B[i,j,k]$  表示，轮到  $B$  操作时， $A$  在  $LA_{i+1}$  中的第  $j$  个格子上， $B$  在  $LA_{d-i}$  中的第  $k$  个格子上的状态。





上海中学

Shanghai High School

# BOI 官方解答的错误

- BOI 的官方解答中认为，数组  $NP\_A[i,j,k]$  和数组  $NP\_B[i,j,k]$  表示的状态总数为  $O(n^3)$  数量级。
- 但是，形式上的三位数组并不等于包含的数据为立方阶。事实上，这三维都不是  $O(n)$  的。





上海中学

Shanghai High School

## 进一步的优化

- 首先，不同行/列/斜线/方格中的格子等同于黑格，所

- 观察得到格子把所距离小于

|   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
|   |   |   |   | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |    |
|   |   |   |   | 10 |    |    |    |    |    | 17 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 8  | 7  | 6  |    |    |    | 18 |
| 5 |   |   |   |    |    |    | 5  |    |    | 19 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 2  | 3  | 4  |    |    |    | 20 |
| 3 | 2 | 1 | A | 1  | 2  | 3  |    |    | B  |    |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 2  | 3  | 4  |    |    |    | 20 |
| 5 |   |   |   |    |    |    | 5  |    |    | 19 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 8  | 7  | 6  |    |    |    | 18 |
|   |   |   |   | 10 |    |    |    |    |    | 17 |
|   |   |   |   | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |    |

且  $LA_i$  中的  
分与 A 的







上海中学

Shanghai High School

## 进一步优化

每一层  $LA_i$  都是封闭的  $\rightarrow$  有序存储

用归纳法可以证明：

$LA_{d-i}$  中的格子所形成的环，可以分成两段：

一段中的  $LA[d-i, k]$  使得  $NP\_A[i, j, k]$  是 A 必胜，  
另一段使得  $NP\_A[i, j, k]$  是 B 必胜。





上海中学

Shanghai High School

## 进一步优化

- 只需存储分界点！
- 状态是环型的，所以有两个分界点，用  $\text{left}[i,j], \text{right}[i,j]$  表示这两个分界点
- 时间复杂度： $O(n^2)!$





上海中学

Shanghai High School

## 总结

- NP 状态定理和基于它的动态规划是解决游戏有问题的通式方法，它们构建了解决游戏论问题的基本框架。
- 但对于游戏的分析，以及动态规划的优化手段是因题而异的。尤其是单调性的分析，和对称、贪心等非动态规划的分析相当灵活。







上海中学

Shanghai High School

## 反例

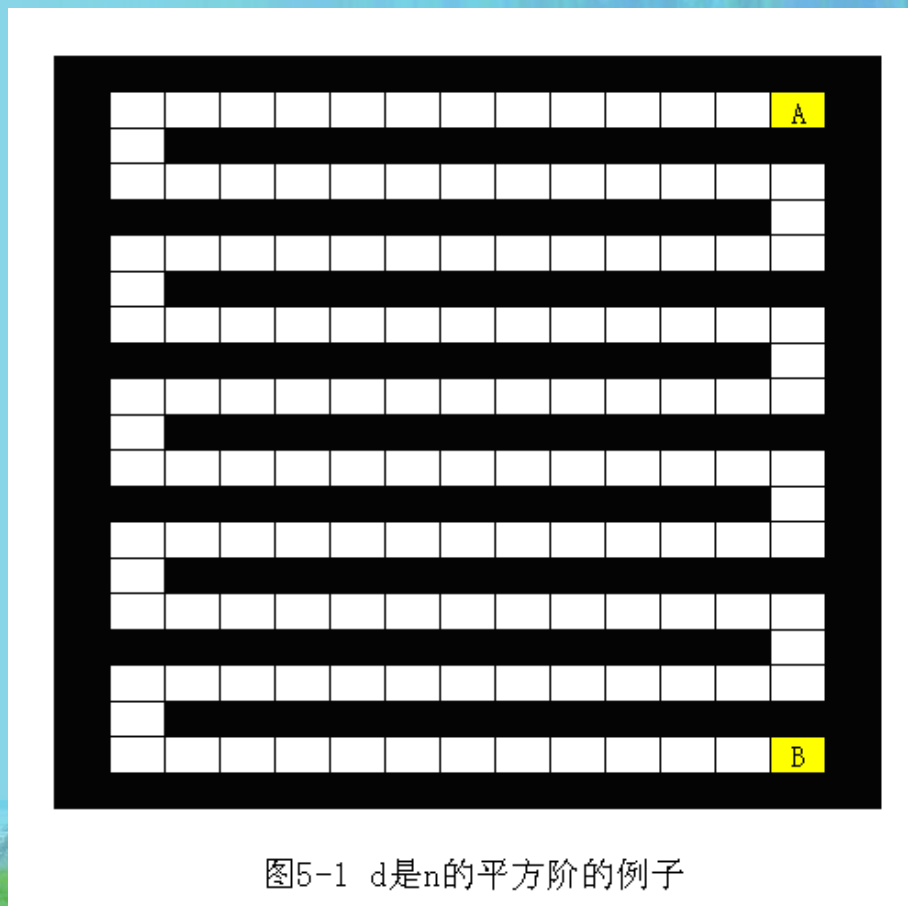


图5-1 d是n的平方阶的例子



上海中学

Shanghai High School

## 反例

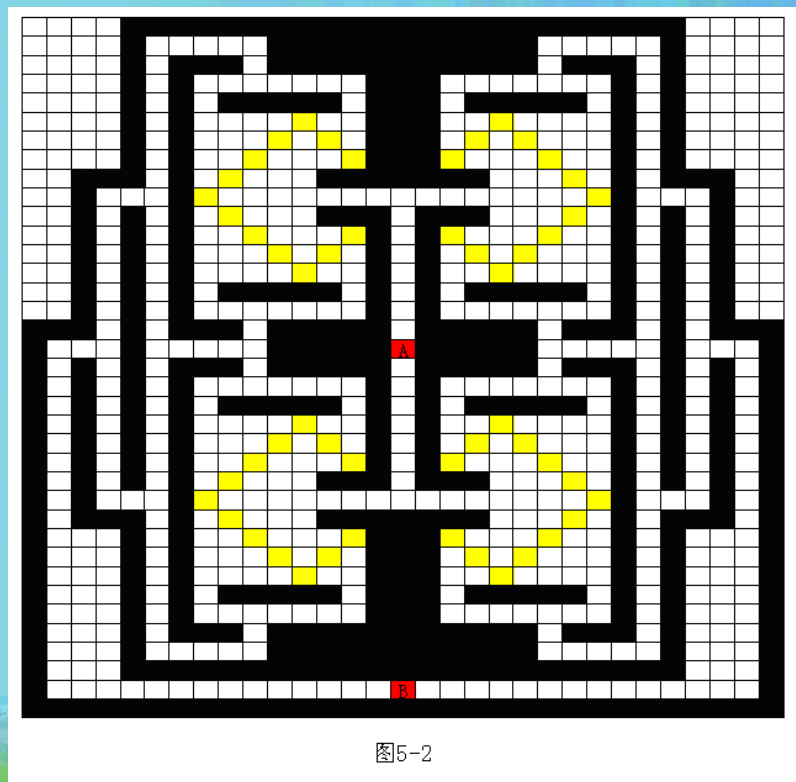
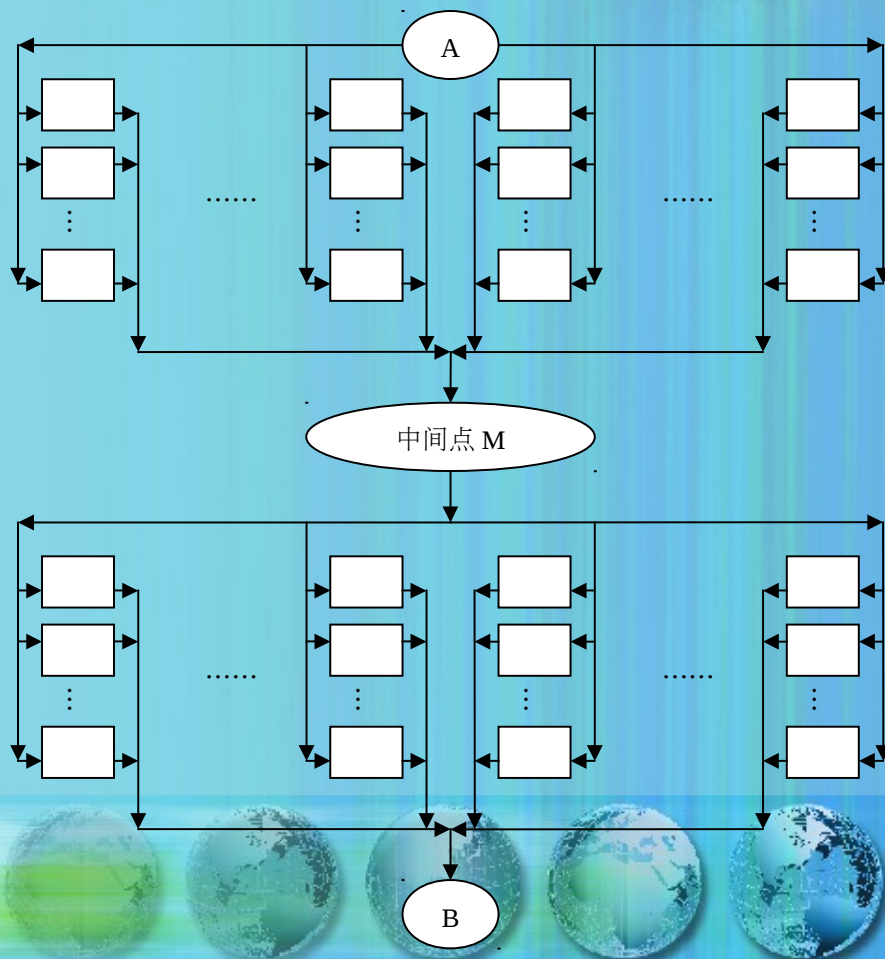


图5-2





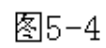
# 反例







## 反例





上海中学

Shanghai High School

## 反例

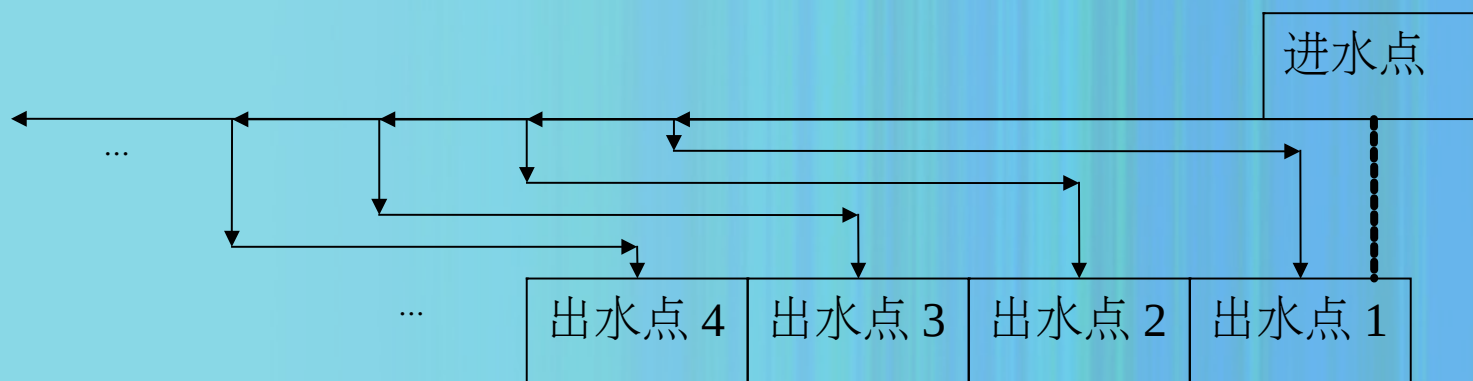


图 5-5

