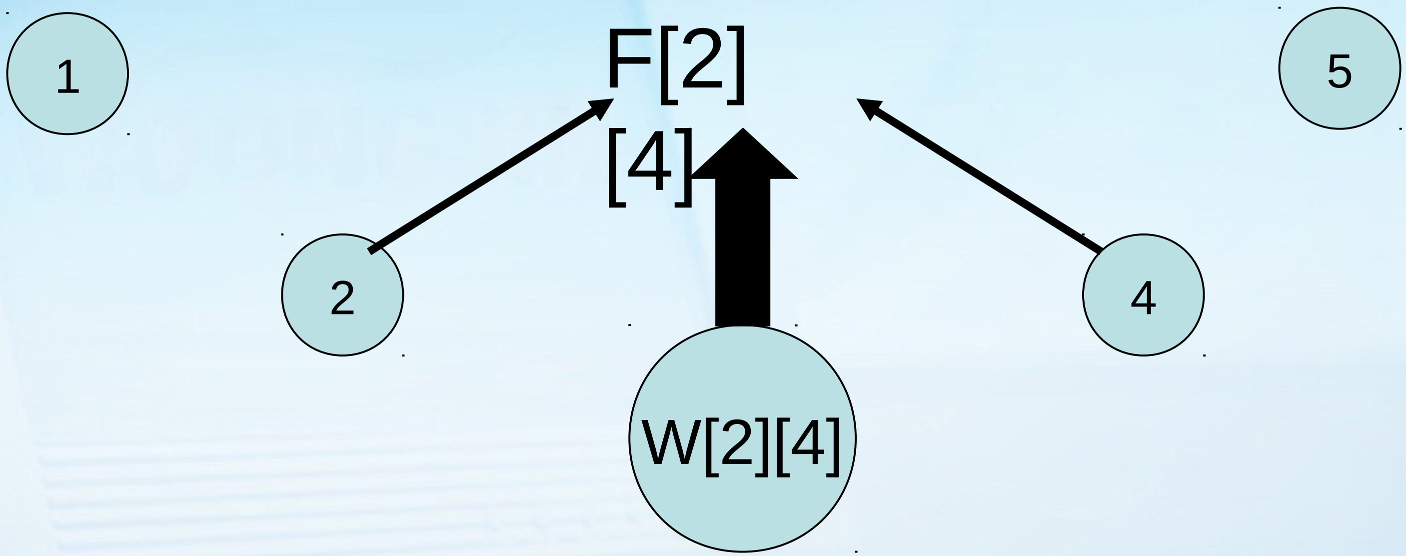
对一类动态规划问题的研究

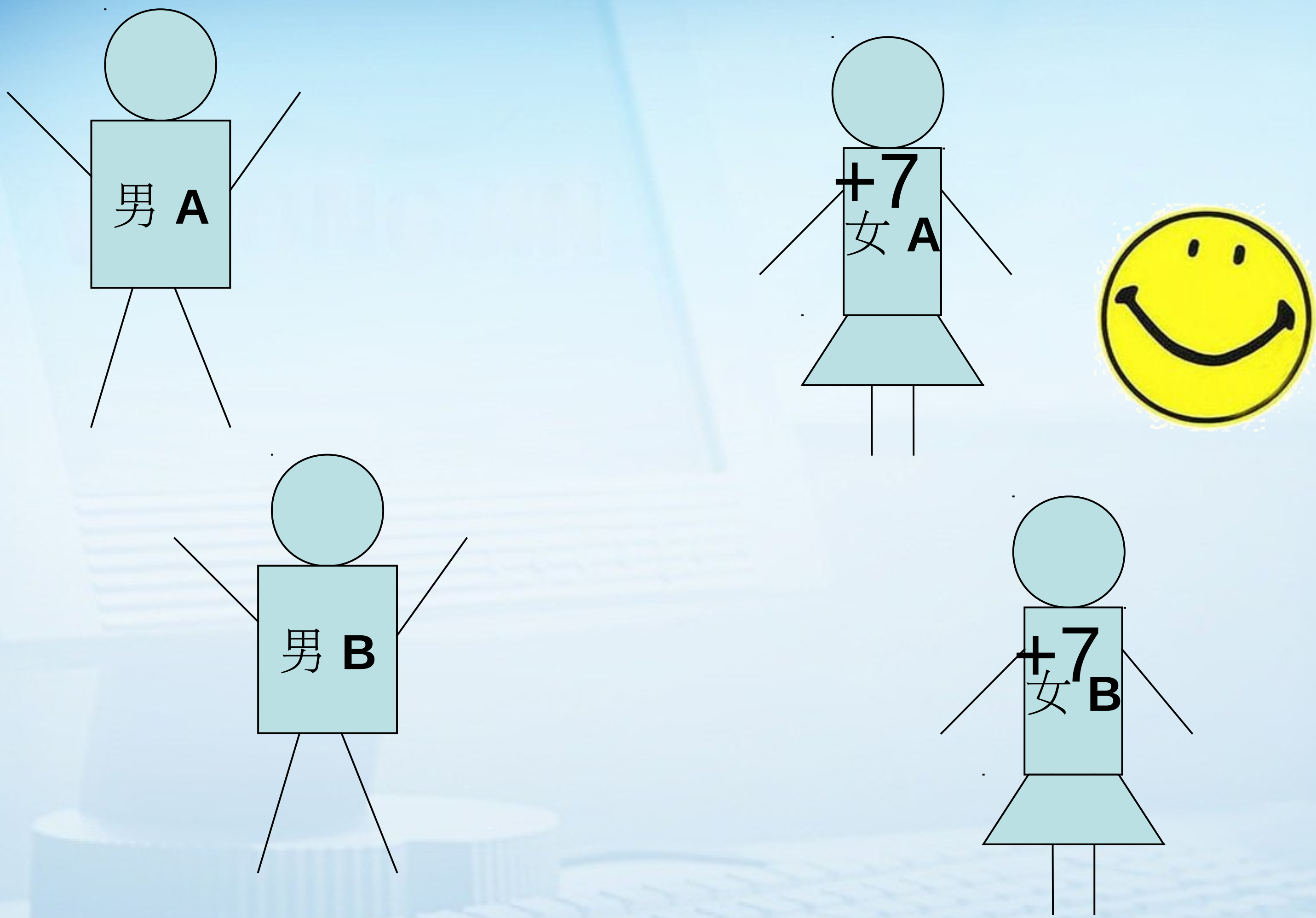
湖南省长沙市第一中学 徐源盛

引入

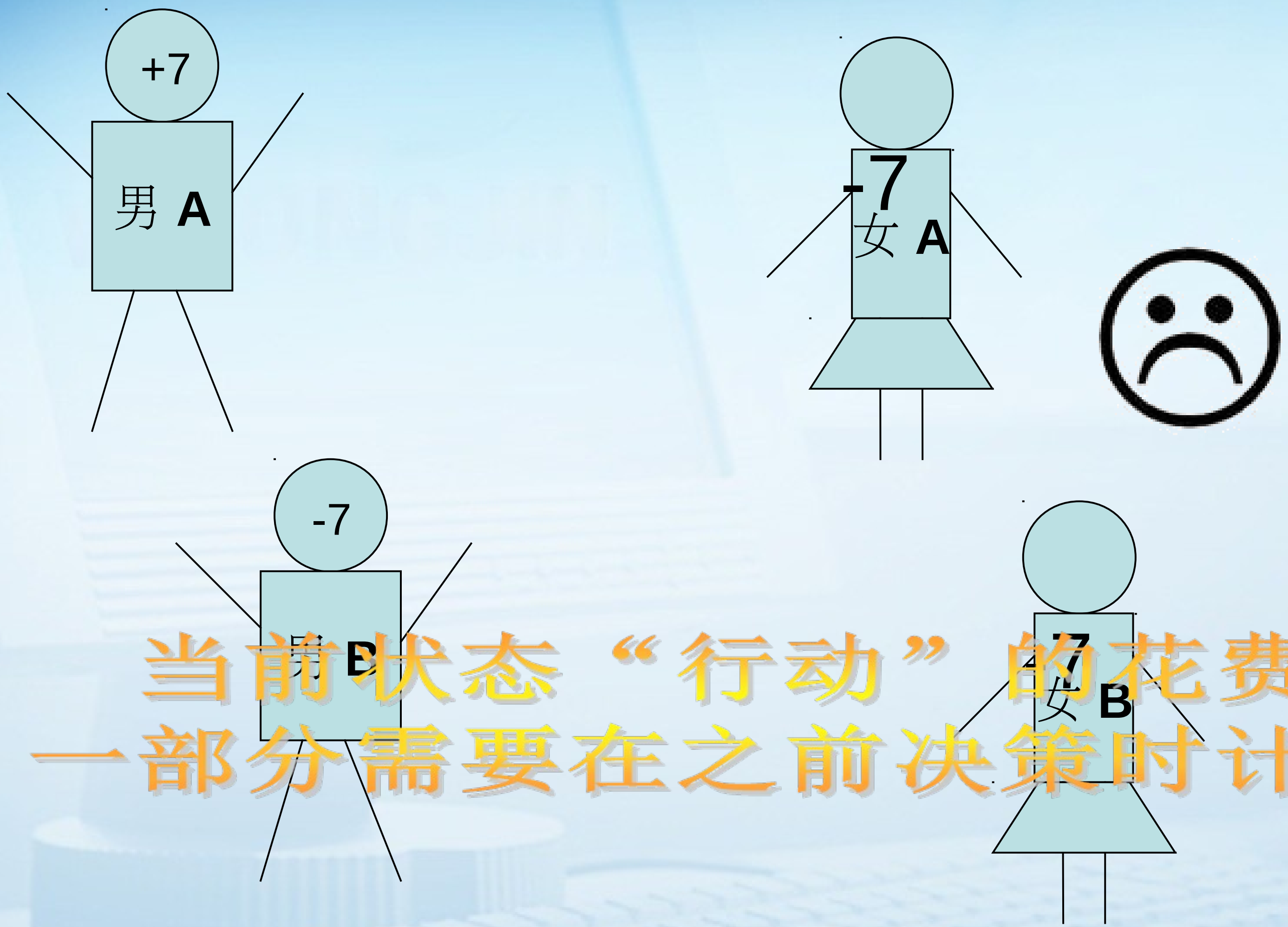


$$f[i][j]=\max\{f[i][k]+f[k+1][j]\}+w(i,j)$$

引入



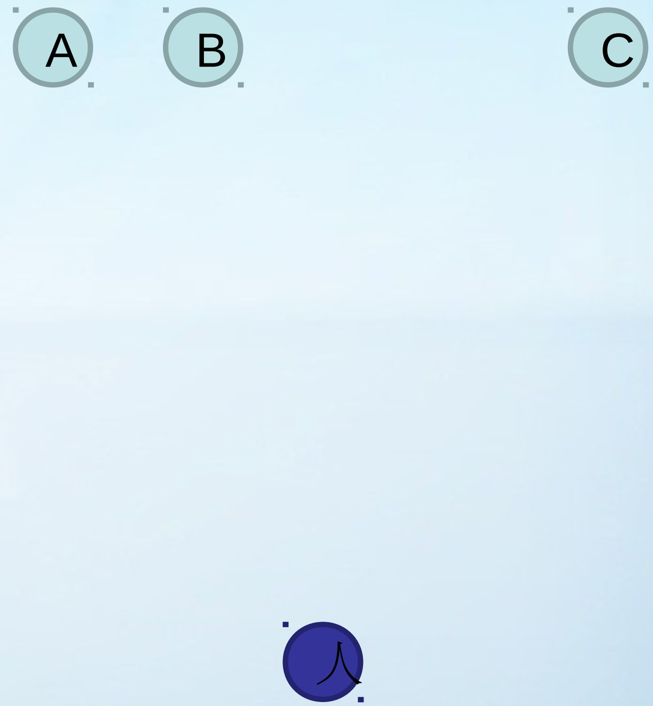
引入



当前状态“行动”的花费
一部分需要在之前决策时计算

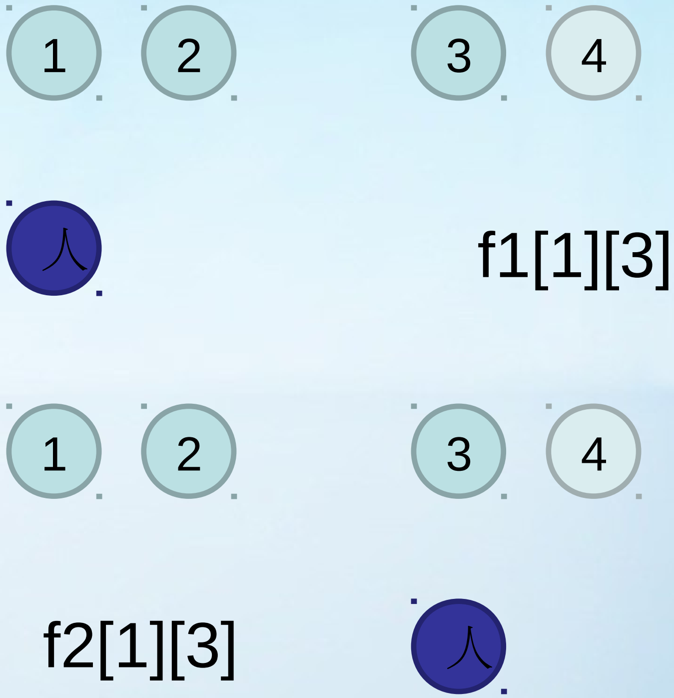
问题一

- 有 n 个彩蛋，分别位于 (x_i,y_i) ，以 v_i 的速度匀速下落。
- 你从坐标 x 出发，速度为 1 ，每次可以向左或向右走到一个未被射落的彩蛋，将其射落。得分为被射彩蛋 y 坐标的千分之一。
- 你的目标是射落所有彩蛋并使得分最高。



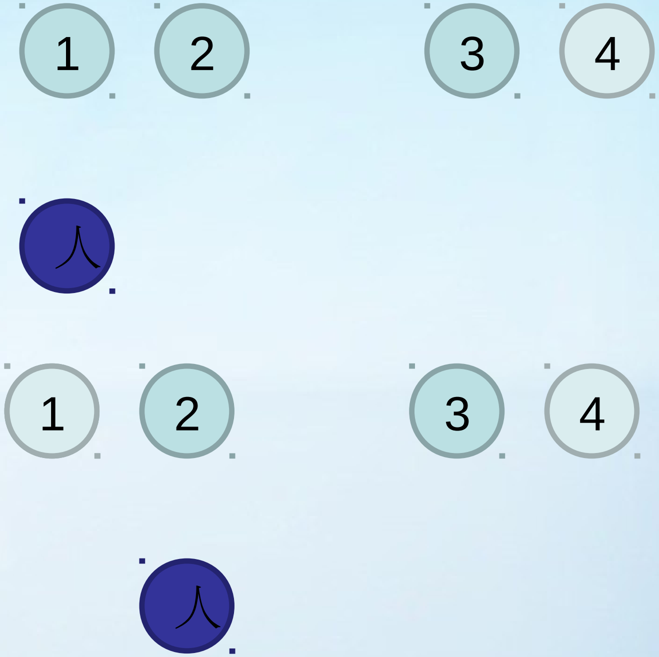
问题一

- 已射的彩蛋集合是不断增大的。
- 用 f1[i][j]、 f2[i][j] 分别表示从起点出发已射落 i 到 j 这一段彩蛋，当前停留在彩蛋 i、 彩蛋 j 的最大得分。



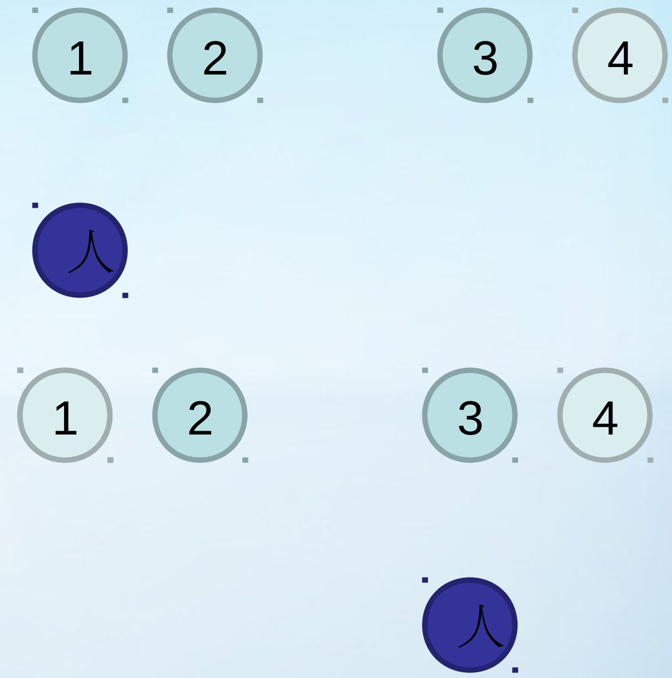
问题一

- 考虑 f1[1][3] ，当前处于位置 1 。
- 可以由 f1[2][3] 沿着 2->1 走来。再射落 1 号彩蛋。



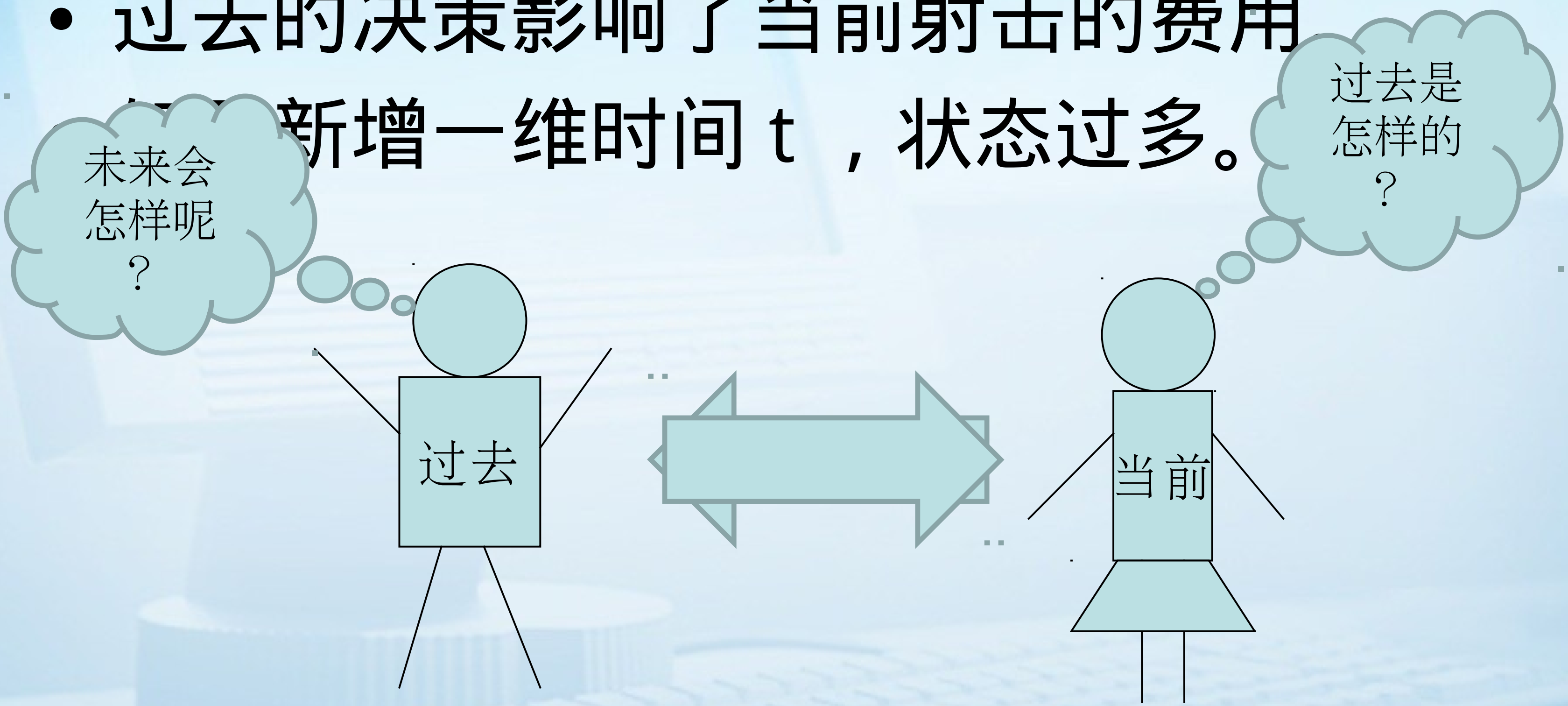
问题一

- 考虑 f1[1][3] ，当前处于位置 1 。
- 可以由 f1[2][3] 沿着 2->1 走来。再射落 1 号彩蛋。
- 可以由 f2[2][3] 沿着 3->1 走来。再射落 1 号彩蛋。

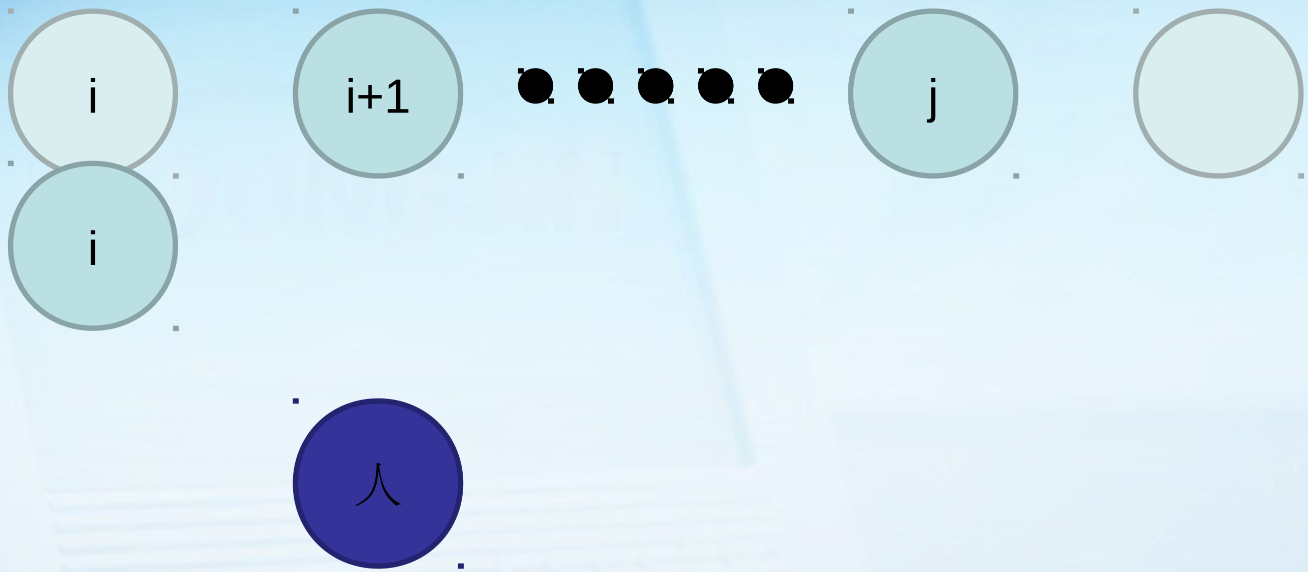


问题一

- 射击 i 的得分是 y_i-t*v_i ，t 为当前时刻。
- 过去的决策影响了当前射击的费用
- …新增一维时间 t ，状态过多。



问题一



- 将 $-t*v_i$ 在射落 i 之前计算。
- 每次移动都要把未来会减少的得分计算在内。
- 射击 i 时再加上 $y_i/1000$ 。

问题一

- 用 w[i][j] 表示除了 i 到 j 这段彩蛋的下落速度和。
- 从 i+1 走到 i ，$f1[i][j]=f1[i+1][j]-(x_{i+1}-x_i)*w[i+1][j]$
- 从 j 走到 i ，$f1[i][j]=f2[i+1][j]-(xj-x_i)*w[i+1][j]$
- $f1[i][j]+=y_i/1000$ 。
- f2[i][j] 的方程类似。
- 答案就是 max(f1[1][n] ，f2[1][n]) 。
- 时间复杂度 $O(n^2)$ 。

小结

- 当前射击的费用受到之前决策的影响。
- 如果新增状态 t 表示过去决策的影响，状态数将会无法承受。
- 改变“时间观”，从过去考虑当前，即从当前考虑未来，把当前决策对未来的影响算作当前决策费用，计算到当前状态。

当前决策对未来“行动”费用的影响只与当前决策有关。

将费用提前计算

当前决策
对未来“行动”
的费用影响
只与当前决策有关

当前决策
对未来“行动”
的费用影响
不只与当前决策有关

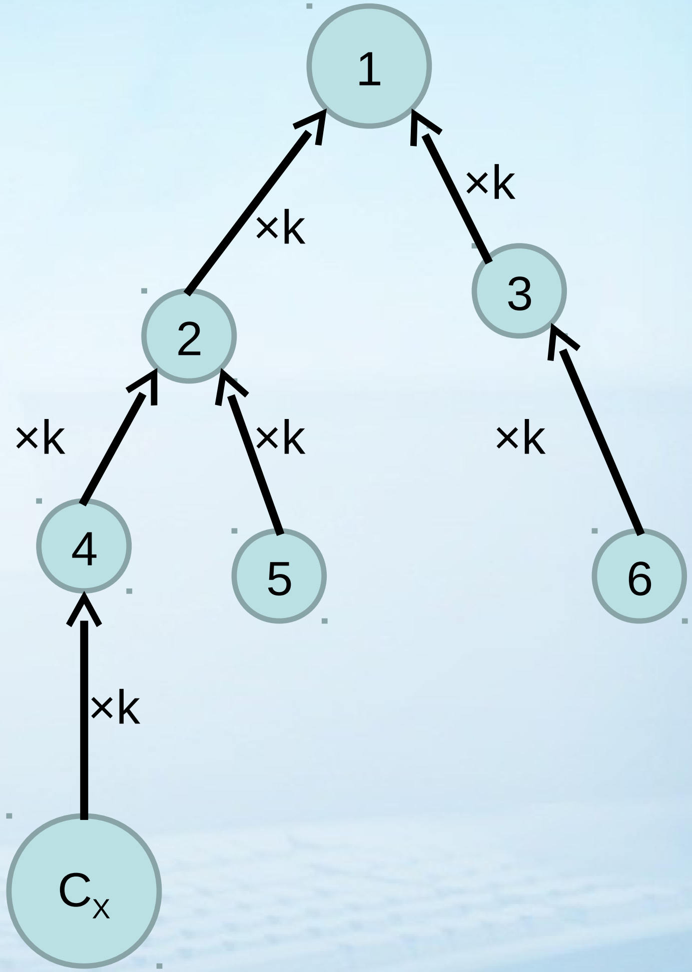
将未来的费用
的一部分视作
当前决策费用
计算在当前的状态中

问题二（改编自NOI2008Trans ）

- n 个点构成一棵树，根为 1 ，每个非根点 i 都有且仅有一个后继点 S_i ，和一个可靠系数 C_i
- 定义点 i 的可靠性为 $R(i)=C_i+k\sum_{j=1}^{w}R(P_j)$ ，其中 K<1 。 P_j 为后继是 i 的点。
- 你可以最多修改 m 个点的后继。目标是最大化 R(1) 。

问题二

- 考虑如何计算 R(1)。
- $R(1)=R_2*k+R_3*k+C_1$
- $=C_1+C_2*k+C_3*k+R_4*k^2+R_5*k^2+R_6*k^2$
- x 对 1 的贡献为 $Cx*k^{d(x,1)}$。

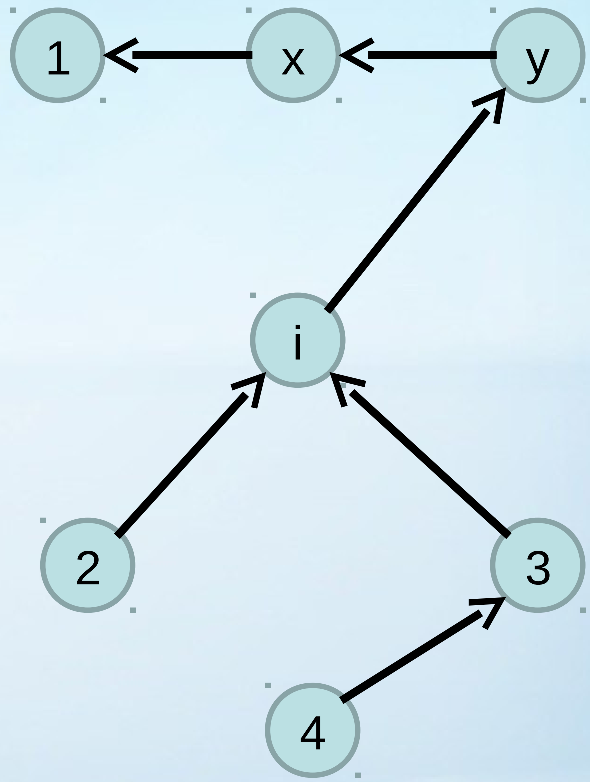


问题二

- R(1)= $\sum_{j=1}^{n} ci \times k^{d(i,1)}$
- 每次修改都应该把点的后继直接设置为1。

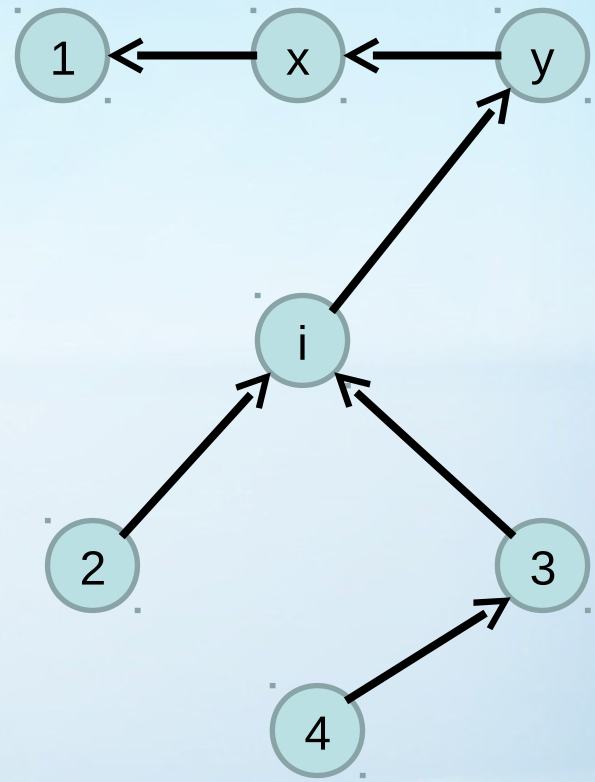
问题二

- 用 f[i][j] 表示以 i 为根的树中，分配了 j 次修改的最大贡献。



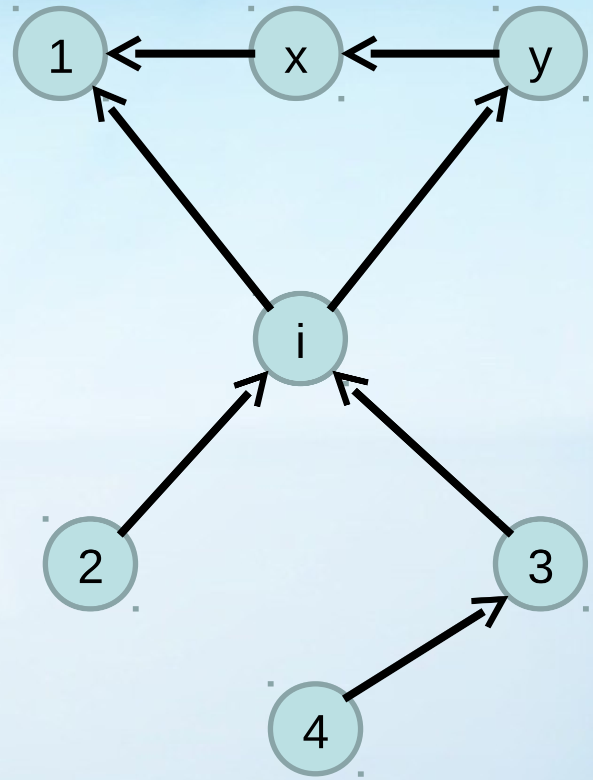
问题二

- Ⅰ. 如果不修改 i 后继
- 把 j 次修改分配到 i 的子树中。
- 然后加上 i 在当前状态下对 1 的贡献，$C_i*k^{d(i,1)}$



问题二

- Ⅱ. 如果修改 i 的后继设置成 1 。
- 2.1 如果 i 的子孙在之前并没修改过。
- i 及 i 的子孙到 1 的距离都减少了 2 。
- 贡献值为修改前的除以 k^2 。

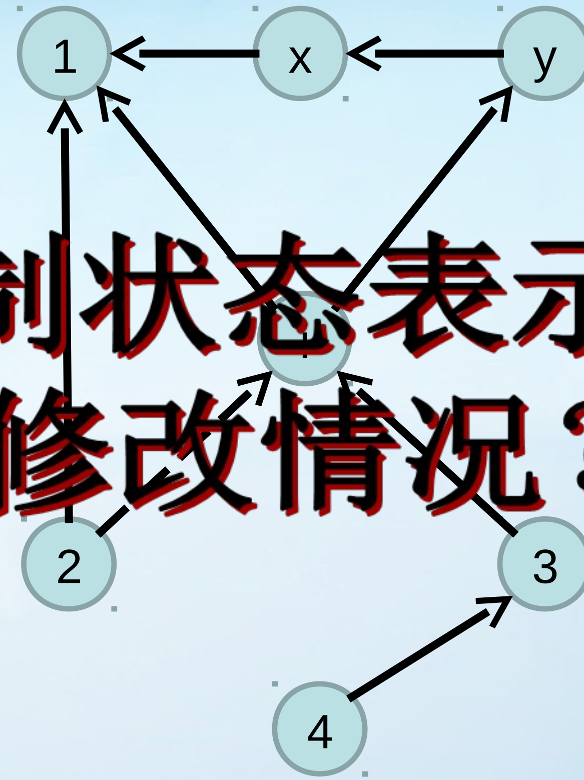


$c2*k^4+c3*k^4+c4*k^5+ci*k^3$

问题二

- Ⅱ. 如果修改 i 的后继设置成 1。
- 2.2 如果点 2 的后继在之前已经被设置成了 1
- 把点 i 的后继修改成点 1 的时候点 2 的距离并没有减少 2。
- 点 2 的决策影响着改变点 i 后继的费用。

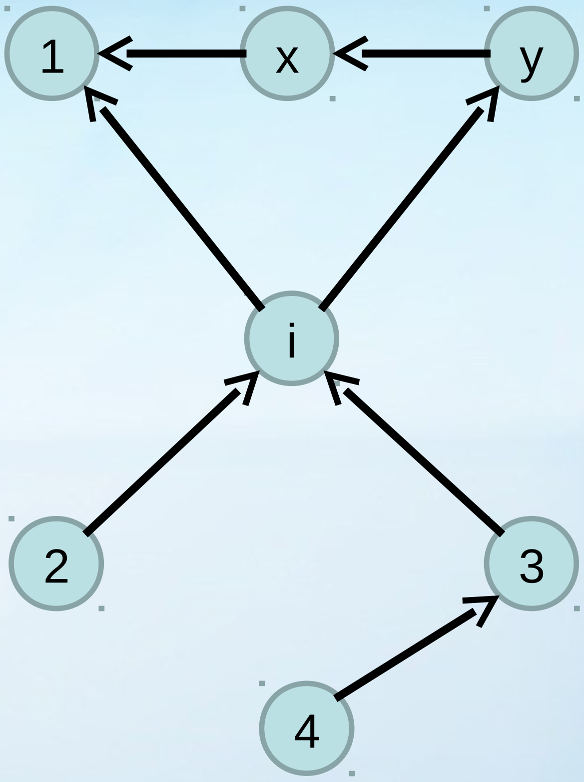
难道用二进制状态表示 i 每个子孙的修改情况？



点 2 的距离一直是 1

问题二

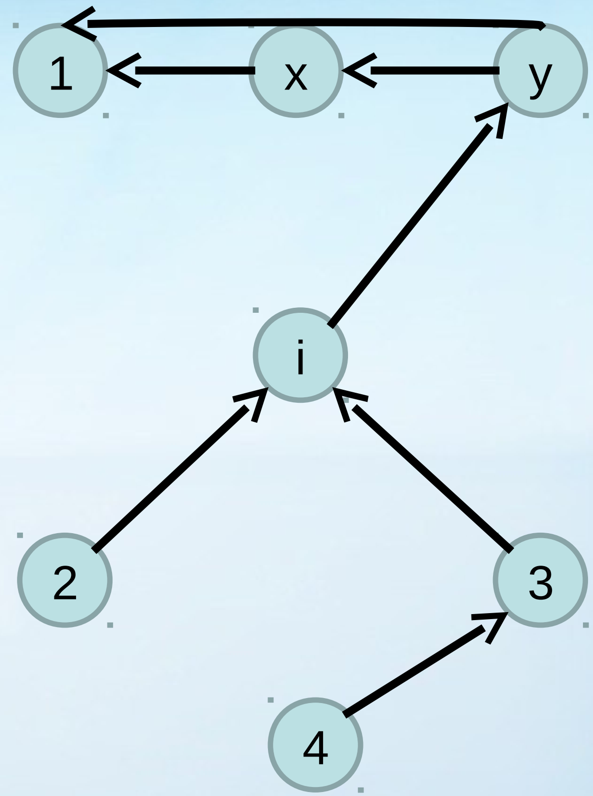
- 把点 2 对修改点 i 时的费用贡献在决策点 2 的时候计算。
- 如果修改的是 i 后继。



点 2 的距离变成 2

问题二

- 把点 2 对修改点 i 时的费用贡献在决策点 2 的时候计算。
- 如果修改的是 y 后继。
- 点 2 的贡献与未来的情况有关。
- 取决于离它最近的被修改的祖先。

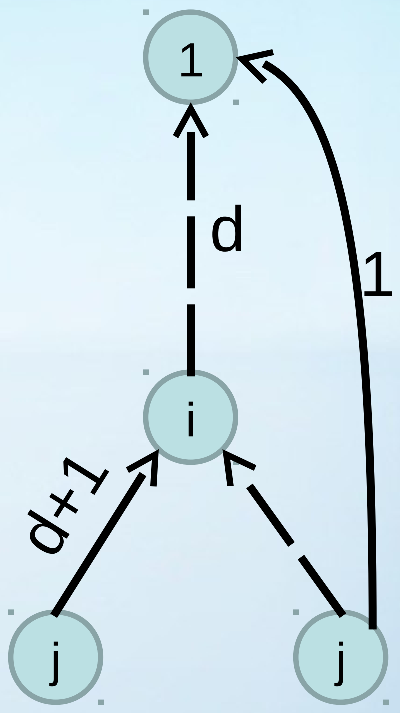


点 2 的距离变成 3

问题二

- 再加一维状态 d ，假设在未来的决策导致点 i 的距离为 d 。
- f[i][j][d] 表示点 i 为根的树中，修改 j 次，且点 i 到 1 的距离为 d 的最大贡献值。
- i 的儿子 j 的距离只能为 d+1 或者 1

g[i][j][d]=max{f[i][j][d+1],f[i][j][1]}



问题二

- 转移 f[i][j][d] 。
- 如果 i 不修改后继，那么 d>1 。
- $f[i][j][d]=\max\{g[s_1][j_1][d]+g[s_2][j_2][d]+\ldots\ldots+g[s_t][j_t][d]\}+c[i]*k^d$
- $j_1+j_2+\ldots j_t=j$ 。 $s_1,s_2\ldots s_t$ 为 i 的 t 个儿子。
- 用 FF[i][j] 表示前 i 个儿子分配了 j 次修改的最大贡献。
- $FF[i][j]=FF[i-1][k]+g[s_i][j-k][d]$ 。

问题二

- 如果修改 i 的后继，那么 d=1。
- $f[i][j][1]=\max\{g[s_1][j_1][1]+g[s_2][j_2][1]+\ldots\ldots+g[s_t][j_t][1]\}+c[i]*k$
- $j_1+j_2+\ldots j_t=j-1$。$s_1,s_2\ldots s_t$ 为 i 的 t 个儿子。
- 时间复杂度是 $O(n^2*m^2)$。

问题二

- 在树上进行动态规划，并且将本应该在点 i 计算的费用转化到点 i 的子孙决策时计算。
- 在规划 i 的子孙 j 时假设未来的情况，并以不同状态记录下来。
- 就好比是沿着不同的道路把费用传递到未来，等到规划点 i 时直接使用过去假设的决策。
- IOI2005 《河流》、NOI2006 《网络收费》

将费用提前计算

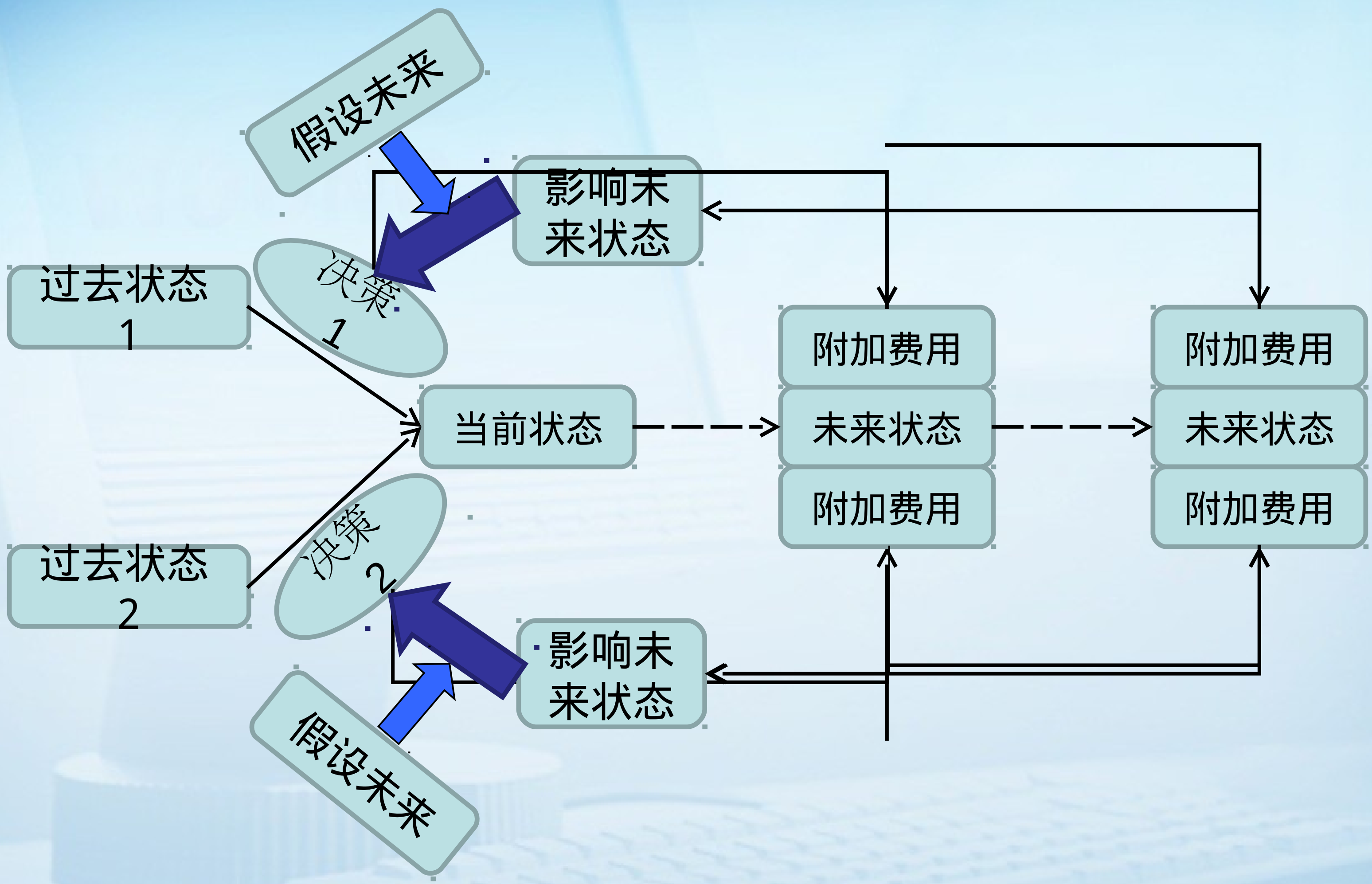
当前决策
对未来“行动”
的费用影响
只与当前决策有关

当前决策
对未来“行动”
的费用影响
不只与当前决策有关

将未来的费用
的一部分视作
当前决策费用
计算在当前的状态中

新增状态
假设未来

总结



假设未来
影响未来状态
过去状态1
决策1
当前状态
附加费用
未来状态
附加费用
附加费用
未来状态
附加费用
过去状态2
决策2
影响未来状态
假设未来

谢谢！