问题中的变与不变

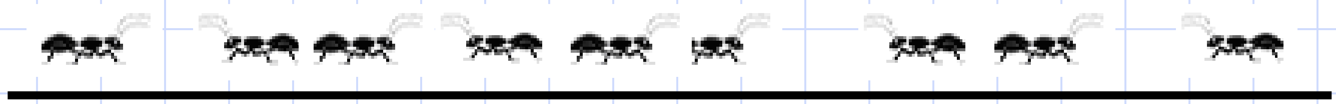
长沙市雅礼中学　　　陈雪

引言

- 对变量进行操作是信息学中的常见问题。
- 如果能找到变量之间的关系，把变量转化成不变量，那么算法的效率就将得到质的提升。

[例一]蚂蚁

- 一条树枝上有 N 只蚂蚁。给出他们的位置，如何安排蚂蚁初始的方向使得全部蚂蚁掉落的时间最早或最晚。



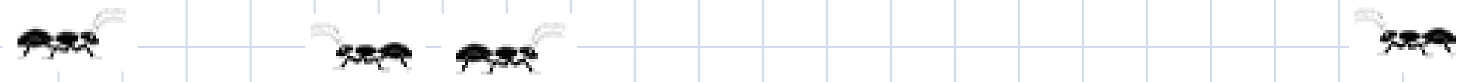
- 最多 1,000,000 只蚂蚁。

感性认识

- 左边的蚂蚁向左端走，右边的蚂蚁向右端走。
- 如何使全部掉落的时间最晚？
- 猜想：让左边的蚂蚁向右端走，同时右边的蚂蚁向左端走。

理性分析

- 直接证明猜想难度比较大。
- 看一般的情况：



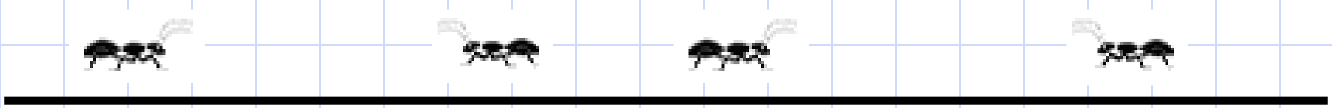
- 纪录 2 只蚂蚁的有用信息：速度 V_i 和位置 W_i。
- 设 $U=\{(V_a,W_a),(V_b,W_b)\}$。
- 在蚂蚁相遇前后，集合都为 $U=\{(+1,W),(-1,W)\}$

一个集合内蚂蚁相遇

集合不变

继续分析

- 另 $U=\{(V_1.W_1),(V_2.W_2)\dots(V_n.W_n)\}$
- 任何两只属于集合 U 内的蚂蚁相遇之后，集合 U 不变。
- 集合 U 只随着时间的变化而变化。
- $\{Ans_i\}$={ 蚂蚁 I 按起始方向走到端点 }



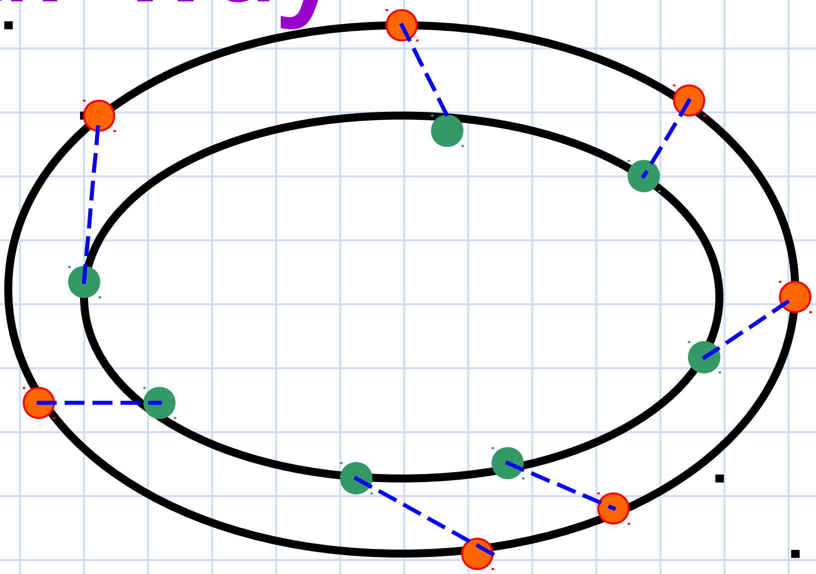
继续分析

- 回到原问题
  - 最早时间 = 即左边蚂蚁向左走，右边蚂蚁向右走
  - 最迟时间 = 即左边蚂蚁向左走，右边蚂蚁向左走
- 猜想得证！！
- 最终时间复杂度 O(n)。

小结

- 分析题目的特殊特点：
  - 1. 原路返回
  - 2. 速度相同
- 将速度变量固定，成为常量。
- 问题得到了简化。

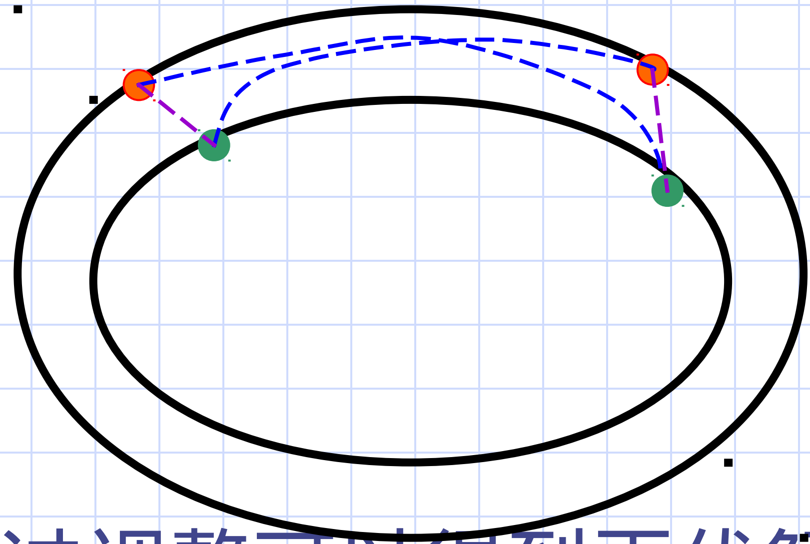
[例二]circular way



- 安排一种方案
- 使得总代价最小
- $n \le 50000$
- 最小权匹配！$O(n^4)$
- 无法满足题目要求！！
- 设 A 类点顺时针排序的坐标为 $A_1, A_2 .. A_n$
- 设 B 类点顺时针排序的坐标为 $B_1, B_2 .. B_n$

优化算法

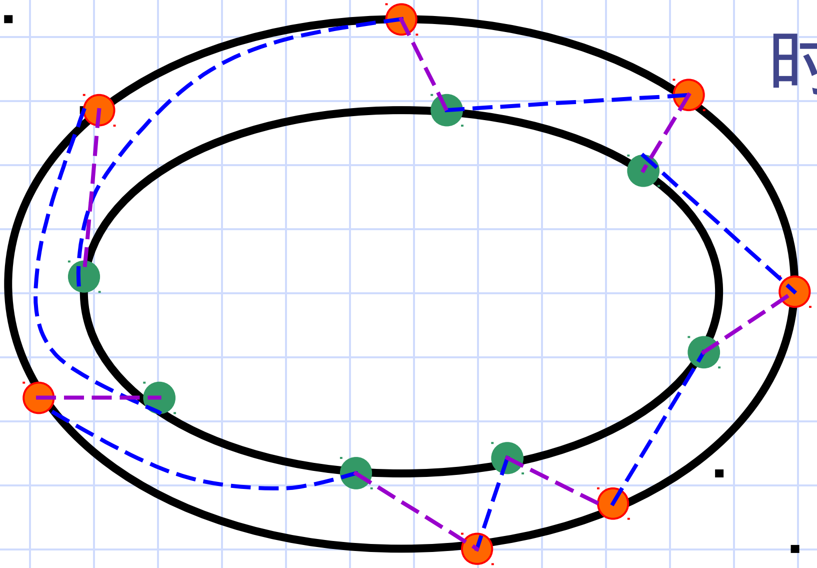
- 最小权匹配必然满足下面的性质：
  两条匹配边不会交叉



- 通过调整可以得到更优解

算法二

- 1. 枚举和 A_1 匹配的点 B_k。
- 2. 然后按顺序一一求出和 A_i 匹配的点。
- 3. 最后统计当前的代价和，更新答案。



时间复杂度 $O(n^2)$

继续分析

- 另 C_i 表示当前 A_i 与它匹配的 B_j 的距离。
- 当前的代价 sum=ΣC_i
- C_i 随着我们枚举 k 而变化。

找出 Ci 中蕴含的不变
？

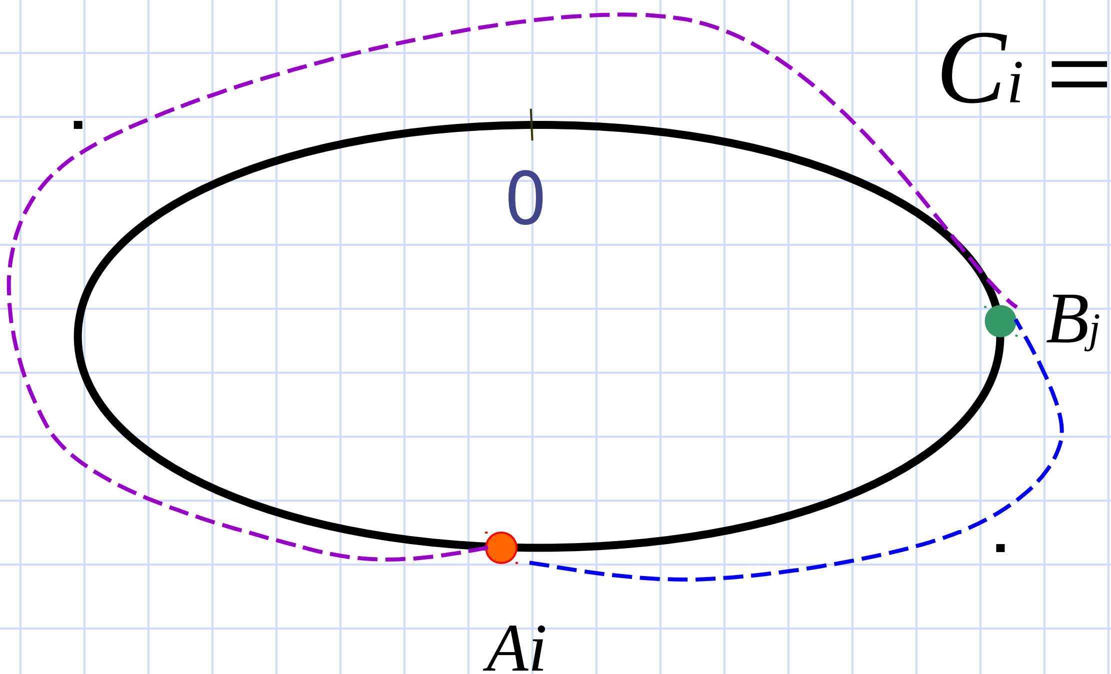
观察 C_i

- 由于 A_i 到 B_j 有顺时针，逆时针 2 种走法。
- $C_i = \mathrm{Min}\{|A_i - B_j|, L - |A_i - B_j|\}$
- C_i 只同 A_i 和 B_j 有关。
- 不妨把 C_i 看成 A_i 和 B_j 的函数。
- 设 $C_i = f(A_i) + g(B_j)$

讨论 C_i

从 B_j 顺时针走到 Ai

$$C_i = A_i - B_j$$



$$B_j \le A_i \le B_j + \frac{L}{2}$$

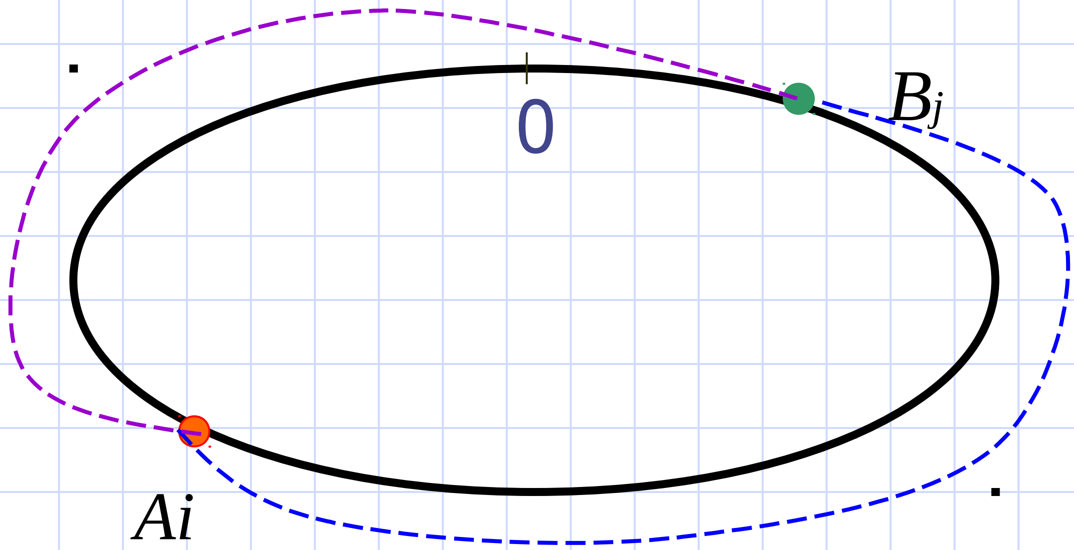
$$f(A_i) = A_i$$

$$g(B_j) = -B_j$$

讨论 C_i

从 B_j逆时针走到 Ai

$$C_i = L - A_i + B_j$$



$$f(A_i) = L - A_i$$

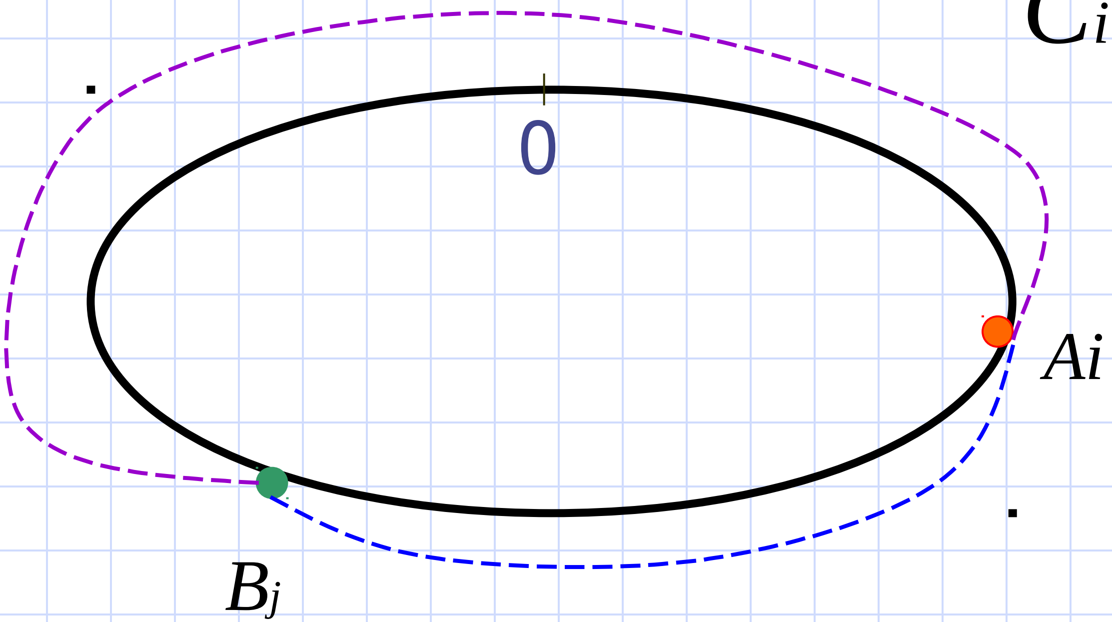
$$g(B_j) = B_j$$

$$B_j - \frac{L}{2} \le A_i$$

讨论 C_i

从Ai顺时针走到 B_j

$$C_i = B_j - A_i$$



$$f(A_i) = -A_i$$

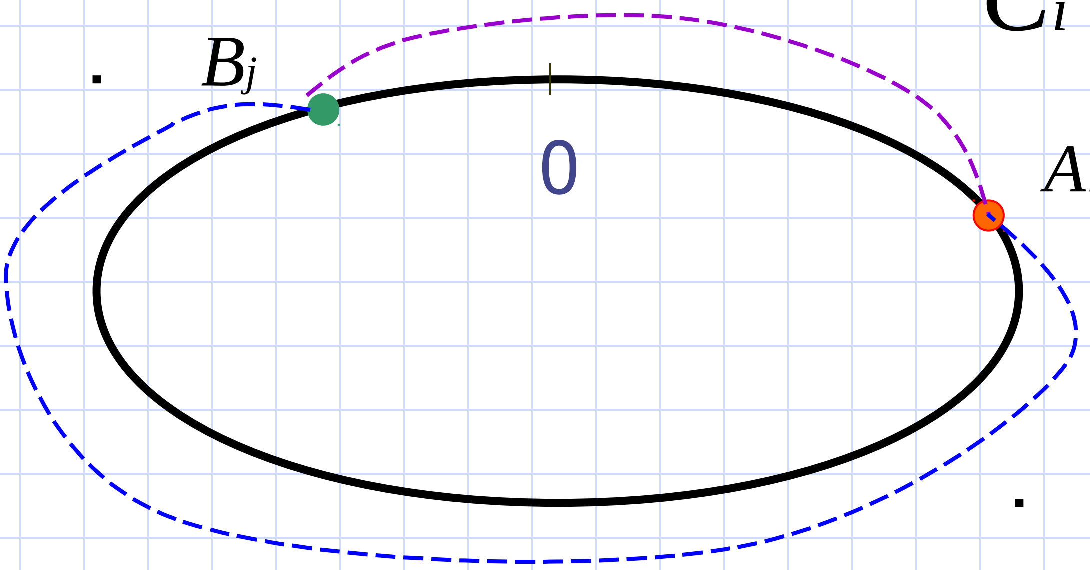
$$g(B_j) = B_j$$

$$A_i \le B_j \le A_i + \frac{L}{2}$$

讨论 C_i

从 A_i 逆时针走到 B_j

$$C_i = L - B_j + A_i$$



$$f(A_i) = A_i$$

$$g(B_j) = L - B_j$$

$$A_i + \frac{L}{2} \le B_j$$

继续分析

- 根据 A_i,B_i 的有序性，得到 $f(A_i)$ 的每种情况对应的 B_j 都是连续的一段。
- $f(A_i)$ 在枚举和 A_1 匹配的点 B_k 的过程中只会发生 4 次变化。
- 从 C_i 的 N 次变化
- $f(A_i),g(B_i)$ 的 4 次变化

回到原问题

$f'(Ai)$ 表示上一时刻 $f(Ai)$

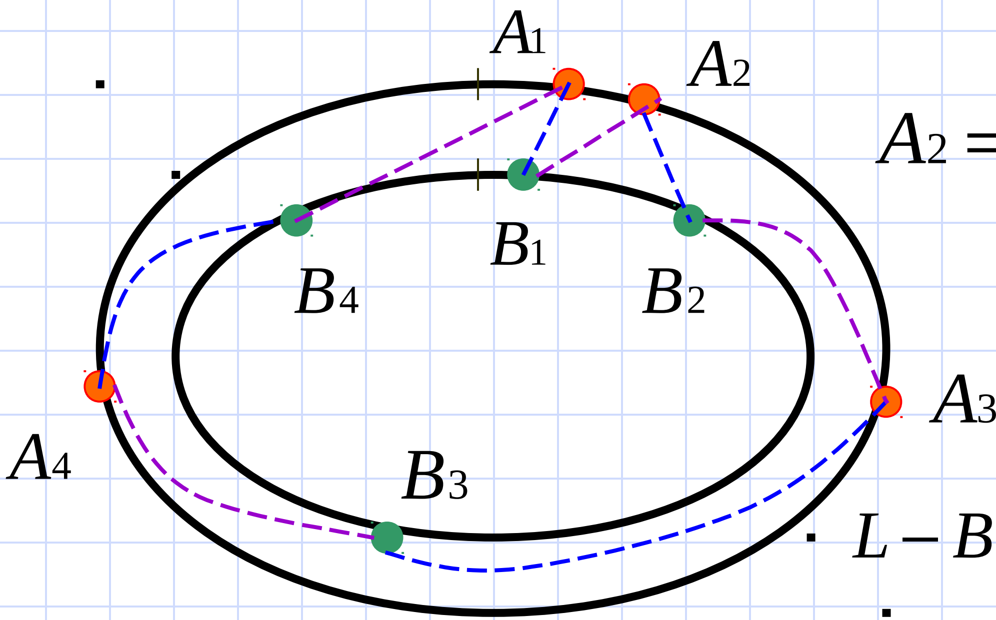
$f(Ai)$ 表示当前 $f(Ai)$

- 当前的代价 sum=$\Sigma C_i=\Sigma f(A_i)+\Sigma g(B_i)$
- A_1 匹配 B_k ，sum 已经求出。
- 当 A_1 匹配 B_{k+1}，更新 $f(A_i),g(B_i)$,sum 。
- sum=sum’$-f'(A_i)+f(A_i)-g'(B_i)+g(B_i)$
- 把一个 $-f'(A_i)+f(A_i)$ 和 $-g'(B_i)+g(B_i)$ 看成一次事件

举例

- A_1 匹配 B_4 ，有

$$Sum = A_1 + L - B_4 + A_2 - B_1 + A_3 - B_2 + A_4 - B_3$$



$A_2 => -A_2$ 看成一次事件

$L - B_4 => B_4$ 看成一次事件

- A_1 匹配 B_1 ，有

$$Sum = A_1 - B_1 - A_2 + B_2 - A_3 + B_3 - A_4 + B_4$$

分析

- 事件总数 ≤ 8n

  知道下一时刻 k+1 会发生的事件

  更新 sum

  得到 $f(Ai)$4 种情况对应的 Bj 范围

  每件事件发生时间

- 根据 A_i,B_i 的有序性，预处理用指针即可

小结

- 算法流程如下
  - [1] 将 A_i, B_i 排序
  - [2] 预处理求出每个事件发生时间
  - [3] 枚举和 A_1 匹配的点 B_k, 更新 sum 。
  - [4] 输出
- 时间复杂度
  - O(排序 + 事件总数)=O(nlgn)

小结

- 将变化的 C_i 转化成“不变”的 $f(A_i)$ 和 $g(B_i)$
- 减少了操作规模
- 问题迎刃而解

总结

- [例一] 蚂蚁
- 以不变应万变
- [例二]circular way
- 将变量的操作规模缩小

把握问题的本质

变 → 不变

仔细分析，大胆猜想

问题迎刃而解

- 参考文献：
- [1] 刘汝佳，黄亮．算法艺术与信息学竞赛． 清华大学出版社.2003
- [2] zju online judge 2376 ants. http://acm.zju.edu.cn/show_problem.php?pid=2376
- [3] sgu online judge 313 circular railway. http://acm.sgu.ru/problem.php?contest=0&problem=313