从一类单调性问题看算法的优化

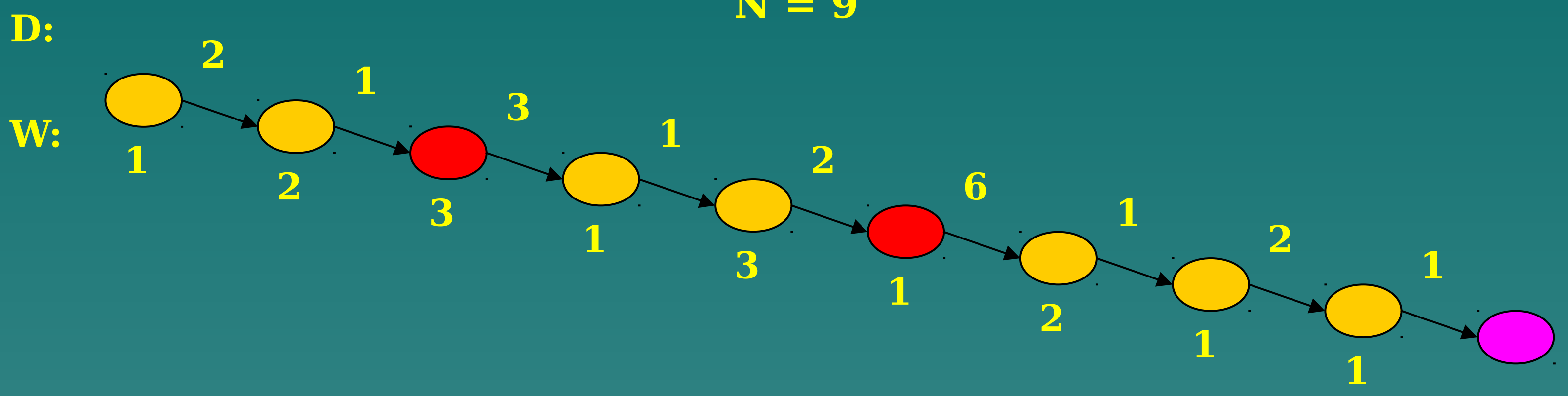
长沙市一中 汤泽

充分挖掘数据关系，灵活运用数据结构，往
往是构造出优秀算法的关键因素

- 一般队列：一端插入，另一端删除
- 特殊队列：尾端插入，两端删除
- 单调性：帮助优化一类单调性问题

问题 1　锯木厂选址

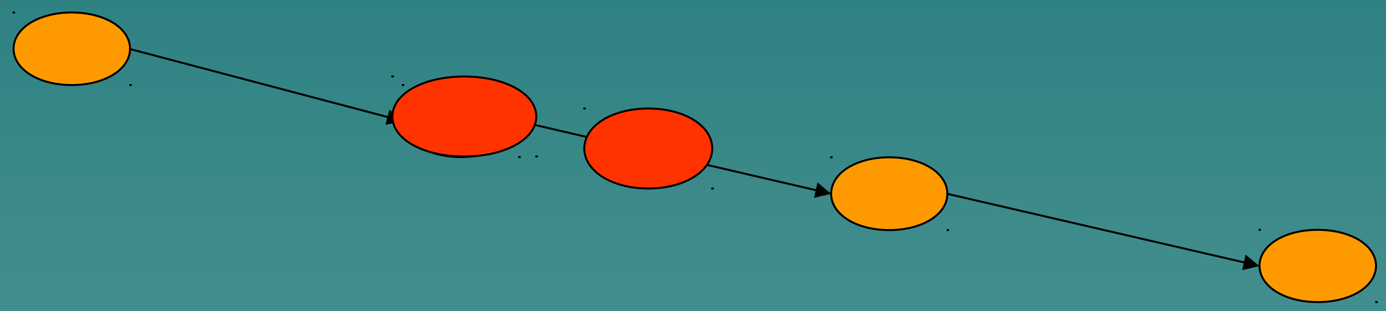
N = 9



2<=N<=20000,1<=Wi<=10000,1<=Di<=10000

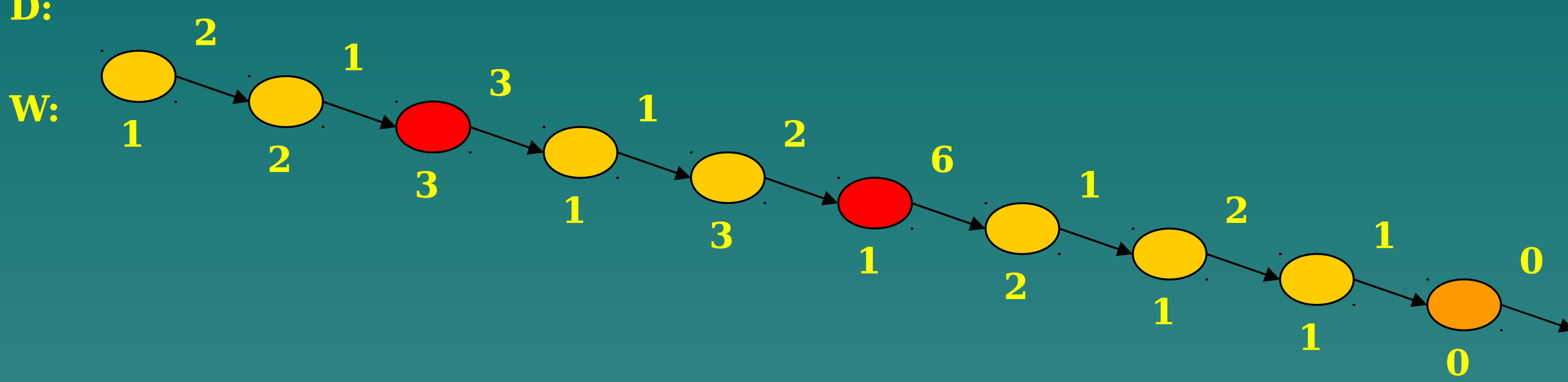
问题 1　锯木厂选址

最优方案中，锯木厂必定建在有树的位置



问题 1　锯木厂选址

N = 9



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sd	0	2	3	6	7	9	15	16	18	19
Sw	1	3	6	7	10	11	13	14	15	15

问题 1　锯木厂选址

分析：

- **C[I]:** 在第 I 棵树处建立一个锯木厂，并且将第 1 到第 I 棵树全部运到这个锯木厂所需的费用

  C[I]=C[I-1]+Sw[I-1]*D[I-1]，C[0]=0

- **W[J,I]:** 在第 I 棵树处建立一个锯木厂，并且将第 J+1 到第 I 棵树全部运往这个锯木厂的费用

  W[J,I]=C[I]-C[J]-Sw[J]* (Sd[I]-Sd[J])

  当I时 J ，W[J,I]=0

问题 1　锯木厂选址

分析：

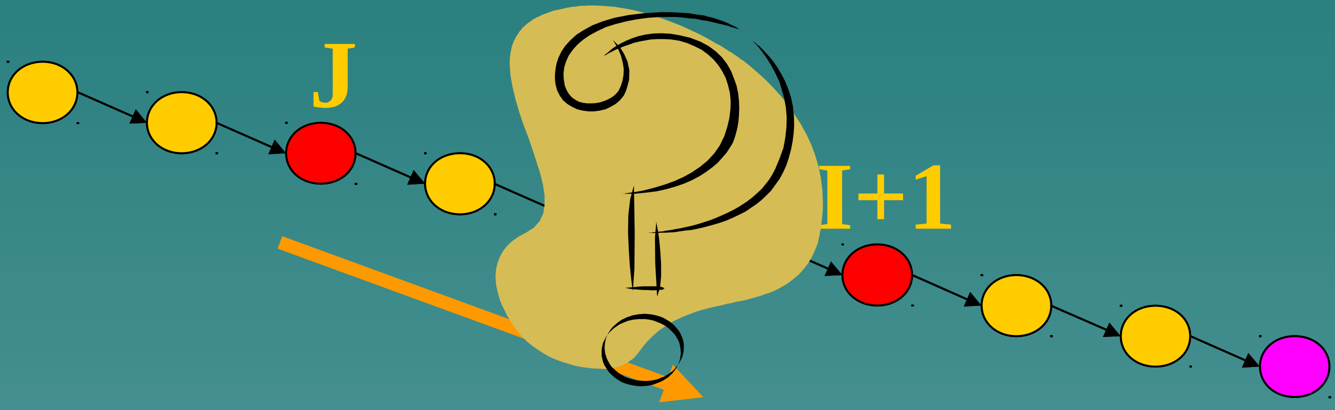
F[I] 表示在第 **I** 棵树处建立第二个锯木厂的最小费用，则：

$$f[i]=\min_{1\le=j\le i-1}\{c[j]+w[j,i]+w[i,n+1]\}$$

这个算法的时间复杂度为 **O(N^2)**

问题 1　锯木厂选址

$$f[i]=\min_{1\le j\le i-1}\{c[j]+w[j,i]+w[i,n+1]\}$$



问题 1　锯木厂选址

证明：

- 令 **S[K,I]** 表示决策变量取 **K** 时 **F[I]** 的值

  S[K,I]=C[K]+W[K,I]+W[I,N+1]

  W[J,I]=C[I]-C[J]-Sw[J]* (Sd[I]-Sd[J])

- 设 **K1<K2<I, S[K1,I]-S[K2,I]<0**

  (Sw[K1]*Sd[K1]-Sw[K2]*Sd[K2]) /

  (Sw[K1]-Sw[K2]) > Sd[I]

问题 1　锯木厂选址

证明：

- 设 K1<K2<I, S[K1,I]-S[K2,I]<0

  (Sw[K1]*Sd[K1]-Sw[K2]*Sd[K2]) / (Sw[K1]-Sw[K2]) > Sd[I]

因此决策是单调的

- 令 g[K1,K2]= 上面不等式的左边

  S[k1,I] - S[k2,I]<0 ⇔ g[K1,K2]>Sd[I]

!

- 因为 D[K] ≥ 0, 因此 Sd 序列不下降

  Sd[I']>g[K1,K2]>Sd[I]　　(I<I')

问题 1　锯木厂选址

分析：

维护一个特殊队列 $K, K_1<K_2<\ldots<K_n$,

$g[K_1,K_2]<g[K_2,K_3]<\ldots g[K_{n-1},K_n]$:

- 计算状态 F[I] 前，若 $g[K_1,K_2]<=Sd[I]$, 表示决策 K_1 不比 K_2 优，删除 K_1, 重复该步骤

问题 1　锯木厂选址

分析：

- 计算 $F[I]$, $F[I]=C[K_1]+W[K_1,I]+W[I,n+1]$
- 若 $g[K_{n-1},K_n]>g[K_n,I]$,

  $Sd[I']>g[K_{n-1},K_n]>g[K_n,I]$

  K_n 比 K_{n-1} 优之前 I 就将比 K_n 优，删除 K_n, 重复该步骤，最后将 I 插入队列

算法总复杂度 O(N)

问题 2　旅行问题

问题描述：

一个环形跑道上有 n 个加油站，按顺时针编号为 1 到 n($3<n<10^6$)

第 i 号加油站有 P_i($0<=P_i<10^9$) 升汽油，每升汽油可供行驶一千米

第 i 号车站到其下一站的距离为 D_i ($0<d_i<10^9$)

问题 2　旅行问题

一个例子：

N=5

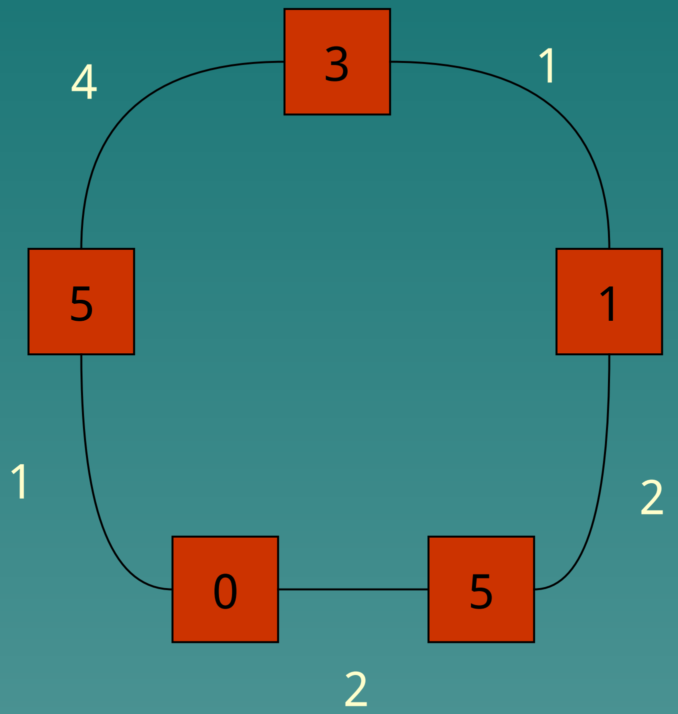
P[1]=3; D[1]=1

P[2]=1; D[2]=2

P[3]=5; D[3]=2

P[4]=0; D[4]=1

P[5]=5; D[5]=4



问题 2　旅行问题

一个例子：

N=5

P[1]=3; D[1]=1

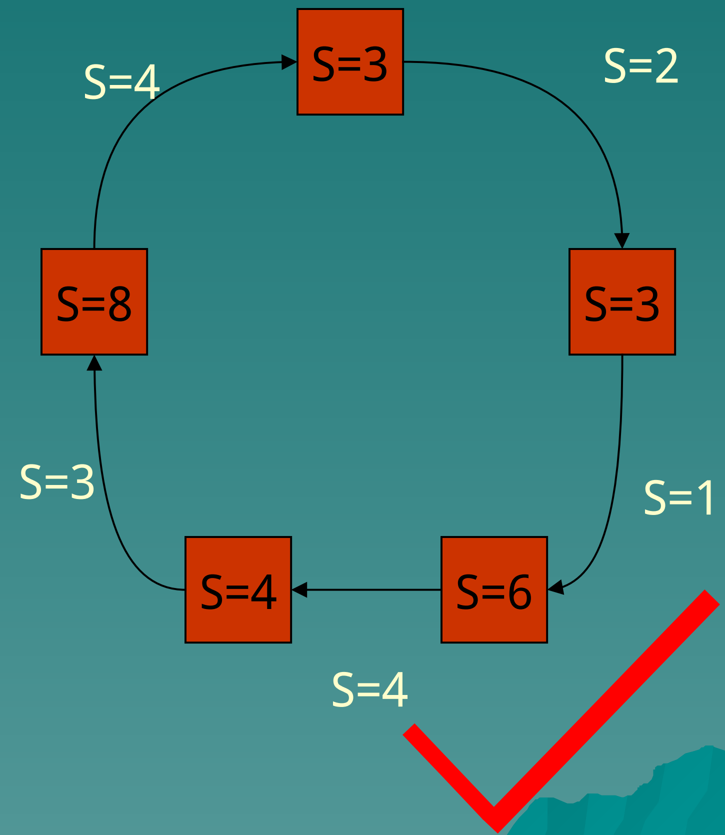
P[2]=1; D[2]=2

P[3]=5; D[3]=2

P[4]=0; D[4]=1

P[5]=5; D[5]=4

以 1 号加油站为起点



问题 2　旅行问题

以 2 号加油站为起点

一个例子：

N=5

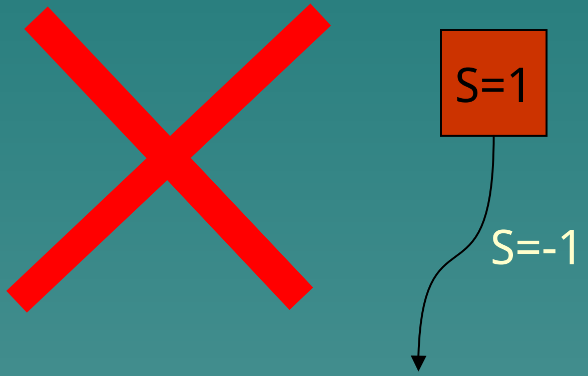
P[1]=3; D[1]=1

P[2]=1; D[2]=2

P[3]=5; D[3]=2

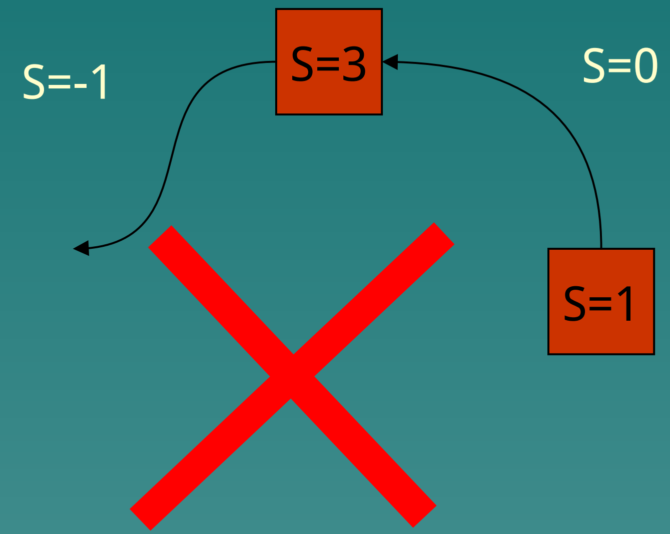
P[4]=0; D[4]=1

P[5]=5; D[5]=4



问题 2　旅行问题

以 2 号加油站为起点



一个例子：

N=5

P[1]=3; D[1]=1

P[2]=1; D[2]=2

P[3]=5; D[3]=2

P[4]=0; D[4]=1

P[5]=5; D[5]=4

问题 2　旅行问题

一个例子：

N=5

P[1]=3; D[1]=1

P[2]=1; D[2]=2

P[3]=5; D[3]=2

P[4]=0; D[4]=1

P[5]=5; D[5]=4

以 1 、 3 、 5 号加油站为起点有办法周游一圈

算法 一

分析：

- 直接模拟刚刚的演算过程

- 总的时间复杂度为 O(N^2)

但是 N 最大可以达到 10^6!

算法　二

分析：

- 假定只能按顺时针方向行驶．
- 令 A[I]=P[I]-D[I]
  A[I+N]=A[I]
  A[0]=0
- 设 SA[I] 表示 A 序列中前 I 项的和

算法　二

	1	2	3	4	5
P	3	1	5	0	5
D	1	2	2	1	4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0	2	-1	3	-1	1	2	-1	3	-1
sa	0	2	1	4	3	4	6	5	8	7

算法 二

分析：

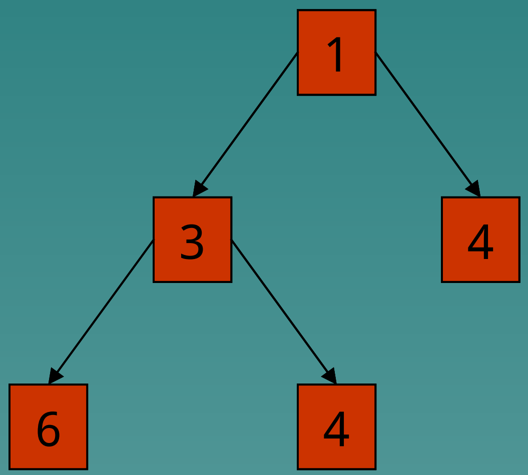
- SA[I] 到 SA[I+N-1] 都不小于 SA[I-1]

- SA[I] 到 SA[I+N-1] 中的最小数不小于 SA[I-1]

求 N 个数中的最小数，很自然地想到了堆！

算法 二

	0	1	2	3	4	5	6
A	0	2	-1	3	-1	1	2
Sa	0	2	1	4	3	4	6



- 堆中不超过 N 个元素
- 2N 次插入操作
- 2N 次删除操作
- N 次取堆顶元素
- 总复杂度 $O(N\log_2 N)$

算法　三

SA: 0 2 1 4 3 4 2 1 4 3

分析：

- 给定一个序列 SA 和 N 个区间
- 求出每个区间中的最小值，对其作相应判定

  这是一个标准的 RMQ 问题！

- 时间复杂度降为 O(N)

算法 四

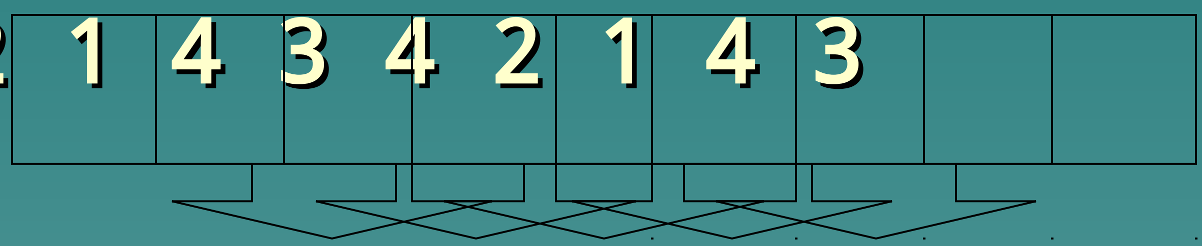
分析：

给定的 N 个区间不存在包含关系，满足单调性！

同样满足单调性？

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sa: 0 2 1 4 3 4 2 1 4 3



K: 2 2 7 7 7

算法　四

预处理：

- 维护一个特殊队列 K, $K_1<K_2<\ldots<K_n$

  $Sa[k_1]<Sa[k_2]<\ldots Sa[K_n]$

- 将 1,2...n-1 依次插入队列 K. 插入前，如果 $Sa[i]<=Sa[k_n]$, 将 K_n 删除 . 反复该步骤，最后将 i 插入队列

算法　四

求解并更新 K:

- 若 K_1=i-1, 将 K_1 删除出队列
- 插入新位置号 i+n-1,

  若 Sa[K_n]>=Sa[i+n-1], 删除 K_n, 重复这个步骤, 最后将 i+n-1 作为 K_n 插入队列
- 若 Sa[k_1]>=Sa[i-1], 表示从 i 号加油站出发可以周游一周
- 总复杂度 O(N)

四个算法比较

	空间复杂度	时间复杂度	实现难度
算法一	O(N)	O(N^2)	很容易
算法二	O(N)	$O(N\log_2 N)$	简单
算法三	O(N)	O(N)	难
算法四	O(N)	O(N)	简单

总　结

通过充分挖掘数据关系，发现隐含的单调性，以较低的编程复杂度成功地实现了算法的优化

- 注意问题的特殊性
- 学会灵活变通

总　结

善于发现

勇于创新