母函数的性质及应用

2009 国家集训队论文

毛杰明

南京外国语学校

Email:maojm517@163.com

邮政编码： 210008

母函数的性质

- [定义]
- 母函数是用于对应一个无穷序列的幂级数，一般来说母函数有形式：

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} g_n x^n$$

$$\Updownarrow$$

$$< g_0, g_1, g_2, \cdots >$$

母函数的性质

- 举一个例子：

$$<1,1,1,1,1\cdots> \Longleftrightarrow G(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n\geq 0}x^n$$

$$\Big\Updownarrow$$

闭形式 $\dfrac{1}{1-x}$

不考虑收敛问题！

母函数的性质

- [基本操作]
- 1． 放缩:

$$< cg_0, cg_1, cg_2, \cdots >$$

$$\Updownarrow$$

$$cG(x) = cg_0 + cg_1 x + cg_2 x^2 + \cdots$$

母函数的性质

❖ 2． 加减法：

$$< f_0 \pm g_0, f_1 \pm g_1, f_2 \pm g_2, \cdots >$$

$$\Updownarrow$$

$$F(x) \pm G(x) = (f_0 \pm g_0) + (f_1 \pm g_1)x + (f_2 \pm g_2)x^2 + \cdots$$

母函数的性质

❖ 3．右移：

$$<\underbrace{0,\cdots,0}_{k个0},g_0,g_1,g_2,\cdots>$$

$$\Updownarrow$$

$$x^kG(x)=g_0x^k+g_1x^{k+1}+g_2x^{k+2}+\cdots$$

母函数的性质

- 4. 求导：

$$G'(x) = g_1 + 2g_2 x + 3g_3 x^2 + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$< g_1, 2g_2, 3g_3, \cdots >$$

母函数的性质

- 举一个求导的例子：

$$G(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=G'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \Longleftrightarrow <1,2,3,4,5,\cdots>$$

母函数的性质

- 5．卷积规则：

$$H(x)=G(x)\cdot F(x)=(g_0+g_1x+g_2x^2+\cdots)(f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots)$$

$$h_n=g_0f_n+g_1f_{n-1}+g_2f_{n-2}+\cdots+g_nf_0$$

组合问题

母函数的性质

- [简单的序列所对应的母函数]

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)^m}=\underbrace{\frac{1}{1-x}\times\cdots\frac{1}{1-x}}_{m\text{个}}=(1+x+x^2+\cdots)^m$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$$

不定方程非负整数解的个数

$$g_n=C_{m+n-1}^{m-1}$$

$$\frac{1}{(1-x)^m}\Longleftrightarrow<1,C_m^{m-1},C_{m+1}^{m-1},C_{m+2}^{m-1},\cdots>$$

母函数的应用

- [例 1] 原创题
- [例 3]Sweets

母函数的应用

- [例 1] 小明出门旅游，需要带一些食物，包括薯片，巧克力，矿泉水，汉堡，牛奶和糖果。经过估计，他觉得带 $n(n<=10^{100})$ 件食物比较合适，但他还有一些癖好：
  - 最多带 1 个汉堡
  - 巧克力的块数是 5 的倍数
  - 最多带 4 瓶矿泉水
  - 薯片的包数是一个偶数
  - 最多带 3 罐牛奶
  - 糖果的个数是 4 的倍数
- 问你小明有多少种方式来准备这次旅行所带的食物。

母函数的应用

- 汉堡 $h(x) = 1 + x$
- 巧克力 $c(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \dfrac{1}{1-x^5}$
- 薯片 $p(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$
- 矿泉水 $w(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \dfrac{1-x^5}{1-x}$
- 牛奶 $m(x) = 1 + x + x^2 + x^3 = \dfrac{1-x^4}{1-x}$
- 糖果 $s(x) = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} \cdots = \dfrac{1}{1-x^4}$

母函数的应用

- 运用卷积规则

$$h(x)c(x)p(x)w(x)m(x)s(x)$$

$$=(1+x)\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^2}\frac{1-x^5}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x}\frac{1}{1-x^4}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$=1+C_3^2x+C_4^2x^2+C_5^2x^3+\cdots$$

$$C_{n+2}^2$$

母函数的性质

- [指数型母函数]

$< g_n >$ 复杂 $\boxed{< \frac{g_n}{n!} >}$ 简单！

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} \Longleftrightarrow < g_0, g_1, g_2, \cdots >$$

母函数的性质

- 最基本的指数型母函数

$$<1,1,1,1,\cdots> \Longleftrightarrow G(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Taylor 公式

$$\Updownarrow$$

名称来源 e^x

母函数的性质

- 乘积

$$G(x) = g_0 + \frac{g_1}{1!}x + \frac{g_2}{2!}x^2 + \cdots \qquad F(x) = f_0 + \frac{f_1}{1!}x + \frac{f_2}{2!}x^2 + \cdots$$

$$H(x) = G(x)\cdot F(x) = (g_0 + \frac{g_1}{1!}x + \frac{g_2}{2!}x^2 + \cdots)(f_0 + \frac{f_1}{1!}x + \frac{f_2}{2!}x^2 + \cdots)$$

$$= \sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{k\ge 0}(\frac{g_k}{k!}\times\frac{f_{n-k}}{(n-k)!}\times n!) = \sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{k\ge 0}(g_k\times f_{n-k}\times \boxed{C_n^k})$$

排列问题！

母函数的应用

- [例 2]Chocolate
- [例 4] 证明题

母函数的性质

- [母函数型 Pólya 定理]
- （ Pólya 定理）设 G 是 n 个对象的一个置换群，用 m 种颜色涂染这 n 个对象，则不同染色方案数为

$$l = \frac{1}{|G|}[m^{c(a_1)} + m^{c(a_2)} + \cdots + m^{c(a_g)}]$$

不够具体！

母函数的性质

- 把 m 种颜色具体表示出来！

$$P=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{g}(b_1+b_2+\cdots+b_m)^{c_1(a_i)}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2)^{c_2(a_i)}\cdots(b_1^n+b_2^n+\cdots+b_m^n)^{c_n(a_i)}$$

母函数型 Pólya 定理

母函数的性质

- 一个具体的例子：有 4 颗珠子绕成一圈，用两种颜色染色，旋转后重叠的方案算一种。

置换群 G：

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4),(v_2\ v_3\ v_4\ v_1),(v_1\ v_3)(v_2\ v_4),(v_4\ v_1\ v_2\ v_3)$$

Pólya 定理

$$l=\frac{1}{4}(2^4+2+2^2+2)=6$$

母函数的性质

- 母函数型 Pólya 定理得具体的方案

$$P=\frac{1}{4}[(b+w)^4+(b^4+w^4)+(b^2+w^2)^2+(b^4+w^4)]$$

$$=b^4+b^3w+2b^2w^2+bw^3+w^4$$

2 黑 2 白的有两种， 4 黑， 4 白， 3 黑 1 白， 3 白 1 黑的都只有 1 种

母函数的应用

- [例 5] IOI2003 国家集训队难题讨论活动 0015 Polygon

总结

离散数学 ⟷ 连续数学

母函数

- 解决问题
- 优化算法
- 证明命题

参考文献

- [1] 吴文虎，王建德 .《信息学奥林匹克竞赛指导–组合数学的算法与程序设计》 . 清华大学出版社， 2002
- [2] 刘汝佳，黄亮 .《算法艺术与信息学竞赛》 . 清华大学出版社， 2004
- [3] Ronald L. Graham ， Donald E. Knuth ， Oren Patashnik.《Concrete Mathematics–A Foundation for Computer Science (2nd Edition)》 . Addison-Wesley Professional ， 1994
- [4] 卢开澄 .《组合数学（第三版）》 . 清华大学出版社， 2002
- [5] 周源 .NOI 冬令营讲稿 .2008
- [6] 雷环中，金恺 .IOI 中国国家集训队难题讨论活动解题报告， 2003

That’s all. Thank you!

欢迎提问！