讲稿

大家好，我是来自福州一中的肖汉骏。今天带来的论文题目是《歧路修远，上下求索——例谈信息学竞赛分析中的“深”与“广”》。

人们往往用“深”与”广“来形容海洋，但另一方面，人类的脑海却比任何一个大洋都来得深邃、来得广阔。作为思维能力充分展示的舞台，“深”与“广”在信息学竞赛中又有什么特殊含义呢？在解题实践中又如何做到”深“与”广“呢？本文将和大家一同探讨这些问题。

问题分析中的“深”，有这么几层意思：

一是层次性。层次方面的观察就是要抓住问题的来龙去脉，从低维的、条件简化的情况来考察问题。再由浅入深，分析问题在高维的、条件复杂的情况下产生的变化，以求突破。

二是连续性。分析问题的过程往往是漫长而坎坷的。倘若想到哪里就分析到哪里，思维就容易混乱。反之，若能沿着确定的方向步步深入，充分利用每一步分析的结果，就容易挖掘出一些有用的东西来。

三是注意要素之间的关系。信息学问题并不是要素的简单相加，要素之间的相互关系也是客观存在的，而且更为本质和深刻。要素间诸如单调性、周期性等等关系，往往可以成为解题的突破口。

而问题分析中的“广”，内涵就更为丰富：

一是开阔的眼界。在考场的仓促时间内，很多问题要获得完美的解决是困难的，甚至是不可能的。这就需要我们发挥想象力，运用各

种策略解决问题。

二是广阔的思路。一个相同的问题，从不同角度看往往有不同结果。如果能把这些结果综合起来，就能较为全面地理解问题。一些隐蔽的信息在各个方向的探测下，也就无所遁形了。

三是丰富的分析手段。分析手段是思维的利器，能抓出问题的本质所在。若能掌握各种分析手段，就似精通了十八般兵器的武林高手，“谈笑间，问题灰飞烟灭”。

下面，以一道题为例，谈谈如何在问题分析中真正做到“深”与“广”。

这道题的大意是：有 N 篇文章，每篇文章有一个阅读时间 Ti，价值 Vi．读一篇文章的代价定义为读完这篇文章的时刻乘上它的价值。求一个文章的阅读顺序，使得总代价最小。

另外，有一些文章的作者是相同的，这些文章必须按照作者写文章的先后顺序阅读。

这个问题要求的是一个最佳的阅读顺序，使得总代价最小。但又附加了一定限制，即同一作者所写的文章要按时间顺序阅读。

直接考虑问题本身似乎不容易找到很好的方向，所以我们不妨先尝试弱化条件，由浅入深地解决原问题。

我们尝试去除作者因素，考虑这个特殊情况下问题的解。

问题要我们求一个最优序列。显然，最优序列不是胡乱排列的，必然有某种因素使得它成为最优。而最优序列的特殊之处就在于：经过任意改变后，得到的结果都不比原序列优。

在序列中最简单的改变莫过于交换相邻元素了。我们就照着这个思路进行深入分析：

考察相邻的两本书，设它们的阅读时间为 T1,T2，价值为 V1,V2。

如图所示，交换这两本书的阅读顺序后，第一本书的阅读完成时间推迟了 T2，第二本书则提前了 T1。

所以，总代价的变化为 T2V1-T1V2。

对于最优序列，总代价的变化一定大于 0，即 T2V1>T1V2，整理得 V1/T1>V2/T2。

相邻两项有这个关系，那么，整个序列不就是按照 Vi/Ti 从大到小的顺序排列么?

至此，特殊情况已被轻松解决，时间复杂度为 O(NlogN)。

回到一般情况，我们该如何处理作者因素对阅读顺序的影响?

仍然应用从特殊到一般的思想展开分析。

在所有一般情况中，只有两个作者的情况是最特殊的，而在所有两个作者的情况中，某位作者只写了一篇文章的情况又最为特殊。

我们不妨来考察一下这篇独立文章应何时阅读。

根据刚才的分析，最优序列中相邻的可交换元素满足关系：

V1/T1>V2/T2

也即，独立文章的比值要小于前面的，大于后面的。单纯从数学推演的角度出发，满足上式的位置可能有很多，没有好的性质能够加以利用。

而二元组比值的形式，不禁促使我们联想到直线的斜率。这里，不妨尝试一下，用广泛的分析手段解决问题。

我们将每篇文章看作一个向量(Vi,Ti)，则 Vi/Ti 就是斜率。

刚才的数学结论在图形中就表示为，独立文章的斜率要介于前后之间。那么，独立文章的插入位置在图形中就可以形象地表示为“凸点”，如图所示：

当然，只注意问题一个方面的性质是有悖于“广”的要求的。

注意那些不可插入位置，它们在图形中表示为“凹点”。容易用反证法证明，凹点是不能被新的文章插入的。也就是说，我们可以把形成凹点的两个向量合并，来去除凹点。

而什么图形不包含凹点呢？是的，就是凸包！

可以预感，我们离最终的答案仅仅有一步之遥。

稍加整理，容易得出以下算法：

分别处理每一个作者，求出文章形成的凸包。则该作者所写的文章被凸包上的点划分为若干段。

而后把所有文章段按斜率降序排序，即为所求的最优序列。

回顾这道题的解决过程：

我们先去除了限制条件，从特殊情况着眼，得出了最优序列相邻元素之间的关系。

在一般情况中，我们又选取了最为特殊的两作者情况讨论。

随后又运用了数形结合的分析方法，从正反两个方面考察了凸点和凹点。

最后联想到凸包，一气呵成地解决问题。

可以看到，问题解决过程中的每一步，都或多或少地和“深”和“广”有所联系。

在平常的解题实践中，我们往往依靠经验、不自觉地使用各种分析方法。然而效果时好时坏，难以把握。

这正说明了零碎的经验，是不能代替系统的理论的。

若能在分析过程中遵循一定的规则，做到有理、有序地分析，就能避免凭借经验带来的不稳定性。

另外，解题的成功并不是问题的结束。

在我的论文中还叙述了如何将问题在“深”与“广”的方向延伸、拓展，从而提高分析能力。

“磨刀不误砍柴功”，若能在解题过程中做到“谋定而后动”，坚持良好的分析习惯；在解题成功后又有意识地将问题向“深”、“广”延伸，比较不同层次、不同角度的解法，“知其然 知其所以然”。相信，假以时日，我们的思维能力、分析能力就会有很大的进步，真正做到奥林匹克竞赛所追求的，”在智力上有所发展，在能力上有所提高“。

我的演讲到此结束，欢迎大家提问。