福建省福州市第一中学

余林韵

1、1、1、2、1
1、1、1、2、1
……

2006， 2007， 2008， 2009

……

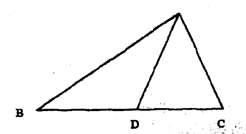
11月01日 中国概念股行情（按市值大小排序）

（单位：美元）

股票名称	股票代码	收盘	成交量	市盈率	市值(亿美元)
网易	NTES	82.83	2,388,589	19.58	26.03
百度	BIDU	68.09	1,181,640	138.96	21.99
盛大	SNDA	25.45	879,029	13.98	17.77
腾讯（港）	TENCENT	8.05	2,140,000	29.83	17.38
新浪	SINA	25.36	1,511,435	21.86	12.74
分众传媒	FMCN	28.05	141,393	33.00	11.22
Tom	TOMO	18.24	100,414	16.73	8.88
携程	CTRP	58.93	185,121	29.32	8.85
搜狐	SOHU	15.28	1,534,071	15.59	5.49
第九城市	NCTY	19.03	105,481	11.06	4.43
空中网	KONG	12.75	100,432	14.01	4.37
中华网	CHINA	3.38	464,603	N/A	3.51
51Job	JOBS	12.88	89,952	29.95	3.45
灵通	LTON	9.95	76,534	14.85	2.49
华友世纪	HRAY	9.42	55,522	8.41	2.06
e龙	LONG	10.72	30,364	82.46	1.53
金融界	JRJC	6.02	17,521	30.10	1.10
慧聪（港）	HC INTL	1.500	220,000	13.99	0.77

角形的周长分成 12 厘米和 15 厘米两部分，求此三角形

点，其中 AD=BD，试求证 BC>AC。（本题 3 分）



边数。

39．三角形的周长为 27cm，三条边长度之比为 2：3：4，求三角形三边之长。（本题 3 分）

1396. Maximum. Version 2

Time Limit: 1.0 second
Memory Limit: 16 MB

Consider the sequence of numbers a[i], i = 0, 1, 2, ..., which satisfies the following requirments:

```
a[0] = 0
a[1] = 1
a[2i] = a[i]
a[2i+1] = a[i] + a[i+1]
```

for every i=1, 2, 3, ...

Write a program which for a given value of N ($0 < N < 10^{18}$) finds the largest number among the numbers a[0], a[1], ..., a[N].

Input

Input contains not more than 10000 lines containing one number N. The last line contains 0.

Output

For every N in the input write the coresponding maximum value found.

Sample

input	output
5 10 0	3 4

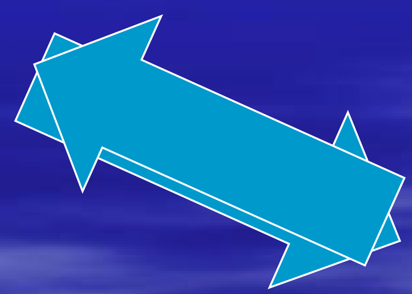
Hint

This problem is the same as "Maximum" but with bigger limitations.

化归

- 就是转化和归结

问题甲



比较容易解决的问题乙

化归方法的要素

- 化归对象

  即对什么东西进行化归
- 化归目标

  即化归到何处去
- 化归途径

  即如何进行化归

Dispute (Ural 1309)

数列 Fn 满足：

$$F_0 = 0$$

$$F_n = g_{n,F_{n-1}}$$

其中

$$g_{x,y} = ((y-1)x^5 + x^3 - xy + 3x + 7y) \bmod 9973$$

给定 n，求解 F_n。

数据规模

0<=N<=10^8

Dispute (Ural 1309)

Ʒ AA ?

Dispute (Ural 1309)

算法一

- 预处理，求出数列 F 的所有项
- 将所有的 $F_{100000k}$ 保存下来
- 当给定 N 的时候，我们可以先找到离 N 最接近的一项 $F_{100000k}$
- 简单的递推即可解决

$O(100000)$

Dispute (Ural 1309)

拓展

Dispute (Ural 1309)

- 算法一不能胜任

10^8s=27777h=1157d>3

10 ÷

Dispute (Ural 1309)

再次观察数列

函数 $g_{x,y}$ 的特点：

$g_{x,y}=((y-1)*x^5+x^3-xy+3x+7y) \bmod 9973$

1 、所有项 y 的指数非 0 即 1

2 、式子的最后取模了一个质数 9973

性质 1

- 把 x 看作一个常数，整理后可得：

$$g_{x,y}=((x^5-x+7)y+(-x^5+x^3+3x)) \bmod 9973$$

- 数列 F_n 是个 1 阶线性递推数列。
- 联想：计算常系数线性递推数列的第 N 项可以利用矩阵乘法的方法
- 调整化归目标：看看能否通过合理的分段，将数列变成常系数线性递推数列。

性质 2

令 M=9973

- 则有常数 A,B 使得:

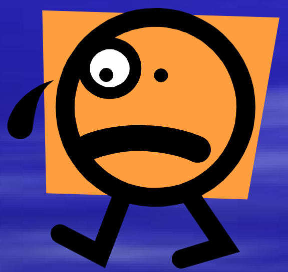
$F_{km}=A*F_{(k-1)m}+B$ ，

$O(M+\log_2 \frac{N}{M})$

其余三道例题

- ABS 序列（Top Coder SRM 369 - Div 1 - 500 Points）
- Count（NOI2007）

Time Limit



- Maximum. Version 2 （Ural 1396）

总结

性质 2 的证明

- 令 $U_i=(j^5-j+7) \bmod M$, $V_i=(-j^5+j^3+3*j) \bmod M$, $j=i \bmod M + 1$
- $F_{i+1}= U_i *F_i+V_i$
- $F_{KM+1}=(U_{KM+1}*F_{KM}+V_{KM+1}) \bmod M$
- $F_{KM+2}=(U_{KM+2}*F_{KM+1}+V_{KM+2}) \bmod M$
- $F_{KM+3}=(U_{KM+3}*F_{KM+2}+V_{KM+3}) \bmod M$
- ……
- $F_{(K+1)M}=(U_{(K+1)M}*F_{(K+1)M-1}+V_{(K+1)M}) \bmod M$

性质 2 的证明

- $F_{(K+1)M}=(U_{(K+1)M}*F_{(K+1)M-1}+V_{(K+1)M})$ mod M

  $=(U_{(K+1)M}*(U_{(K+1)M-1}*F_{(K+1)M-2}+V_{(K+1)M-1})+V_{(K+1)M})$ mod M

  $=(U_{(K+1)M}*U_{(K+1)M-1}*F_{(K+1)M-2}+U_{(K+1)M}*V_{(K+1)M-1}+V_{(K+1)M})$ mod M

性质 2 的证明

- $F_{(K+1)M}=(A*F_{KM}+B) \bmod M$

$$A=\prod_{i=KM+1}^{(K+1)M} U_i \quad B=\sum_{i=KM+1}^{(K+1)M}(V_i)\prod_{j=KM+1}^{i-1} U_j$$

- $U_i=(j^5-j+7) \bmod M \Rightarrow U_i=U_{(i+M)}$
- $V_i=(-j^5+j^3+3*j) \bmod M \Rightarrow V_i=V_{(i+M)}$
- A,B 为定值

计算常系数线性递推数列的第 N 项

- 矩阵乘法：
  - 两个矩阵 A,B ， $A=(a_{i,j})_{n*m}$,$B=(b_{i,j})_{m*t}$

$$C = A \times B = (c_{ij})_{n*t}, c_{ij} = \sum_{k=1..m} a_{ik} * b_{kj}$$

  - 复杂度： O(NMT)
  - 满足结合律，即

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

计算常系数线性递推数列的第 N 项

- 递推数列
  - 一个数列的连续项之间的关系叫递推关系，由递推关系确定的数列叫递推数列
- 常系数线性递推数列
  - 由初始值和方程 $a_{n+k}=F(a_{n+k-1},\ldots,a_n)$ 的数列 $\{a_n\}$ 称为 k 阶递推数列
  - 特别的，当方程形如下式的时候数列 $\{a_n\}$ 称为 k 阶常系数线性递推数列。

    $a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n+f(n)$，这里 $c_1,c_2\ldots c_k$ 为常数，其中 $c_k\neq0$
  - 如果 $f(n)=0$, 那么数列 $\{a_n\}$ 称为 k 阶常系数齐次线性递推数列。

计算常系数线性递推数列的第 N 项

- 以广义 Fibonacci 数列为例：
- $F_1=a, F_2=b, F_N=F_{N-1}+F_{N-2}$
- 观察数列前几项：
- $F_3=F_1+F_2=a+b$
- $F_4=F_2+F_3=F_2+(a+b)=a+2b$
- $F_5=F_3+F_4=(a+b)+(a+2b)=2a+3b$
- ……
- 数列的任意一项都是由若干个 a 与 b 相加组成的！！！

计算常系数线性递推数列的第 N 项

- 用矩阵乘法解决:

$$\begin{pmatrix} F_{i-1} \\ F_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{i-2} \\ F_{i-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{n-3} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} F_{n-3} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \times \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{n-4} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \times \begin{pmatrix} F_{n-4} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\
&= \ldots\ldots \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \times \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$