浅谈信息学竞赛中的线性规划

——简洁高效的单纯形法实现与应用

浙江省杭州第二中学　　　李宇骞

引子

- 最优匹配
- 网络流
- 最短路
- 资源优化配置问题
- 最佳物资供给问题
- 多物网络流

引子

- 最优匹配
- 网络流
- 最短路

有更好的特殊解法

- 资源优化配置问题
- 最佳物资供给问题
- 多物网络流

只有线性规划

引子

- 无论作为替代解法或者唯一解法

构造模型

解线性规划

因题而异
简单

一劳永逸
复杂

概览

- 定义与简单应用
- 单纯形法简介
- 实现

构造模型

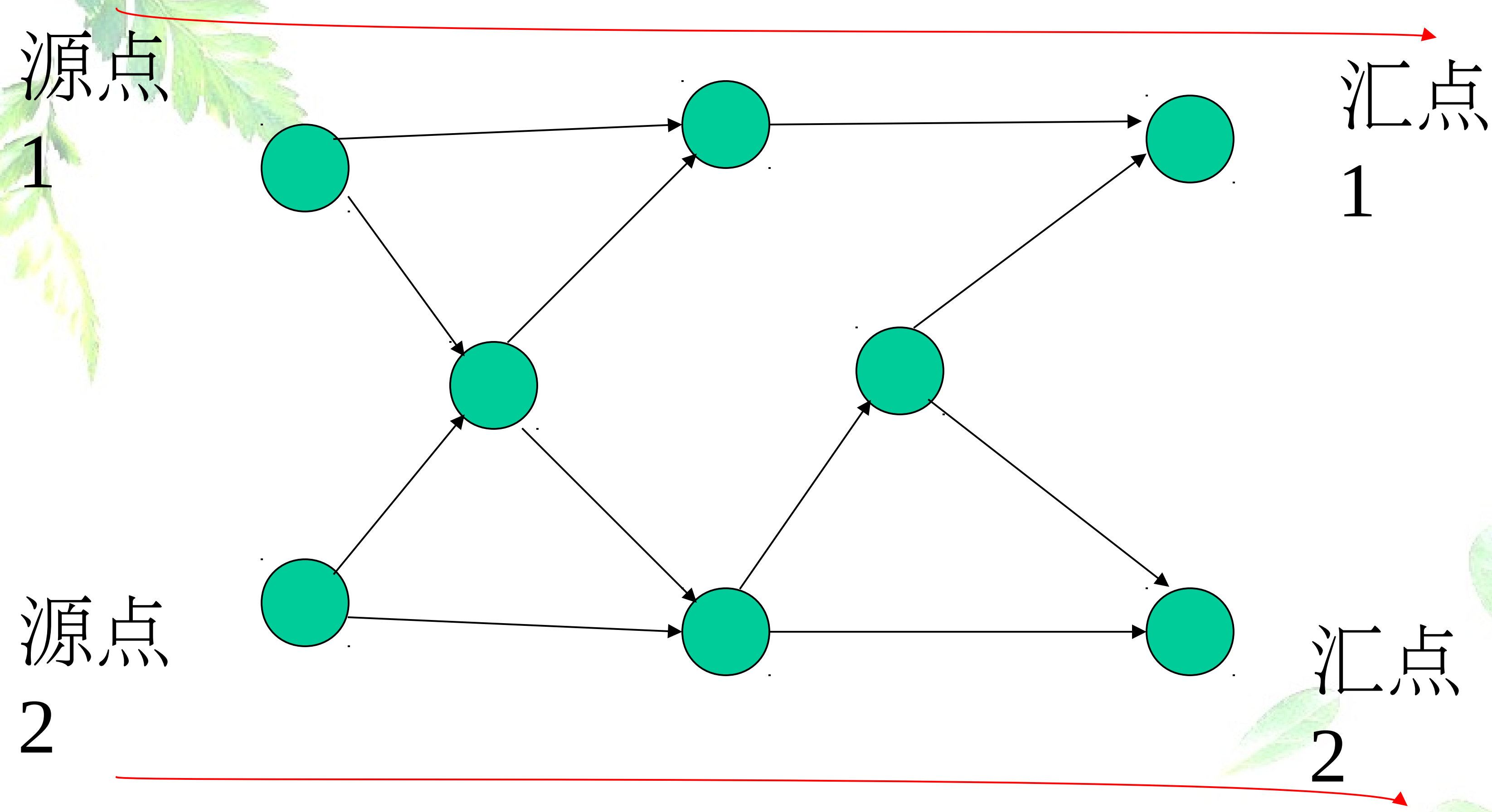
↓

解线性规划

定义

- 线性规划：在满足一些线性等式或者不等式的条件下，最优化一个线性函数。
- $x_1+x_2+x_3+x_4$
- $-2x_1+8x_2+0x_3+10x_4 >= 50$
- $x_1 >=0$
- $x_2<=4$
- $x_1+5=x_2$

多物网络流



要求流量

多物网络流

- k 个物品，那么对每个边，设 k 个变量，分别代表该物品在此边上的流量。
- 最优化的目标函数：无——只求可行解
- 约束：
  - 所有物品流量和　不超过　边容量限制
  - 每个物品的流都　满足　流量平衡条件
  - 每个物品总流量　达到　它的要求流量

单纯形法

- 标准形式——统一问题的描述
- 主程序——调整法
- 松弛形式——方便程序中点的表示
- 转轴操作——最核心的调整操作

单纯形法

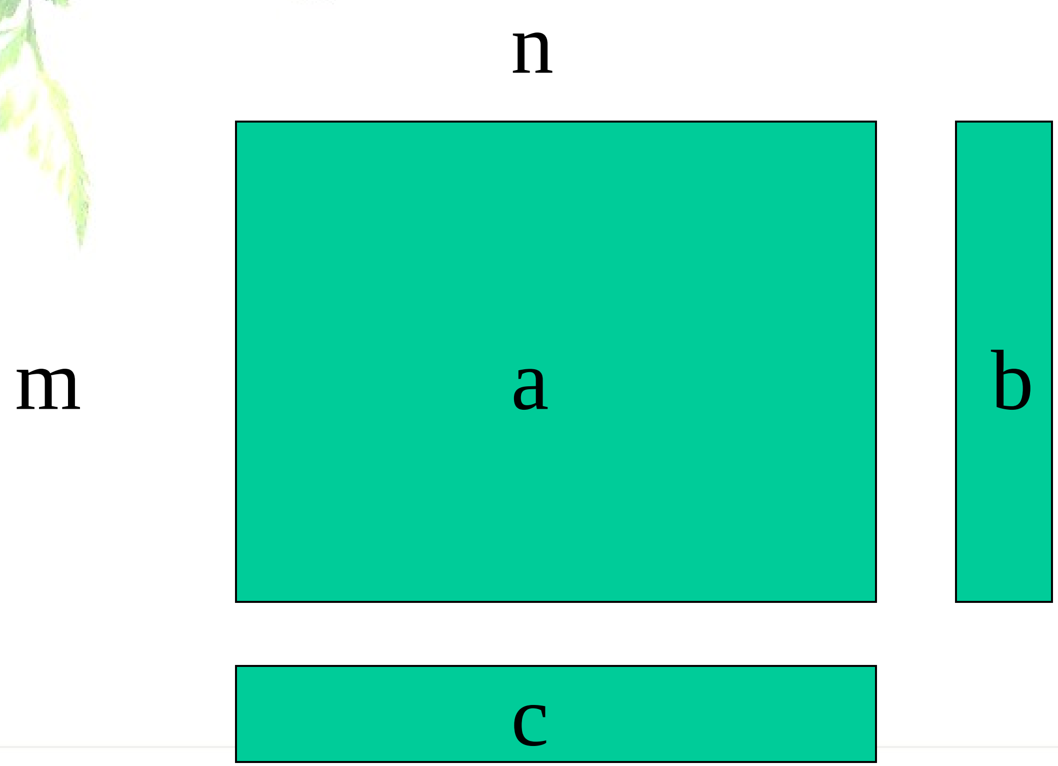
- 标准形式 (Standard form)
  - 最大化 $\boxed{x_1+x_2+x_3+x_4}$ 目标函数要求最大化
  - 满足:
    - $x_1+2x_2+3x_3 <= 3$
    - $x_4 <= 5$
    - $x_1,x_2,x_3,x_4 >= 0$

所有的限制条件都是小于等于的

所有的变量都有非负限制

单纯形法

- 标准形式 (Standard form)

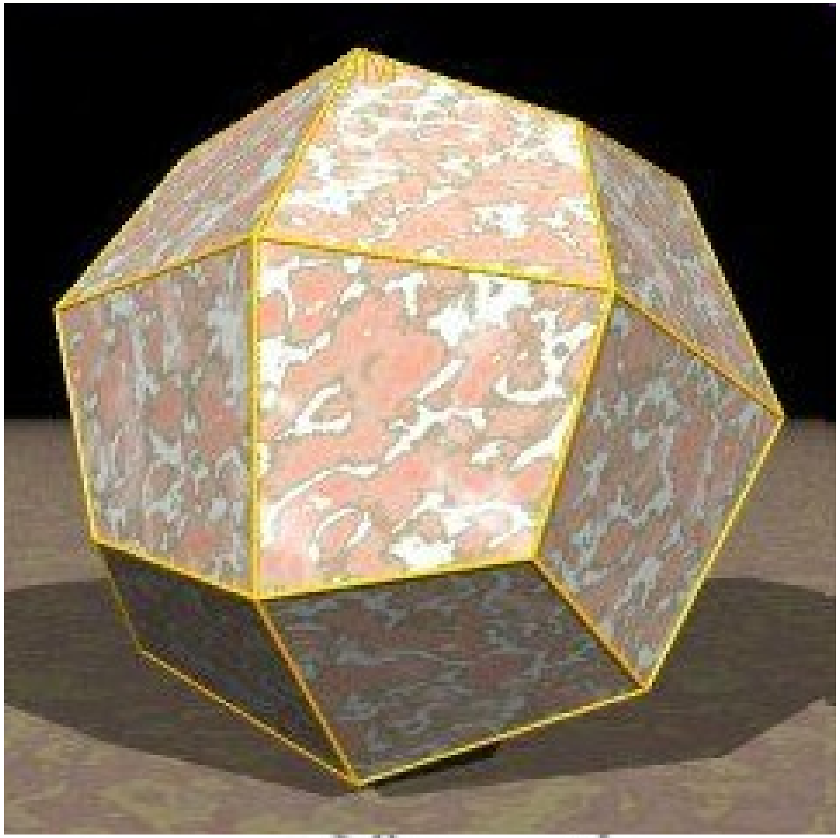


单纯形法

- 标准形式 (Standard form)
  - 最大化 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
  - 共 n+m 个约束，除了 n 个变量的非负限制外，还满足 m 个约束，第 j 个约束为

    $$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i <= \mathrm{b_j} (1 <= \mathrm{j} <= \mathrm{m})$$

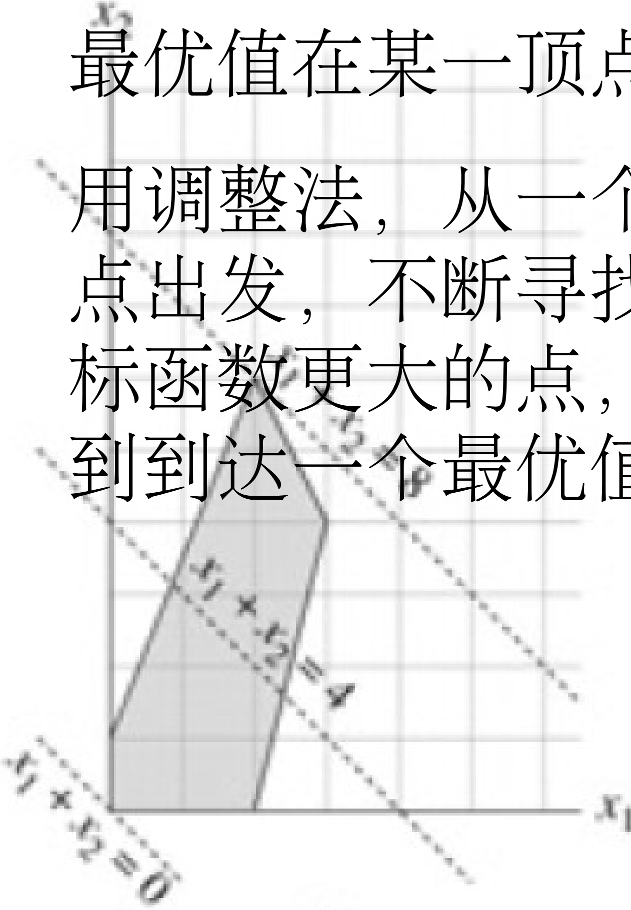
单纯形法



(a)

最优值在某一顶点上

用调整法，从一个顶点出发，不断寻找目标函数更大的点，直到到达一个最优值。



(b)

单纯形法

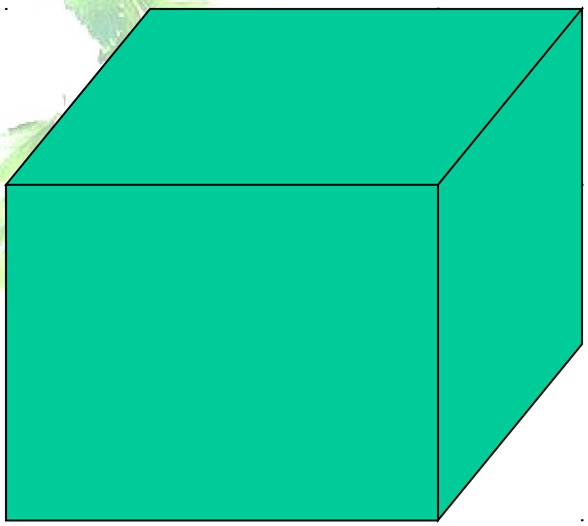
- 主程序

初始化：首先找到一个顶点

最优化：不断调整，直到最优

化归

单纯形法



一个顶点对应一个松弛形式

顶点 ⟷ 松弛形式

单纯形法

n 维空间中的一个顶点

↕

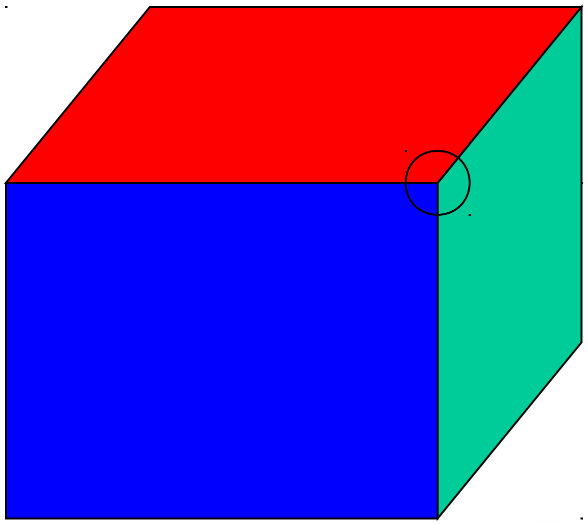
n 个数的坐标

↕

n 个 n 元一次方程组的解

↕

n 个不等式取等号



单纯形法

- 松弛形式（Slack form)
  - 将 n+m 个不等式和 n+m 个变量一一对应

$$x_1>=0 \longleftrightarrow x_1>=0$$

$$\vdots$$

$$x_n>=0 \longleftrightarrow x_n>=0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i <= \mathrm{b}_j \longleftrightarrow x_{n+j} = \mathrm{b}_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \longleftrightarrow x_{n+j}>=0$$

第 **i** 个不等式取等号时就是 $\mathbf{x_i=0}$

单纯形法

- 松弛形式（Slack form）

n 维空间中的一个顶点

n 个不等式取等号

n 个变量取 0

N

单纯形法

- 松弛形式（Slack form）

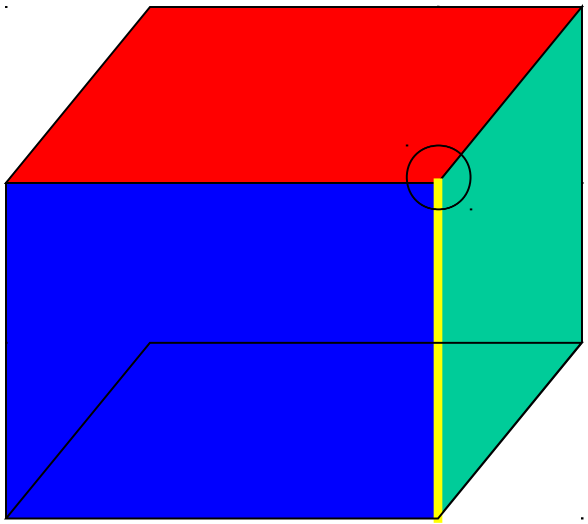
点 $\longrightarrow$ 点

松弛形式 $\longrightarrow$ 松弛形式

N　N

单纯形法

- 转轴操作（Pivot）



n-1 个等式确定一条边

调换 N 中的某一个元素

↕

沿着另外 n-1 个等式所确定的边到达另一个点

单纯形法

- 时间复杂度
  - 最多有 C_{n+m}^{n} 个松弛形式

顶点的个数远不到这么多

调整法“爬”得很快，经过很少的点以后就达到了最优

实现

- 细节决定成败
  - 系数矩阵的表示——以退为进
  - 初始化中 X_0 的处理——被忽略的关键
  - 贪心的优化——小改动带来速度上的大飞跃

速度

实现

- 编程复杂度
  - **200** 行

    1[illegible] 行注释、输出
  - **110** 行

    UVA10498，没有初始化步骤的单纯形法

实现

- 优化

  贪心：每一次调整使目标函数变得尽量大！

  - 普通的最优化过程—— 25 行
  - 加优化以后的过程—— 35 行

速度?

测试

- 200 个变量、 200 个约束

	普通程序	优化程序	LINDO
时间(秒)	8	1	1
操作数（Pivot）	5396	336	558

测试

- 300 个变量、 200 个约束

	普通程序	优化程序	LINDO
时间(秒)	11	1	1
操作数（Pivot）	5310	349	578

测试

- 300 个变量、 300 个约束

	普通程序	优化程序	LINDO
时间(秒)	105	7	7
操作数（Pivot）	18243	947	1369

总结

线性约束

线性函数的最优值

非多项式级别，
但是速度很快

单纯形法

简单的优化，
非常好的效果

总结

- 优美的单纯形法

初始化——化归的思想

松弛形式——数形结合的思想

优化——贪心的思想

希望大家觉得线性规划更简单，更美