匹配算法
在搜索问题中的应用

浙江省杭州第十四中学 楼天城

loutiancheng@sina.com

前言

很多题目，如果我们可以建立数学模型，应该尽量用解析法来处理，因为简单的模型更清晰地反映了事物之间的关系。

但是，并不是所有的题目都可以建立简单的数学模型。我们这时必须使用搜索的方法，也就是枚举所有可能情况来寻找可行解或最优解。

由于搜索一般建立在枚举之上，所以搜索常常和低效是分不开的。

有时搜索的运算量非常大，实在是一件痛苦的事情。

于是我们需要利用很多技巧来提高效率：

可行性剪枝，

最优性剪枝，

调整搜索顺序，

等方法都很有用，在它们的帮助下，我们可以大大提高搜索的效率。

而有些题目，这些常规的优化方法很难有用武之地。这时我们必须使用一些非常规的搜索方法。

本文中我们将讨论非常规搜索中的一种

——部分搜索+匹配算法

引题：

N个物品与N个位置，给定每个物品可能放的位置集合，要求寻找一一对应的关系。

但还给出物品位置之间的限制（例如：如果1放在3则2不能放在1）。

求一组可行解，或给每一种对应关系一个权，求满足条件的最优解。

由于事物之间的限制关系非常复杂，很难建立简单的二分图关系，或者用网络流来解决。

面对这一系列类似的问题，我们一般只有搜索，如何搜索又如何优化呢？

简单分析：

如果我们枚举每一个物品的位置，然后判断。这样的时间复杂度为$O(n!)$。好像似乎也只能这样。

进一步分析：

我们看一个例子，n=6：

其它限制有4条(a,b,c,d)表示如果a放在b则c不能放在d

1 3 5 6

2 2 5 3

3 1 4 1

3 2 6 2

我们发现，如果我们一旦确定了3和5的位置，其它4个物品的位置之间已经没有限制关系了，这样其它4个物品的位置可以通过匹配来解决。

这时我们发现一个新的搜索方法：部分搜索+匹配。

部分搜索+匹配：

搜索一部分变量，使得余下变量之间的关系简化，然后通过一些高效算法（匹配）完成余下问题。

就本题而言就是：先搜索一定数量（而不是全部）物品的位置，使问题内其它物品的关系简化为二分图关系，用二分图匹配来解决余下的物品。

例如上面的例子，如果我们先知道了3和5的位置后，不用匹配，其实我们是在用搜索来求匹配，效率当然不会高。

通过部分搜索为匹配算法提供条件（例如上面的例子创造二分图关系），而匹配算法代替搜索，高效地完成余下的任务。

部分搜索+匹配的方法充分发挥了搜索和匹配算法的双重优势。搜索的优势在于应用性广，可以克服复杂的情况，匹配算法的优势在于效率高。两者相互促进，同时也弥补对方的不足。这也是这个方法成功的关键。

部分搜索+匹配的方法已经在很多题目中得到了应用。

一个部分搜索+匹配算法的经典例子。

智破连环阵

题目简述(NOI2003二试第三题)

B国的连环阵由M个武器组成。最初，1号武器处于攻击状态，其他武器都处在无敌自卫状态。以后，一旦第i（1 ≤ i<M）号武器被消灭，1秒钟以后第i+1号武器就自动从无敌自卫状态变成攻击状态。

A国有N个炸弹，每个炸弹的作用半径均为k，且会持续爆炸5分钟。在这5分钟内，瞬间消灭离它直线距离不超过k的、处在攻击状态的B国武器，不会炸毁本国炸弹。

任务：

决定一个序列a_1、a_2、a_3...使得在第a_x号炸弹引爆的时间内连环阵被摧毁。这里的x应当尽量小。

输入：

N,M及武器和炸弹的坐标。

测试数据中的坐标是随机生成的。

初步分析：

A国炸弹i可以炸到B国武器j的条件：

$(u[i]-x[j])^2+(v[i]-y[j])^2<=R^2$

结论：很难找到求最优解的多项式算法。面对此类问题，一般只有搜索策略。

进一步分析：

每一颗炸弹必定炸掉B国武器中编号连续的一段。

5分钟只是表明每一颗炸弹可以炸掉任意多个编号连续的B国武器。

普通的搜索方法：

每次寻找一个编号最小的没有被炸掉的B国武器，选择一颗没有使用过并能炸到此武器的A国炸弹，然后使用这颗炸弹炸掉B国武器连续的一段，继续深度优先搜索下一颗炸弹的编号，如果发现B国武器已经全部炸毁就可以回溯。

搜索的时间复杂度为O(n!)。即使加上优化，程序效率也不是很高。

部分搜索：

此题使用部分搜索的算法需要一些转化：如果已经将B国武器根据编号分为x段，其中第i段为$[S_i,T_i]$ (S_1=1,T_i>=S_i,T_i+1=S_{i+1})。

然后的任务就是判断是否可以从A国的N颗炸弹中选出x颗，分别可以炸掉其中的一段。

其实我们把搜索分为了两部分，

（1）将B国武器根据编号分为x段。

（2）判断是否可以从A国的N颗炸弹中选出x颗，分别可以炸掉其中的一段。

其实第二部分可以用匹配来解决。

建图：

C[S][T][I] 表示A国炸弹I是否可以炸到B国武器S,S+1..T-1,T。

$C[S][S][I]=((u[I]-x[S])^2+(v[I]-y[S])^2<=R^2)$

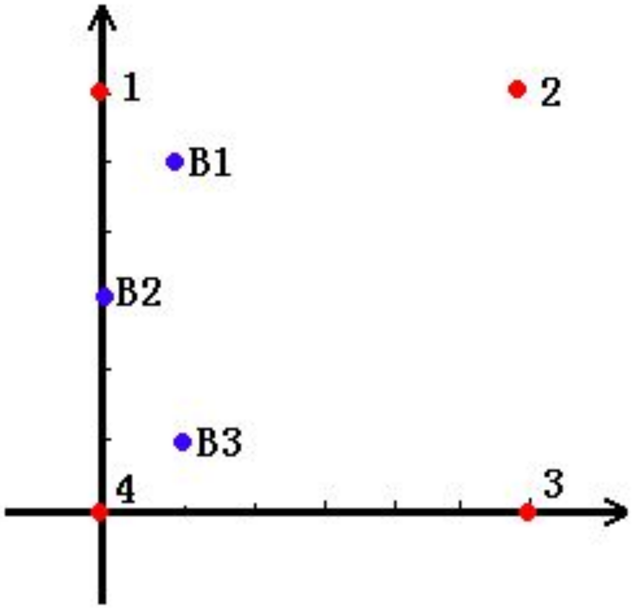
$C[S][T][I]=C[S][T-1][I]$ && $C[T][T][I]$ $(S<T)$

求C的时间复杂度为$O(n^3)$。

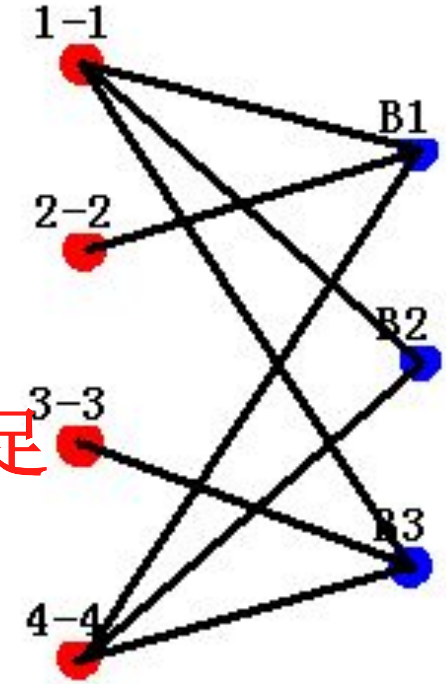
建图：左边x个点，表示B国武器根据编号分为的x段，右边N个点，表示A国的N颗炸弹。左边第i个点到右边第j个点有边的条件即：$C[S_i][T_i][j]$。

　　下面任务就是将B国武器根据编号划分为若干段+二分图匹配判断。

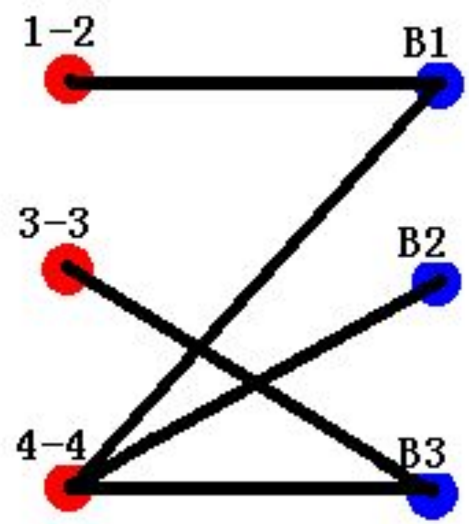
样例1：
4 3 6
0 6 6 6 6 0 0 0
1 5 0 3 1 1



如果的划分方法是：
x=4，
4段分别为
1-1,2-2,3-3,4-4
最大匹配<x，不满足



如果的划分方法是：
x=3，
3段分别为
1-2,3-3,4-4
最大匹配=x，满足



性能分析（1）：

搜索的基本框架已经建立，虽然数据是随机生成的，但是m个B国武器的划分方案还是非常多的，有时可能高达2^m。时间上很难承受，如果使用卡时，正确性受到影响，效果不会很好。

只有4个数据可以在时限内出解，另外6个如果卡时，有2个也可以得到最优解。

优化：

优化可以通过可行性和最优性两方面分析。

优化一（最优性）：

如果A国炸弹可以重复使用，设：

Dist[i]=炸掉B国武器i - m的最少使用炸弹数。

可以用动态规划计算Dist值，状态转移方程如下：

Dist[m+1]=0,

Dist[i]=min{Dist[j]+1|C[i][j-1][k](0<k<=n))

(1<=i<=N) (i<j<=N+1)

求Dist的时间复杂度为$O(n^3)$。

从而产生了一个最优性剪枝条件：

if (当前已经使用的炸弹数+Dist[当前已经炸掉的B国武器数+1]>=当前找到的最优解)then 剪枝；

优化二（可行性）：

部分搜索＋匹配的方法一般都可以用两个效果很好的可行性优化：

(1)提前判断是否可以匹配成功，避免多余的搜索。

(2)每次匹配可以从以前的匹配开始扩展，不需要重新开始。

如果当前的划分方法已经无法匹配成功，就没有搜索下去的必要了，只要每搜索新的一段时立即通过匹配判断即可。

每次求匹配只要从原来的基础上扩展就可以了。没有必要从头开始。

性能分析（2）：

通过上述两个优化，程序效率有了很大提高。10个测试数据中有8个可以在时限内出解，另外2个如果卡时，也可以得到最优解。

进一步优化：

优化二虽然排除了许多不必要的划分，但是在判断时浪费了不少时间。

因此，在枚举划分长度时，可以通过以前的划分和匹配情况（被匹配的边），用$O(n^2)$的时间复杂度的宽度优先搜索计算出下一个划分的最大长度maxL，显然下一个划分的长度在[1，maxL]都一定可以找到可行的匹配。

这样既节省了判断的时间，又可以使每次划分长度从长到短枚举，使程序尽快逼近最优解，从而同时增强剪枝条件一的效果。

这一部分的实现，首先需要求MaxT。

MaxT[i][S]=炸弹i，从S开始炸，可以炸到的最大编号。如果，炸弹i炸不到S，则MaxT[i][S]=S-1。

求MaxT[i][S]可以用动态规划的方法解决。
状态转移方程为：
MaxT[i][S]= 炸弹i炸不到S　S-1
　　　　　　炸弹I炸得到S　MaxT[I][S+1]
MaxT[I][m+1]=m
求MaxT的时间复杂度为$O(n^2)$。

具体实现方法：

考虑二分图右边的n个结点（n颗炸弹），

如果结点i未匹配，则i被认为可以使用。

如果结点i已匹配，假如从任何一个未匹配点出发存在一条到达i的交错路，并且i为外点，则i也被认为可以使用。

所以maxL=Max(maxT[i][S] | i可以使用)；

具体实现方法：

计算所有从未匹配点出发的交错路所能到达的已匹配点，从每一个未匹配点出发，宽度优先搜索，只要$O(n^2)$的时间。

可以证明，从未匹配点出发的交错路上的已匹配点一定为外点。

注意判断重复（如果一个已匹配点已经被确定为可以使用，那么不需要对它再扩展一次，因为当把这个已匹配点确定为可以使用的结点的时候，已经从这个结点扩展过，如果再扩展必将产生无谓的重复）

如果已经求出了**MaxL**，可以先求一组长度为**MaxL**的匹配**A**，这样对于所有长度在**1-MaxL**范围内的划分，**A**都是一组可行匹配。扩展一次增广路的复杂度为**O(n²)**。

这样大大节省了优化二的时间。

性能分析（3）：

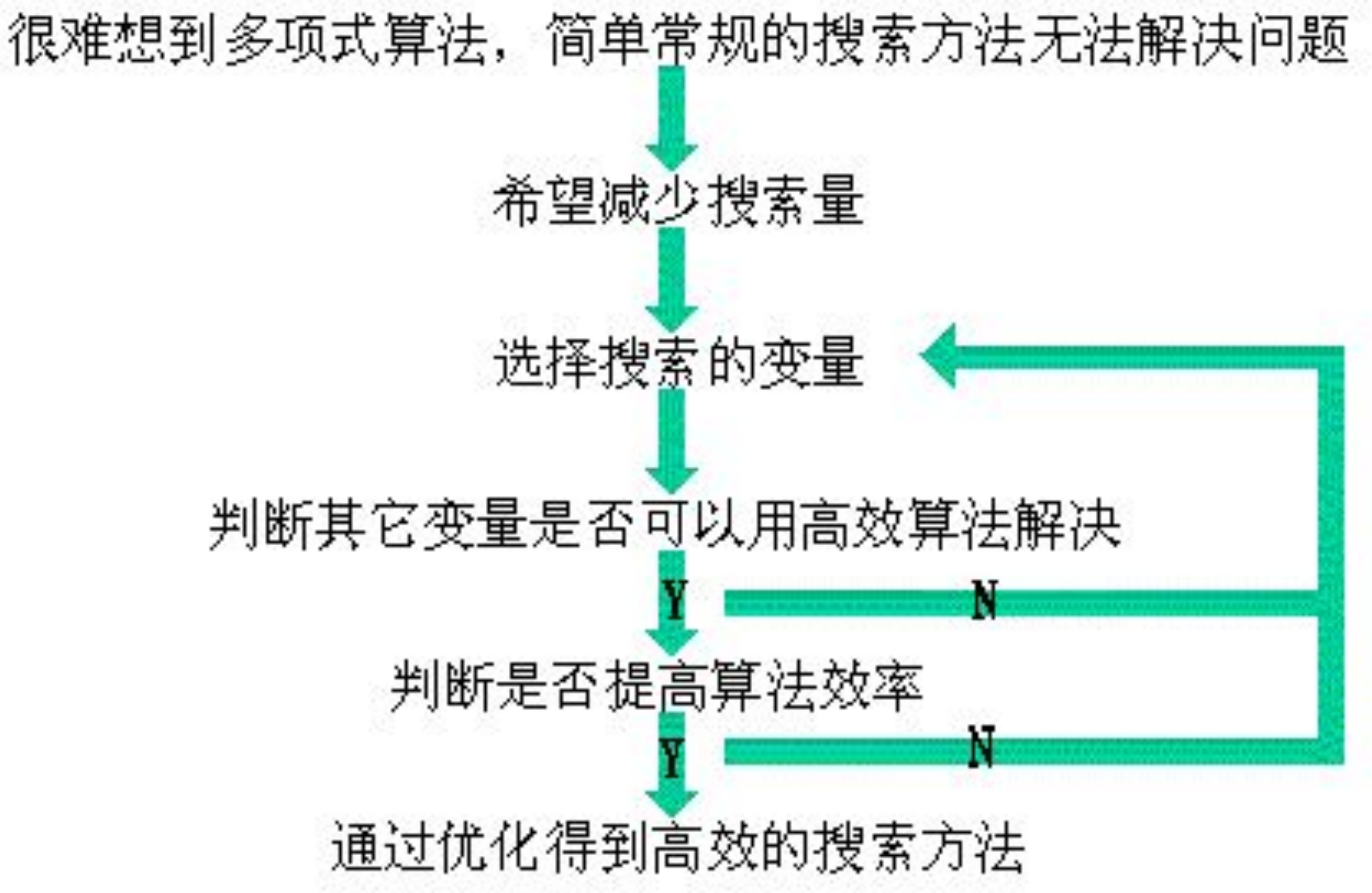
通过以上的优化，所有数据都是瞬间出解，并且所有结果都是最优解。

甚至对n=200的随机数据，也可以在瞬间出解，可见程序的效率有了很大的提高。

	最简单的搜索	优化的搜索	进一步优化的搜索
1	0.00	0.01	0.01
2	0.00	0.01	0.01
3	0.50	0.10	0.02
4	TimeOver	TimeOver	0.03
5	0.65	0.21	0.00
6	TimeOver	0.26	0.02
7	TimeOver	TimeOver	0.02
8	TimeOver	0.26	0.01
9	TimeOver	0.10	0.02
10	TimeOver	0.40	0.02

总结：本文中的两个例子都可以应用部分搜索＋匹配的方法高效解决。

它们在思想上有着明显的相同点。一般的思维过程如下：



一般的优化包括：
(1)提前通过匹配判断，避免多余的搜索
(2)判断时尽可能充分利用以前的结果，减少匹配的重复运算。

部分搜索同样可以和解方程、
贪心、
动态规划等高效算法结合。

总结

部分搜索＋匹配算法体现了搜索与其他方法的有机结合，充分发挥两者的长处，相互弥补对方的不足，这就是其高效的主要原因所在。

因此，在搜索问题中灵活地应用部分搜索的方法，往往可以创造出奇效。

值得注意的是，部分搜索来解决搜索问题作为一种非常规的搜索方法。虽然在本文的例子中，部分搜索有着很多的过人之处，但是并不能认为常规方法一定不如非常规方法。大多数的搜索问题还是适合用常规的搜索方法的，所以只有充分把握部分搜索的特点，使之与常规的搜索融会贯通，才能真正得到高效的搜索算法。

谢谢大家！