

歧路修远，上下求索

例谈信息学竞赛分析中的“深”与“广”
福州第一中学 肖汉骏

何为“深”

- ❖ 层次性
 - ▣ 低维➡高维
 - ▣ 条件简化➡条件复杂
- ❖ 连续性
 - ▣ 锲而不舍、步步深入
 - ▣ 充分利用之前结果
- ❖ 要素间关系
 - ▣ 单调性
 - ▣ 周期性



何为“广”



- ❖ 眼界广（解题策略）
 - ▣ 贪心算法
 - ▣ 随机化算法
- ❖ 思路广（分析角度）
 - ▣ 综合分析
 - ▣ 全面把握
- ❖ 手段广（分析手段）
 - ▣ 各有千秋
 - ▣ 兼收并蓄

问题描述

- ❖ **Paper** 第 2 届广东省大学生程序设计竞赛
- ❖ 有 N 篇文章，每篇文章有一个阅读时间 T_i ，价值 V_i 。读一篇文章的代价定义为读完这篇文章的时刻乘上它的价值。求一个文章的阅读顺序，使得总代价最小。
- ❖ 另外，有一些文章的作者是相同的，这些文章必须按照作者写文章的先后顺序阅读。
- ❖ 数据规模： $1 \leq N \leq 50\ 000$

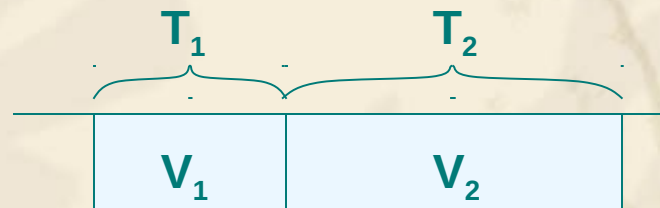
初步分析

- ❖ 这个问题要求的是一个最佳的阅读顺序，使得总代价最小。但又附加了一定限制，即同一作者所写的文章要按时间顺序阅读。

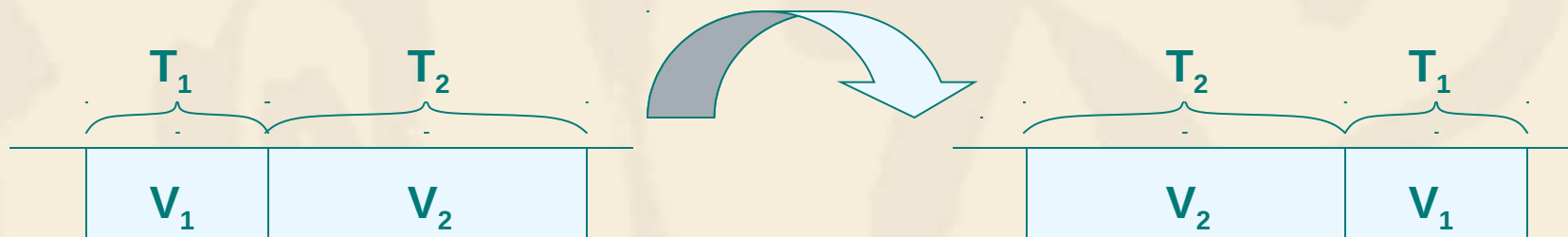


去除限制条件

- ❖ 倘若每个作者只写一本书，该如何确定阅读顺序呢？
- ❖ 考察相邻的两本书，设它们的阅读时间为 T_1, T_2 ，价值为 V_1, V_2 。



交换相邻文章之后



- ❖ 第一本书的阅读完成时间推迟了 T_2 ，第二本书则提前了 T_1 。
- ❖ 总代价变化： $T_2V_1 - T_1V_2$ 。
- ❖ 对于最优序列，一定有： $T_2V_1 > T_1V_2$ ，也即 $V_1/T_1 > V_2/T_2$ 。

特殊情况的解决

- ❖ 相邻两项有这个关系，那么，整个序列不就是按照 V_i/T_i 从大到小的顺序排列么？
- ❖ 只要一个简单的排序即可。
- ❖ 时间复杂度： $O(N\log N)$



从特殊到一般

- ❖ 如何处理作者因素对阅读顺序的影响？
- ❖ 仍然应用从特殊到一般的思想展开分析。
- ❖ 只有两个作者的情况。
- ❖ 而在所有两个作者的情况下，某位作者只写了一篇文章的情况又最为特殊。

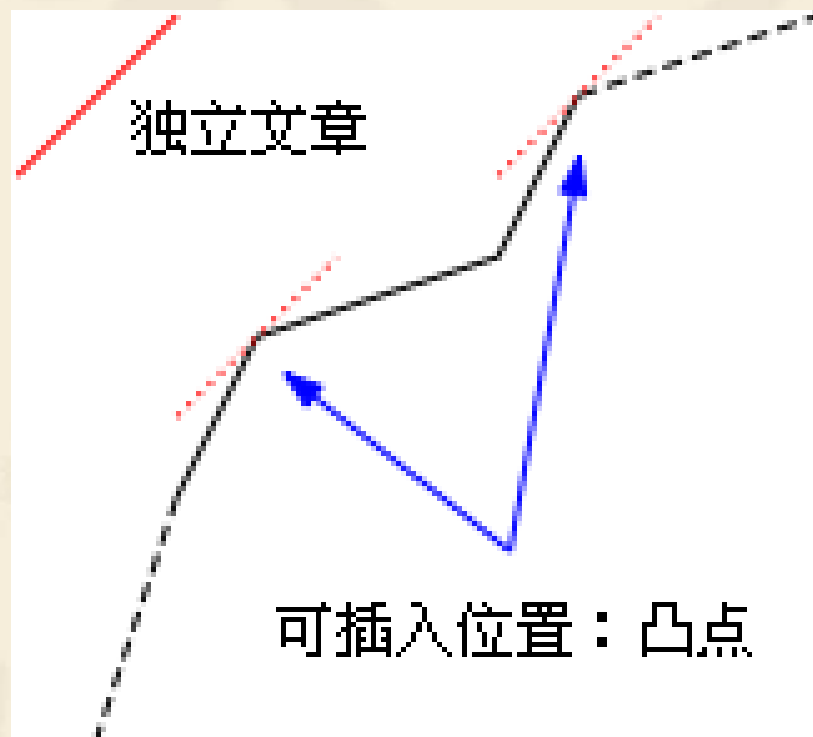


最特殊的一般情况

- ❖ 考察独立文章应何时阅读。
- ❖ 根据刚才的分析，最优序列中相邻的可交换元素满足关系： $V_1/T_1 > V_2/T_2$
- ❖ 也即，独立文章的比值要小于前面的，大于后面的。

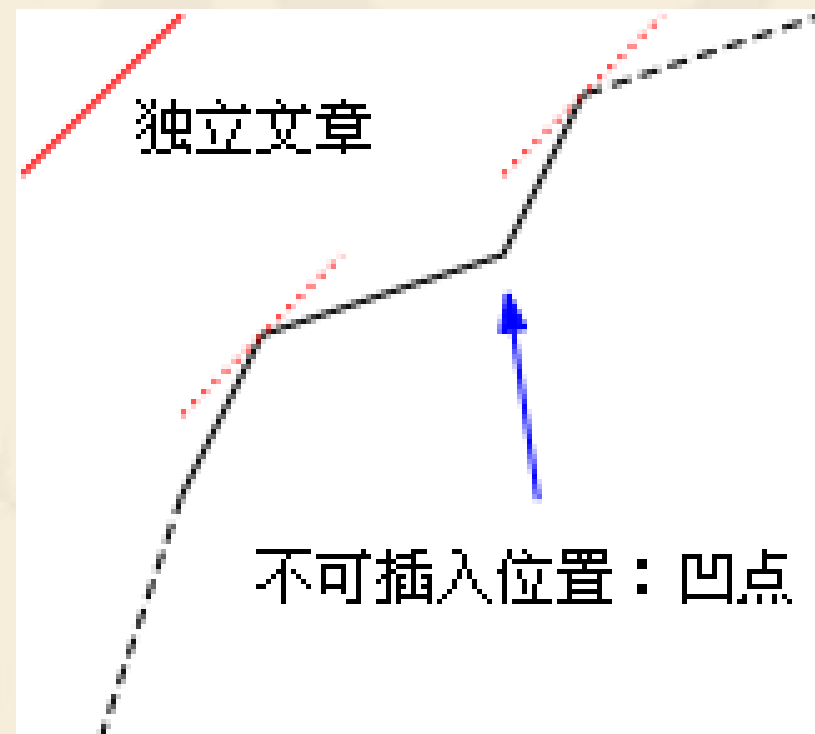
以形助数

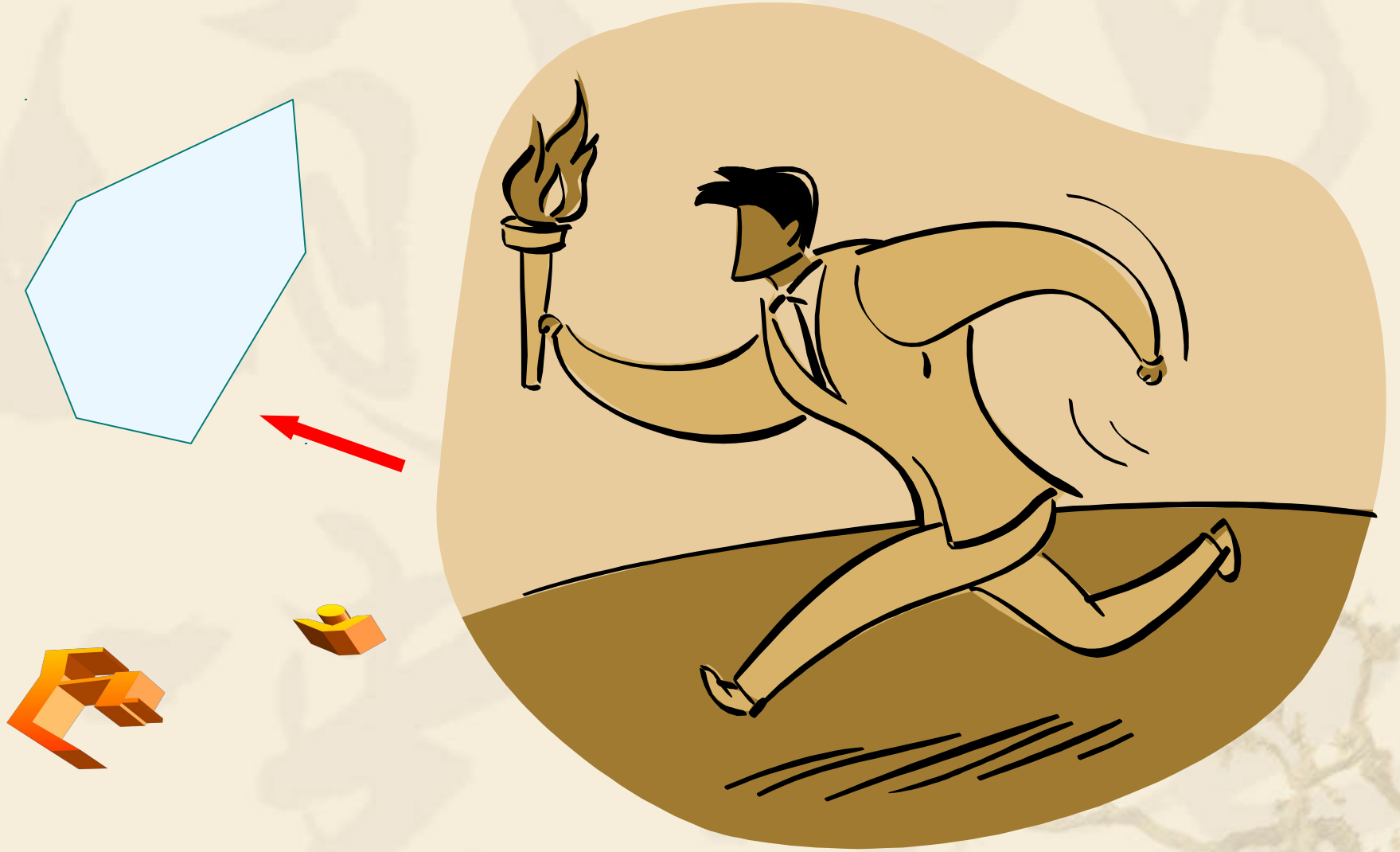
- ❖ 而二元组比值的形式，不禁促使我们联想到直线的斜率。
- ❖ 不妨把问题图形化，用广泛的分析手段尝试解决问题。
- ❖ 在图形中，独立文章的斜率要介于前后之间。



多角度观察，凸点和凹点

- ❖ 只注意问题一个方面的性质是有悖于“广”的要求的。
- ❖ 容易用反证法证明，凹点是不能被新的文章插入的。
- ❖ 而什么图形不包含凹点呢？是的，就是凸包！





最终算法

- ❖ 分别处理每一个作者，求出文章形成的凸包。则该作者所写的文章被凸包上的点划分为若干段，每段的斜率单调递减。
- ❖ 而后把所有文章段按斜率降序排序，即为所求的最优序列。
- ❖ 时间复杂度： **$O(N\log N)$**

回顾

- ❖ 回顾这道题的解决过程：
- ❖ 去除限制条件，从特殊情况着眼。
- ❖ 在一般情况中，又选取了最为特殊的情况。
- ❖ 运用数形结合的分析方法。
- ❖ 从正反两个方面考察了凸点和凹点。
- ❖ 最后联想到凸包，一气呵成地解决问题。

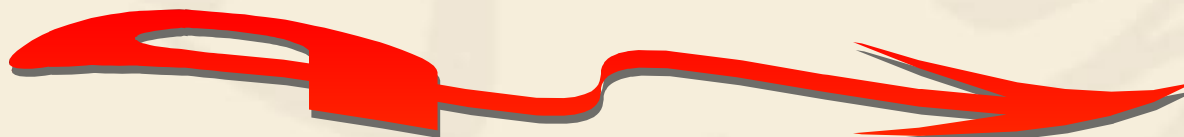
启示

- ❖ 可以看到，问题解决过程中的每一步，都或多或少地和“深”和“广”有所联系。
- ❖ 在平常的解题实践中，我们往往依靠经验。
- ❖ 然而效果时好时坏，难以把握。
- ❖ 这正说明了零碎的经验，是不能代替系统的理论的。

启示

- ❖ 若能在分析过程中遵循一定的规则，做到有理、有序地分析，就能避免凭借经验带来的不稳定性。
- ❖ 另一方面，解题的成功并不是问题的结束。
- ❖ 在我的论文中还叙述了如何将问题在“深”与“广”的方向延伸、拓展，从而提高分析能力。

总结





The End.

