

数学归纳法与解题之道

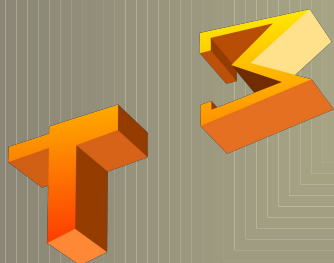
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

山西省实验中学 张昆玮

如此之多的算法，是怎样想到的？ 引言

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

道生一，一生二，二生三，三生万物。



——老子：《道德经》

数学归纳法

这些算法巧诚巧矣，其正确性怎么证明呢？

概览

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

1. 关于数学归纳法
 2. 在证明问题正确性上的应用
 3. 基本的定理、概念与方法
 4. 在构造算法中的应用
 5. 数学归纳法与算法优化
 6. 策略与解法构造
- 启发性与归纳基础
- 问题与归纳基础
- 二、适当加强归纳方向
- 应用上是否较繁琐
- 不适用的问题

1245

0011 0010 1010 1101 1001 0100 0101

构造性问题

通用灵活套路

适用于各种数据结构

易

数学归纳法

【例 5】Set Cover

—— 数据结构的恢复性构造

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

子集覆盖问题定义为选出尽量少的子集，使已知集合中的每个元素至少属于其中的一个。

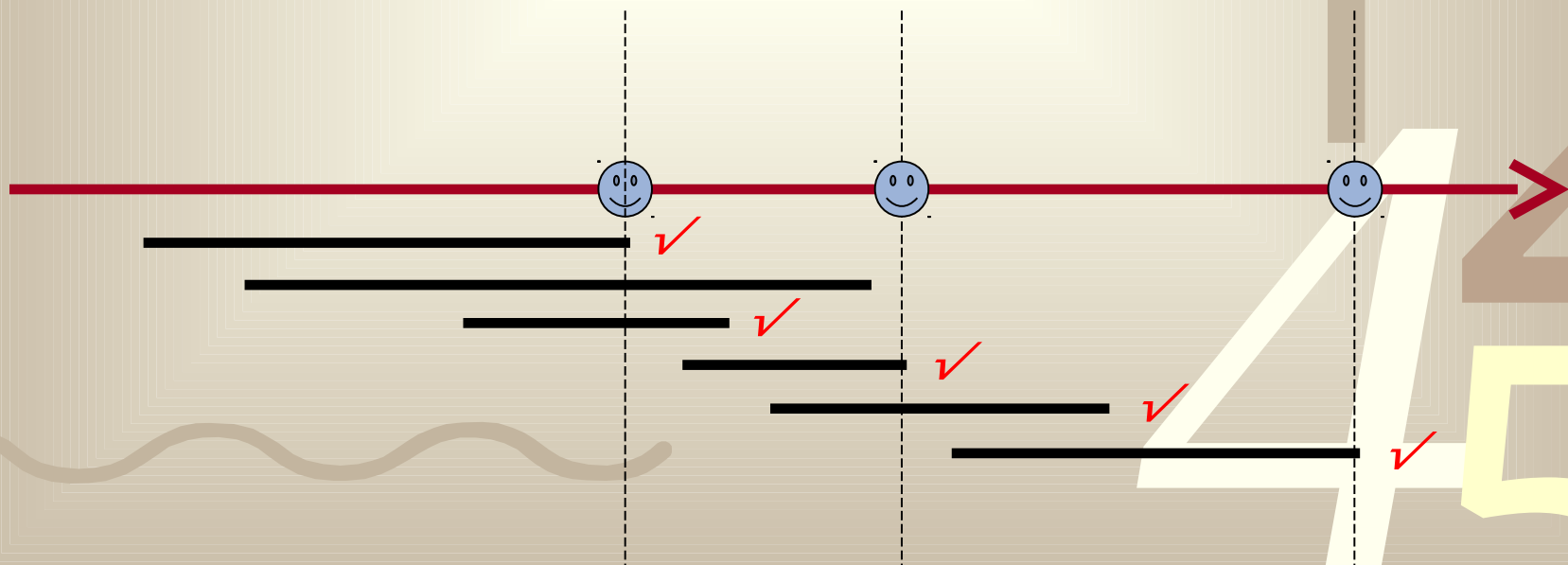
线段覆盖问题定义为选出尽量少的整点，使给定的每条线段上都至少有其中的一个。

以整点为子集，所有包含这个整点的线段为子集中的元素，可以把一个线段覆盖问题归约到子集覆盖问题。如果给定一个由线段覆盖问题归约成的子集覆盖问题，该怎么解决呢？

线段覆盖问题

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 在数轴上选出尽量少的整点
- 给定的每条线段上必须至少有其中的一个
- 按左端点排序后有简单的贪心算法

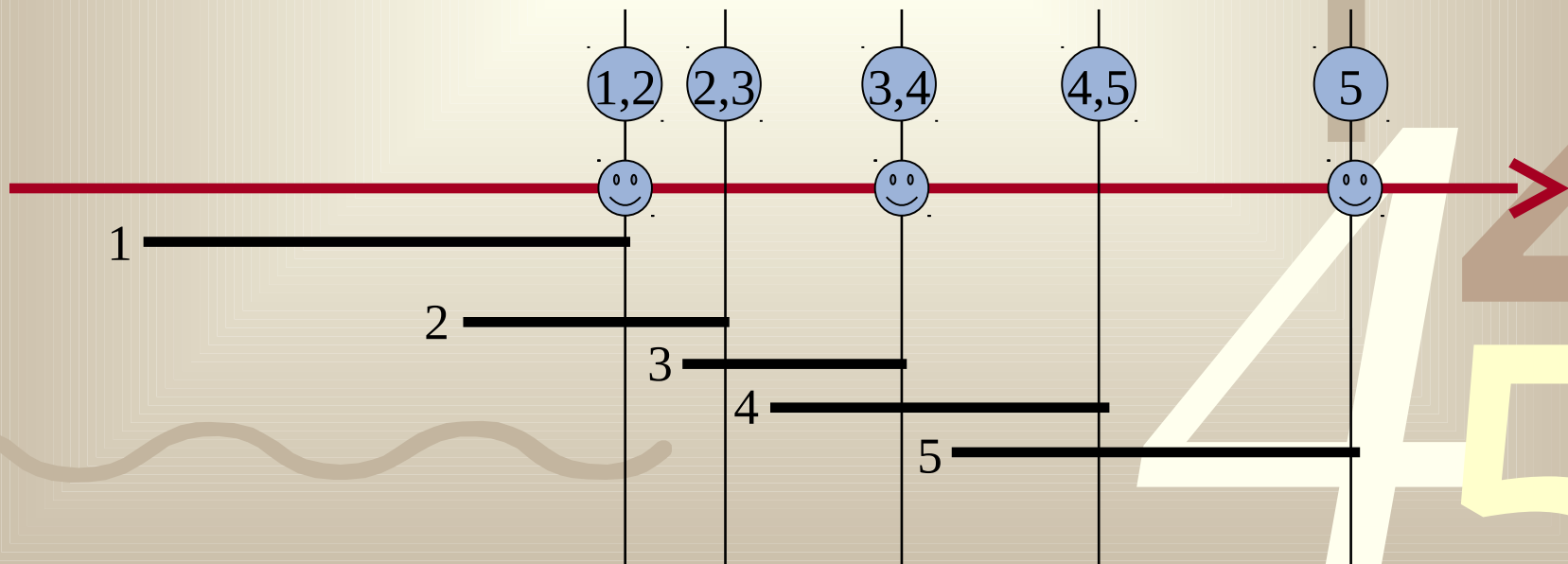


IOI2009国家集训队论

转化成子集覆盖问题

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 整点作为集合（实际上只需每线段的右端点）
- 所有包含此整点的线段为其元素
- 一般的子集覆盖问题 → NP 完全



怎么办？

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

~~直接搜索~~

恢复线性结构

Tips : 只需要恢复线段的位置关系和每个线段的右端点

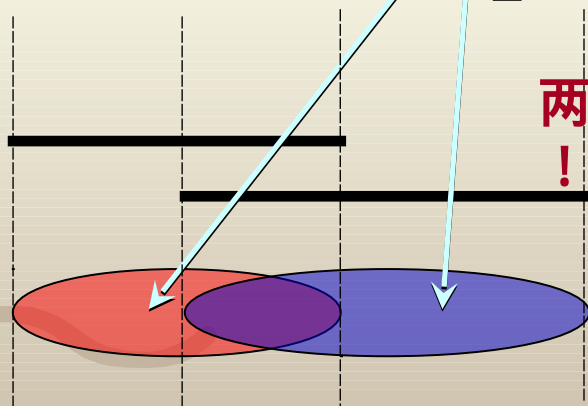
IOI2009国家集训队论

定义线段的位置

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 线段的位置即为其中点的位置
- 两线段距离即为其中点的距离
- 两线段距离可以使用对应集合运算求出

$$\text{Dis}(A, B) = \frac{|A \text{ xor } B|}{2}$$



两线段必须相交
!

问题：如何拓展连通分量？

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 我们把问题分为连通分量来处理
- 两个连通分量之间线段距离可以任意，不影响结论
- 每个连通分量的第一条线段位置任意

归纳假设 已知当前连通分量中已计算完成的所有线段的位置以及其中一条与要添加的线段 X 相交的线段 A 。

$$\text{Mid}_X = \text{Mid}_A \pm \text{Dis}(A, X)$$

到底是“+”还是“-”？

调整归纳假设

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 只有一条线段时方向无关紧要
- 初始时刻选择不同的方向只会使最终的结果互为轴对称而已。
- 其他情形中为了判断方向，我们需要调整归纳假设

归纳假设 已知当前连通分量中已计算完成的所有线段的位置以及其中一条与要添加的线段 X 相交的线段 A 。

归纳假设 如果线段总数不止一条，除以上假设外，还需要取一条已求出的线段 B ，知道其关于 A 的方向。

同侧？异侧？

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

X与B在A的同侧的充分必要条件是他们在A之内的部分存在包含关系

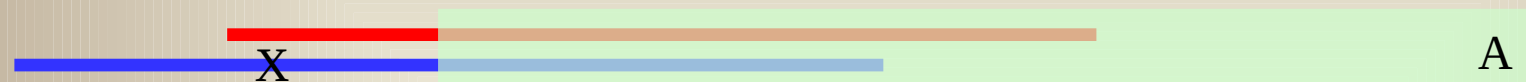
$$X \cap A \subseteq B \cap A$$

$$X \cap A \supseteq B \cap A$$

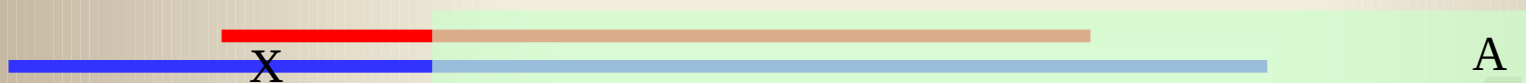


同侧？异侧？

0011 0010 1 B 10 1101 0001 0100 1011

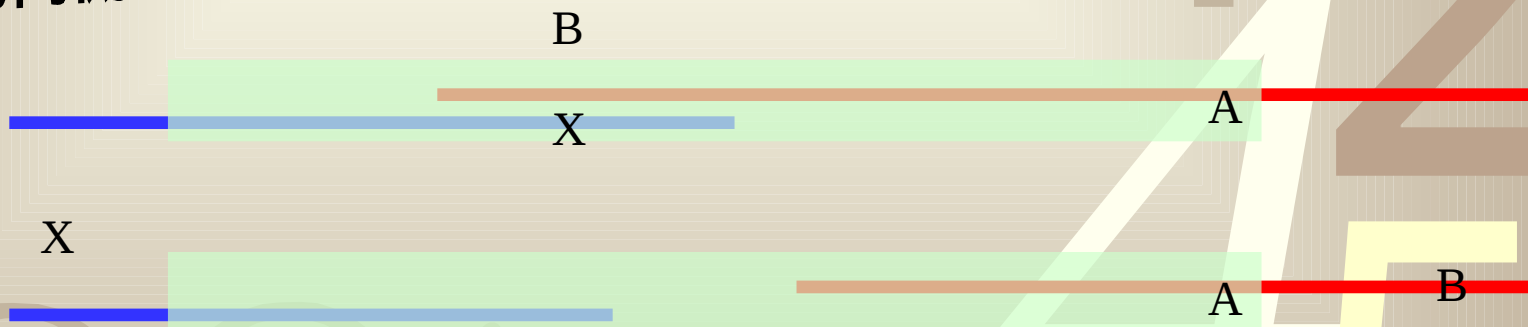


同侧



X与B在A的同侧的充分必要条件是他们在A之内的部分存在包含关系

异侧



线段的右端点

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

A



所有与 A 相交、在 A 右侧的线段与 A 的公共点

问题解决

IOI2009国家集训队论

李济元 张昱琦

小结

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 以上解题过程用庖丁解牛的方法步步推进，将问题分为多个部分，逐一化解
- 数学归纳法灵活的归纳假设为主要问题的求解提供了不少便利
- 算法实现中我们不断克服困难的过程正是归纳假设不断完善的过程

~~数学归纳法与~~ ~~从简单情形做起~~ ~~从不同角度观察~~
~~故弄玄虚~~ ~~神来之笔~~
简单自然 直剖核心
解题之道

谢谢

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

欢迎大家提问

1245