

浅谈最短径路问题中的 分层思想

福建省泉州市第七中学 吕子鋐

引言

◆最短路径问题

城市规划

交通导航

网络寻优

.....

◆分层思想

动态规划中的
阶段划分

基于求阻塞流
的最大流算法

.....

强强联
合

主要内容

◆ 利用分层思想
建立模型

★ 拯救大兵瑞恩

fence

cow relay

◆ 应用分层思想
优化算法

bic

★ roads

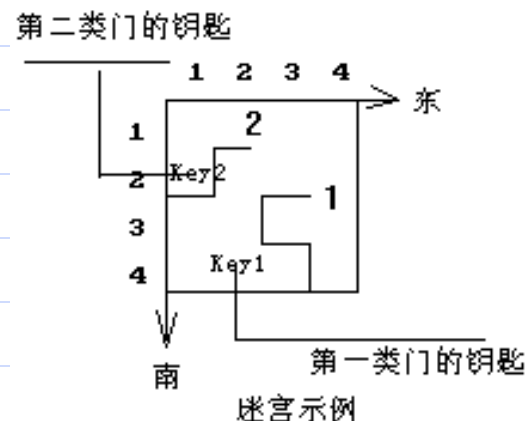
例题一 拯救大兵瑞恩

(CTSC99)

- ◆ 有一个长方形的迷宫，被分成了 N 行 M 列，共 $N \times M$ 个单元。
- ◆ 南北或东西方向相邻的两个单元之间可以互通，或者存在一扇锁着的门，又或者存在一堵不可逾越的墙。
- ◆ 迷宫中有一些单元存放着钥匙，总共有 P 类钥匙，对应 P 类门。只有对应的钥匙才能打开对应的门。

例题一 拯救大兵瑞恩 (CTSC99)

- ◆ 从一个单元移动到另一个相邻单元的时间为 1 ，拿取所在单元的钥匙的时间以及用钥匙开门的时间忽略不计。
- ◆ 求从 $(1, 1)$ 到 (N, M) 的最短时间。
- ◆ N, M 不大于 15 ， P 不大于 10 。

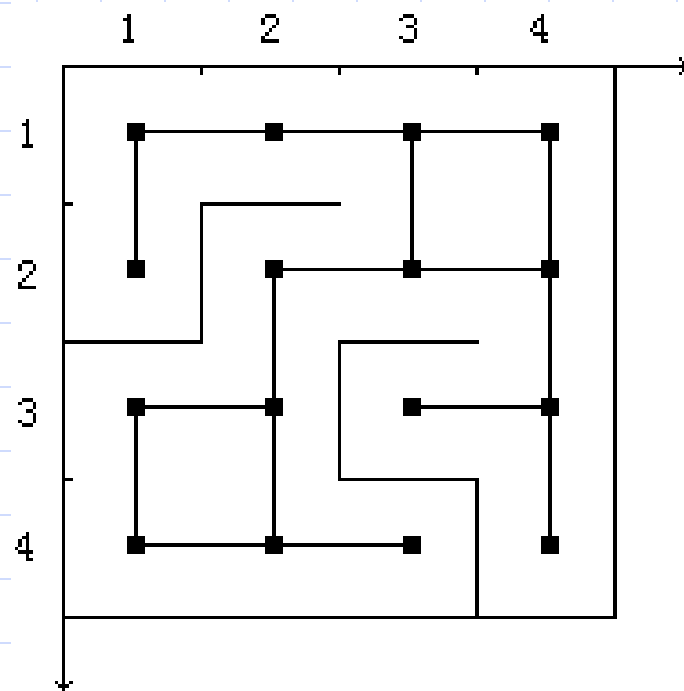


分析—简化问题

◆ 忽略门和钥匙

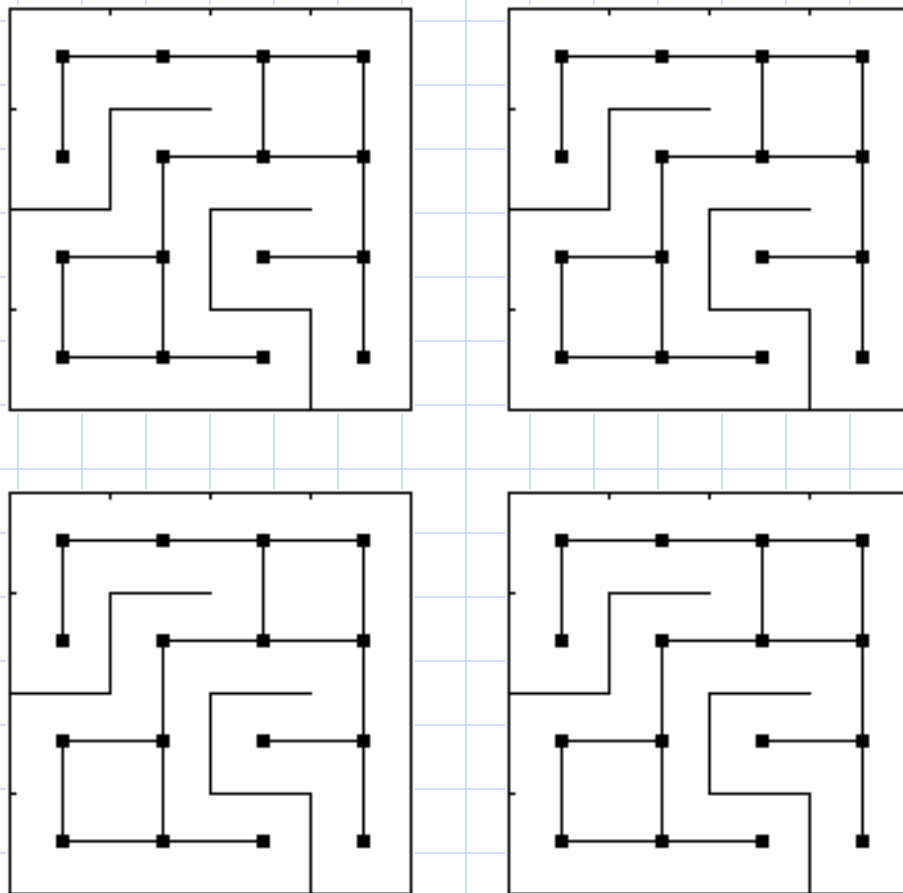
。

◆ 把每个单元看成顶点，相互连通的单元之间连一条边权为 *1* 的边。



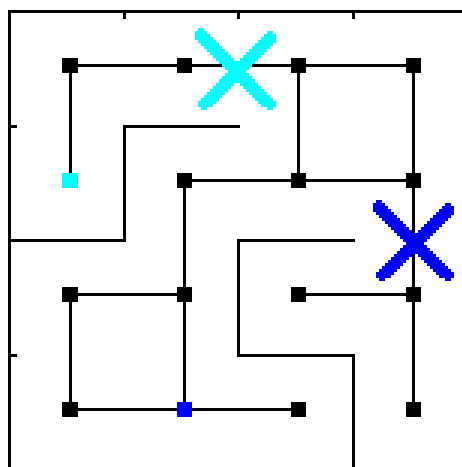
分析—分层

- ◆考虑钥匙状态对门的影响。
- ◆把图分成 2^P 层，分别对应持有钥匙的 2^P 种状态。

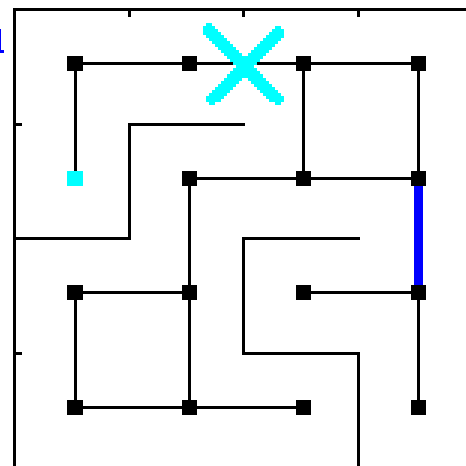


分析一边 (1)

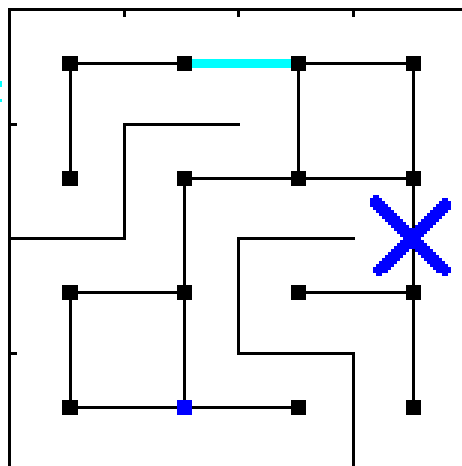
◆ 根据钥匙的状态改造每层图，使相邻的连通节点间有长度为 1 的边。



key1

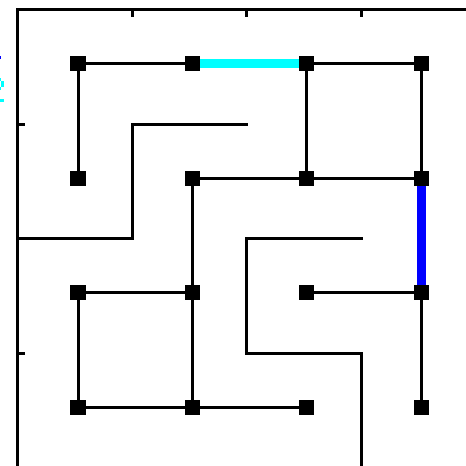


key2



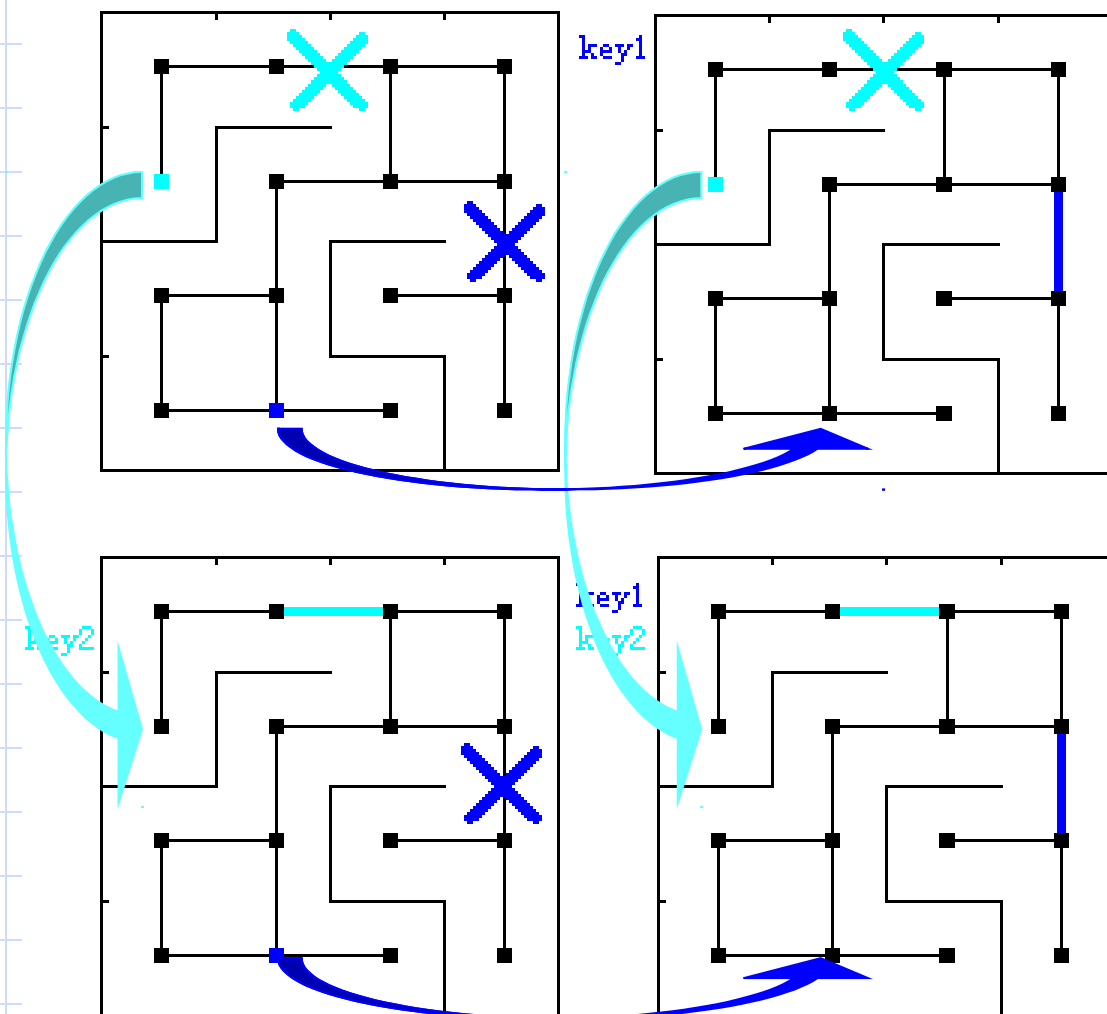
key1

key2



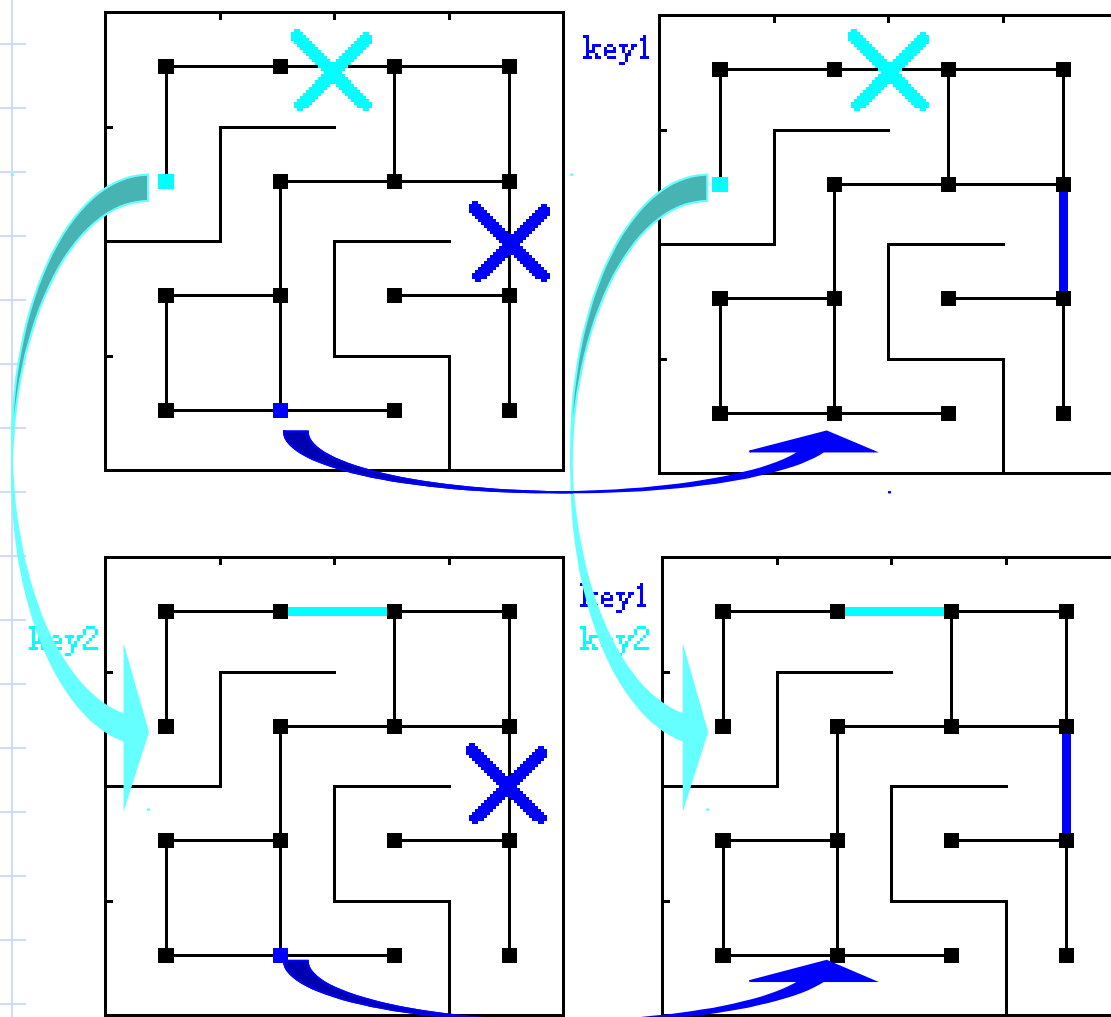
分析一边 (2)

◆ 对于存有钥匙的顶点，向表示得到钥匙后钥匙状态的层的对应顶点连一条长度为0的边。



分析—复杂度

- ◆ 使用宽度优先搜索求最短路。
- ◆ 时间复杂度和空间复杂度均为 $O(2^P NM)$ 。



小结

- ◆ 将图进行分层是因为在同一层图上难以准确地表现出图在不同条件下的状况或图的其他因素。
- ◆ 分层的图分别表示不同的条件，加强了图的性质，使得在分层图能够使用基本的最短路算法求解原来的复杂问题。

例题二 roads (CEOI98)

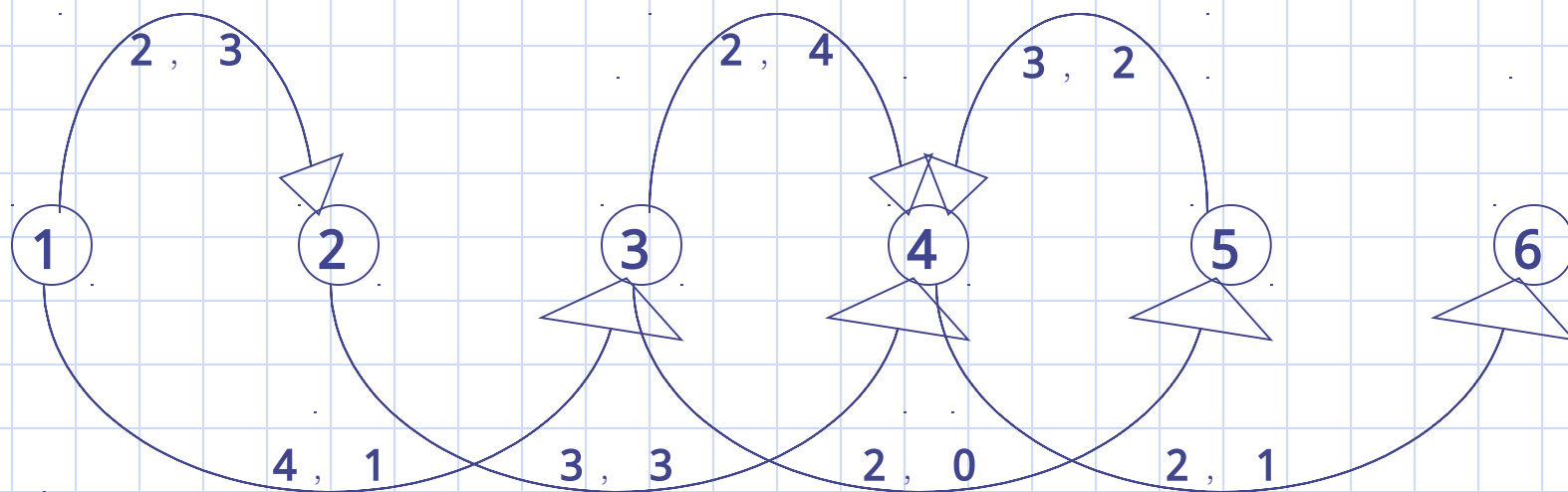
- ◆ n 个城市有单向道路连接。
- ◆ 每条路有固定的长度和费用。
- ◆ 路径上的费用不大于 k 。
- ◆ 求从城市 1 出发到达城市 n 的最短路径。

例题二 roads (CEOI98)

- ◆ 费用 k 是不大于 10000 的非负整数
- ◆ 城市数 n 是不大于 100 的正整数
- ◆ 道路数 m 是不大于 10000 的正整数
- ◆ 每条道路的长度是不大于 100 的正整数
- ◆ 每条道路的通行税是不大于 100 的非负整数。

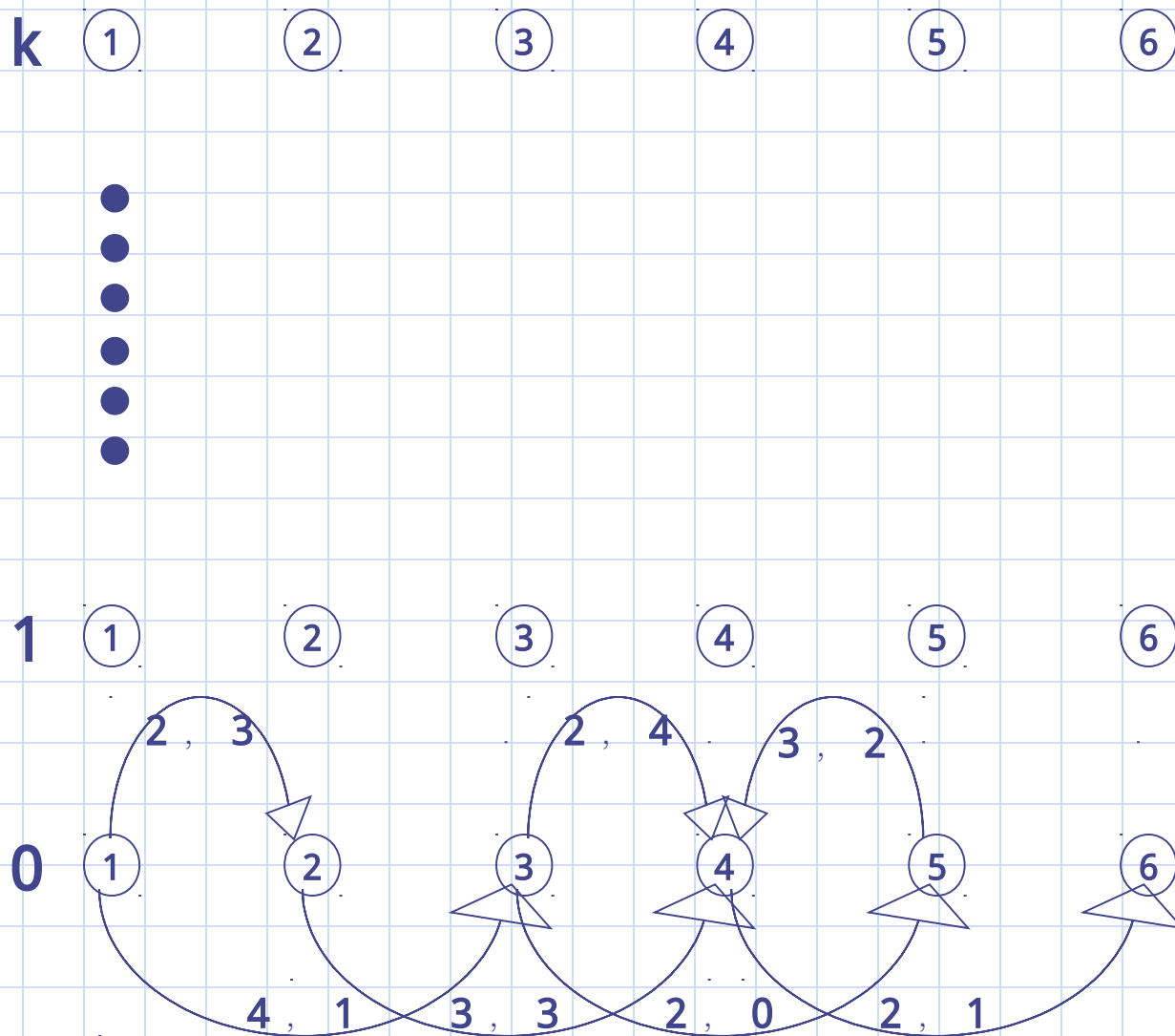
分析一图

- ◆ 我们把城市看成节点，城市之间的道路看成边。
- ◆ 本题与一般求最短路的问题相比，不同之处在于边上有费用、距离两个权值。



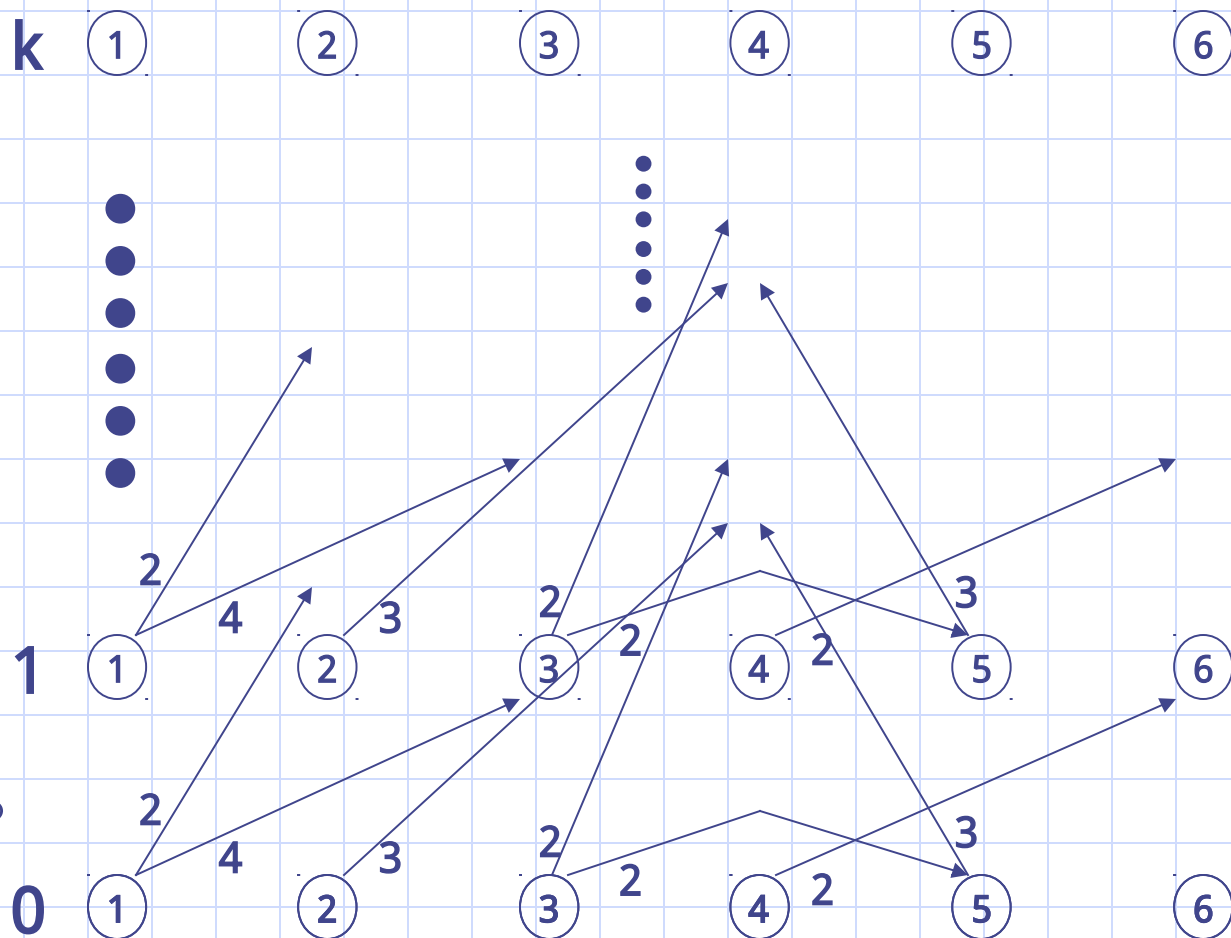
分析—算法—分层

◆把图拆分成 $k+1$ 层，表示到达该层顶点所需的费用分别为 0 到 k 。



分析—算法—一边

◆ 每条边拆成 $O(k)$ 条边，
边的两个顶点的所在层的
费用之差表示费用，
边的权值表示道路长度。



分析—算法—复杂度

- ◆ 由于道路长度是正整数，采用 Dijkstra 算法求最短路。
- ◆ 图是稠密的，优先队列直接使用一维数组。
- ◆ 时间复杂度为 $O(k(kn^2+m))$ 。

分析—算法二

- ◆ 由于费用是非负的，这意味着边只能从一个节点指向同一层的节点或费用更大的层的节点。
- ◆ 按照费用从低到高的顺序对每层求最短路，而非一次性对所有点求最短路。
- ◆ 每一层求最短路的时间复杂度为 $O(n^2+m)$ 。
- ◆ 时间复杂度降为 $O(k(n^2+m))$ 。

分析—算法三

- ◆ 由于题目已经给定费用的最大值，所以我们很自然地直接以费用的多少进行分层。
- ◆ 但是我们忽略了一个条件：道路长度是正整数，而不仅是非负整数。
- ◆ 可以以道路长度进行分层，然后使用动态规划。

分析—算法三—转移方程

◆ 令 $f[i,j]$ 表示到达城市 j 长度为 i 的所有路径所花费的最少费用。

◆ 转移方程为：

$$\begin{cases} f[0,1]=0 \\ f[0,j]=\infty \quad (j=2\dots n) \\ f[i,j]=\max\{f[i-len,j_0]+fee\} \end{cases}$$

(城市 j_0 到城市 j 有一条长度为 len ，费用为 fee 的道路)

分析—算法三—复杂度

- ◆ 设每条道路长度的最大值为 L 。
- ◆ 那么总共有 $O(nL)$ 个阶段，每个阶段的转移的复杂度 $O(m)$ 。
- ◆ 算法三的时间复杂度为 $O(nLm)$ ，效率有所提高。

小结

- ◆ 分层图的层是我们构建模型时复制的，许多图的元素都是相同或相似的，不需要增加额外的空间或操作。
- ◆ 分层图中往往层与层之间拓扑有序，可以逐层求最短路。
- ◆ 特别地，当同层的节点拓扑无关时，就可以使用动态规划代替最短路算法。

总结

建立模型

把难以表现同一层图上的因素用分层图表示

优化算法

挖掘分层图的特殊性质，有针对性地利用分层性质

Email:122683511@sina.com