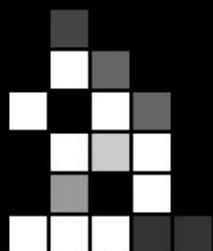


解析一类组合游戏

四川省绵阳南山中学 王晓珂



国际象棋，中国象棋，围棋

各类取石子游戏

Alice & Bob 的各种消遣游戏

1) 2 人游戏

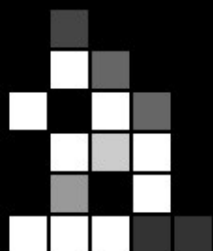
2) 没有平局

3) 2 人的待遇相同

判断是否存在必胜策略

存在时寻找必胜策略

尽量小的时空花费



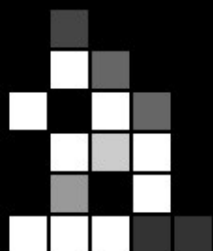
怎样分析组合游戏

归纳

?

分解游戏

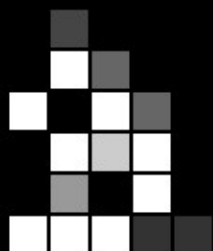
转化



归纳 的对象

必败状态的特征

SG 函数值



分解游戏：

游戏的和：

将一个完整的游戏看作若干子游戏的和
两名参与者轮流操作若干子游戏，每次操作可以选择任意一个子游戏进行操作，最后操作者胜利。

利用这样的游戏构造出基子游戏的和！
游戏

Sprague-Grundy 函数

它是定义在组合游戏状态上的函数

请注意 $g(x) = 0$ 当且仅当 x 为必败状态

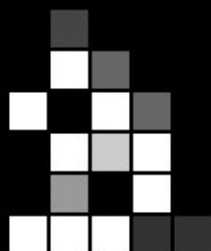
用 $g(x)$ 表示 x 状态的函数值。

游戏状态的 SG

→ 必胜状态、策略

它的定义如下：

$$g(x) = \min \{ n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq g(y) \text{ for } y \in F(x) \}$$



Sprague-Grundy 定理

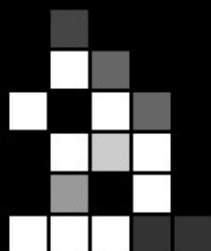
$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1) \text{ xor } g_2(x_2) \dots g_n(x_n)$$

例题 1

n i m 游戏

两人轮流从若干石堆中取走石子，每次可以取走任意一堆中任意数目的石子，但必须取走至少一枚，取走最后一枚石子的人胜利。

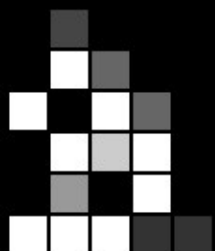
先取的人是否存在必胜策略？
如果存在，怎样保证必胜？



多堆石子的游戏：

$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1) \text{ xor } g(x_2) \text{ xor } \dots \text{ xor } g(x_n)$

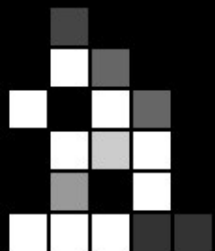
SG值：(第 i 堆石子的个数是 x_i)
 状态：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ..



转化游戏

等价转化

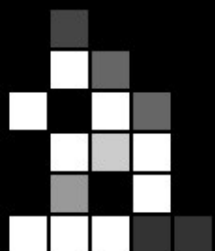
不等价转化

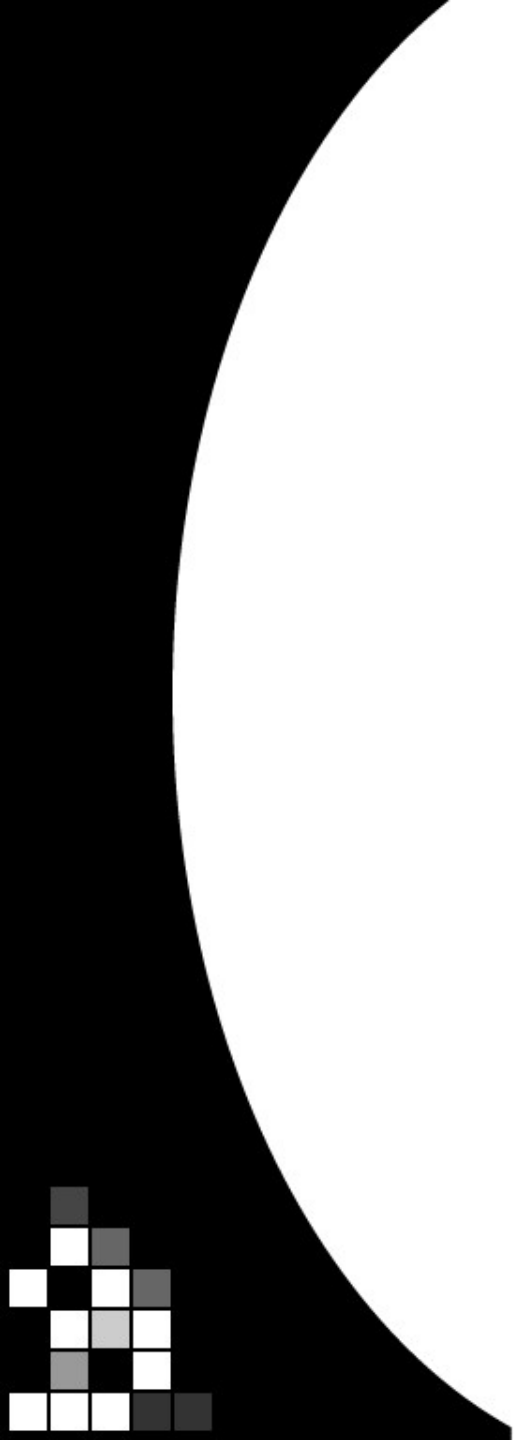


例题 1 :

ACM ICPC 2006 Asia Regional
Contest, Beijing
A Funny Stone Game

David 玩一个石子游戏。游戏中，有 n 堆石子，被编号为 $0..n-1$ 。两名玩家轮流取石子。每一轮游戏，每名玩家选取 3 堆石子 i, j, k ($i < j, j \leq k$, 且至少有一枚石子在第 i 堆石子中)，从 i 中取出一枚石子，并向 j, k 中各放入一枚石子（如果 $j=k$ 则向 k 中放入 2 颗石子）。最先不能取石子的人输。





石堆
1 :

石堆
2 :

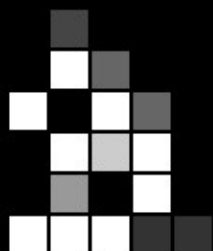
石堆
3 :



新操作：

拿走一个非 0 的石堆，并
放入 2 个规模小于他的石堆
(可以为 0)

游戏可以分解！



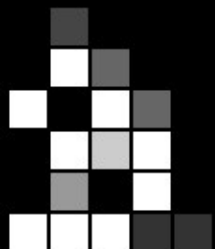
例题三

IPSC 2003 Got Root?

Alice&Bob 在一个无向图上玩伐木游戏，**无向图有唯一的根**。两人轮流从图中截取一条边，将与根部相连的部分抛弃。

这样，最先不能操作的人输。

对于给出的无向图，Alice 先行，两人都按最优策略操作，输出胜者的名字。



转化成链？

图转化成树 → ~~Nim!~~ 树转化成链 → 求出 SG 值

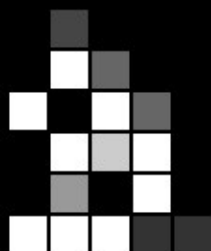
树转化成 链

简单情况：

状态只有根节点一个分叉

猜想：**Nim!**

从末端开始进行这样的操作，将分叉的地方合并成一条链，长度为每条链的异或结果，SG 值不变。

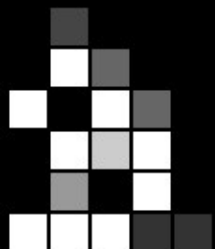


图转化成树

猜想：

将环上的点缩为一点，所有的边都保留，如果他的端点缩去了，那么将它的端点替换为缩成的点，SG 值不变。

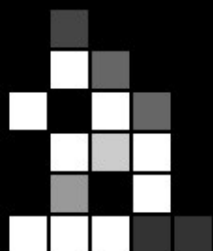
self-loop 与一条长为 1 的链是等价的



总结：

以上三种方法只作启发之用，实际应用之中，我们还不仅要掌握已知的方法，还要将其灵活地结合起来运用。

解决组合游戏并不困难，重要的是拓宽知识，多做总结，灵活运用、扩展已知方法。



谢谢

