由感性认识到理性认识

——透析一类搏弈游戏的解答过程

认识事物的过程

事物的现象 → ? → 事物的本质

认识的感性阶段　　　　认识的理性阶段

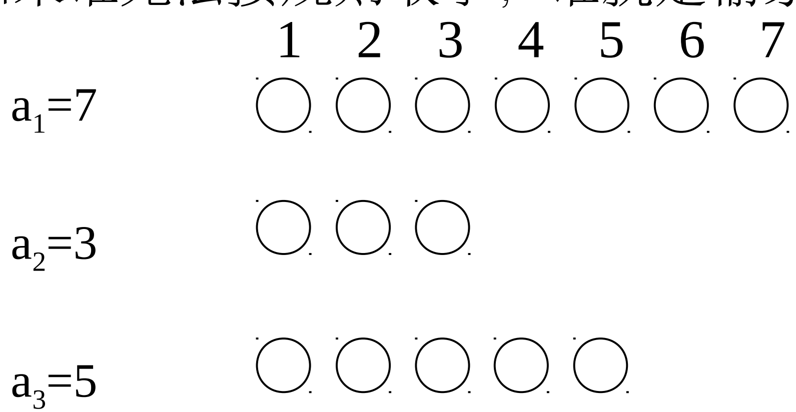
人们认识事物，总是从简单入手。

并不是人人都能从简单的事物中得到一般性的规律。

究竟如何才能由浅入深呢?

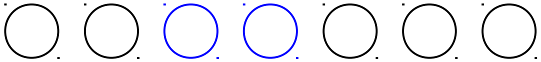
游戏

- 甲乙两人面对若干排石子。
- 每一排石子的数目可以任意确定。
- 两人轮流按下列规则取走一些石子：
  - 每一步必须从某一排中取走两枚石子；
  - 这两枚石子必须是紧紧挨着的；
  - 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。

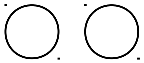


规则分析

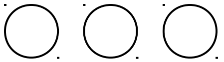
a_1=7



a_1=2



a_2=3

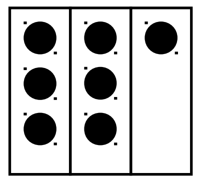


- 如果一排有 7 枚石子
- 而你取了 3 、 4 这两枚石子，
- 可以看作是将这一排分成了两排，
- 其中一排有 2 枚石子，另一排有 3 枚石子。

✍局面的排数可能会随着游戏的进行而增加。

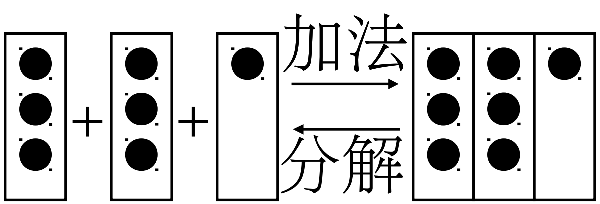
从简单入手

- 用一个无序多元组 (a_1, a_2, …, a_n)，来描述游戏过程中的一个局面。

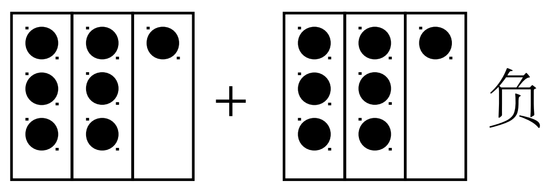


(3, 3, 1)

- 若先行者有必胜策略，则称为“胜局面”。
- 若后行者有必胜策略，则称为“负局面”。
- 若初始局面可以分成两个相同的“子局面”，则乙有必胜策略。



(3)+(3)+(1)　　(3, 3, 1)



(3, 3, 3, 3, 1, 1)

局面的分解

X + X = 负

胜 + 负 = 胜

负 + 负 = 负

胜 + 胜 = ?

X + 负 = X

X + C+C = X

局面与集合

- 我们只关心局面的胜负。
- 一个局面可以用一个集合来描述。
- 这实质上是简化了局面的表示。
- 能不能进一步简化一个局面的表示呢?

X + C+C = X

(2, 2, 2, 7, 9, 9) = (2, 2, 2, 7) + (9)+(9) $\longrightarrow$ (2, 2, 2, 7)

用集合 {2, 7} 来表示 $\longleftarrow$ (2, 7)

类比

- 局面的加法
  - 胜 + 负 = 胜；
  - 负 + 胜 = 胜；
  - 负 + 负 = 负；
  - 胜 + 胜 = 不定。

- 二进制的 01 加法 VS 局面的加法
  - ✓ 1 + 0 = 1； 胜 + 负 = 胜；
  - ✓ 0 + 1 = 1； 负 + 胜 = 胜；
  - ✓ 0 + 0 = 0； 负 + 负 = 负；
  - ✗ 1 + 1 = 0； 胜 + 胜 = 不定。

☝ 二进制数的不进位加法：对二进制数的每一位，采用 01 加法。

$$\begin{array}{r} 0011 \\ +\quad 1010 \\ \hline 1001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1010 \\ +\quad 1010 \\ \hline 0000 \end{array}$$

- 二进制数的加法 VS 局面的加法

胜+负=胜　!0+0=!0

负+负=负　0+0=0

胜+胜=?　!0+!0=?

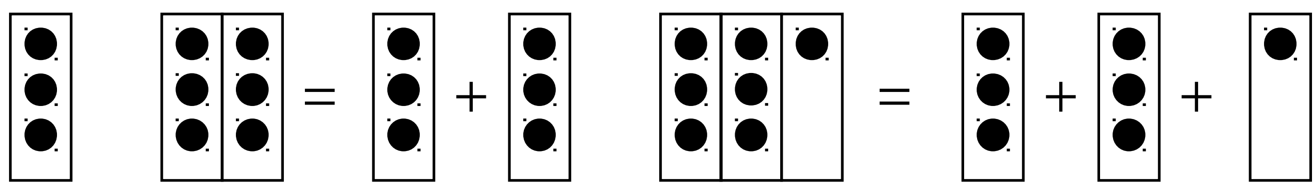
胜⇔!0， 负⇔0 ⇐

✍局面的加法，与二进制数的加法，性质完全相同。

联想

- 能否用一个二进制数，来表示一个局面呢?
- 用符号 #S，表示局面 S 所对应的二进制数，简称局面 S 的值。
- #S=0⇔S 负， #S≠0⇔S 胜。
- $\#S=\#(a_1, \ldots, a_n)=f(a_1)+\ldots+f(a_n)$ 。
- 关键就在于函数 **f(x)** 的构造。

S



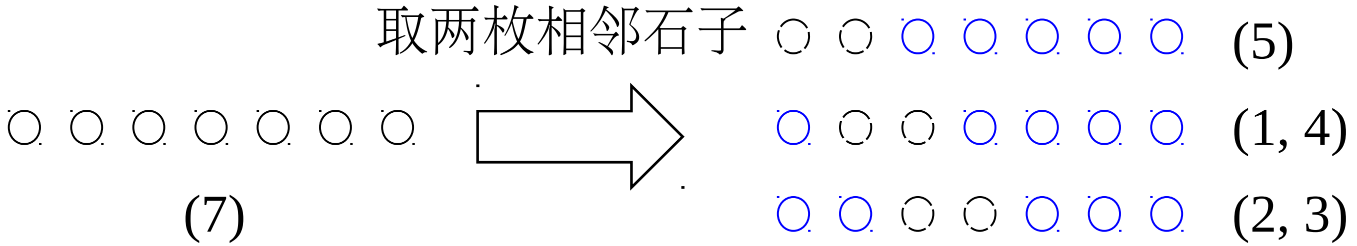
(3)　(3, 3) = (3) + (3)　(3, 3, 1) = (3) + (3) + (1)

#S　#(3)　#(3, 3)=#(3)+#(3)　#(3, 3, 1)=#(3)+#(3)+#(1)

#(3, 3, 1)=f(3)+f(3)+f(1)

构造

- 集合 g(x)：表示局面 (x)，下一步可能局面的值的集合。



g(7)={#(5), #(1, 4), #(2, 3)}

- 可以证明，令函数 f(x) 为 g(x) 中没有出现的最小非负整数，满足要求。
- 如果 g(x)={0, 1, 2, 5, 7, 8, 9}，则 f(x)=3 。
- 令 G(x) 为 g(x) 在非负整数集下的补集。
- 令 **f(x)=min{G(x)}**，满足要求。

例子

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	0	0	1	1	2	0	3	?

(7)

(5) #(5)=f(5)=0

(1, 4) #(1, 4)=f(1)+f(4)=0+2=2

(2, 3) #(2, 3)=f(2)+f(3)=1+1=0

g(7)={0, 2} ， G(7)={1, 3, 4, 5, …}

f(7)=min{G(7)}=min{1, 3, 4, 5, …}=1

$a_1=7$

$a_2=3$

$a_3=5$

#(7, 3, 5)=f(7)+f(3)+f(5)=1+1+0=0

局面 (7, 3, 5) 是负局面

后走者（乙）有必胜策略

推广

- 把游戏规则改变一下
  - 一次取紧紧相邻的两枚石子;
  - 一次取紧紧相邻的三枚石子;
  - 一次取紧紧相邻的任意多枚石子;
  - 一次取某一排中的任意两枚石子，不要求紧紧相邻;
  - 一次取某一排中的任意多枚石子，不要求紧紧相邻;
  - ……
- 此类博弈游戏的特点
  - 甲乙两人取石子;
  - 每一步只能对某一排石子进行操作;
  - 每一步操作的约束，只与这排石子的数目或一些常数有关;
  - 操作在有限步内终止，并不会出现循环;
  - 谁无法继续操作，谁就是输家。

此类博弈游戏的一般性解法

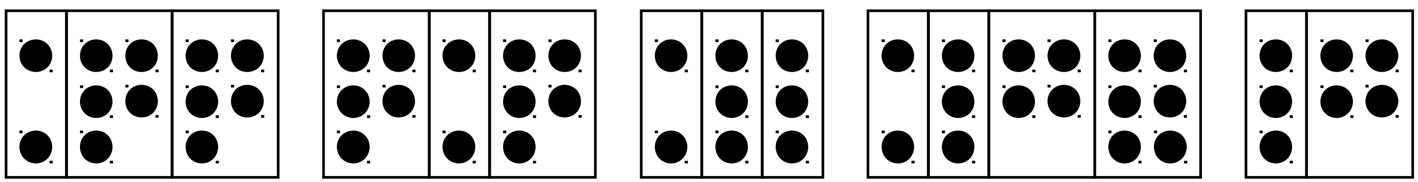
- 判断一个局面，究竟谁有必胜策略
  - 设局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$；
  - S 的值 $\#S=f(a_1)+\ldots+f(a_n)$ （二进制数的加法）；
  - 如果 $\#S\neq0$，则先行者有必胜策略;
  - 如果 $\#S=0$，则后行者有必胜策略。
- 函数 f(x) 的求法
  - $f(0)=0$；
  - g(x) 表示局面 (x)，下一步可能局面的值的集合;
  - 令 G(x) 为 g(x) 在非负整数集下的补集;
  - 则 $f(x)=\min\{G(x)\}$ 。

小结（一）优点 & 缺点

- 优点
  - 适用范围广，可以直接用于大多数此类游戏
  - 与穷举相比，速度快，时空复杂度低
- 缺点
  - 另一个游戏
    - 有若干堆石子，两人互取。无法取子者输。
    - 一次只能在一堆中取，至少一枚，至多不限。
    - 对于这个游戏，可以证明令 $f(x)=x$ ，就满足要求。
  - 有些游戏可以直接推导出函数 $f(x)$ 的表达式

小结（二）如何优化算法

- 可以看作是对搜索算法的优化。
- 优化算法的过程，可以看作是对局面的表示进行了简化。
- 本质：避免了对相同局面的穷举，即避免重复搜索。

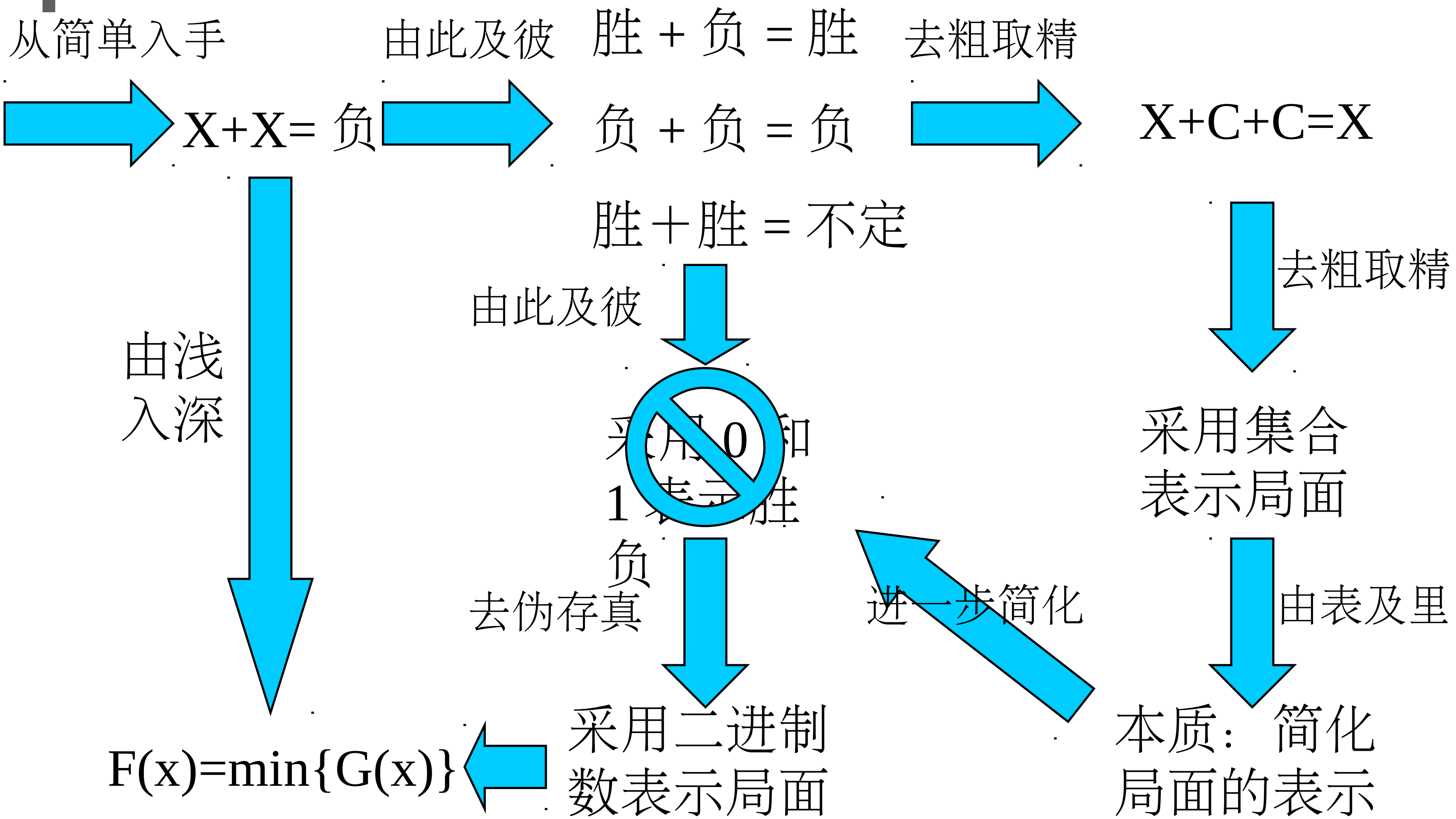


无序组：(2, 5, 5)　(5, 2, 5)　(2, 3, 3)　(2, 3, 4, 6)　(3, 4)

集合：{2}　{2}　{2}　{2, 3, 4, 6}　{3, 4}

二进制数：01　01　01　01　11

小结（三）如何由浅入深



从简单入手
X+X= 负
由此及彼
胜 + 负 = 胜
负 + 负 = 负
胜＋胜 = 不定
去粗取精
X+C+C=X
去粗取精
采用集合
表示局面
由表及里
本质：简化
局面的表示
进一步简化
由此及彼
采用 0 和 1 表示胜负
去伪存真
采用二进制
数表示局面
F(x)=min{G(x)}
由浅
入深

由感性认识到理性认识的途径

- 去伪存真
- 去粗取精
- 由此及彼
- 由表及里

总结

- 此类游戏的一般性解法
  - $F(x)=\min\{G(x)\}$
- 算法优化的本质
  - 避免重复搜索
- 如何由浅入深
  - 去伪存真，去粗取精
  - 由此及彼，由表及里