

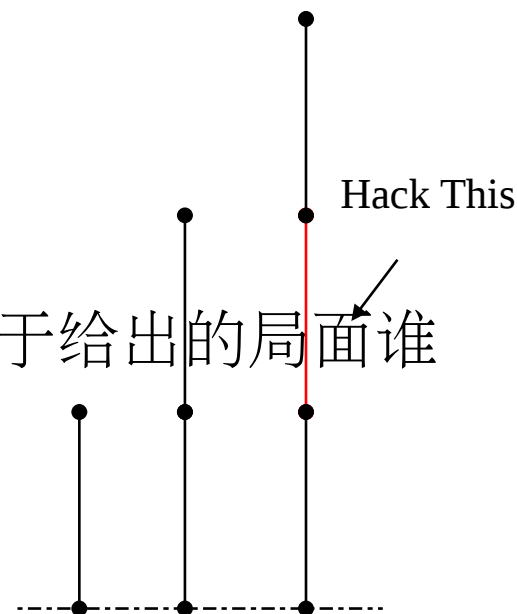
浅谈如何解决不平等博弈问题

广东省中山市第一中学 方展鹏

引言

- 给出 n 棵竹子，高度分别为 $a_1, a_2 \dots a_n$ ，玩家 L 和 R 在这些竹子上面进行游戏，规则如下：
 - ① 两人轮流操作，玩家 L 先手；
 - ② 对于每次操作，先选定一棵高度不为 0 的竹子，然后砍掉该竹子的某一段，并且将与竹子底部不相连的部分也去掉；
 - ③ 最先无法进行操作的人输。

假设玩家 L 和 R 都采取最优策略，问对于给出的局面谁会获胜。



引言

- 对于上述问题，根据 The Sprague-Grundy Theorem，我们可以轻松地设计出一个时间复杂度为 $O(n)$ 的算法。

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1) \oplus g(x_2) \dots \oplus g(x_n)$$

- 详见 2007 年王晓柯前辈的论文

引言

- The Sprague-Grundy Theorem 能在本题使用的前提条件
- 对于任意局面，玩家 **L** 和玩家 **R** 的可选决策都相同
- 如果两者的可选决策不相同会怎样？
- 我们不妨在游戏规则处再多加一条：竹子的每一段都被标上了 **L** 或者 **R**，玩家 **L** 只能砍被标上 **L** 的段，玩家 **R** 只能砍被标上 **R** 的段。
加上上述规则后，玩家 **L** 和玩家 **R** 的可选决策就不相同了。
同时我们还发现 **The Sprague-Grundy Theorem** 在上述问题上也不再成立。

引言

- 本文所要探讨的正是如何解决这类两个玩家的
可选决策集合不相同的博弈问题，也称之为不
平等博弈问题（ **Partizan Games** ）

概览

- 第一部分：介绍如何利用 **Surreal Number** 分析一类不平等组合游戏
- 第二部分：介绍如何通过动态规划、迭代等方法解决不平等博弈问题
- 第三部分：总结全文

Surreal Number 的定义

- 一个 **surreal number** 由两个集合组成。我们称这两个集合为“左集合”与“右集合”。
- 通常情况下，我们会将 **surreal number** 写作 $\{ L \mid R \}$ ，其中 **L** 表示左集合，**R** 表示右集合。
- 左集合和右集合中的元素也为 **surreal number**，且右集合中不存在元素 x 使得左集合中存在元素 y 满足 $x \leq y$ 。

\leq 的定义

- 对于 surreal number $x = \{ X_L \mid X_R \}$ 和 $y = \{ Y_L \mid Y_R \}$ ，我们称 $y \leq x$ 当且仅当不存在 $x_L \in X_L$ 使得 $y \leq x_L$ 且 $y_R \in Y_R$ 使得 $y_R \leq x$

以及不存在 $x \leq y \wedge \neg(y \leq x)$ 。

- 得出 \leq 的定义后，我们还可以定义 $<$ 、 $=$
- 我们称 $x < y$ 表示 $x \leq y \wedge y \not\leq x$
- 我们称 $x = y$ 表示 $x \leq y \wedge y \leq x$

Surreal Number 的构造

- 第一个 surreal number : $\{\Phi \mid \Phi\} = \{|\} = 0$
- 构造出 0 后，尝试利用 0 构造新的 surreal number，可得：
 - $\{0 \mid\}$ ， $\{|\ 0\}$ 以及 $\{0 \mid 0\}$
- 因为 $0 \leq 0$ ，所以 $\{0 \mid 0\}$ 不是一个合法的 surreal number。
- 因为 $\{|\ 0\} < 0 < \{0 \mid\}$ ，所以令 $\{|\ 0\} = -1$ ， $\{0 \mid\} = 1$ 。

Surreal Number 的构造

- 利用 $0, 1, -1$ 作为左集合与右集合的元素，我们可以构造出 17 个合法的 surreal number
- 因为 $\{1 \mid\} > 1$ ， $\{\mid -1\} < -1$ ，所以令 $\{1 \mid\} = 2$ ， $\{\mid -1\} = -2$ 。
- 因为 $0 < \{0 \mid 1\} < 1$ ，且 $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = 1$ ，因此我们令 $\{0 \mid 1\} = 1/2$ 。
- 同理我们可以得出 $\{-1 \mid 0\} = -1/2$ 。

Surreal Number 的构造

- 如此类推，我们可以构造出所有形如 $j/2^k$ 的有理数。具体而言，我们可以定义如下函数来建立部分有理数与 **surreal number** 的对应关系，我们称这个函数为达利函数：

$$\delta(x) = \begin{cases} \{|\}, x = 0 \\ \{\delta(x-1) \mid \}, x > 0 \wedge x \in \mathbb{Z} \\ \{|\delta(x+1)\}, x < 0 \wedge x \in \mathbb{Z} \\ \{\delta(\frac{j-1}{2^k}) \mid \delta(\frac{j+1}{2^k})\}, x = \frac{j}{2^k} \wedge j, k \in \mathbb{Z} \wedge k > 0 \end{cases}$$

Surreal Number 的基本定理

- 定理 对于一个 surreal number $x = \{ L \mid R \}$ ，若集合 L 中有最大元素 l_{\max} ，那么 $\{ l_{\max} \mid R \} = x$ ；类似地，若集合 R 中有最小元素 r_{\min} ，那么 $\{ L \mid r_{\min} \} = x$ 。
- 例子：
 - $\{ 2, 3 \mid 4, 5 \} = \{ 3 \mid 4, 5 \} = \{ 2, 3 \mid 4 \} = \{ 3 \mid 4 \}$ 。

Surreal Number 的加法运算

- 对于 surreal number $x = \{X_L \mid X_R\}$ 和 $y = \{Y_L \mid Y_R\}$ ，它们的加法运算被定义为：

$$x + y = \{X_L \mid X_R\} + \{Y_L \mid Y_R\} = \{X_L + y, x + Y_L \mid X_R + y, x + Y_R\} \quad ①$$

$$X + y = \{x + y : x \in X\} \quad ②$$

- 其中对于集合 X 与 surreal number y ， $\emptyset + y = y$
- 边界情况：

游戏的定义

- 游戏有 2 名参与者，两人轮流操作。
- 游戏中的任意时刻有确定的状态。
- 参与者操作时将游戏从当前状态转移到另一状态，规则规定了在任意一个状态时，参与者可以到达的状态集合。
- 游戏总会在有限步数之内结束（没有平局）。
- 参与者拥有完全的信息。
- 本文只讨论最先不能进行操作者输的情况。

游戏的表示

- 对于一个游戏，如果它当前处于状态 P ，玩家 L 可以转移到的状态的集合为 P_L ，玩家 R 可以转移到的状态的集合为 P_R ，那么我们把这个游戏写作 $P = \{ P_L \mid P_R \}$ 。
- 例子：当前所处的状态： P
 玩家 L 可以到达的状态： $A B C$
 玩家 R 可以到达的状态： D
 则： $P = \{ A B C \mid D \}$

Surreal Number 与游戏

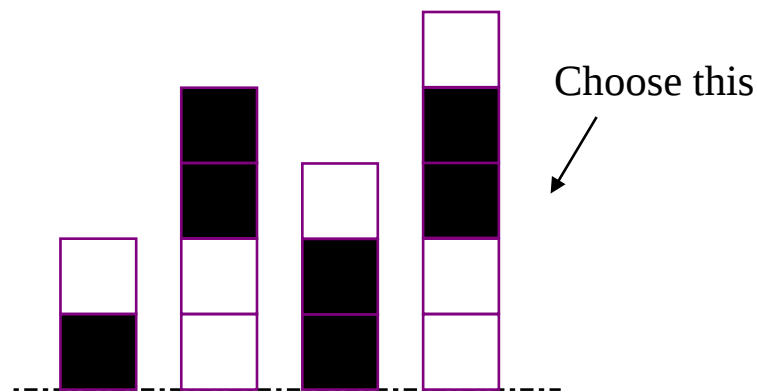
- 如果 $G > 0$, 那么无论先手还是后手, 玩家 **L** 都会获胜。
 - 如果 $G < 0$, 那么无论先手还是后手, 玩家 **R** 都会获胜。
 - 如果 $G = 0$, 那么谁后手谁获胜。
-

Surreal Number 与游戏

- 游戏的和
- 如果一个游戏 G 可以被分解成 n 个不相交的子游戏 G_1, G_2, \dots, G_n , 使得对 G 的每次操作等价于从 n 个子游戏中选取一个来进行操作, 那么我们称游戏 G 是游戏 G_1, G_2, \dots, G_n 的和, 写作 $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ 。
- 定理 如果游戏 G 等于 surreal number x , 游戏 H 等于 surreal number y , 那么游戏 $G + H$ 等于 surreal number $x + y$ 。

Procrastination

- 有一个叫 **Procrastination** 的游戏，规则如下：
 - 游戏一开始有四座由正方体叠成的塔，且所有的正方体要么黑色，要么白色。
 - 有两个玩家 **L** 和 **R**，两个人轮流进行操作。
 - 每次操作，玩家要选定一个正方体，然后拿走该正方体以及位于该正方体上面的所有正方体，并且规定玩家 **L** 只能选定白色的正方体，玩家 **R** 只能选定黑色的正方体。
 - 最先不能进行操作的人输。



Procrastination

- 对于一个局面，如果玩家 L 无论先手还是后手都能获胜，那么我们称这是一个 L 局面。
- 定义子局面 C 表示一个由三座塔组成的局面。一个完整的游戏局面可以由一个子局面 C 以及一座塔 T 构成，写作 (C, T) 。
- 对于两个子局面 C_1 和 C_2 ，我们称 C_1 不差于 C_2 当且仅当对于任意的一座塔 T ，当 (C_2, T) 为 L 局面时 (C_1, T) 也为 L 局面。
- 给出两个子局面 C_1 和 C_2 ，问是否 C_1 不差于 C_2 。

Procrastination

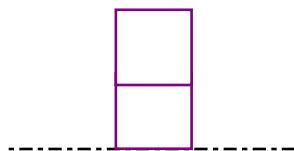
- 考虑只有一座塔的情况:



$$G = \{|\} = 0$$



$$G = \{0|\} = 1$$

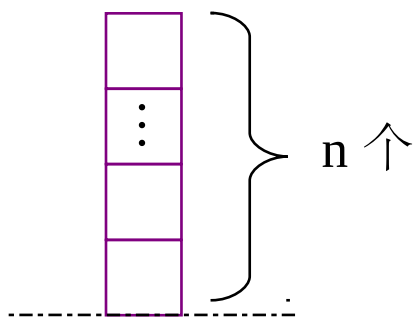


$$G = \{0,1|\} = 2$$

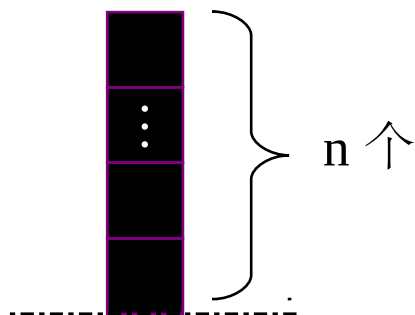


Procrastination

- 不难得出:



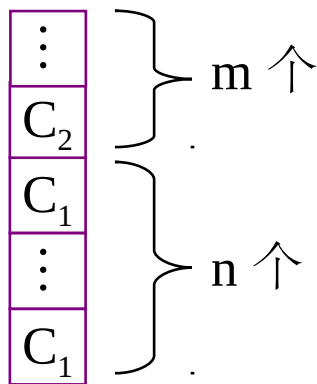
$$G = n$$



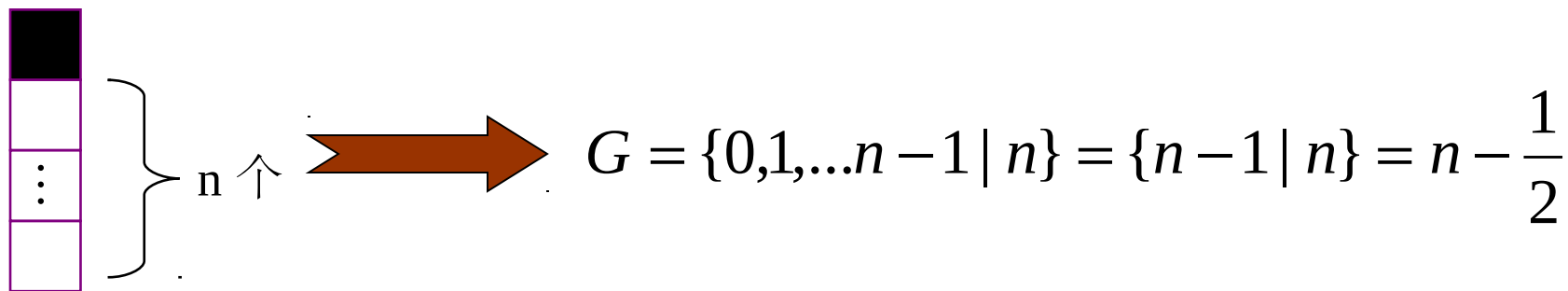
$$G = -n$$

Procrastination

■ 考察:

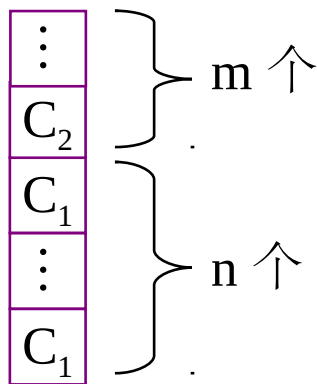


■ 当 $m=1$ 时:

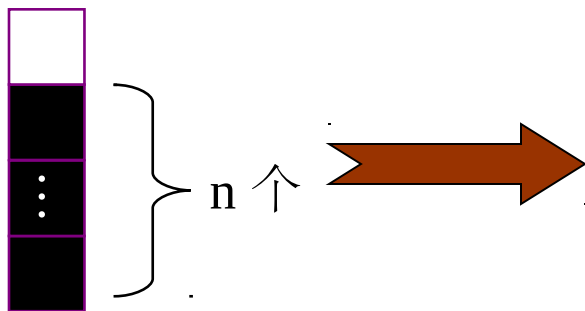


Procrastination

■ 考察:



■ 当 $m=1$ 时:

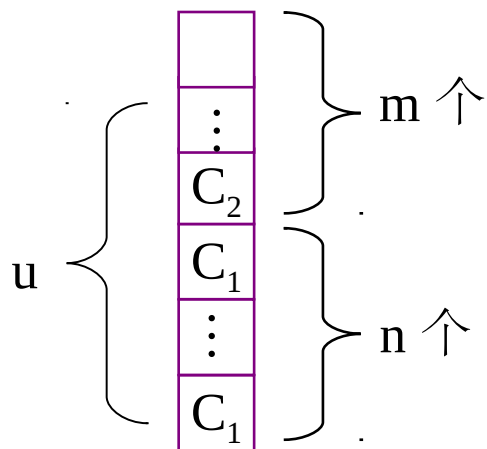


$$G = \{0, -1, \dots, -n+1 \mid -n\} = -n + \frac{1}{2}$$

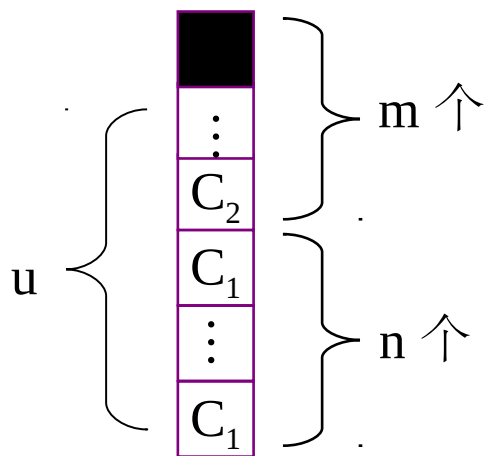
Procrastination

■ 当 $m > 1$ 时:

设 u 为由最下面的 $n+m-1$ 个正方体叠成的塔对应的 surreal number



$$G = u + \frac{1}{2^m}$$

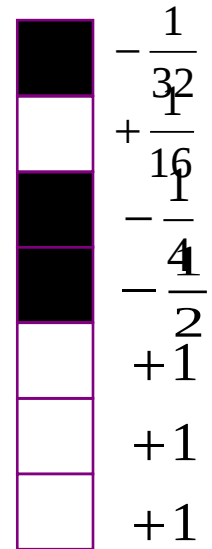


$$G = u - \frac{1}{2^m}$$

Procrastination

SurrealNumber(T) //T[i] 表示塔 T 从下往上数第 i 个正方体的颜色

```
1.  x ← 0
2.  i ← 1
3.  n ← 塔 T 的大小
4.  while i ≤ n and T[i] = T[1]
5.      if T[i] = 白色 then x ← x + 1 else x ← x - 1
6.      i ← i + 1
7.  k ← 2
8.  while i ≤ n
9.      if T[i] = 白色 then x ← x + 1/k else x ← x - 1/k
10.     i ← i + 1
11.     k ← k * 2
12. return x
```



O(N)

Procrastination

- 考虑局面 G 由 n 座塔 T_1, T_2, \dots, T_n 组成
- T_1, T_2, \dots, T_n 对应的 surreal number 为 x_1, x_2, \dots, x_n

$$G = x_1 + x_2 \dots + x_n$$

Procrastination

G 为 L 局面 $\longleftrightarrow G > 0$

C_1 不差于 C_2 \longleftrightarrow 当 $C_2 + H > 0$ 时, $C_1 + H > 0$

判断是否 $C_1 \geq C_2$!

总结

- 从上面的例子可以看出，利用 **surreal number** 分析不平等博弈问题，不仅思路清晰，而且程序的实现也相当简洁，但不同的不平等博弈问题分析思路也不尽相同，在我的论文中提供了多种分析思路。希望本文能为大家打开一扇窗，在遇到博弈问题的时候多一些解决问题的手段。



The Easy Chase

- 玩家 **L** 与玩家 **R** 很喜欢玩一个双人的棋类游戏，游戏规则如下：
- 在一个大小为 $n*n$ 的棋盘上，有一个白色的棋子，初始位置为 (wx, wy) ，与一个黑色的棋子，初始位置为 (bx, by) 。玩家 **L** 执白先行，玩家 **R** 执黑后行，两人交替行棋。
- 如果当前是玩家 **L** 行棋，玩家 **L** 可以在上下左右四个方向中选一个并让他的棋子在该方向前进一格；如果当前是玩家 **R** 行棋，玩家 **R** 可以在上下左右四个方向中选一个并让他的棋子在该方向前进一格或两格（均不能走出棋盘）。一个人取得胜利当且仅当他的棋子走到了对方的棋子当前所在的位置。

The Easy Chase

- 玩家 **L** 与玩家 **R** 都采取同样的策略行棋：如果一方能赢，一定会用尽量少的步数去赢；如果一方会输，一定会拖尽量多的步数才输。
- 假设玩家 **L** 与玩家 **R** 都绝顶聪明，行棋中途均不犯错误，你能提前预测最终的胜者以及棋局持续的步数吗？
- 数据规模： $2 \leq n \leq 20$

The Easy Chase

- 用一个五元组 $(x1, y1, x2, y2, cur)$ 来刻画一个局面
- 对于一个局面 G ，我们用函数 $f(G)$ 来描述 G 的胜负情况。定义 **infinite** 为一个很大的正整数，不妨设为 10^8 。如果局面 G 的胜者为玩家 L 且棋局持续 x 步，则 $f(G) = \text{infinite} - x$ ；如果局面 G 的胜者为玩家 R 且棋局持续 x 步，则 $f(G) = -\text{infinite} + x$ 。

The Easy Chase

- 边界: $f(x, y, x, y, L) = -\text{infinite}$, $f(x, y, x, y, R) = \text{infinite}$ 。
 - 转移:
 - $f(x_1, y_1, x_2, y_2, L) = \max\{ f(x_1', y_1', x_2, y_2, R) - \text{sign}(f(x_1', y_1', x_2, y_2, R)) \}$
 - $f(x_1, y_1, x_2, y_2, R) = \min\{ f(x_1, y_1, x_2', y_2', L) - \text{sign}(f(x_1, y_1, x_2', y_2', L)) \}$
- $$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

其中 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, (x_1', y_1') 为白色棋子在 (x_1, y_1) 时走一步可以到达的位置, (x_2', y_2') 为黑色棋子在 (x_2, y_2) 时走一步可以到达的位置。

The Easy Chase

- 用类似于 **SPFA** 的迭代算法来解决局面的计算顺序问题

Count(G')

初始化 f ，对于所有的局面 G ，令 $f(G) = 0$

枚举所有的终止局面 G_e ，确定 $f(G_e)$ 的值，并将 G_e 放入队列 q 中

while q 不为空

 取出队首元素，并令其为 Y

for 每个可以一步到达局面 Y 的局面 X

$tmp \leftarrow f(X)$

 根据状态转移方程重新计算 $f(X)$

if $tmp \neq f(X)$ **and** X 不在队列 q 中 **then** 将 X 放入队列 q 中

return $f(G')$

证明 $0 < \{ 0 \mid \}$

- 证明: $0 \leq \{ 0 \mid \} \ \& \ \neg (\{ 0 \mid \} \leq 0)$
- 先证明: $0 \leq 0$

定理 1 证明

- $\forall a \in A : a < \{A|B\}$
- $\forall b \in B : b > \{A|B\}$
- $\forall a \in A : a \leq \{A|B\}$ ①; $\forall a \in A : \neg(\{A|B\} \leq a)$ ②
- 通过归纳法证明。首先当 A 为空集时命题正确
- ① 等价于 $\neg \exists a_L \in A_L : \{A|B\} \leq a_L \quad \wedge \quad \neg \exists b \in B : b \leq a$
- 上述命题的右半部分显然正确，从 **surreal number** 定义可知；其左半部分等价于 $\forall a_L \in A_L : \{A|B\} \not\leq a_L$ 也就是：

$$\forall a_L \in A_L : (\exists a' \in A : a_L \leq a' \quad \vee \quad \exists a_{LR} \in A_{LR} : a_{LR} \leq \{A|B\})$$
- 在上面命题的左边令 $a'=a$ ，则有 $\forall a_L \in A_L : a_L \leq a$ 质可以知道该命题是正确的，所以上面命题是正确的。所以①是正确的。类似地可以得出②也是正确的。

定理 2 证明

- 不妨设存在 $x = \{x_1, x_2, \dots \mid X_R\}$ 且 $x_1 < x_2$
- 证明: $\{x_1, x_2, \dots \mid X_R\} \leq \{x_2, \dots \mid X_R\}$
 $\{x_2, \dots \mid X_R\} \leq \{x_1, x_2, \dots \mid X_R\}$
- 通过定义证明

定理 3 证明

- 先证明：如果 surreal number x 大于集合 A 中的任意元素且小于集合 B 中的任意元素，则 $x = \{ A, X_L \mid X_R, B \}$
- 利用定义证明
- 设 x 为 a 、 b 之间最早出生的 surreal number，且 x 的父母为 x_L 和 x_R ，则有：
- $\{x_L \mid x_R\} = \{a, x_L \mid b, x_R\} = x$
- $\{a \mid b\} = \{a, x_L \mid b, x_R\} = x$

Procrastination

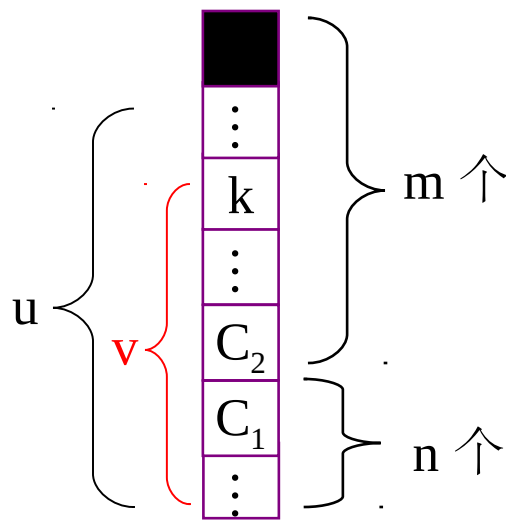
- 我们先将在塔 T 最上面的 $m+1$ 个正方体从上往下编号为 $m, m-1, m-2, \dots, 0$ ，然后分两种情况进行讨论：

①若编号为 m 的正方体为黑色正方体，那么我们自上往下找到第一个白色正方体。设其编号为 k ，塔 $T[1..n+k]$ 对应的 surreal number 为 v ，塔 $T[1..n+m-1]$ 对应的 surreal number 为 u 。

由定理 2 可得：
$$G = \left\{ v - \frac{1}{2^k} \mid v - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} \dots - \frac{1}{2^{m-1}} \right\} = \left\{ v - \frac{1}{2^k} \mid v - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{m-1}} \right\} = \left\{ \frac{v * 2^m - 2^{m-k}}{2^m} \mid \frac{v * 2^m - 2^{m-k} + 2}{2^m} \right\}。$$
由

达利函数可知
$$G = \frac{v * 2^m - 2^{m-k} + 1}{2^m} = v - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^m} =$$

$u - \frac{1}{2^m}。$



Procrastination

②若编号为 m 的正方体为白色正方体, 那么我们自上往下找到第一个黑色正方体。设其编号为 k , 塔 $T[1..n+k]$ 对应的 surreal number 为 v , 塔 $T[1..n+m-1]$

对应的 surreal number 为 u 。由定理 2 可得: $G = \{v + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \mid v + \frac{1}{2^k}\}$

$= \{v + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{m-1}} \mid v + \frac{1}{2^k}\} = \{\frac{v * 2^m + 2^{m-k} - 2}{2^m} \mid \frac{v * 2^m + 2^{m-k}}{2^m}\}$ 。由达利函数可知 G

$$= \frac{v * 2^m + 2^{m-k} - 1}{2^m} = v + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} = u + \frac{1}{2^m}。$$

Surreal Number 的一些基本定理

- 定理 1 对于一个 surreal number $x = \{ L \mid R \}$ ， x 大于 L 中的任意一个元素且小于 R 中的任意一个元素。
- 定理 2 对于一个 surreal number $x = \{ L \mid R \}$ ，若集合 L 中有最大元素 l_{\max} ，那么 $\{ l_{\max} \mid R \} = x$ ；类似地，若集合 R 中有最小元素 r_{\min} ，那么 $\{ L \mid r_{\min} \} = x$ 。
- 定理 3 如果 $a < x < b$ ，且 x 是 a 到 b 之间最早出生的 surreal number，那么 $\{ a \mid b \} = x$ 。

Surreal Number 加法运算的基本性质

- 对于 surreal number $x = \{ X_L \mid X_R \}$ 和 $y = \{ Y_L \mid Y_R \}$, $x + y = \{ X_L + y, x + Y_L \mid X_R + y, x + Y_R \}$ 也是一个合法的 surreal number。
- surreal number 的加法满足交换率。
- surreal number 的加法满足结合率。

游戏的定义

- 游戏有 2 名参与者，两人轮流操作。
- 游戏中的任意时刻有确定的状态。
- 参与者操作时将游戏从当前状态转移到另一状态，规则规定了在任意一个状态时，参与者可以到达的状态集合。
- 游戏总会在有限步数之内结束（没有平局）。
- 参与者拥有完全的信息。
- 本文只讨论最先不能进行操作者输的情况。