维护森林连通性——动态树

华东师大二附中
陈首元

本文将介绍一种数据结构，称为动态树，它能够维护一个带权的森林，并支持 link 操作，用途是将两棵树合并。支持 cut 操作，用途是删除一条边，是一棵树分为两棵。在网络优化中的用途十分广泛。

[动态树的基本操作]

Parent(v)： 返回 v 的父亲节点，如果是根返回 null。
Root(v)：返回包含节点 v 的树的根。
Cost(v)：返回边（v,parent(v)）的费用，假定 v 不是根。
Mincost(v)：返回从 root(v)到 v 的路径上权最小的边。
Update(v,x:real)：使从 root(v)到 v 路径上的边的费用+x。
Link(v,w,x:real)：将以 v 为根的树连接到节点 w 上，（v,w）的费用为 x。
Cut(v)：从树中删除(v,parent(v))，分为两棵树。
Evert(v)：翻转，将 v 设为根，并将 v 到 root(v)上所有边反向。

1、通过两次 update 可以修改一条边的费用。
2、Mincost 可以改为 Maxcost

假设初始情况下有 n 个单独的点，接下来要执行 m 步上述的操作。

显然，通过保存 dparent(v)，dcost(v)，分别记录 v 的父节点，与边的费用，可以实现朴素算法，在 O(1)实现 parent,cost,link,cut 而 root,mincost,evert,update 的复杂度与树的深度有关，最坏情况下是 O(n)。

本文的算法，并不直接对整棵树进行操作，通过这种算法，m 步操作可以在 O(mlogN)内实现。

将树中的边分成实边虚边两种，从每个顶点出发，最多有 1 条实边连向它的子节点。一个路径包括一些自底向上连通的实边。剩下的边都是虚边，通过记录 dparent(v),dcost(v)，可以将所有的虚边都保存下来，虚边可以在一定条件下转化为实边并保存。如果 tail(P)是树根，那么 dparent(P)=null。

通过对完全由实边组成的路径进行操作，就能够实现动态树操作了。这里假定已经实现了以下的一些路径操作，先说明这些路径操作的功能，再介绍如何通过这些路径操作实现前面所说的基本操作，最后再讨论实现这些路径操作的方法。

[路径结构的基本操作]

Path(v)：返回包含 v 的路径 （每个路径有一个标志）
Head(p)：返回路径 p 的首节点
Tail(p)：返回路径 p 的尾节点
Before(v)：返回路径中 v 的前驱节点

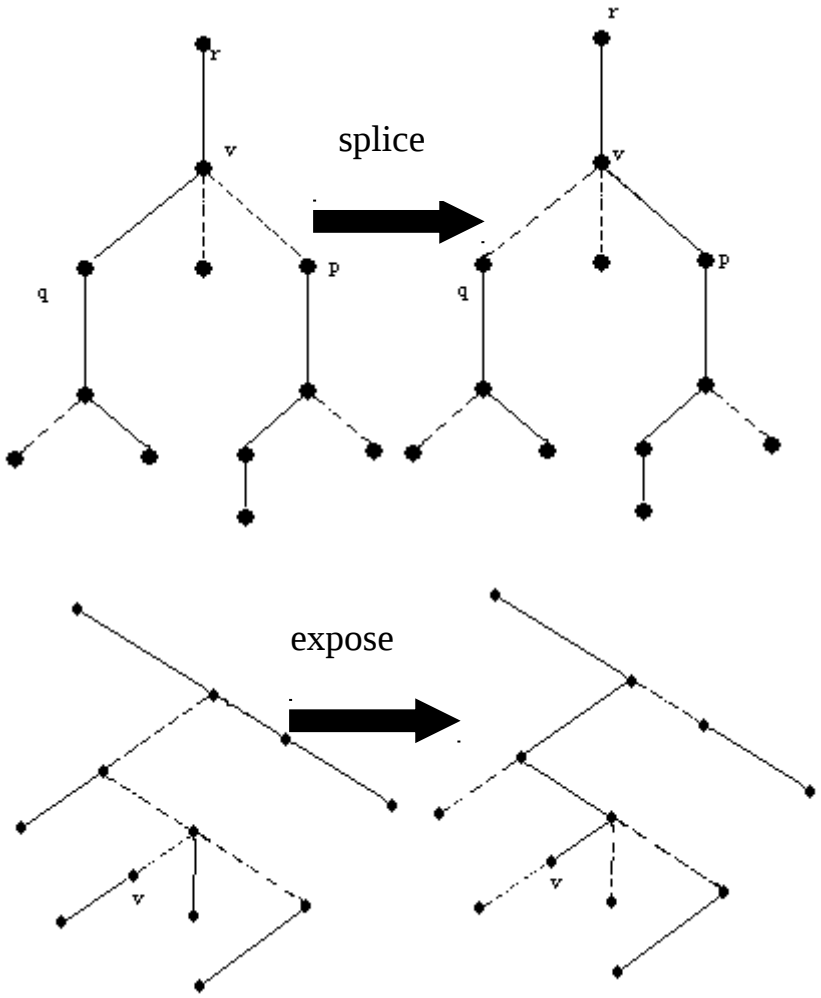
After(v)：返回路径中 v 的后继节点
Pcost(v)：返回边(v,after(v))的费用
Pmincost(p)：返回 p 中费用最小的边
Pupdate(p,x:real)：将 p 中每条边的费用+x
Reverse(p)：将 p 中的每条边反向
Concatenate(p,q,x:real)：添加边（tail(p),head(q)）费用为 x，将路径 p,q 合并
Split(v)：通过删除与 v 相连的边，将路径 path(v)分为三部分，返回 p,q,x,y，
p 是 head(path(v))到 before(v),q 是 after(v)到 tail(path(v))。
x 是（before(v),v）的费用，y 是(v,after(v))的费用。
如果 v 是头节点，那么 p 是 null，如果 v 是尾节点那么 q 是 null。

通过下面两种操作，我们就能维护树中的实边虚边，并实现动态树的基本操作。
Splice(p:path)：作用是将路径 p 向更靠近根的方向增长。
实现方法：把虚边(tail(P),dParent(p)) 变为实边，为了维护实边的性质，将原来从 dParent(P)中连出的边设为虚边。
下面是伪代码

```
Function splice(p:Path);
Begin
  U:=dparent(tail(P));
  [q,r,x,y]:=split(u);
  If q<>nil Then Begin
       dparent(tail(q)):=v;
       dcost(tail(q)):=x;
     End;
     P:=concatenate(p,path(P),dcost(tail(P));
     If r=nil Then return p
     Else return concatenate(p,r,y);
End;
```

Expose(v:vertex)：作用是将从 v 到 root(v)中所有边设为实边。
实现方法：不断调用 splice 直到根为止。

```
Fucntion expose(v:vertex);
Begin
  [q,r,x,y]:=split(v);
  If q<>nil Then Begin
       Dparent(tail(q)):=v;
       Dcost(tail(q)):=x;
  End;
  If r=nil Then p:=path(V)
    Else p:=concatenate(path(V),r,y);
    While dparent(v)<>nil do p:=splice(p);
    Return p;
End;
```



通过上面 2 个操作，和路径的基本操作，我们就能把 8 个动态树基本操作实现了。

```
Function Parent(v:vertex)
Begin
  If v=tail(path(v)) Then Return Dparent(v)
    Else Return after(v)
End;

Function cost(v:vertex)
Begin
    If v=tail(path(v)) Return dcost(v)
    Else Return Pcost(v)
End;

Function root(v:vertex);
Begin
  Return tail(expose(v));
End;

Function Mincost(v:vertex);
```

```
Begin
  Return Pmincost(expose(v));
End;


Procedure Update(v:vertex;x:real);
Begin
  Pupdate(expose(v),x);
End;

Procedure Link(v,w:vertex;x:real);
Begin
  Concatenate(path(v),expose(w),x);
End;

Function Cut(v:vertex);
Var
  p,q:path;
  x,y:real;
Begin
  Expose(v);
  [p,q,x,y]:=split(v);
  Dparent(v):=nil;
  Return y;
End;

Procedure Evert(v);
Begin
  Reverse(expose(v));
  Dparent(v):=nil;
End;
```

至此，我们已把树的问题转化为链的问题了。下面介绍如何实现这些路径操作。

[路径结构的实现]

可以用伸展树存放路径，路径上的点以它们离头节点的距离大小为权值组成伸展树。

reverse 操作：

对每个节点保存 reverse 标志，如果为真，表示以这个节点为根的子树是需要翻转的，即对这棵子树的每个子节点的左右儿子互换。在访问一个节点 v 的时候，如果 reverse 标志为真那么交换左右子节点，并将 reverse 标志设为假，再把 reverse 标志传递到子节点（取反）

执行 reverse 操作时只需改变根节点的 reverse 值

pupdate 操作：

对每个子节点 v 保存 2 个量，ecost，change。cost 表示(v,after(v))的权值，change 代表了

以 v 为根的子树中边权值的修正量。在访问一个节点 v 的时候，令 ecost=ecost+change，再将 change 设为 0，最后让 change 值传递到子节点（加到子节点的 change 值上）
另外对每个节点都保存 emin，表示以此节点为根的子树中的最小权值。
执行 update 操作时只需修改根节点的 change 值
Path(v)：先沿父指针向上找到根节点并返回，然后沿此路径向下并维护 reverse,change,ecost 等值
Tail(p)：返回最右子孙
Head(p)：返回最左子孙
Before,After 与伸展树中的操作一样
（path,tail,head 的时间复杂度与 splay(v)相同，不会影响以后的分析）
Concatenate(p,q,x)：令 r=tail(p) 首先 splay(r)，再令 path(q) 作为 r 的右儿子，访问 head(path(q))，并修改它的 ecost 值为 x。最后修改 r 的 emin 值，使它符合定义。
Split(v)：首先 splay(v)，维护 change，reverse 的值，删掉与其相联的两条边（如果没有返回 null），返回值为：[v 的左儿子，v 的右儿子，tail(v 左儿子)的 ecost，head(v 右儿子)的 ecost。（伸展树操作：Splay(v)，树通过旋转将 v 节点调整至树根，旋转时维护 emin）
在每次 split 和 concatenate 操作之后，splay 最左子孙，使它成为根。

[复杂度分析]

1. 每一个动态树操作都需要用到 1 次 expose()，首先分析 expose()的次数。

对于边 v->w（动态树中，不是伸展树中），如果 v 的子孙〉w 的子孙/2，称为 A 类边，否则成为 B 类边。

显然每个点最多连出一条Ａ类边，树中每条路径上最多有 $O(\log_2 N)$条Ｂ类边。

令 p 为 B 类边中的虚边数。

执行一次 expose，可能执行许多 splice 操作，每一次 splice 操作：

添加一条 B 类虚边进入路径：p+1

这种情况最多发生 $O(\log_2 N)$次

添加一条 A 类虚边进入路径：p-1

可能发生许多次，但代价是 p，p 是保持非负的。

由上面分析可以看出平均每次 expose 操作要执行 $O(\log_2 N)$次路径操作。（1）

2. 每次 splay 的均摊操作复杂度是 O(logN)，一个简单的结果是每次动态树操作 $O(\log^2 N)$。（如果使用 AVL，红黑树等平衡二叉树来实现路径结构的话复杂度就是 $O(\log^2 N)$，但伸展树的均摊复杂度比这个结果少了 logN）

下面更进一步分析均摊时间复杂度。

先介绍一下均摊复杂度的定义：

对整棵伸展树定义一个势 p，一个操作的均摊复杂度 a=t+p'-p，其中 t 为实际操作时间 p 为操作前的势，p'为操作之后的势。那么 m 步操作的时间复杂度 $\sum t(i)$ 为：

$$\sum_{i=1}^{m} t(i) = \sum_{i=1}^{m} (a_i + p_{i-1} - p_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i + p_0 - p_m$$

定义 s(i)为在动态树中以 i 为根子树中的节点数。定义 r(i)为 $\log_2(s(x))$。定义一棵动态树的势为这棵动态树中所有节点的 r(i)和。

伸展树有一个的性质：每一次 splay 操作的均摊复杂度不超过：3(r(t)-r(x))+1（t 为这棵伸展树的树根），而这个性质用在这个问题里也是正确的（在 r(i)的定义改变之后）。下面简单地证明如下。

证明：用 r’(x)表示操作以后的顶点 x，r(x)表示操作以前的顶点 x。

1. 单旋转

   1+r’(x)+r’(y)-r(x)-r(y)

   <=1+r’(x)-r(x)　　(r(y)>=r’(y))

   <=1+3*(r’(x)-r(x))　　(r’(x)>=r(x))

2. 双旋转（顶点 x 不是根，且顶点 x 与 x 的父节点使他们父节点的左儿子）

   2+r’(x)+r’(y)+r’(z)-r(x)-r(y)-r(z)

   =2+r’(y)+r’(z)-r(x)-r(y)　　(r’(x)=r(z))

   <=2+r’(x)+r’(z)-2r(x)　　(r’(x)>=r’(y))and(r(y)>=r(x))

   由对数函数的性质，对于任意一对 x,y>0 x+y<=1，满足 log(x)+log(y)<=-2。

   r(x)+r’(z)-2r’(x)=log(s(x)/s’(x))+log(s’(z)/s’(x))<=-2

   即 2r’(x)-r(x)-r’(z)>=2

   由此可得 3(r’(x)-r(x))-(2+r’(x)+r’(z)-2r(x))=2r’(x)-r(x)-r’(z)-2>=0

3. 另一种情况的双旋转，分析与前一种情况类似，省略。

Splay 操作是通过多次旋转，将这些旋转的复杂度叠加就得到最多 3(r(t)-r(x))+1，于是得证。

Expose(v)操作把从 v 到动态树树根的路径上的所有虚边消除，并合并路径上的伸展树，由前面的结论，路径的合并操作均摊复杂度不超过 3*(r(tail)-r(head))+1，叠加后可得到 expose(v)复杂度不超过 3(r(root)-r(v))+k，(k 是从 v 到树根路径上虚边个数)，由前面的结论(1)，可知平均 k 是对数级别的，而 r(root)-r(v)也是对数级别的，所以 **Expose(v)**均摊复杂度为 **O(logN)**。这也是所有动态树操作的时间界。

Link-cut 操作会改变动态树的势，但仍然是对数级别的。

[应用**]**

1、 最近公共祖先

询问 v,w 的最近公共祖先，首先执行 expose(v)，再执行 expose(w)，当执行 expose(w)时，记录最近的一个再上次 expose 中被访问的点，这个点就是最近公共祖先。
每次询问需要 O(logN)时间。

2、 集合的合并与分离

可以支持 Union 和 Find 操作，还能支持以某种方式分离，而每个集合操作的时间复杂度为 O(logN)

3、 最大流

动态树可以用来优化最短路径增广算法，使每次增广的复杂度降为 O(mlogN)，并使总复杂度为 O(mnlogN)。

4、 最小生成树

动态树在最小生成树问题中有许多应用。

比如，最小生成树的增量算法、度限制生成树。还有其他许多种变形。

[实现]

直接使用前面的算法，空间复杂度会比较高，下面介绍一种本质相同的算法，空间复杂度会降低。而且编程也略微简单一些。

同样的，并不保存整棵树，而保存“虚拟树”。虚拟树中的顶点与动态树中的是一一对应的。虚拟树中的每个顶点最多连出两条实边，其余为虚边，分别成为左儿子和右儿子，其他顶点称为中间顶点。完全由实边组成的子树称为实树。对每个顶点记录它的父节点 p(x)，左儿子和右儿子 left(x)，right(x)。记每个顶点的费用为 cost(x)，其子树中最小费用为 mincost(x)。为了实现 reverse，对每个节点保存一个 reverse 的标志。为了实现 update 函数，每个节点保存 dcost,dmin 两个量：

如果 x 是一颗实树的根：dcost(x)=cost(x)

否则 dcost(x)=cost(x)-cost(p(x))

dmin(x)=cost(x)-mincost(x)

注意 dmin 是非负的。

实现 expose 需要两种操作：一种是 splay，将一棵实树（也是二叉树），从某个节点伸展使这个节点成为这个实树的根。第二种是 splice，将某个节点的一个中间节点变为左儿子，左儿子变为中间节点。

执行 expose(v)操作需要分为三步。首先沿 v 往上到虚拟树的树根，对沿路的各实树进行 splay，执行完这个步后从 v 到树根的路径上只有虚边。再沿 v 往上到虚拟树的树根，对沿路各节点执行 splice，将从 v 到虚拟树树根路径上的边变为虚边。这时 v 和树根在一个实树中了。这时再执行 splay(v)，把 v 调整为树根。

有了 expose(v)，动态树的 8 个功能就可以实现了。

可以看出，这个算法和原算法的本质是相同的，所以它们的复杂度也是一样的。即均摊每步 O(logN)。下面简单说说 splay 操作时 dcost 和 dmin 的维护。

对于 splay，假设需要旋转的边连接节点 v 与节点 v 的父节点 w，令 a,b 为旋转前 v 的左右儿子。b,c 为旋转后 w 的左右儿子。dcost 与 dmin 的变化如下：

dcost’(v)=dcost(v)+dcost(w)

dcost’(w)=-dcost(v)

dcost’(b)=dcost(v)+dcost(b)

dmin’(w)=max(0,dmin(b)-dcost’(b),dmin(c)-dcost(c))

dmin’(v)=max(0,dmin(a)-dcost(a),dmin’(w)-dcost’(w))

其他节点的量不变。

对于 splice，假设 v 是 w 的新的左儿子，w 原来的左儿子为 u

dcost’(v)=dcost(v)-dcost(w)

dcost’(u)=dcost(u)+dcost(w)

dmin’(w)=max(0,dmin(v)-dcost’(v),dmin(right(v))-dcost(right(v)))

其他节点的量不变。

[参考文献]

[1] Sleator and Tarjan A data structure for dynamic trees.

[2] Sleator and Tarjan Self adjusting binary search tree.

[3] Georgiads, Tarjan, Werneck Design of Data Structure for Mergeable Trees.

[4] 拉文德拉 K.阿胡亚 托马斯 L.马南提 詹姆斯 B.沃林 网络流理论、算法与应用 机械工业出版社