半平面交的算法及其应用

北京四中
李澎煦

基本概念

- **半平面**：平面上的直线及其一侧的部分。
- 半平面可由不等式 $ax+by+c>=0$ 确定。
- 在一个有界区域里半平面或半平面的交是一个凸多边形区域。
- n 个半平面的交是一个至多 n 条边的凸多边形。

半平面交的联机算法

procedure intersection of half-planes

输入： n 个半平面 $H_1,H_2,\ldots H_n$

输出： $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

初始化区域 A 为整个平面

依次用直线 $a_i x+b_i y+c_i=0$， $i=1,2,\ldots n$ 切割

A， 保留使不等式 $a_i x+b_i y+c_i>=0$ 成立的部分

输出 A

复杂度 $O(n*n)$，联机算法。

半平面交的分治算法

假设可以在 $O(m+n)$ 的时间内将 m 个半平面的交和 n 个半平面的交合并，则可以有一种 $O(n*\log(n))$ 的分治算法求半平面的交。

Procedure intersection of half-plane (D&C)

输入： n 个半平面 $H_1,H_2,\ldots H_n$

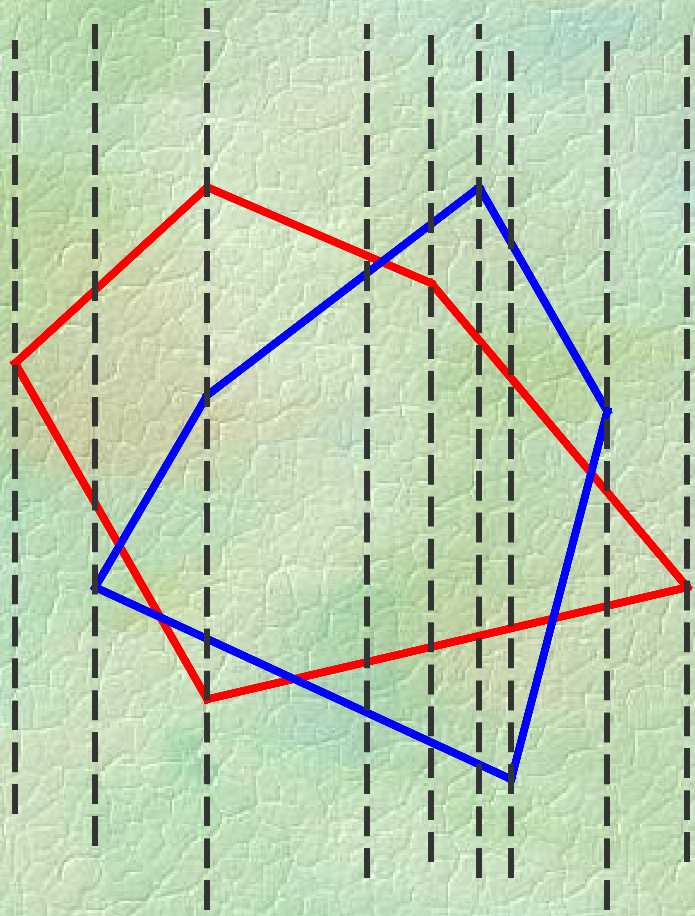
输出： $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

将 $H_1 \ldots H_n$ 分成两个大小近似相等的集合

在每个子问题中递归地计算半平面的交

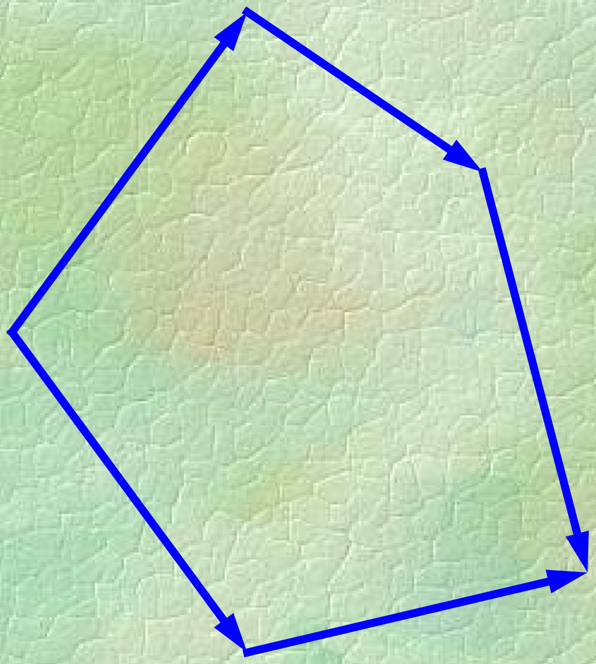
合并两个凸多边形区域形成 $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

问题的关键是怎样在 $O(m+n)$ 的时间里求两个凸多边形的交。



- 将两个凸多边形沿顶点切割成至多 $O(m+n)$ 个平行于 y 轴的梯形区域
- 每两个梯形区域的交可以在 $O(1)$ 时间内解决

描述凸多边形的方法



- 凸多边形上方和下方的顶点分别构成一个 x 坐标递增序列。
- 将这两个序列中的顶点分别作为一个链表存储，得到确定凸多边形区域的上界和下界。

凸多边形交的算法 1 ：

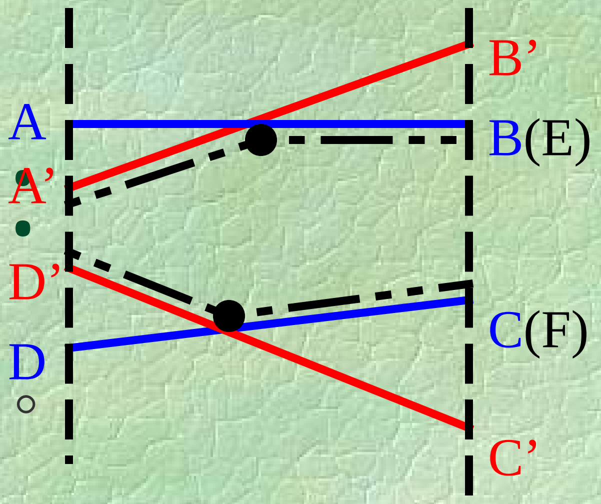
procedure intersection of convex polygon

输入：两个凸多边形区域 A 、 B

输出： $C=A\cap B$

1. 将两个凸多边形的顶点 x 坐标分类，得到序列 $x_i,i=1\ldots p$
2. 初始化区域 C 为空。
3. 处理 $\{x_1\}$
4. 依次处理区域 $(x_i,x_i+1],i=1\ldots p-1$ 。
5. 输出 C

凸多边形交的算法 2



4. 依次处理区域 $(x_i,x_i+1],i=1\ldots p-1$ 。

4.1 计算两个多边形在此区域里截得的梯形（可能退化）：*ABCD* 和 A’B’C’D’ 。

4.2 求交点 *AB*∩*A’B’* 、 *AB*∩*C’D’* 、 *CD*∩*A’B’* ，将存在的点按 *x* 坐标排序，删除重复，添加到 *C* 的上界中。

4.3 用类似的方法求 *C* 的下界

4.4 计算此区域的右侧边界 (线段的交）：*EF*=*BC*∩*B’C’* 。将 E 、 *F* 分别加入到 *C* 的上界和下界中 。

算法的复杂度

- 步 1： 由于 A 、 B 的上下界 x 坐标分别有序，可采用归并排序。复杂度 $O(m+n)$
- 步 4： 由于是按照 x 递增的顺序扫描这些区域，每条边界上的指针在整个过程中始终向右移动。两个多边形的每个顶点至多扫描一次。复杂度为 $O(m+n)$ 。
- 整个算法的时间复杂度为 $O(m+n)$ 。

问题 1

Hotter and Colder
(Waterloo local contest)

A 和 *B* 在 *10*10* 的棋盘上进行一个游戏。*A* 确定一个点 *P*， *B* 每回合移动一次。每次 *A* 都会告诉 *B*，他当前所处的位置是离 *P* 更近了 *(Hot)* 还是更远了 *(Cold)* 。（原题还要考虑距离不变的情况。）

请在 *A* 每次回答后，确定 *P* 点可能存在的区域的面积。

问题 1 分析：

- 假设 B 从 C （x_1,y_1）移动到了 $D(x_2,y_2)$， A 回答 *Hot* 。那么 $P(x,y)$ 所处的位置就满足 $|CP|>|DP|$，即:

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2>0$$

- 类似地，回答 *Cold* 对应于另一个不等式。
- 初始时可能的区域是 $[0,10]*[0,10]$ 。每回合后都用相应的不等式对应的半平面与当前区域求交。并输出交的面积。

问题 2

Nice Milk

(OOPC1)

SRbGa 有一块凸 n 边形面包，和一盆面积足够大但深度仅为 h 的牛奶。他想仅蘸 k 次（每次都保证面包垂直于盆底），使得面包蘸上牛奶的部分面积最大。

问题 2 分析

:

- 由于本题规模不大，考虑使用深度优先搜索。
- 蘸每条边都对应剩下的一个半平面，某种蘸 k 条边 $E_1 \ldots E_k$ 的方法，剩下的部分就对应于这 k 个半平面和原多边形的交。
- 考察 $C(n,k)$ 种蘸法，选其中剩下面积最小的那种。

小结

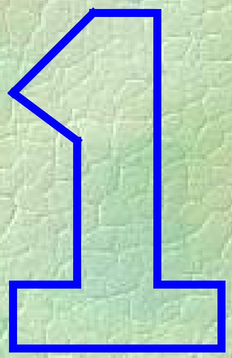
- 问题 1 是用几个半平面顺次求交，并且每次都要输出面积。显然采用联机算法合适。
- 问题 2 如果用联机算法，复杂度为 $O[C(n,k)*\underline{n}]$ ，且便于在搜索的过程中剪枝。如果用脱机的分治算法，复杂度为 $O[C(n,k)*\underline{(n+k*\log(k))}]$ 。

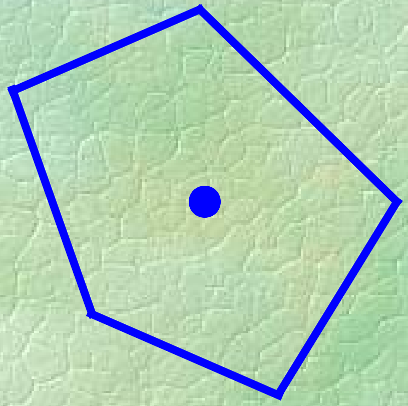
问题3：

Video

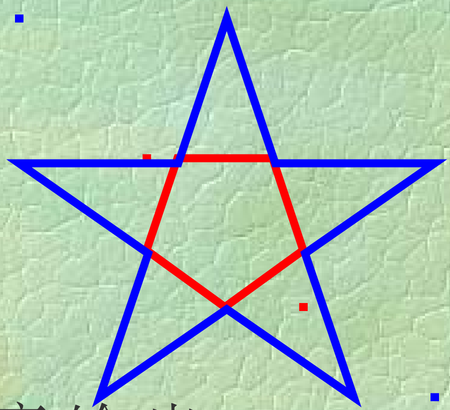
(CTSC98)

已知一个多边形 P（不一定是凸的）问在 P 中是否存在点 Q，在 Q 点能观察到整个多边形区域。





问题 3 分析：



- 若多边形的顶点按逆时针顺序给出 $V_0V_1V_2\ldots V_n$， $V_0=V_n$ 。则能够观察到边 V_iV_{i+1} 的点 Q_i 一定满足 $\overrightarrow{Q_iV_i} * \overrightarrow{Q_iV_j} \geq 0, i=0\ldots n-1$

- 能观察到所有边的点一定能够观察到整个多边形区域。
- 如果用坐标进行叉积运算，则每个约束条件都对应一个二元一次不等式（也对应于一个半平面）。本题就转化为求这 n 个半平面的交是否不为空。

问题4：

Triathlon
(NEERC2000)

n 名选手参加铁人三项赛，比赛按照选手在三个赛段中所用的总时间排定名次。已知每名选手在三个项目中的速度 U_i 、 V_i 、 W_i 。

问对于选手 i ，能否通过适当的安排三个赛段的长度（但每个赛段的长度都不能为 0 ），来保证他获胜。

问题 4 分析

：

- 假设三个赛段的长度分别为 x 、 y 、 z ，则选手 i 获胜的充要条件就是：

$$\frac{x}{u_i}+\frac{y}{v_i}+\frac{z}{w_i}<\frac{x}{u_j}+\frac{y}{v_j}+\frac{z}{w_j}$$

- 这是一个三元齐次不等式组，由于 $z>0$ ，所以不妨将每个不等式两侧都除以 z, 并令 $X=x/z$ ， $Y=y/z$ ，就得到

$$\left(1/u_j-1/u_i\right)X+\left(1/v_j-1/v_i\right)Y+\left(1/w_j+1/w_i\right)>0$$

- 本题就转化为求这 n-1 个不等式对应的半平面的交，并判断其面积是否大于 0 （即排除空集、点、线的情况）。

小结

- 问题 3 和问题 4 ，最终都转化为二元不等式组解的存在性问题。可以用半平面交的分治算法有效地解决。
- 但两个问题又略有不同，一个是 =0 、一个是 >=0 。也就是说对多边形的边界处理不同。 >=0 的不等式要考虑退化为点、线的情况，稍微复杂一点。

问题 5 ：

Run away

（CERC99）

在一个矩形 R 中有 n 个点 $P_1 \ldots P_n$，请找出一个点 $Q \in R$ 使 $min(|QP_i|)$ 最大。

问题 5 分析 1 ：

- 将 R 分成 n 个区域， $Q_1 \ldots Q_n$ ， Q_i 是 R 里离 P_i 点的距离比离其它点都小的点的集合：

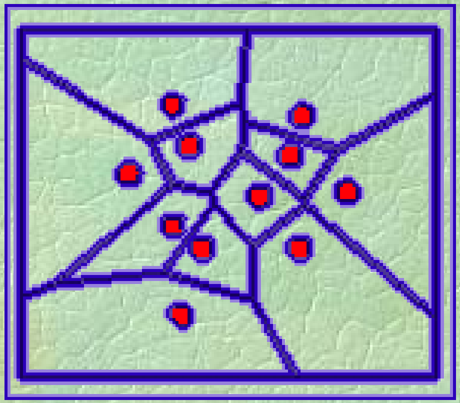
$$Q_i = \left\{ Q \middle| \left| QP_i \right| \le \left| QP_j \right|, i \ne j \right\} \cap R$$

- Q_i 可通过在 P_iP_j 的中垂线 P_i 一侧的半平面的交求得。Q_i 为一个凸多边形。
- 在 Q_i 里，离 P_i 最远的点只能出现在 Q_i 的顶点上。求其中最远的点即可。

问题 5 分析 2 ：

- 半平面的交采用分治算法，每个点的复杂度为 $O(n*\log(n))$ 。
- 对应于 P_i 的多边形最多有 $O(n)$ 个顶点，因此求 Q_i 中的最远点复杂度为 $O(n)$ 。
- 总的复杂度为 $O(n*n*\log(n))$ 。

Voronoi 图



- 实际上，由以上方法定义的 n 个多边形区域 Q_1… Q_n 就组成了一个 **Voronoi 图** 。
- *Voronoi* 图是计算几何中仅次于凸包的几何对象，有着非常广泛的应用。
- 利用半平面的交求 *Voronoi* 图的算法不是最优的。
- 分治法、平面扫描法等许多算法都能达到 $O(n*log(n))$ 的复杂度，这才是最优的。但这些算法都过于复杂，不属于本文讨论的范围。

半平面交的算法及其应用

- 基本概念
- 算法
  - 半平面交的联机算法
  - 半平面交的分治算法
- 应用
  - 问题 1 ： **Hotter and Colder**
  - 问题 2 ： **Milk**
  - 小结
  - 问题 3 ： **Video**
  - 问题 4 ： **Triathlon**
  - 小结
  - 问题 5 ： **Run away**
    - **Voronoi** 图