转化目标
在解题中的应用

湖南省长沙市长郡中学 栗师

概述

- 在解题时，总是觉得

限制太多 范围太窄 关系错综复杂	→	减少限制 放宽范围 简化关系

- 目标太远 → **转化目标**
- 解题遇到困难 → 困难需要解决！

解决某些题目，在算法设计中需要转化目标

题目——超级马(1)

在一个无限的棋盘上有一个超级马，它占据一个正方形单位格，可以完成各种移动动作。每一种移动动作由两个整数来描述——第一个数说明动作左右移动多少格(正数向右，负数向左)，第二个数说明动作上下移动多少格(正数向上，负数向下)。已知一个超级马能够完成的动作，要判断它是否能够到达棋盘上的所有位置。

题目——超级马(2)

SUP.IN

2 超级马个数k**(1<=*k*<=100)**

5 动作数n**(1<=*n*<=100)**

2 4
2 2
-3 -3
4 3
1 3

每一个动作(x_i,y_i)，**(-100<=x_i,y_i<=100)**

5
1 -3
2 1
4 1
4 -2
2 -2

SUP.OUT

TAK

NIE

TAK表示超级马能够到达所有的位置

NIE表示超级马不能够到达所有的位置

确定算法(1)

广搜？ **Time Limit Exceeded!**

动态规划？ **在某种意义上等价于广搜**

否定了上面的算法后，似乎只有一条出路了：

数学方法

确定算法(2)

每一个动作（x_i，y_i)用一个平面向量P_i表示，$P_i=(x_i,y_i)$

要判断的就是对于任意的x,y，是否都存在着一个非负整数序列c，使得下面的等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P_i = (x, y)$$

确定了数学模型： **解方程**

确定算法(3)

- 只要求当$(x,y)=(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$的情况
- 由于对称性，只需要求$(x,y)=(0,1)$的情况
- 所以最终目标：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P_i = (0,1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{方程①}$$

放大目标——

方程只有一个
但是，未知数很多

如果 数
应该比较多 有可能
有无限个。

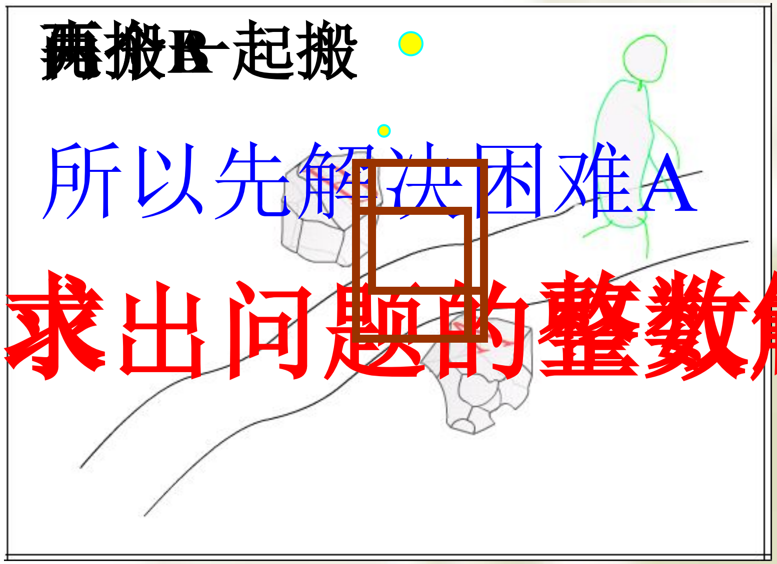
太重了

尝试着构造解。

构造出现了两个困难:

A、方程右边y
值要等于1。

B、方程左边系
数要非负。



先求出问题的整数解!

放大目标——求整数解(2)

- 目标仍然很复杂
- 再退一步
- 先考虑$n=2$的情况
- 假设$x_1,y_1,x_2,y_2\neq 0$
- 那么，两个向量能够到达纵坐标的哪些地方？

放大目标——求整数解(3)

- $c_1x_1+c_2x_2=0$
- $c_1=\mathrm{Lcm}(x_1,x_2)/x_1$;
- $c_2=-\mathrm{Lcm}(x_1,x_2)/x_2$
- $W=c_1P_1+c_2P_2$可以由P_1、P_2完成。
- 任意整数k,kW都可以由P_1, P_2来完成。

$P_1=(x_1,y_1)$

$P_2=(x_2,y_2)$

$c_1P_1+c_2P$

放大目标——求整数解(4)

- 定义$S_{i,j}$：$y\in S_{i,j}$当且仅当存在整数k_1,k_2满足$k_1P_i+k_2P_j=(0,y)$

$n=5$

$P_1=(2,4)$

$P_2=(2,2)$

$P_3=(-3,-3)$

$P_4=(4,3)$

$P_5=(1,3)$

[illegible]

$S_{i,j}$ j / i	2	3	4	5
1				
2				
3				
4				

放大目标——求整数解(5)

- 定义S:

  a、如果存在i,j使得$y\in S_{i,j}$，那么$y\in S$;

  b、如果$y_1\in S$, $y_2\in S$，$y=k_1y_1+k_2y_2$，($k_1\in Z,k_2\in Z$),那么$y\in S$。

  c、其余的数都不属于S。

S是用所有的$S_{i,j}$通过加减运算得出的闭形式。

由模的知识不难得出，S集合也是形如$\{ky|k\in Z\}$的形式。

放大目标——求整数解(6)

- S中最小的正数(上面的y)就是所有$S_{i,j}$中的最小正数的最大公约数！
- 如果1属于集合S，那么，方程①就有整数解了！
- 找到方程①有整数解的充分条件了！
- 上面的构造只是一个充分条件 。

问题： 它是不是必要的？

可以证明是必要的。

放大目标——求整数解(7)

- 结论①：
  - 方程①一定可以拆成若干个多项式之和。其中任意一个多项式最多包含两项，并且多项式的向量和的x为0。

$$3(2,4)-13(2,2)+9(-3,-3)+11(4,3)+3(1,3)=(0,1)$$

$$[3(2,4)-3(2,2)]+[-10(2,2)+5(4,3)]+[9(-3,-3)+27(1,3)]+[6(4,3)-24(1,3)]=(0,1)$$

$$(0,6)+(0,-5)+(0,54)+(0,-54)=(0,1)$$

放大目标——求整数解(8)

- 用归纳法证明结论①：
  - $n<=2$时显然成立；
  - 若$n<=k$-1时成立；当$n=k$时，如果找到这样的u,v，满足：

$$\begin{cases} u_i x_i + v_i x_1 = 0 \\ \sum_{i=2}^{k} v_i = c_1 \end{cases}$$

  - 选出k-1个和为0的多项式$u_i x_i + v_i x_1$，去掉x_1,就剩下k-1个x了。
  - **可以假设所有的x的最大公约数是1，否则，只要约掉公约数就可以了。**

放大目标——求整数解(9)

设g_i=Lcm(x_i,x_1)/x_1(i>1)

设g=gcd(g_2,g_3……g

所有x_i的最大公约数是1

$g|g_ix_i$

$g|\sum_{i=2}^{k} c_i x_i$

$g|g_i$

$g|(c_1x_1)$

$g|c_1$

g与c_1互质

$u_ix_i + v_ix_1 = 0$

$\sum_{i=2}^{k} v_i = c_1$

$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0$

存在整数序列$d_2,d_3,\dots,d_k$，使得

$$\sum_{i=2}^{k} d_i g_i = c_1$$

$v_i=d_ig_i$,

$u_i=-v_ix_1/x_i=-d_ig_ix_1/x_i$

$=-d_i\mathrm{Lcm}(x_1,x_i)/x_i$

求出了满足条件的u,v，因此就可以从方程①的左边拿掉$k-1$个向量，$v_ix_1+u_ix_i$,（其中，$1<i<=k$），又因为所有的v_i的和等于c_1，所以，向量P_1的系数为0了，因此，就把k个向量变成了$k-1$个，证明了结论①。

放大目标——求整数解(10)

- 证明了结论①后，有下面结论：
- **结论②：方程①有整数解的充要条件是，(0,1)能够由若干*Y*方向向量*W*通过加减运算得到，其中向量*W*由最多两个初始向量P_i,P_j通过加减运算得来。**
- 现在，很好的求出了方程①有整数解的充要条件！

求非负整数解(1)

接下来就可以来探究方程的非负整数解。

后面的结论和证明都满足**3个大前提**：

1、方程①有整数解。

2、把方程①的右边改成(1, 0)有整数解。

3、存在i，使得$x_i>0$；存在i，使得$x_i<0$；存在i使得$y_i>0$；存在i，使得$y_i<0$；(因为如果不满足，就可以输出‘NIE’；这只是为以后的证明作前提，对算法没有影响)

求非负整数解(2)

- 定义$T_{i,j}$: $y \in T_{i,j}$当且仅当存在非负整数k_1,k_2满足$k_1P_i+k_2P_j=(0,y)$)

如果x[illegible]空集

$n=5$

$P_1=(2,4)$

$P_2=(2,2)$

$P_3=(-3,-3)$

$P_4=(4,3)$

$P_5=(1,3)$

$T_{i,j}$ (i \ j)	2	3	4	5
1				
2				
3				
4				

求非负整数解(3)

- 用同样的方式定义T:

  a、如果存在i,j使得$y\in T_{i,j}$，那么$y\in T$;

  b、如果$y_1\in T, y_2\in T$，$y=k_1y_1+k_2y_2$，$(k_1\in N, k_2\in N)$,那么$y\in T$。

  c、其余的数都不属于T。

- **T是$T_{i,j}$通过加法运算得出的闭形式。**
- **定义T有什么意义呢?**

求非负整数解(4)

- 因为需要证明下面的结论：

- **结论③：如果*T*中至少有一个正数，有一个负数，那么方程①一定有非负整数解。**

- 证明的方法就是，构造一个非负整数解。

求非负整数解(5)

- 构造方法：

  n=5，P_1=(2,4)，P_2=(2,2)，P_3=(-3,-3)，P_4=(4,3)，P_5=(1,3)

  步骤1：因为x有正也有负，所以可以为每一个向量P_i选择相当大的正系数d_i，使得和向量的x为0。

  $$W=200P_1+300P_2+700P_3+200P_4+300P_5=(0,800)$$

  步骤2：因为T集合中有正数也有负数，所以可以在T集合中取出一个比较接近于**-800**的数，把对应的向量加到W中,W的模就接近于0了。这里取$1068P_3+801P_4=(0,-801)$。

  $$W=200P_1+300P_2+1768P_3+1001P_4+300P_5=(0,-1)$$

  步骤3：用数论法求出的整数解$-4P_1+4P_2-1P_4+4P_5=(0,1)$，把它乘以2后加到$W$中。

  步骤①选的系数d都非常大，步骤②加的系数也是正数，步骤③加的数的绝对值相对于步骤①非常小，所以保证最后的系数仍然非负。

  $$W=192P_1+308P_2+1768P_3+999P_4+308P_5=(0,1)$$

求非负整数解(6)

- 接下来看下面的结论：
- **结论④：如果方程①有非负整数解，那么它一定存在P_i,P_j,k_1,k_2(>=0)使得$k_1P_i+k_2P_j$是Y方向正半轴上的向量。**
- 证明比较简单，只需要用几个不等式，证明如果没有这样的P_i，P_j，k_1，k_2,就不可能到达Y轴正半轴。具体过程请参见我的论文。

求非负整数解(7)

- 同时考虑两个位置：(0, 1)，(0, -1)。
- 如果T中有一个正数，也有一个负数，那么超级马能够到达这两个位置。(**结论③**)
- 如果要能够到达(0,1)，T中就必须有一个正数；要能够到达(0,-1)，就必须有一个负数。(**结论④**)
- 在满足前面3个大前提下，超级马能够到达Y坐标轴上的所有位置的充要条件就是：T中至少有一个正数，至少有一个负数。(③+④)

算法

❖ **得到了问题的算法：**

步骤1：

positive←false; *negative*←false;
For (P_i是竖直向量) Do Begin
  If y_i>0 Then *positive*←true Else *negative*←true;
End For;
For (P_i不是竖直向量) Do Begin
  For (P_j不是竖直向量) Do Begin
    W←P_i*R_j*x_j/t-P_j*x_i/t;
    If W是Y方向正向量 Then *positive*←true;
    If W是Y方向负向量 Then *negative*←true
  End For
End For
If Not *positive* Or Not *negative* Then Begin 输出('NIE');halt; End If;

步骤2：

g←0;
For (P_i是竖直向量) Do g ← gcd(g,|y_i|);
For (P_i不是竖直向量) Do Begin
  For (P_j满足x_i与x_j符号不相同) Do Begin
    len←|P_i*x_j/t-P_j*x_i/t|;
    g←gcd(g,len);
  End For;
End For;
If g≠1 Then Begin 输出('NIE');Halt;End If;

步骤3：

交换每个向量的x值与y值，重复作步骤1，步骤2；
输出('TAK')

算法的时间复杂度是O(n^2)

总结(1)

- 题目首先是要求方程的非负整数解，而方程求整数解比求非负整数解要简单。所以首先把目标放大成了求解整数解。求完整数解后，就站在了一个新的高度上，由整数解得出非负整数解变得简单。
- 在求解整数解和非负整数解的过程中，也不是直接得出一个有解的充分必要条件，而是首先构造出一个充分条件，再证明它的必要性。

总结(2)

- 解此题的关键：**转化目标**

这体现了解题的一个过程：

由易入难；

由简单到复杂；

由浅入深；

由特殊到一般。

谢谢