



# 一张一弛， 解题之道

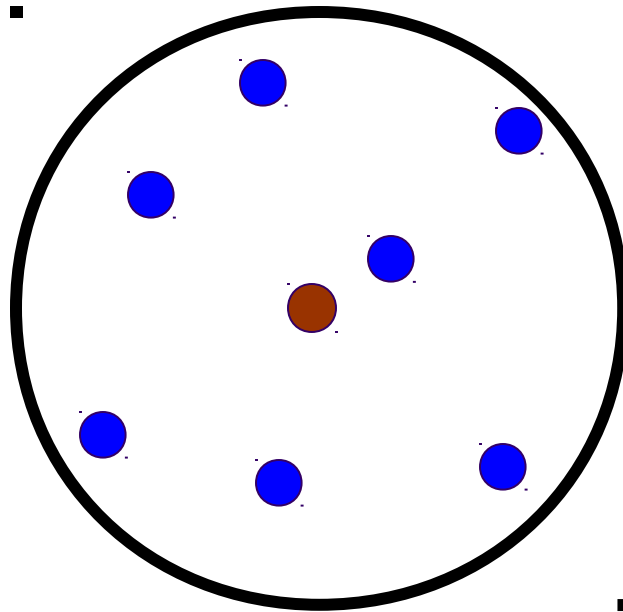
——“约制、放宽”方法在解题中的应用

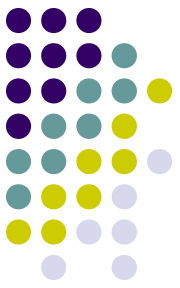
广东省中山纪念中学 陈启峰



# “约制、放宽”方法的简单定义

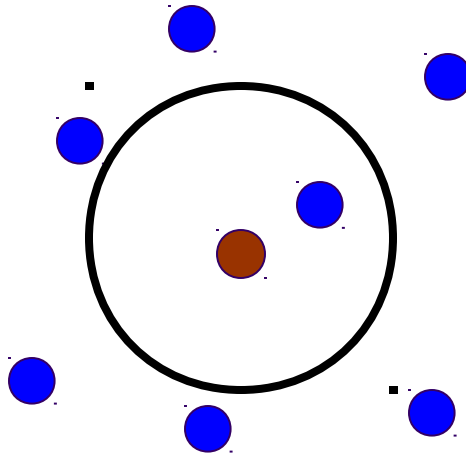
- “约制”方法——添增一些约束的条件、限制，并保证在这些条件和限制下依然能找到解。

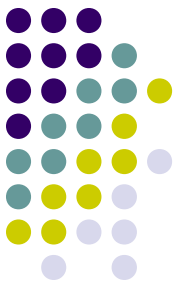




# “约制、放宽”方法的简单定义

- “放宽”方法——**减除、放宽**一些**条件、限制**，并**保证**在这些条件和限制下依然能**找到解**。





# 引言

- 在分析问题、设计算法时，我们常常觉得条件、限制

过于宽松  
过于独立

**“约制”方法**

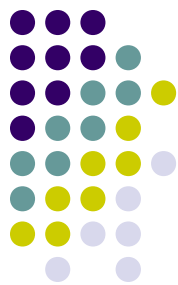
加强  
联系

过于繁杂  
过于严格

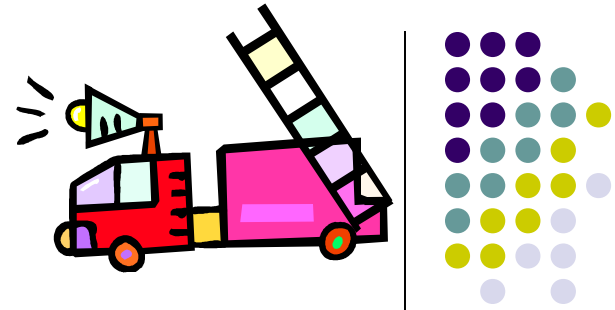
**“放宽”方法**

简化  
关系

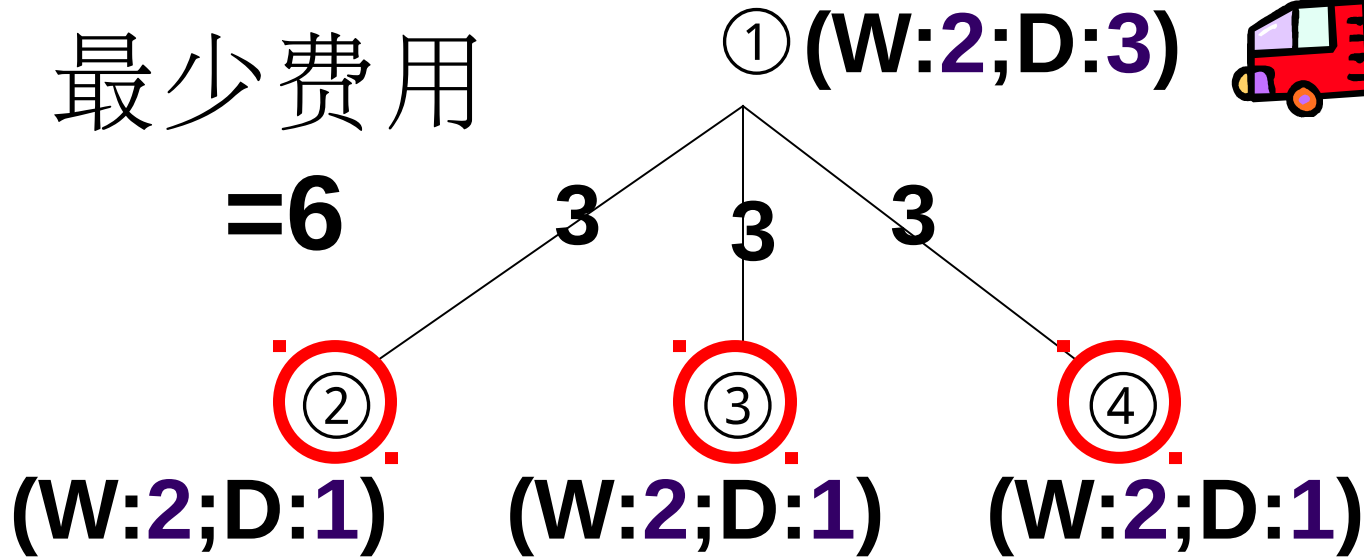
## [ 例题 ] 消防站 ( POJ2152 )



**LTC** 国有  $n$  个城市。城市间连着公路。每两个城市间有且只有一条通路。由于常发生火灾，**LTC** 决定在某些城市建消防站。在城市  $k$  建一个消防站需要  $W(k)$  的费用。每个城市  $k$  在距离  $D(k)$  范围内，必须选择最近的消防站作为负责站。**LTC** 想用最少的费用来满足以上要求。



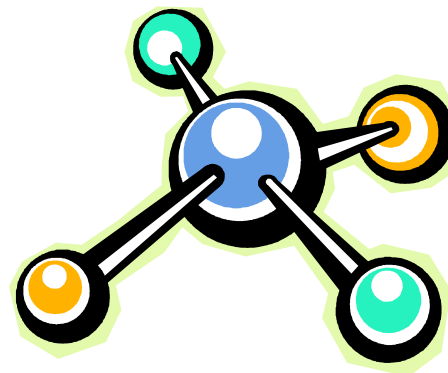
最少费用  
=6



最少费用  
=2



# 数学模型



- 以城市为结点，公路为边，路长为边权构树。令  $\text{dis}(i,j)$  为结点  $i$ 、 $j$  间的距离。任务是建一些消防站，使得任意结点  $i$ ，都有  $\min\{\text{dis}(i, j) \mid j \text{ 上有消防站}\} \leq D(i)$

并得使得目标函数

$$Z = \sum_{i \text{ 上有消防站}} W(i)$$

最小化。

# 算法模型分析



● ~~搜索 ?~~

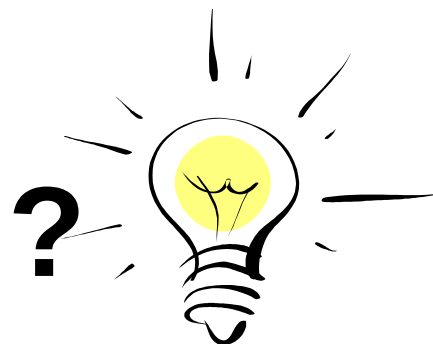


**Time Limit  
Exceed**

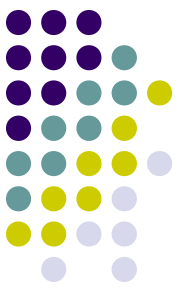
● ~~图论算法 ?~~ 想不到好算法



● ~~树型动态规划 ?~~



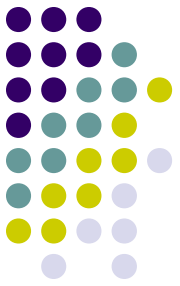




## 尝试与探索

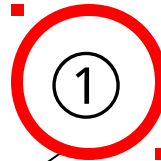
- 首先，确定状态。  
一般地，状态有参数 **Root**——  
表示研究对象为 **Root** 的子树。
- 如果只用 **Best<sub>i</sub>** 表示在 **i** 的子树中修建满足要求的消防站的最少费用

,



# 尝试与探索

**Best<sub>2</sub>, Best<sub>3</sub>**  
已定, 求  
**Best<sub>1</sub>**



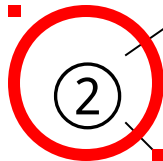
**(W:1;D:1;Best:?)**

有两种情况

第三种情况: 消防站在②

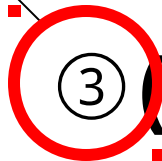
~~$Best_1 = D(2) = 1$~~

$Best_1 = D(1) + D(3) = 2$

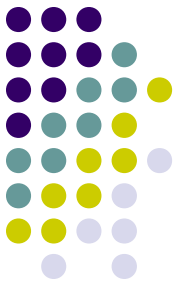


**(W:1;D:1;Best:1)**

1

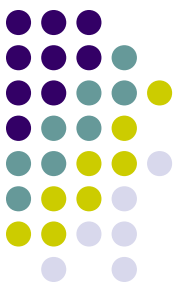


**(W:1;D:1;Best:1)**



## 尝试与探索

- 为了解决这种情况，我们通常会增加一个最近消防站或编号？  
树内或外消防站的编号？  
？  
难以找到好的转移方程！



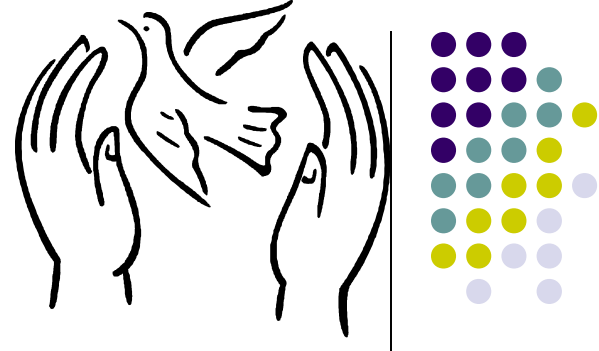
# 初步分析

- 在分析中发现：

在状态转移时，难以保证最近消防站的距离或编号与定义的一致

—— 换句话说，就是状态定义太严格、题目要求太苛刻。

## “放宽”方法



- 主要障碍——“结点  $i$  在  $D(i)$  范围内，必须选择最近的消防站作为负责站”

~~放宽限制！~~

## “放宽”方法



- 其实我们无须知道最近的消防站在哪，而只要在 **D** 范围内有消防站就行了。

SO

“~~限制：~~在 **D(i)** 范围内选 必  
须 选择 最近的消防站 作为负责站  
任意的消防站 作为负责站。”  
**最近消防站** **转化** **任意消防**  
**站**

# “放宽”方法



- 现在结点享有一定**“自由权”**了，此时就有必要定义新状态。

# “放宽”方法



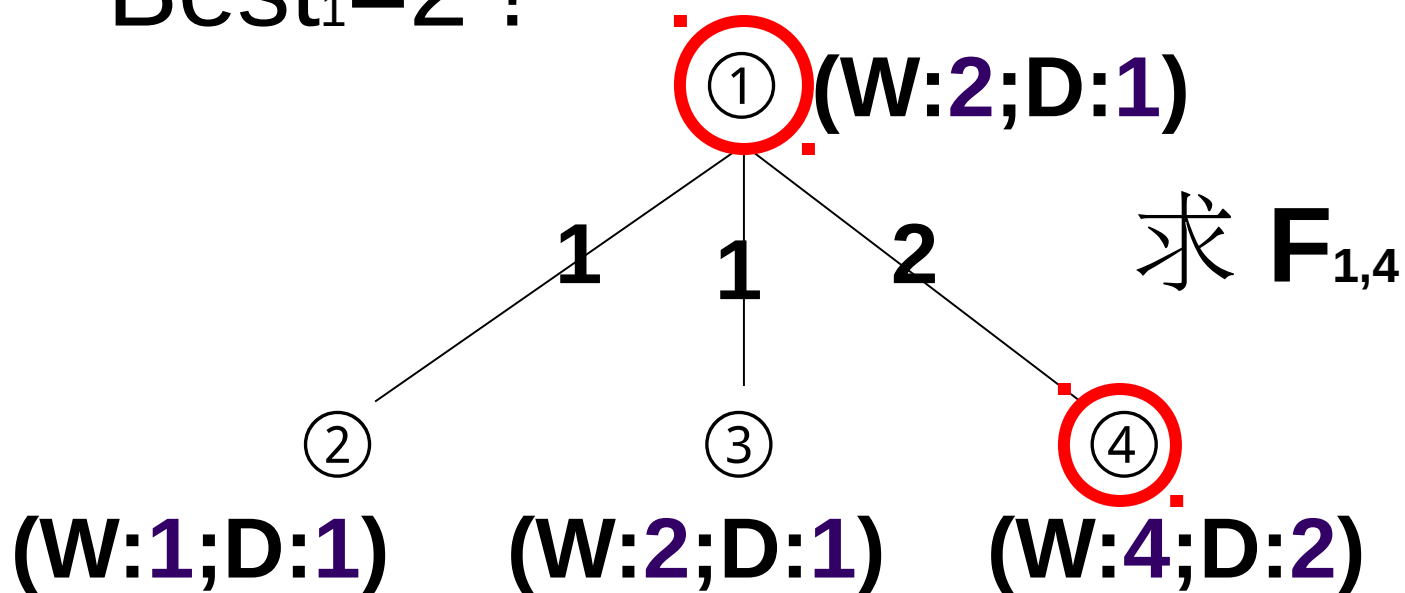
- 令  $F_{i,j}$  表示
  - 1、在  $i$  的子树建一些消防站;
  - 2、在  $j$  上**必须**建一个消防站;
  - 3、 $i$  的子树结点选择**树内或  $j$  上**的可选消防站为负责站;
  - 4、 **$i$  必须选择  $j$  上消防站**为负责站;  
的最少总费用 ( **$j$  在  $i$  的子树外则不算在内**)



# “放宽”方法

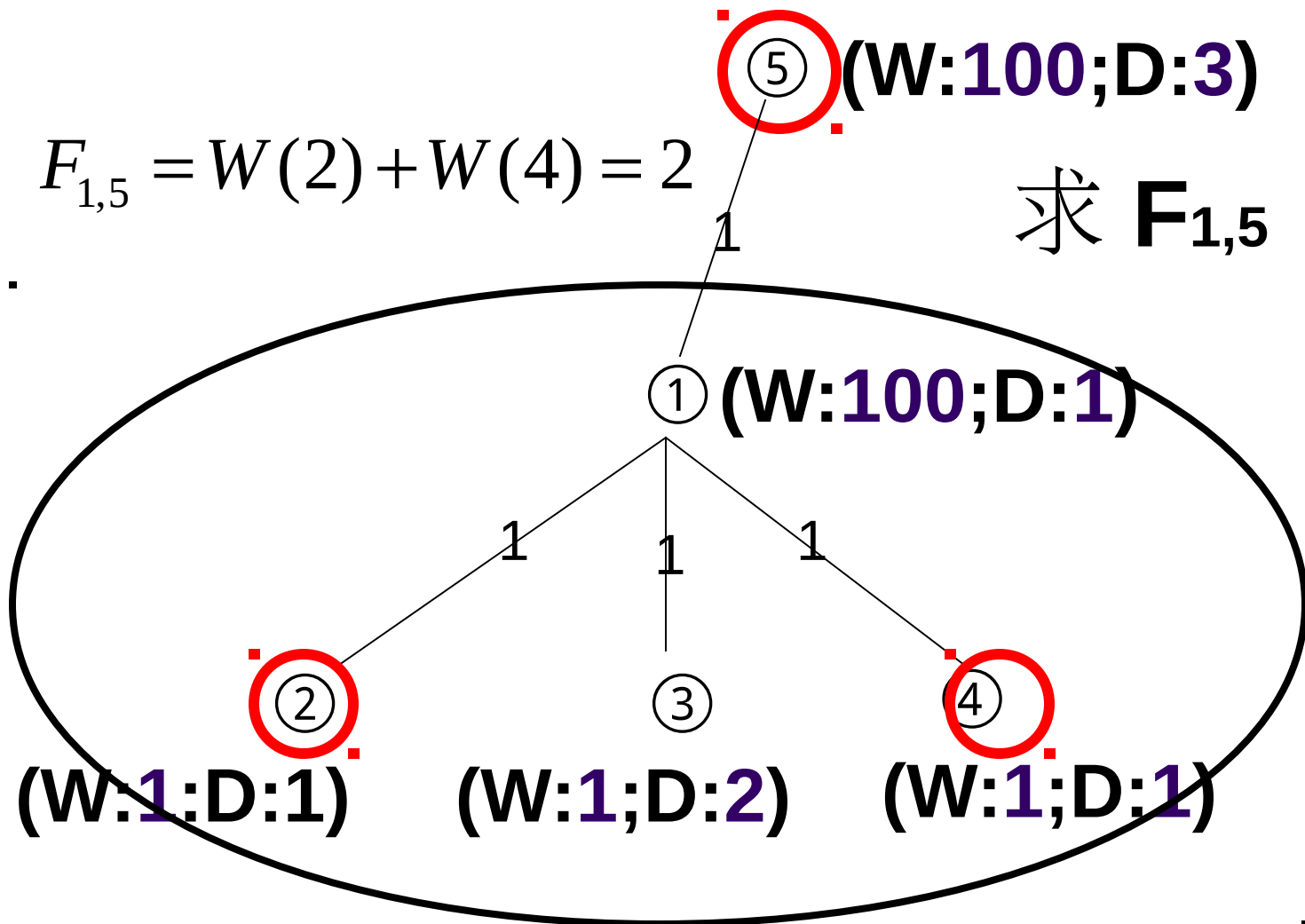
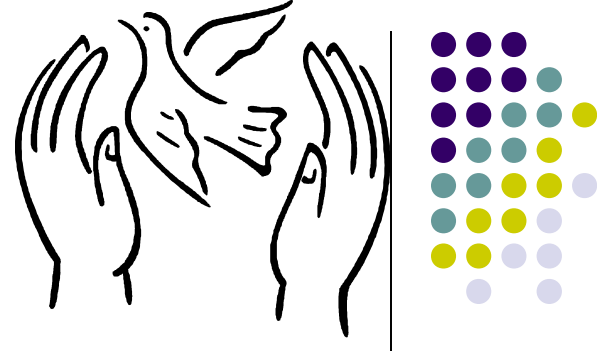


Best<sub>1</sub>=2 !



$$F_{1,4} = 6$$

# “放宽”方法



# “放宽”方法



- 这样定义的好处是，“最近的消防站”在定义中消失了。
- 这种自由为转移方程提供了很大方便。

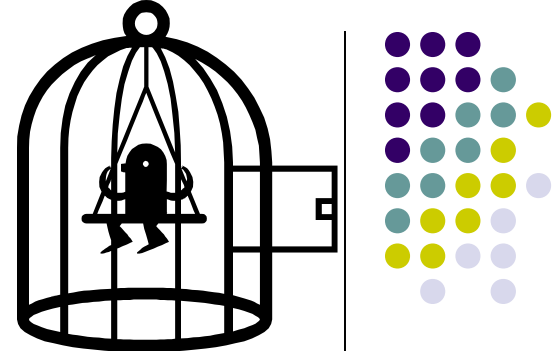


## 进一步分析

- 然而，此时要定下转移方程还是遇到了一点点困难，总觉得结点间相对独立。
- 原因：策略选取的任意性导致

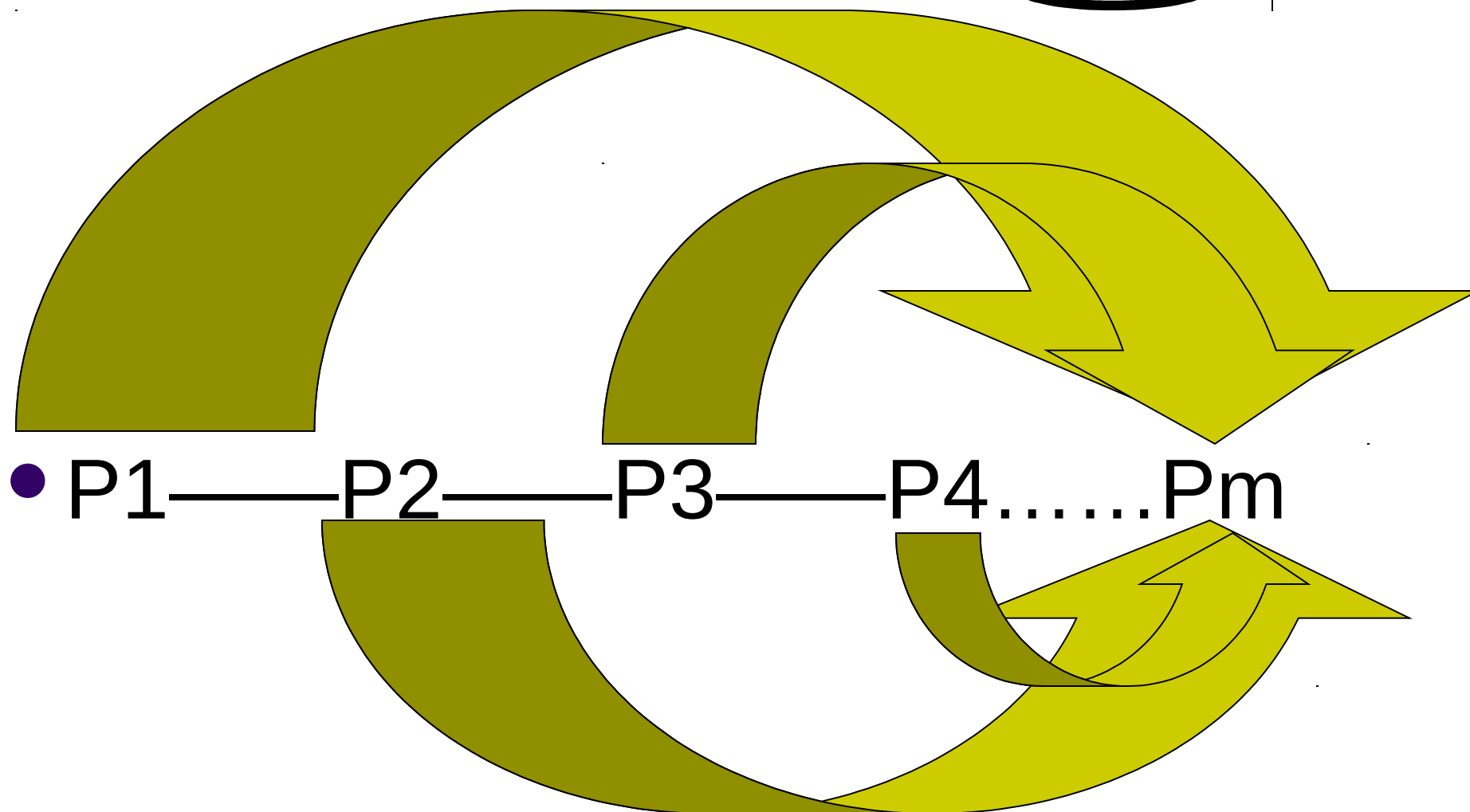
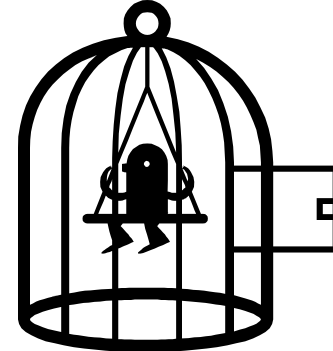
限制过于宽松

# “约制”方法

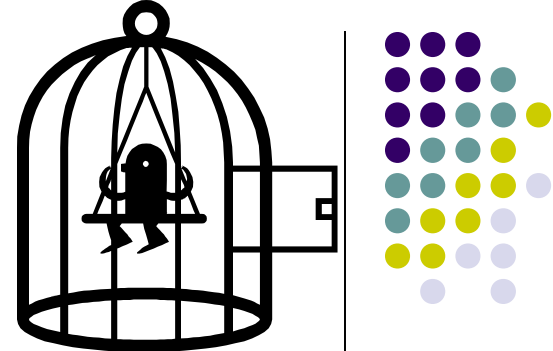


- 动态规划讲求拓扑顺序和无后效性。
- 于是不妨对策略增添限制 ——  
令 **P1** 到负责站 **Pm** 的路径为 **P1 P2 P3.....Pm**，则任意 **Pi** 的负责站都为 **Pm**。

# “约制”方法

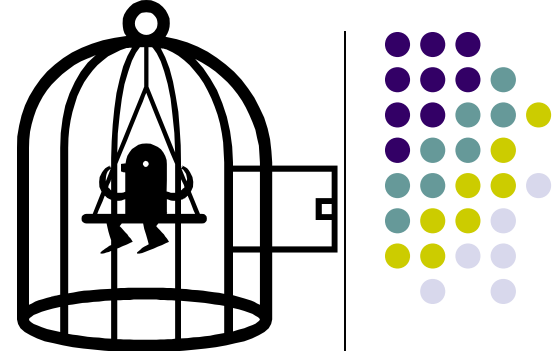


# “约制”方法



- 下面通过构造证明至少存在一个最优解满足该性质—— **$P_1$  到负责站  $P_m$  的路径  $P_1 P_2 \dots P_m$  中任意  $P_i$  的负责站都为  $P_m$ 。**

# “约制”方法



**证明：** 假设某最优解不满足这性质。

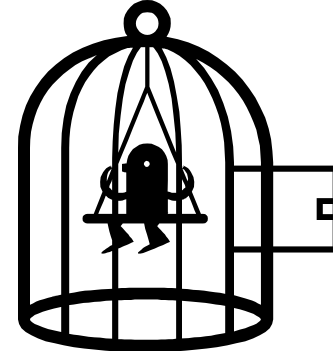
**I 构造：** (1) 增加结点 **s**，在 **s** 和有消防站的结点间连一条权为 **0** 的边。

(2) 以 **s** 为源点做 **Dijkstra**，记录下前驱结点。

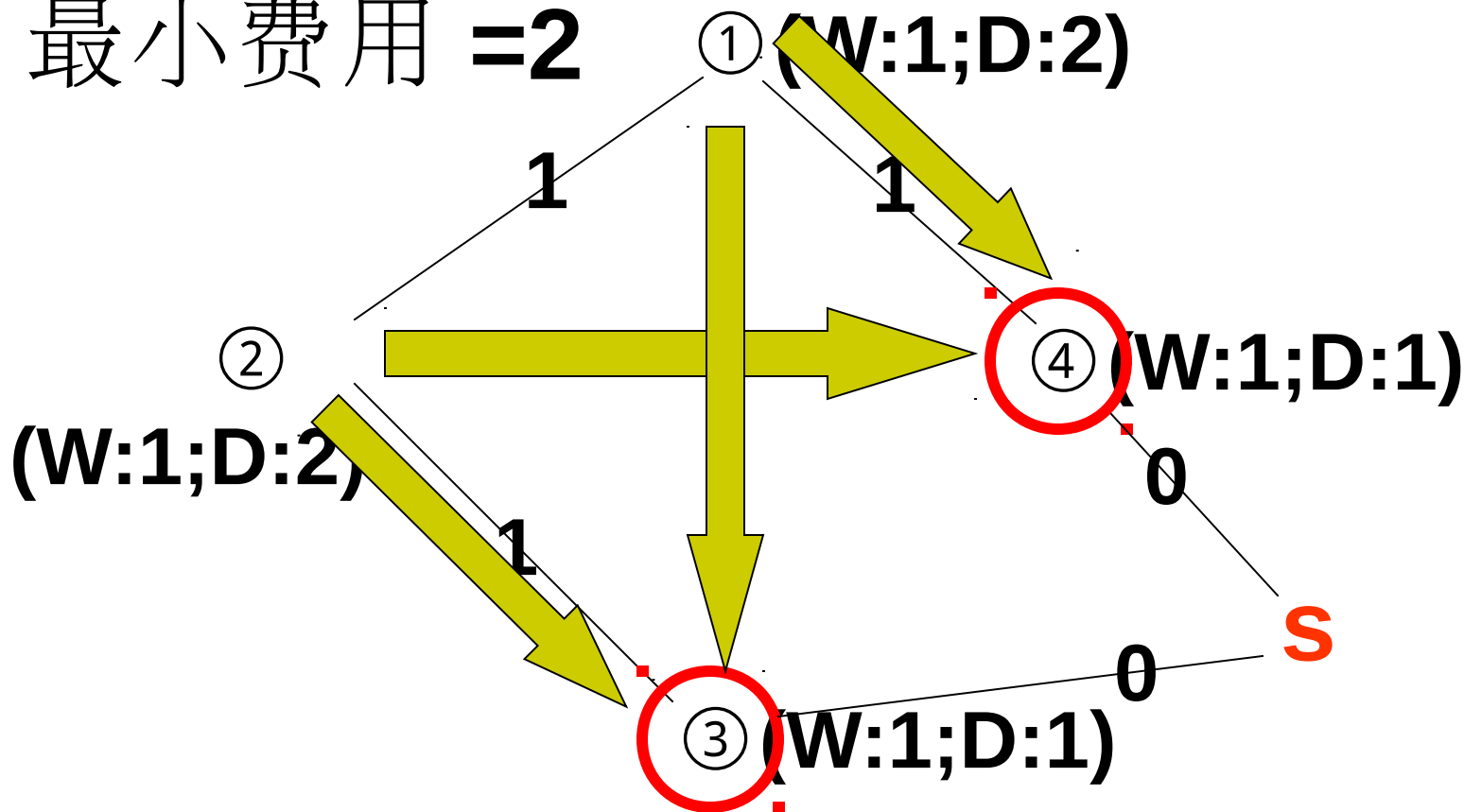
(3) 如果结点上有消防站则选择它为负责站，否则选择前驱结点的负责站为负责站。



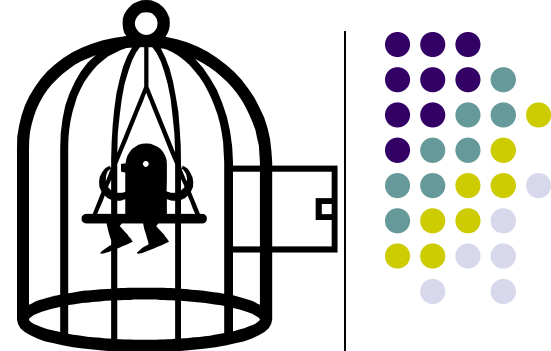
# “约制”方法



最小费用 = 2



# “制约”方法



**Ⅱ 此方案满足上述性质和必要限制：**

**1、** 设任意一个结点到源点的最短  
路为  **$P_1 P_2 P_3 \dots P_m s$** ；



## “约制”方法



**2**、结点都选择最近消防站，所以到负责站的距离不超过 **D**(这结点)；

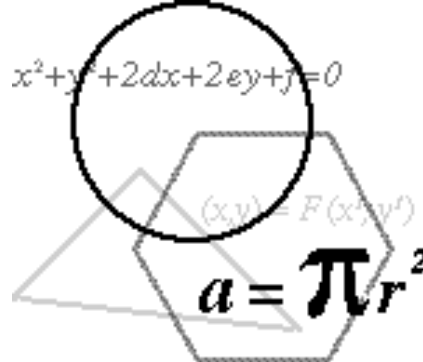
**3**、构造选取的消防站与最优解一样，所以总费用最少。

### **III 综上所述，总存在一个最优解**

**(构造出来的方案)满足上述的性质。**

- 如今这限制可以安全地增添上了。

# 转移方程



- 首先确定下 **Best** 的转移方程

$$Best_i = \min\{F_{i,j} \mid j \text{ 在 } i \text{ 的子树中}\}$$

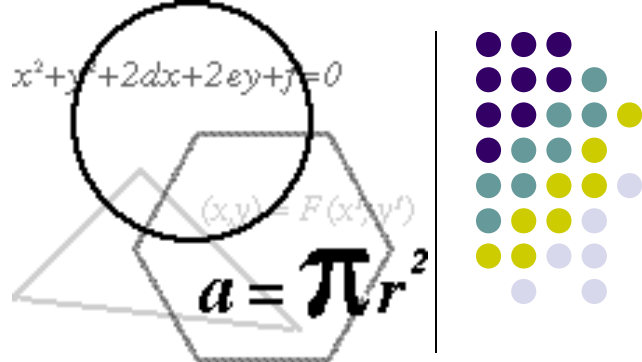
- 下面对 **F** 进行分析:

① 当  $\mathbf{dis(i,j) > D(i)}$  时,  $F_{i,j}$   
 $= +\infty$  ,

这表示 不存在 在此状态。

② 当  $\mathbf{dis(i,j) \leq D(i)}$  时,

# 转移方程



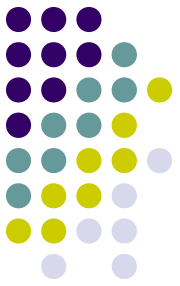
(1) 当  $j$  在  $i$  的子树外时,

$$F_{i,j} = \sum_{k \text{ 为 } i \text{ 的儿子}} \min\{Best_k, F_{k,j}\}$$

(2) 当  $i=j$  时  $F_{i,j} = W(j) + \sum_{k \text{ 为 } i \text{ 的儿子}} \min\{Best_k, F_{k,j}\}$

(3) 当  $j$  不等于  $i$  并且在  $i$  的子树内时  
,

令  $j$  在  $i$  的儿子  $child$  的子树内,  
 $F_{i,j} = F_{child,j} + \sum_{\substack{k \text{ 为 } i \text{ 的儿子} \\ \text{并且 } k \neq child}} \min\{Best_k, F_{k,j}\}$



# 复杂度分析

- 时间复杂度为 $O(n^2)$
- 空间复杂度为 $O(n^2)$
- 编程复杂度低

## 小结



原始模型

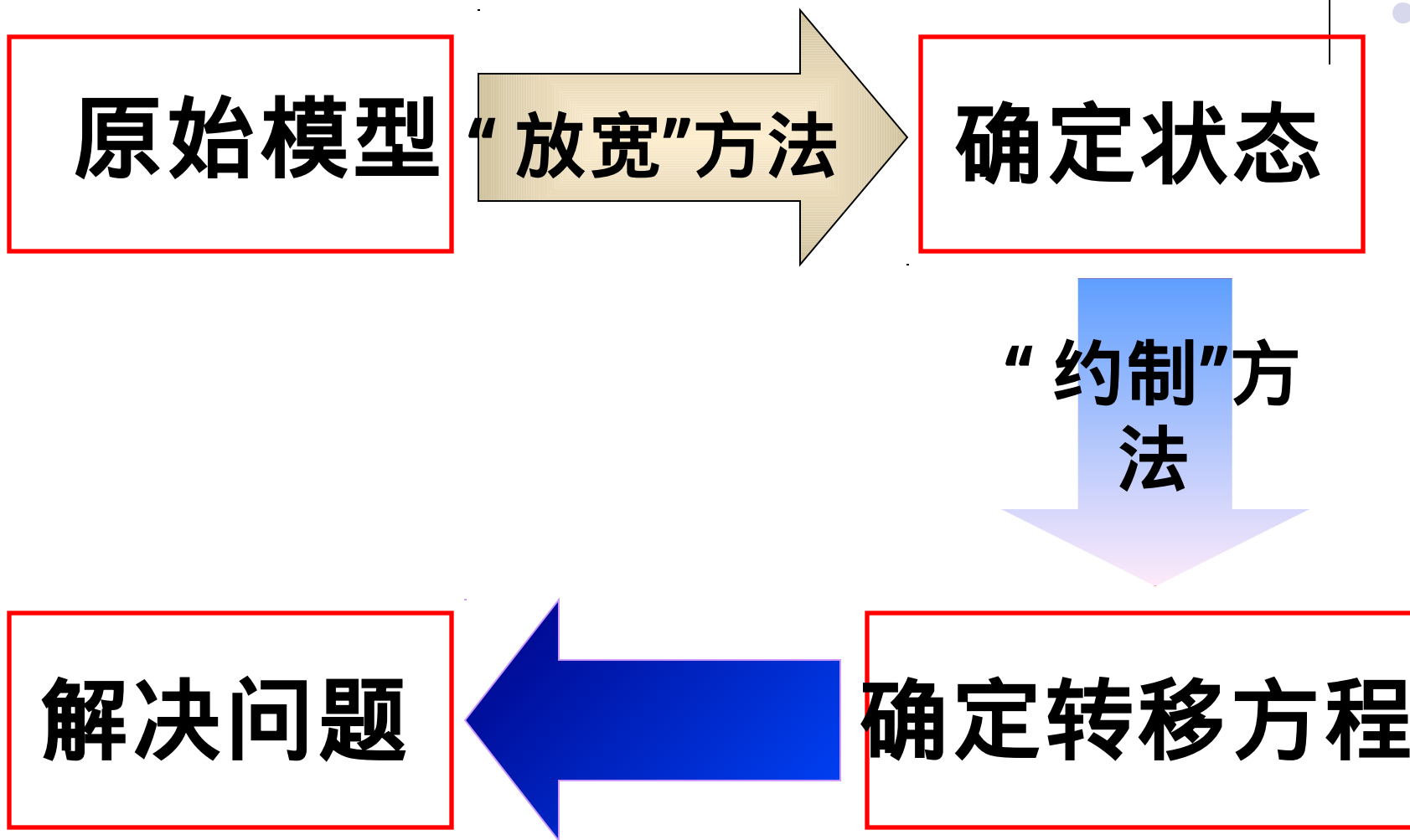
“放宽”方法

确定状态

“约制”方法

解决问题

确定转移方程





# 总结

- 在应用这两种方法的时候，首先要摸清这两者的适用范围、所起的作用和效果。

一张一弛作为一种解题方法，是需要在思索、做题中慢慢形成的。除了实践外，还有几点是需要注意的：





# 总结

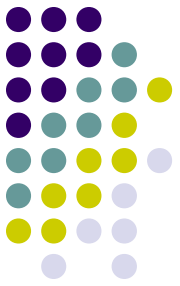
敢于创新

敢于猜想

敢于类比

敢于拓展

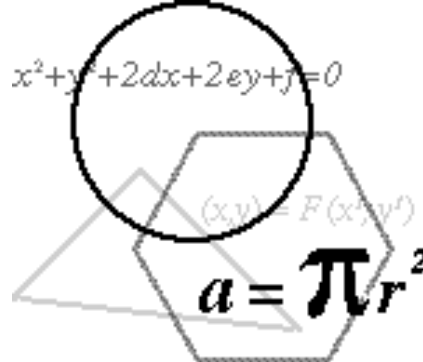
其中敢于创新显得尤为重要，只有不断创新和实践，才能“拨得云开见月明”。



*Thank You!*

**E-mail:344368722@QQ.com**

# 转移方程



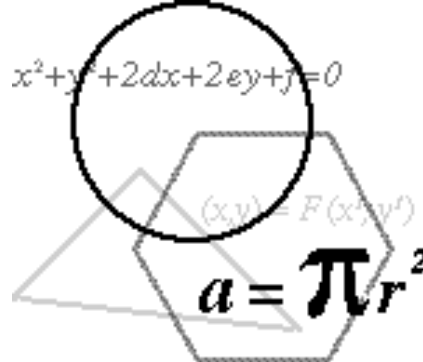
• ② 当  $\text{dis}(i, j) \leq D(i)$  时，

• (1) 当  $j$  在  $i$  的子树外时，

当选择树外的为负责站时  
 当选择树内的为负责站时  
 选择  $k$  出树内或外  
 根据新的限制必须选择  $j$   
 所需的最小费用为  $k$

返回。

# 转移方程



- ② 当  $\text{dis}(i, j) \leq D(i)$  时 ,

- (2) 当  $i=j$  时 ,

$i$  的儿子  $k$  的选择情况与 (1)

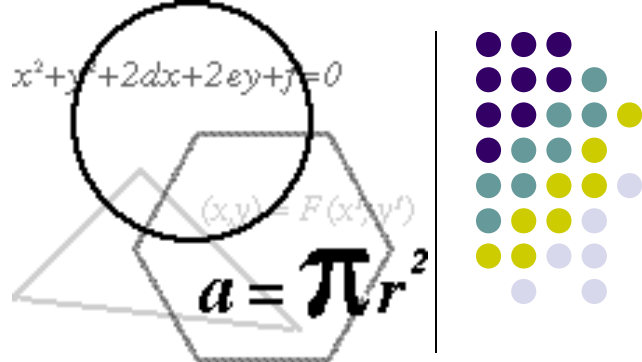
$F_{i,j}$  一样 (此时  $\sum \min\{\text{Best}_k, F_{k,j}\}$ )

建  $j$  上的消防站的费用。

$k$

返回

# 转移方程



- ② 当  $\text{dis}(i,j) \leq D(i)$  时 ,
- (3) 当  $j$  不等于  $i$  并且在  $i$  的子树内时 ,

此时  $j$  必在  $i$  的某个子树  $\text{child}$  中, 则  
 选择  $j$  作为负责站  
 $\text{child}$  为  $j$  的子树

返回




# 时间复杂度分析

- 对于每一个确定的  $j$ , 计算  $F_{i,j}$  需要  $O(i \text{ 的儿子数})$  的时间, 所以计算  $F_{1,j}$ 、 $F_{2,j}$ .....  $F_{n,j}$  总共需要  $O(\text{总儿子数}) = O(n)$  的时间。  
 $O(n^2)$
- 因此, 总的时间复杂度为



# 一张一弛

-  在保证能找到答案的前提下，对过于宽松而茫无头绪的条件、限制进行约制；对于过于严格而阻挠前进的条件、限制进行放宽。

一张一弛不仅是文武之道，也是解题之道。



- 能应用“约制”方法的题目：  
**POI2005 《knights》**  
**CEOI 《锯木厂》**  
《高斯消元解多元一次方程》.....
- 能应用“放宽”方法的题目：  
**WC2005 《友好的动物》.....**





- 更多精彩内容在

“约制、放宽”方法在解题中的应用  
.doc