优化，再优化！

——从《鹰蛋》一题浅析对动态规划算法的优化

安徽省芜湖市第一中学 朱晨光

引言

在当今的信息学竞赛中，动态规划可以说是一种十分常用的算法。它以其高效性受到大家的青睐。然而，动态规划算法有时也会遇到时间复杂度过高的问题。因此，要想真正用好用活动态规划，对于它的优化方法也是一定要掌握的。

本文将就《鹰蛋》这道题目做较为深入的分析，并从中探讨优化动态规划的本质思想与一般方法。

问题

有一堆共M个鹰蛋，一位教授想研究这些鹰蛋的坚硬度E。他是通过不断从一幢N层的楼上向下扔鹰蛋来确定E的。

当鹰蛋从第E层楼及以下楼层落下时是不会碎的，但从第（E+1）层楼及以上楼层向下落时会摔碎。

如果鹰蛋未摔碎，还可以继续使用；但如果鹰蛋全碎了却仍未确定E，这显然是一个失败的实验。教授希望实验是成功的。

问题

例如：若鹰蛋从第1层楼落下即摔碎，E=0；若鹰蛋从第N层楼落下仍未碎，E=N。

这里假设所有的鹰蛋都具有相同的坚硬度。给定鹰蛋个数M与楼层数N (M,N<=1000) , 求最坏情况下确定E所需要的最少次数。

样例： M=1，N=10

ANS=10

（解释：只能将这个鹰蛋从下往上依次摔）

算法一

由于是求最优值，我们自然想到了使用动态规划！

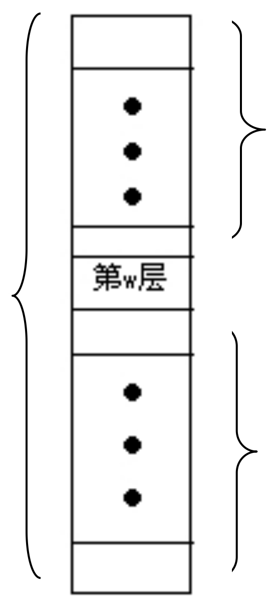
算法一

状态定义:

f(i,j): 用i个蛋在j层楼上最坏情况下确定E所需要的最少次数。

状态转移:

i个鹰蛋 j层



i个鹰蛋 (j-w)层

f(i,j-w)次

(i-1)个鹰蛋 (w-1)层

f(i-1,w-1)次

算法一

状态定义：

f(i,j)：用i个蛋在j层楼上最坏情况下确定E所需要的最少次数。

状态转移：

$$f(i,j)=\min\{\max\{f(i-1,w-1),f(i,j-w)\}+1 \mid 1<=w<=j\}$$

算法一

显然，这个算法的时间复杂度为$O(N^3)$

太高了！

如何才能降低它的时间复杂度呢？

算法二

经过观察，我们发现这题很类似于二分查找，只不过是对鹰蛋的个数有限制。

若是对鹰蛋的个数没有限制呢？

这题就变成求二分查找在最坏情况下的比较次数！

答案即为$\lceil \log_2(n+1) \rceil$

算法二

因此，当M>=$\lceil \log_2(n+1) \rceil$时，直接输出$\lceil \log_2(n+1) \rceil$即可.

算法的时间复杂度立即降为$O(N^2\log_2 N)$

算法二

这里，我们是通过减少状态总数而得到了优化的空间，从而大大提高了算法效率。这也是优化动态规划算法的一种常用方法。

然而优化还远未结束！

算法三

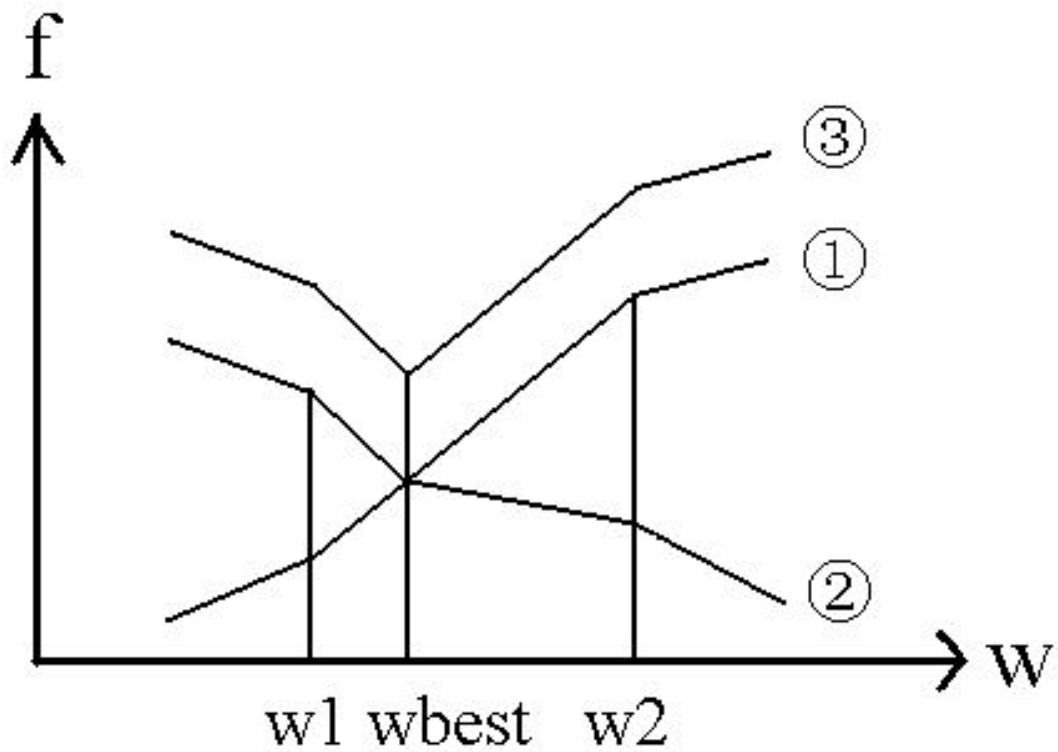
经观察发现，动态规划函数$f(i,j)$具有如下单调性：

$$f(i,j)>=f(i,j-1)\ (j>=1)$$

这条性质可以用数学归纳法进行证明，这里就从略了。

那么，$f(i,j)$的单调性有什么作用呢？

算法三



（如图，令①为f(i-1,w-1)的图象，②为f(i,j-w)的图象,③即为max{f(i-1,w-1),f(i,j-w)}+1的图象）

算法三

这样，我们就成功地将状态转移的时间复杂度降为$O(\log_2 N)$，算法的时间复杂度也随之降为$O(N(\log_2 N)^2)$.

在对算法三进行研究之后，我们会萌生一个想法：既然现在f(i, j)都需要求出，要想找到更高效的算法就只能从状态转移入手，因为这一步是$O(\log_2 N)$，仍然不够理想。

因此，算法四将以状态转移为切入点，进一步探究优化的空间。

算法四

通过进一步挖掘状态转移方程，我们得到如下不等式：

$$f(i,j-1)<=f(i,j)<=f(i,j-1)+1 \quad (j>=1)$$

根据这个不等式，我们可以得到如下推理：

若存在一个决策w使得f(i,j)=f(i,j-1)，则f(i,j)=f(i,j-1)

若所有决策w均不能使f(i,j)=f(i,j-1)，则f(i,j)=f(i,j-1)+1

算法四

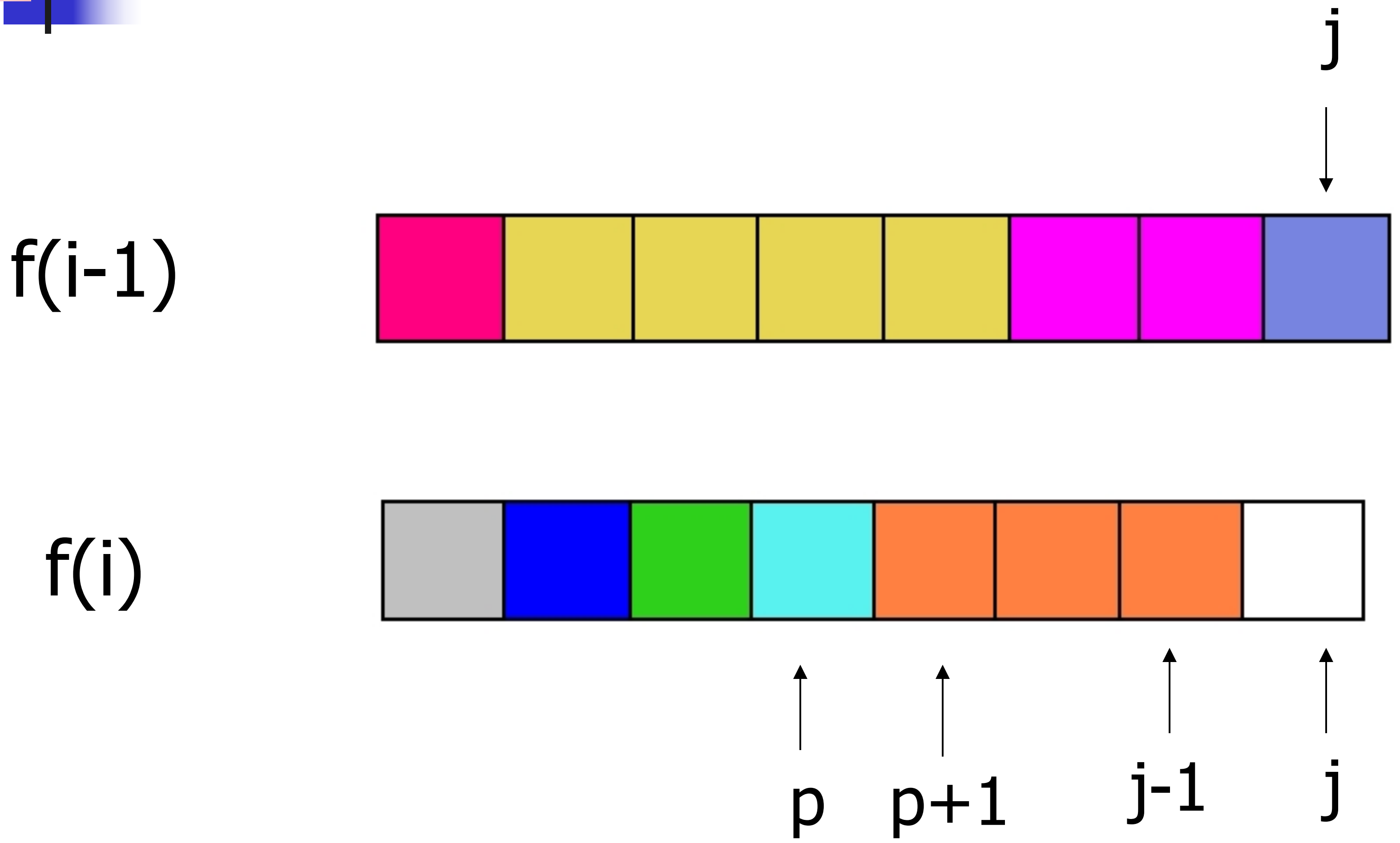
这里，我们设一指针p，并使p时刻满足：

$$f(i,p)=f(i,j-1)-1 \text{ 且 } f(i,p+1)=f(i,j-1)$$

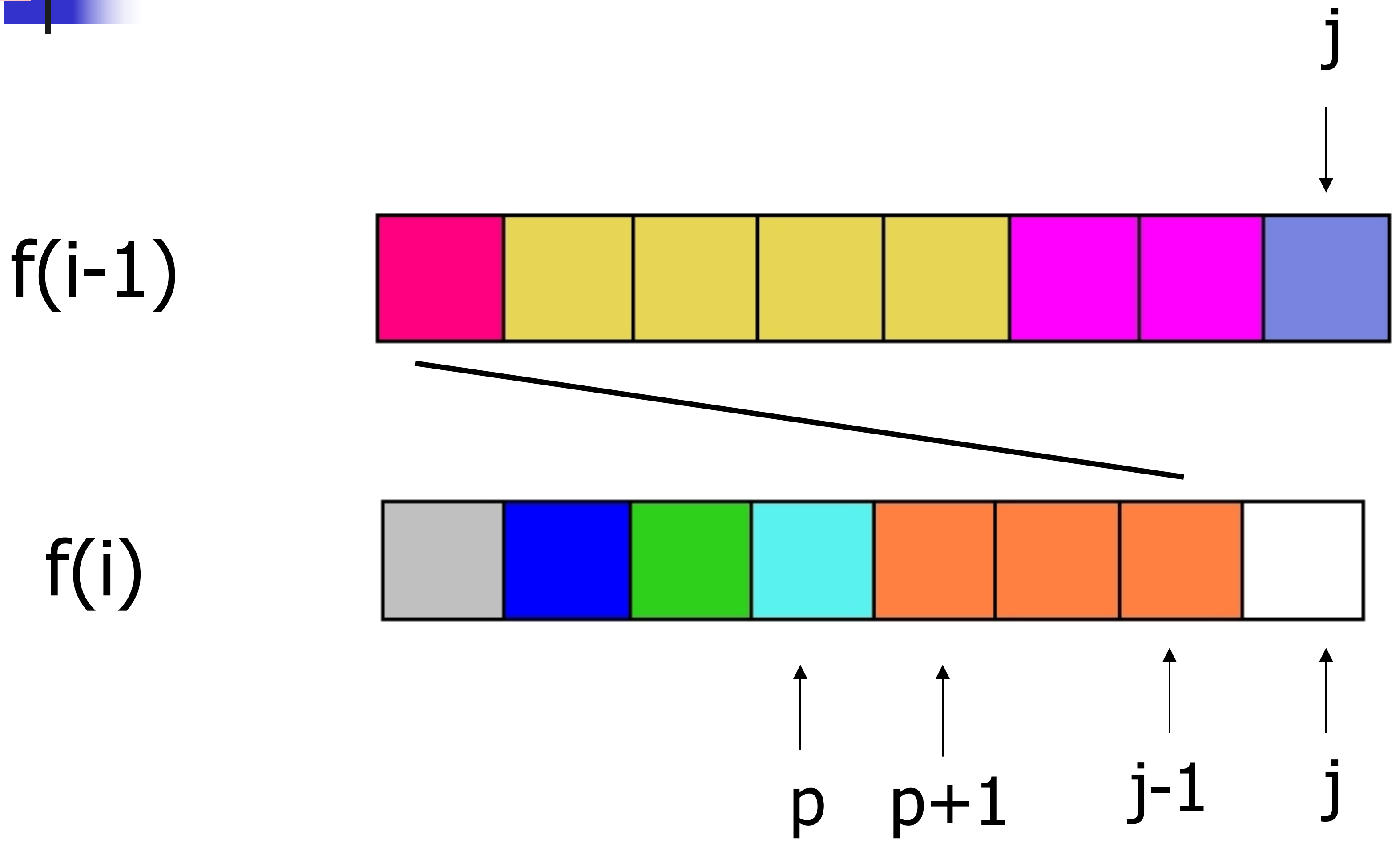
由状态转移方程可知，决策时f(i,p)所对应的函数值是f(i-1,j-p-1).

下面，我们将证明只需通过判断f(i,p)与f(i-1,j-p-1)的大小关系便可以决定f(i,j)的取值。

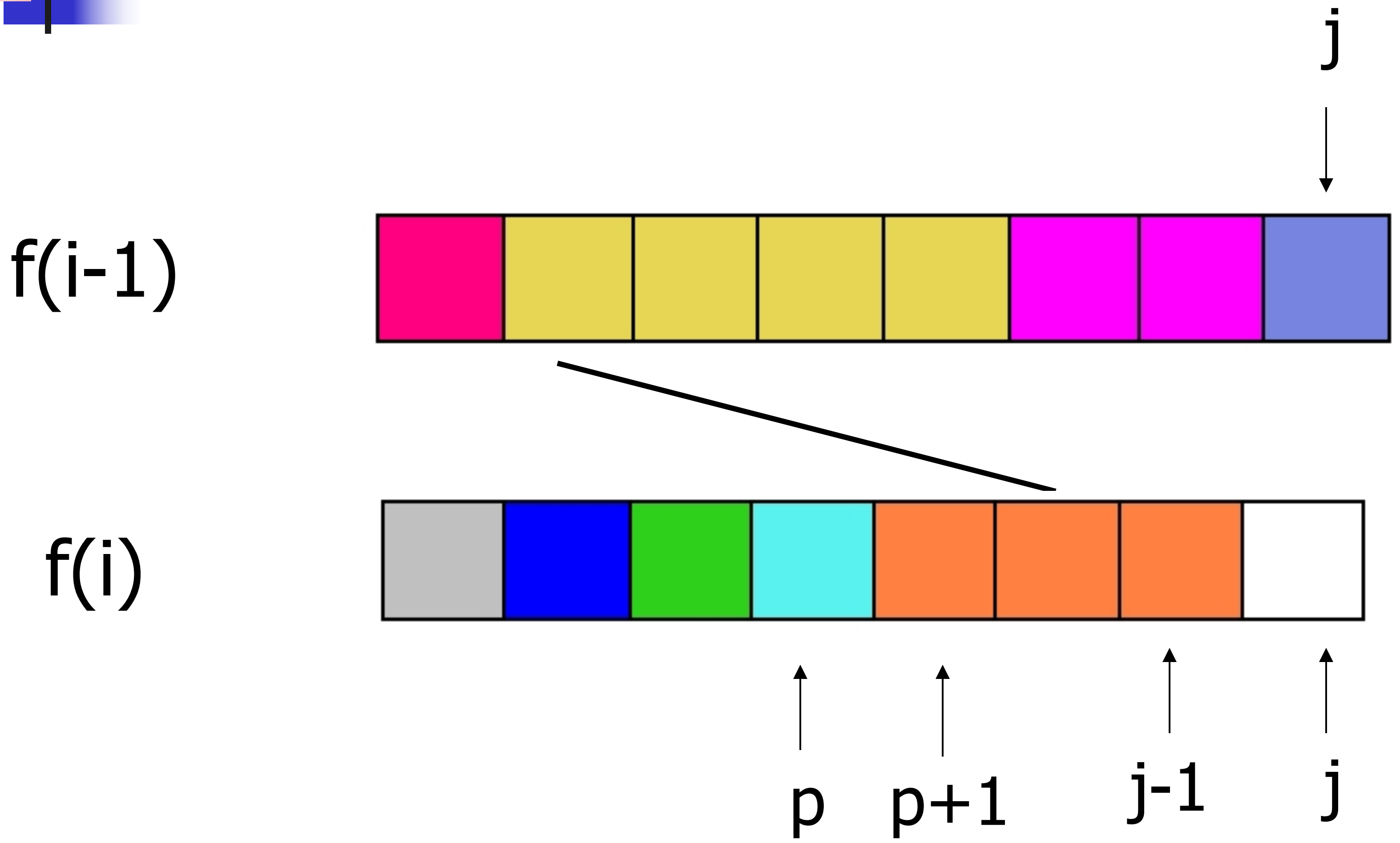
算法四



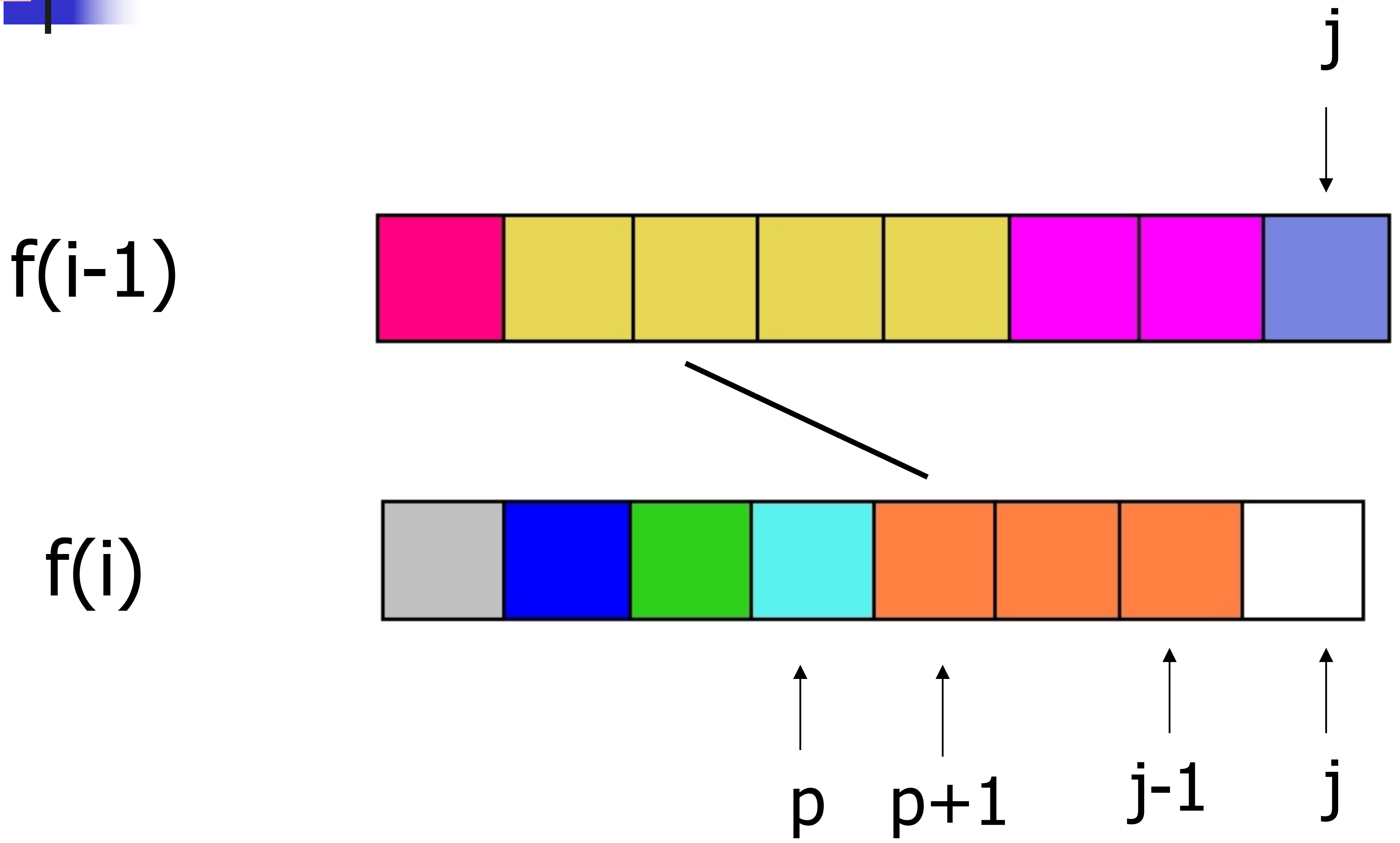
算法四



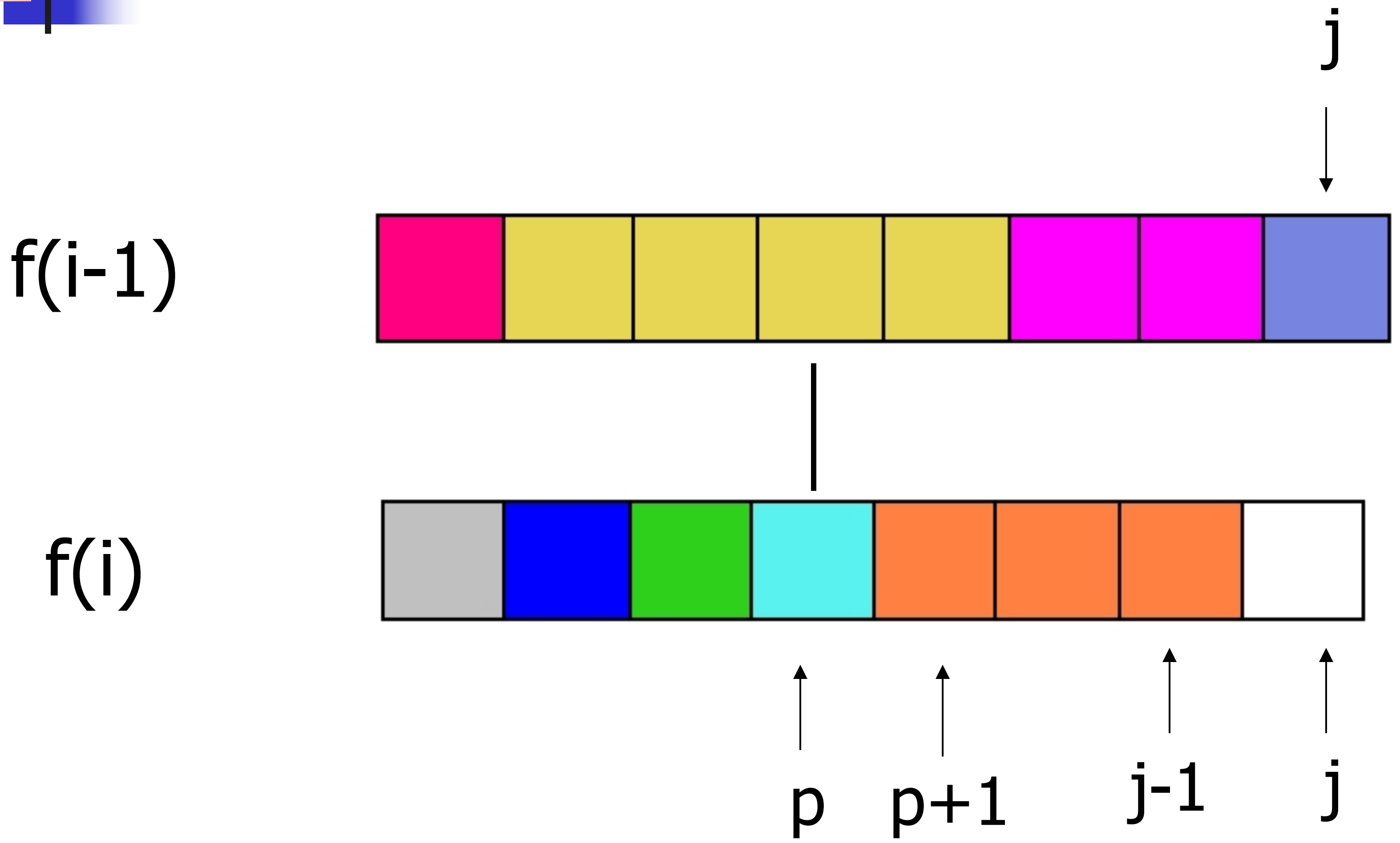
算法四



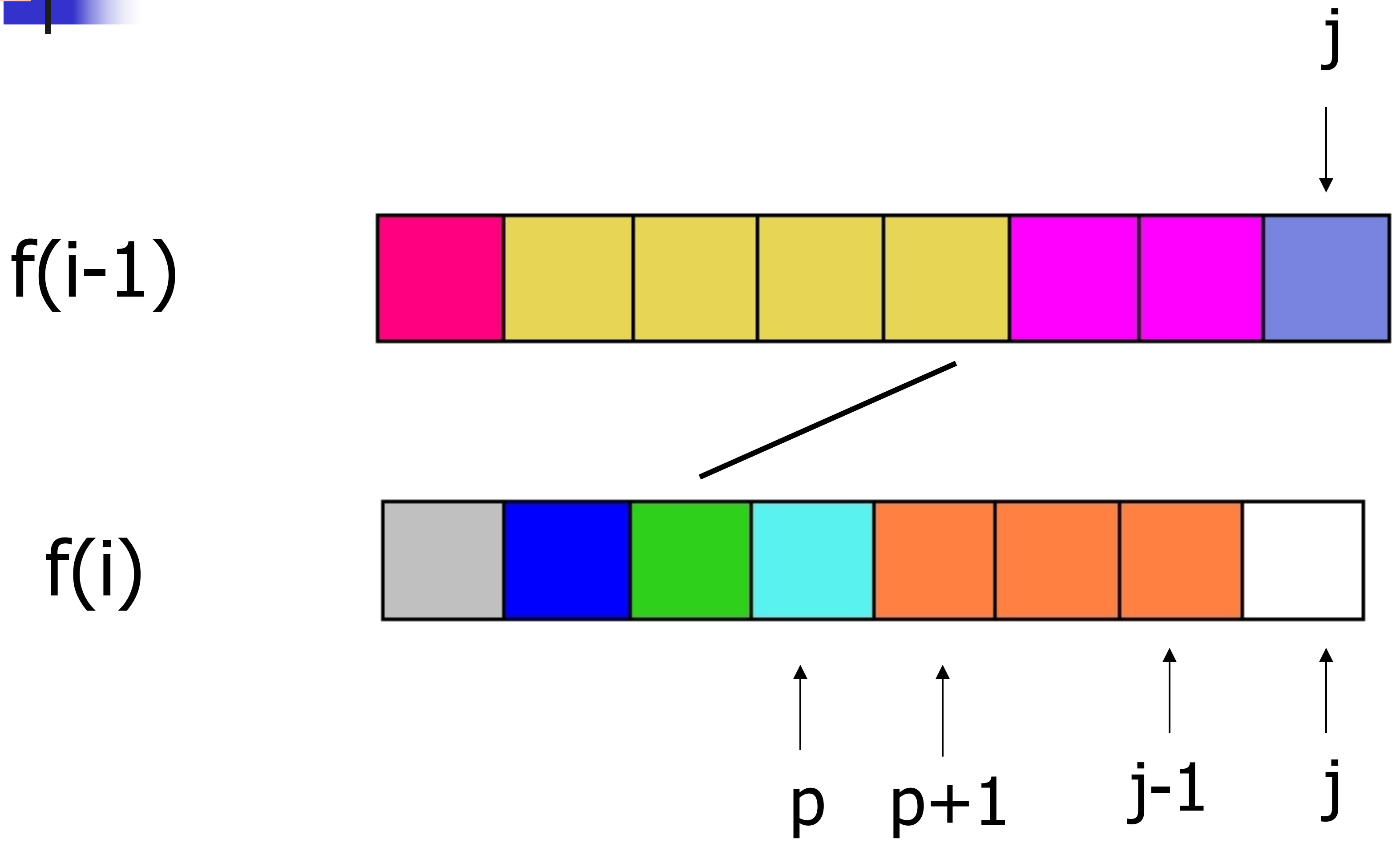
算法四



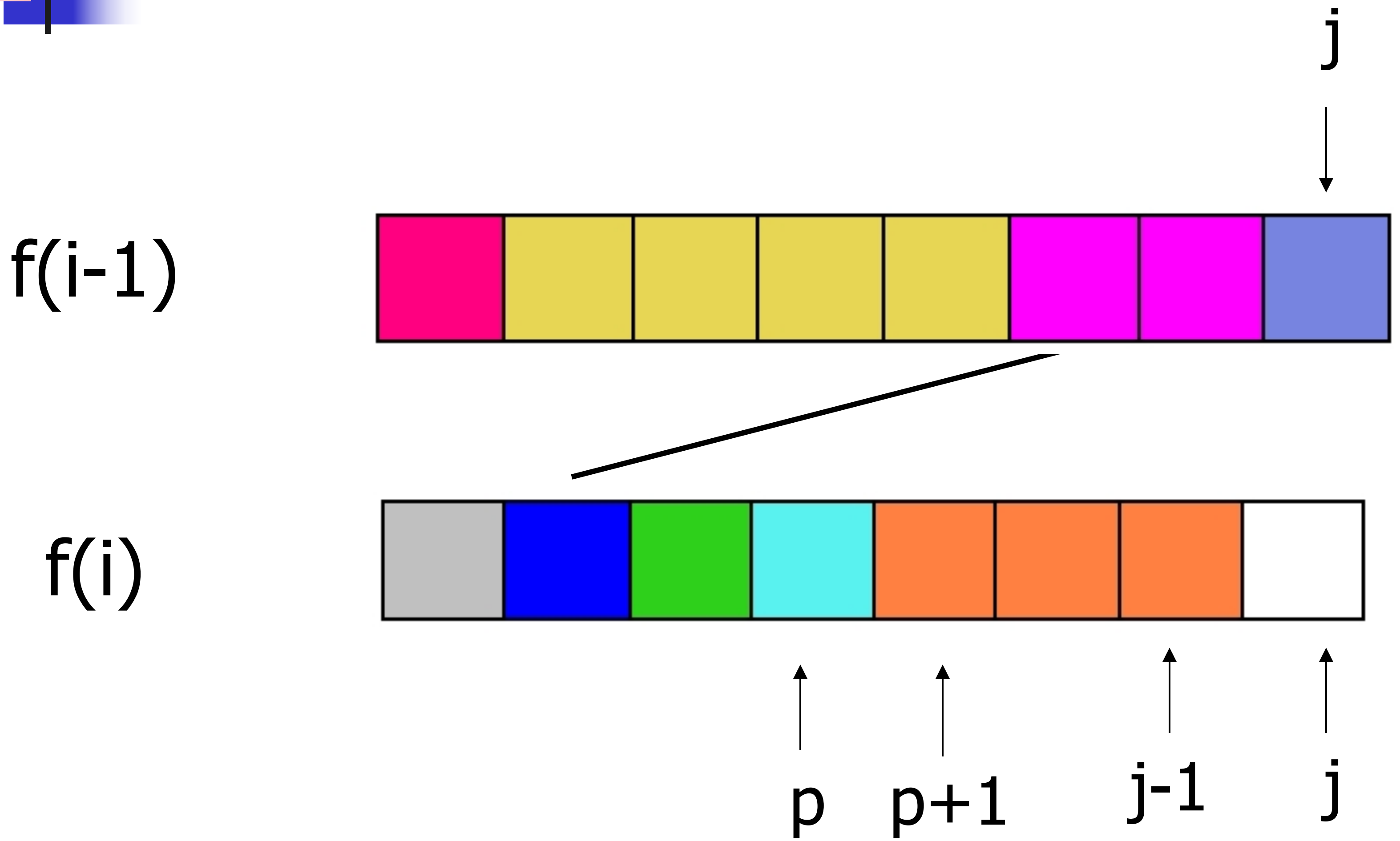
算法四



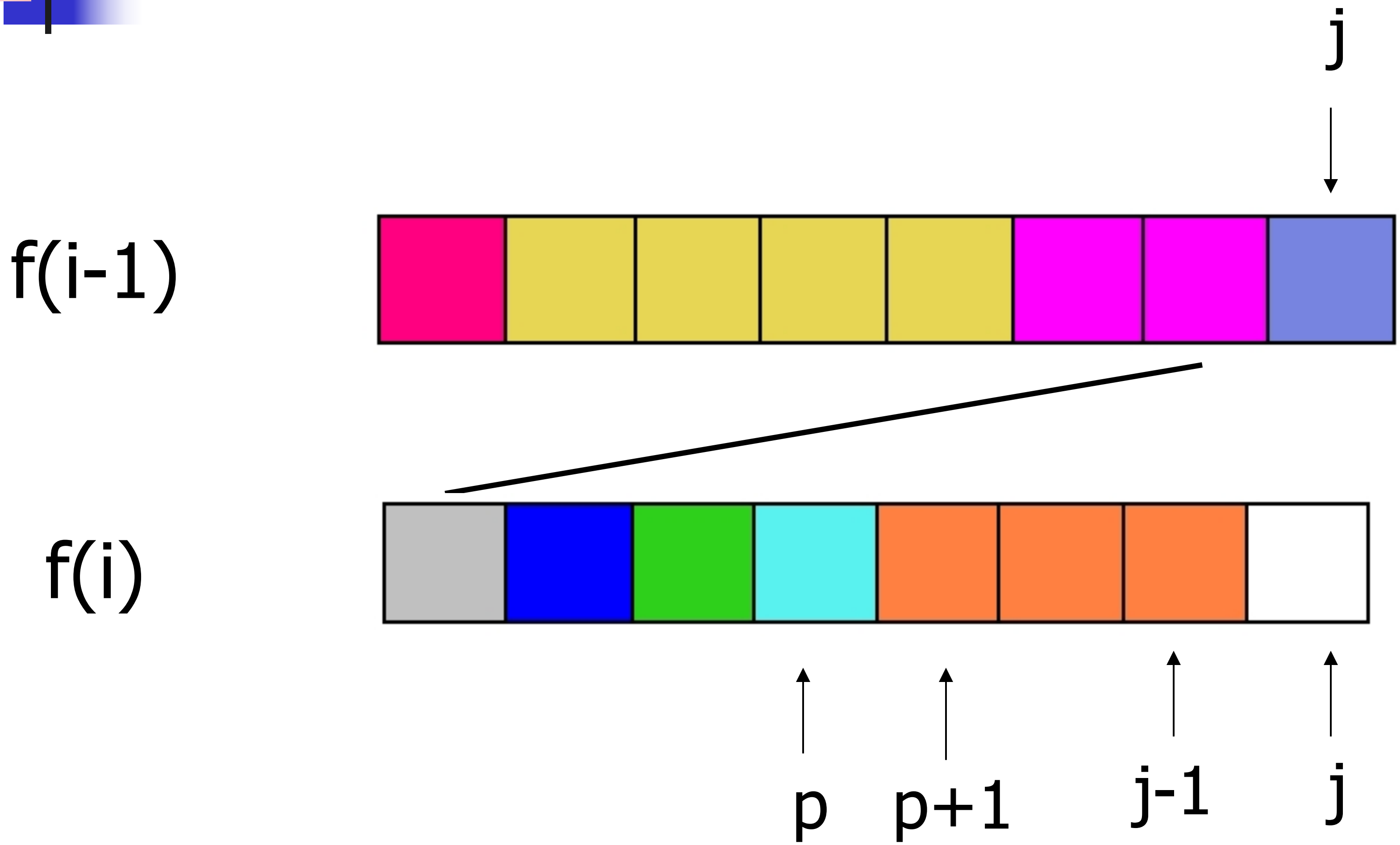
算法四



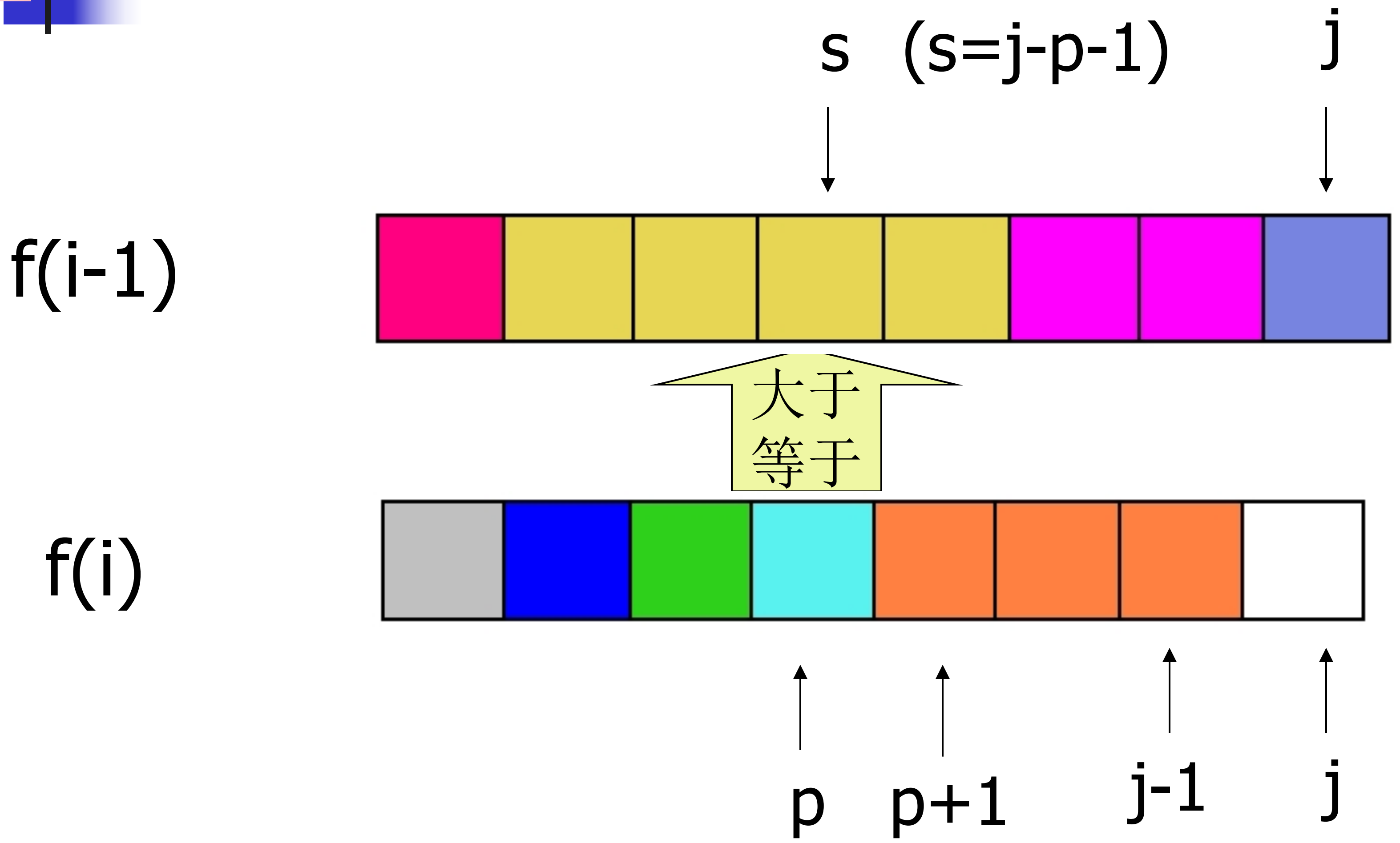
算法四



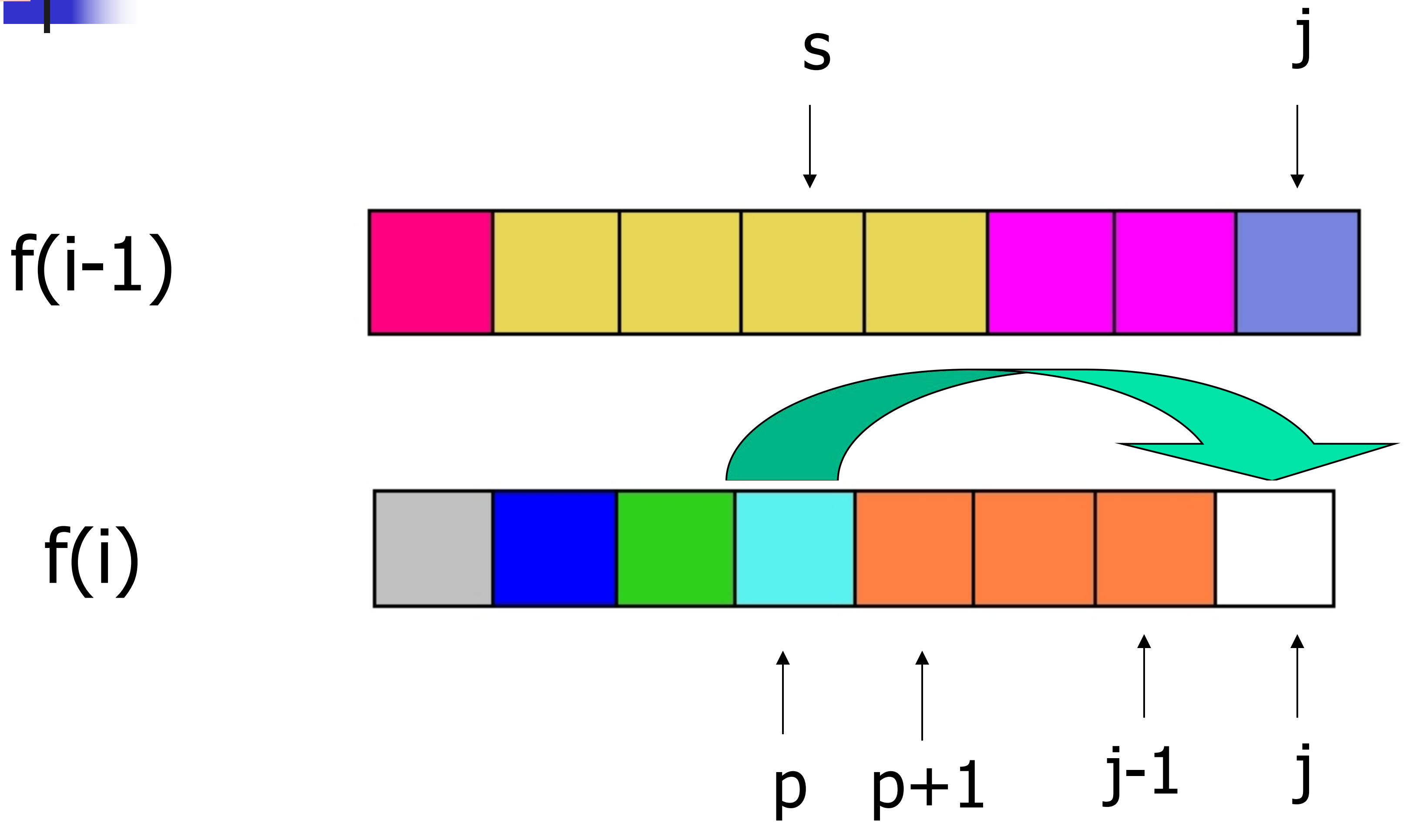
算法四



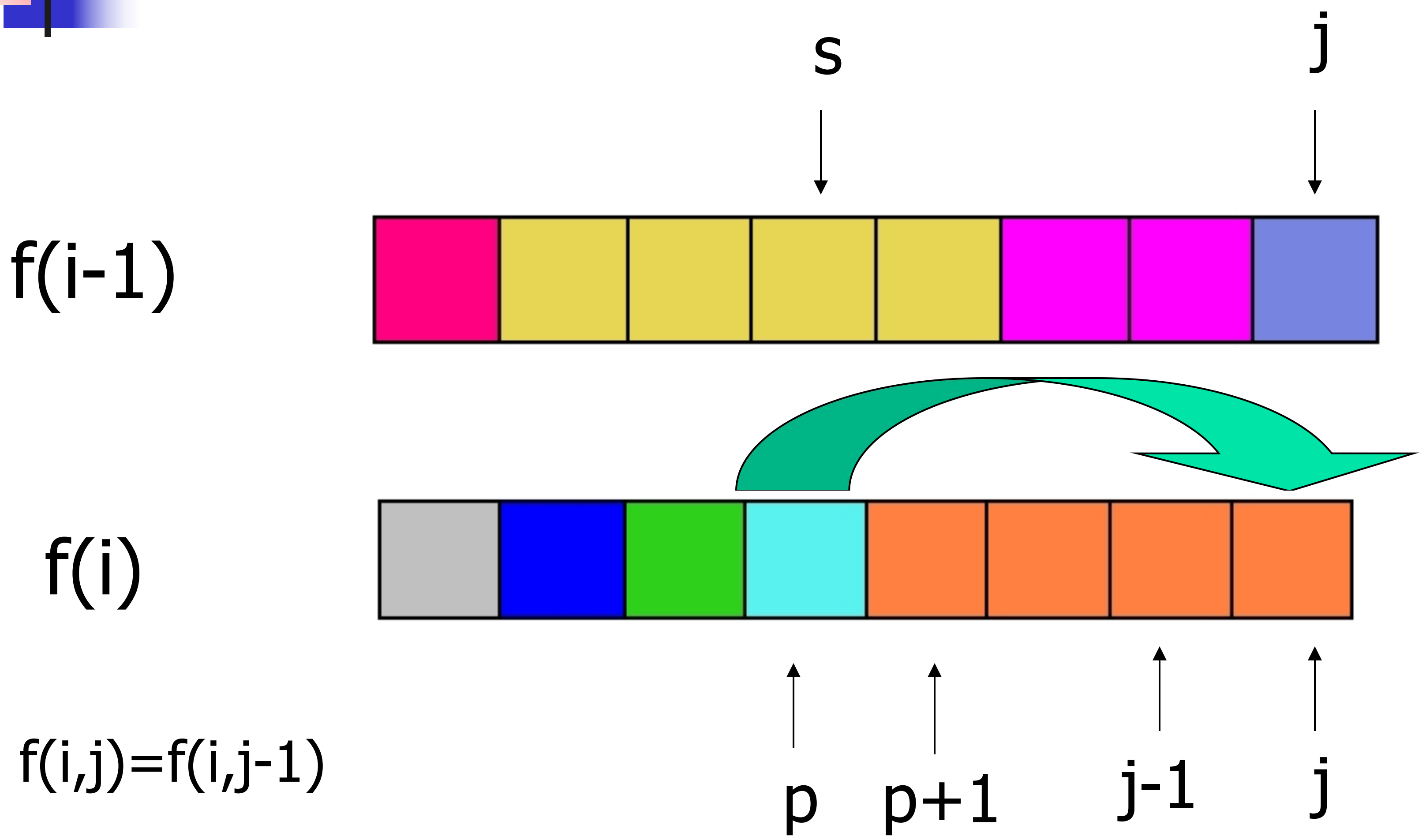
算法四



算法四

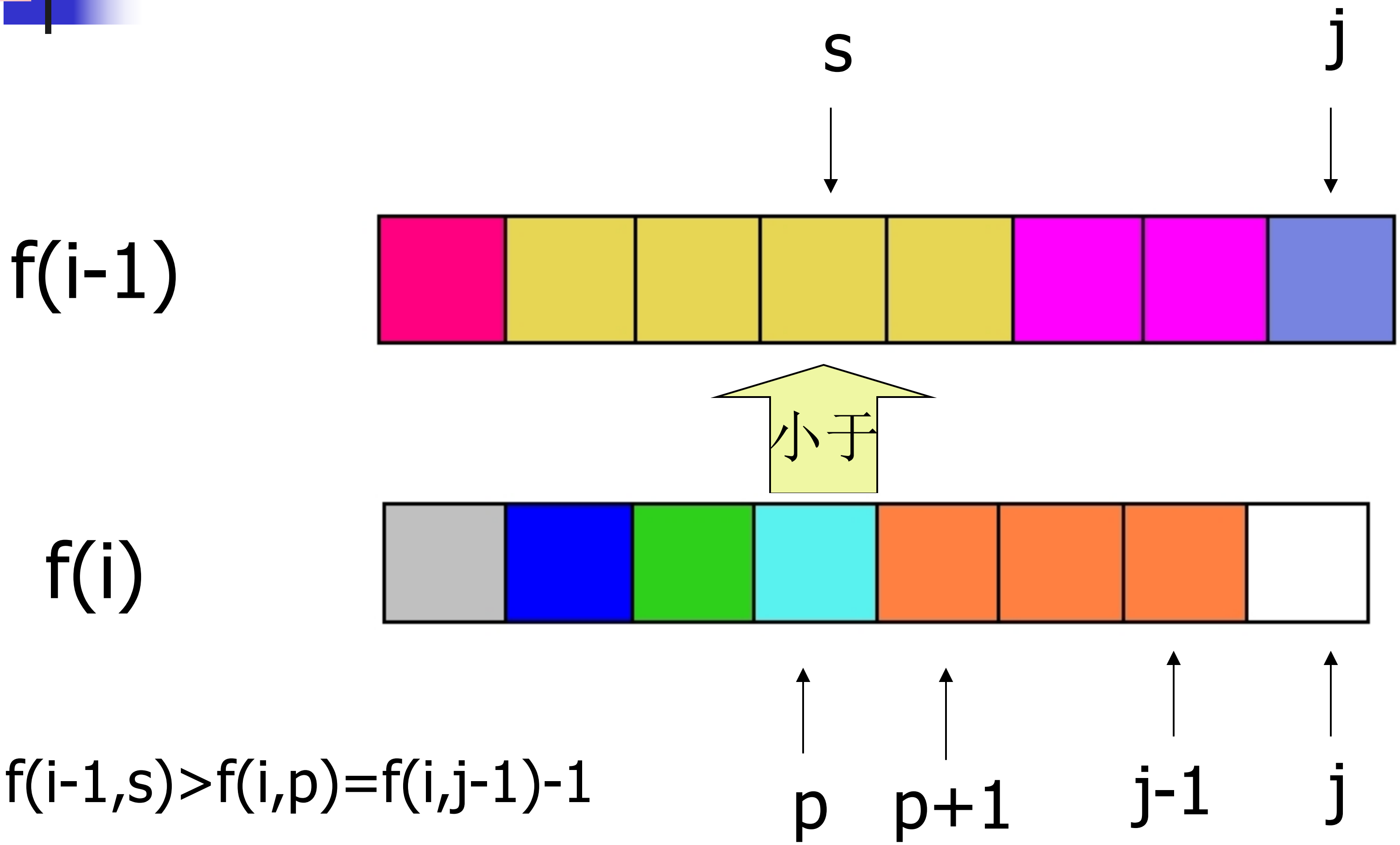


算法四



$f(i,j)=f(i,j-1)$

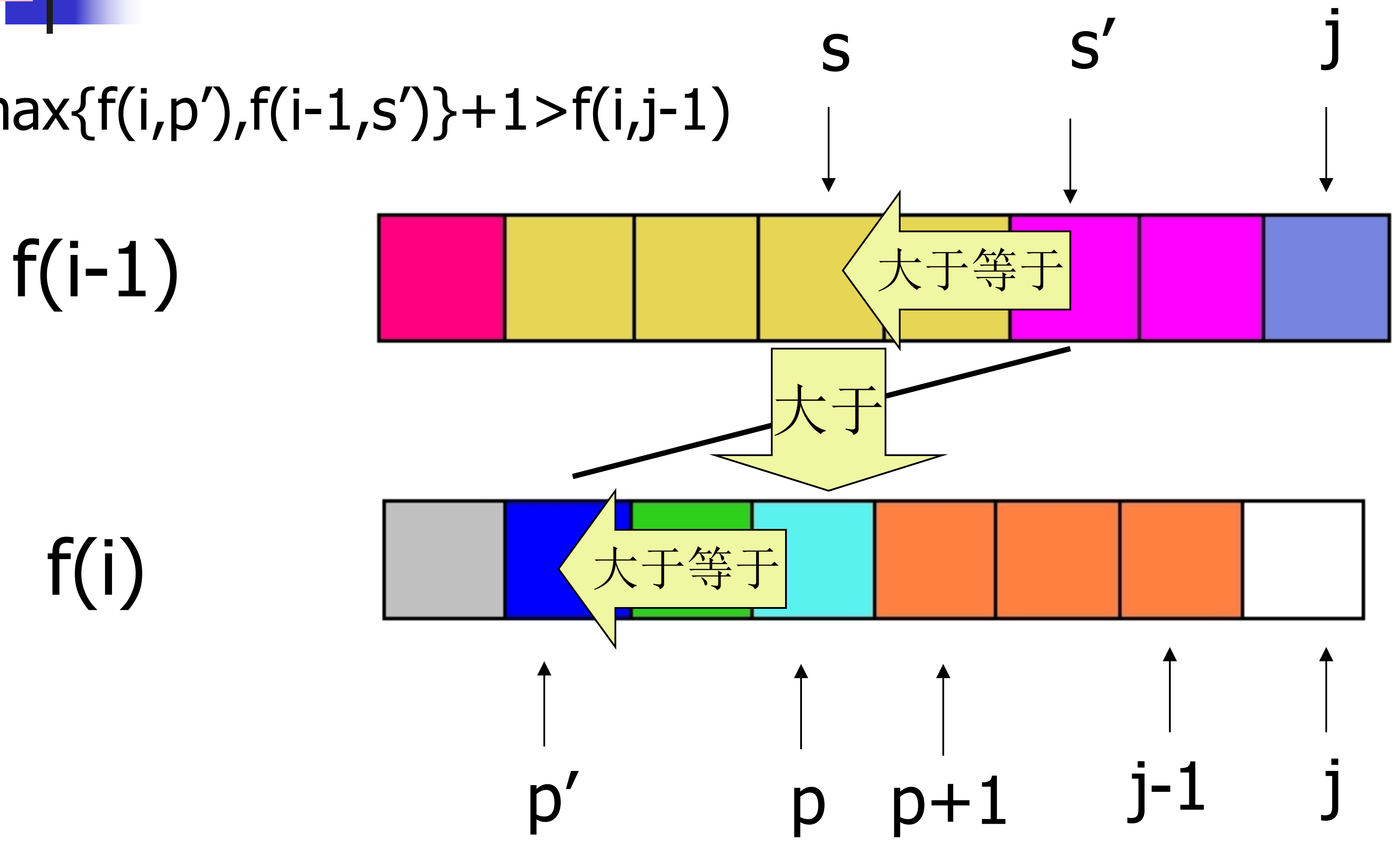
算法四



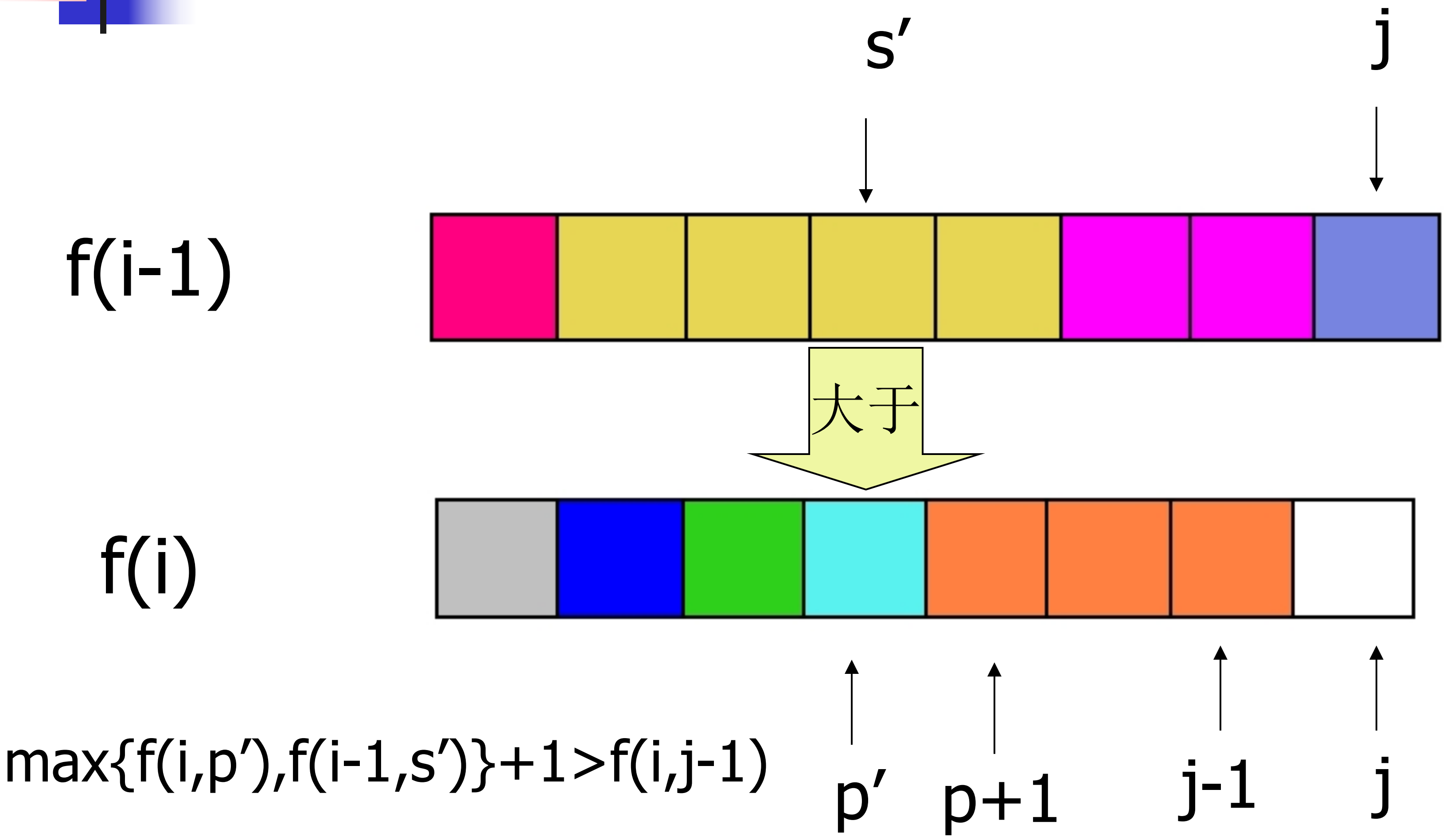
$f(i-1,s)>f(i,p)=f(i,j-1)-1$

情况一（p’<p)

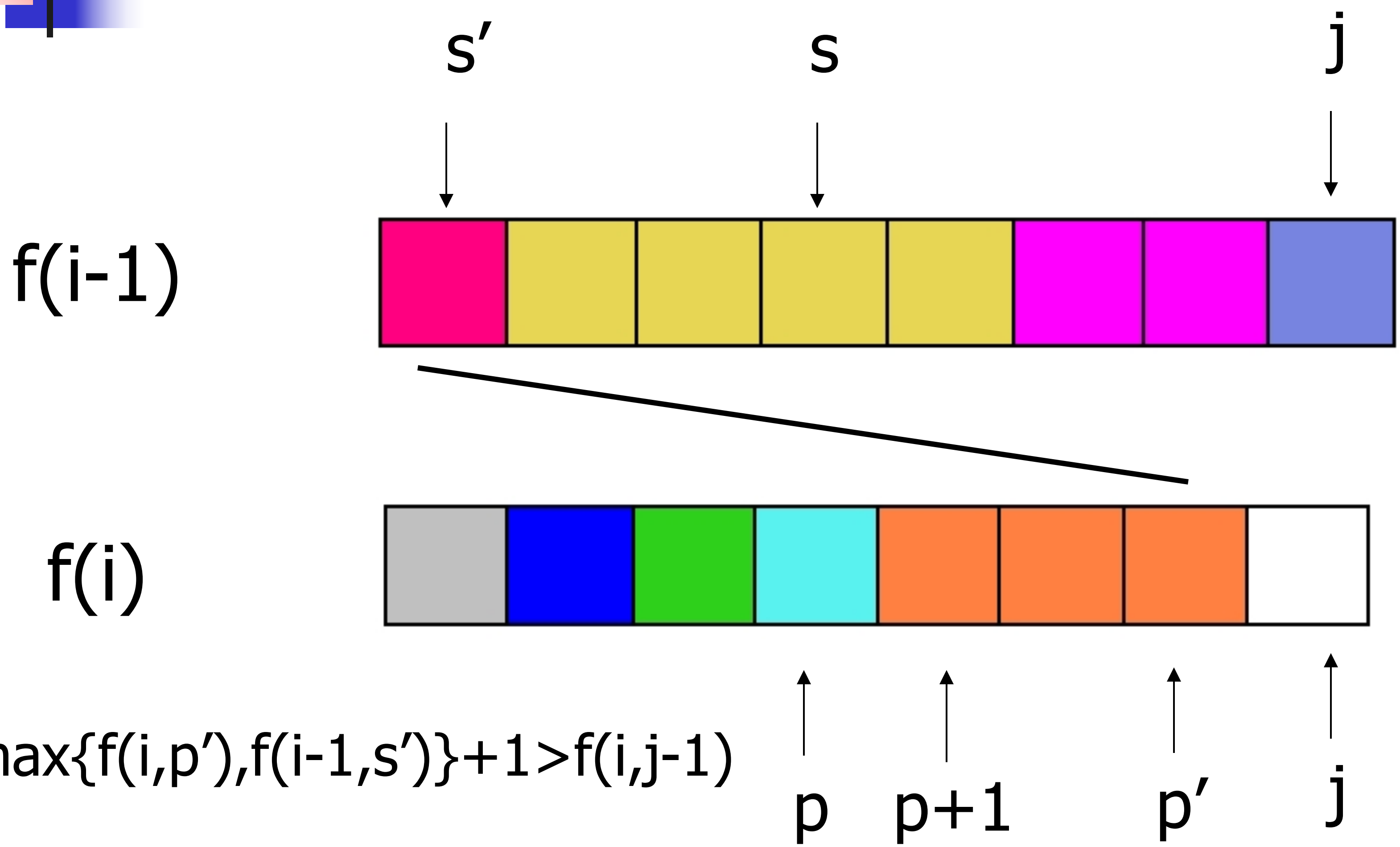
max{f(i,p′),f(i-1,s′)}+1>f(i,j-1)



情况二（p’=p)



情况三（p’>p)



$\max\{f(i,p'),f(i-1,s')\}+1>f(i,j-1)$

算法四

综上所述，

当f(i,p)>=f(i-1,j-p-1)时，可以直接得出f(i,j)=f(i,j-1);

当f(i,p)<f(i-1,j-p-1)时,无论任何决策都不能使f(i,j)=f(i,j-1),所以此时f(i,j)=f(i,j-1)+1.

因此，我们只需根据f(i,p)与f(i-1,j-p-1)的大小关系便可直接确定f(i,j)的取值，从而使状态转移成功地降为O(1),算法的时间复杂度降为$O(N\log_2 N)$

小结

这时我们会发现，经过了数次优化的动态规划模型已经不可能再有所改进了，对这题的讨论似乎可以到此为止了。但是，直到现在为止，我们还只是对一个动态规划模型进行优化。事实上，对于一道动态规划题目，往往可以建立多种模型。因此，我们不妨继续思考，来找到更高效的模型。

算法五

经过不懈努力，我们终于又找到了一种模型，在这种模型下的算法五，可以将时间复杂度降为O($\sqrt{N}$)。让我们来看一看算法五的精彩表现吧！

这里，我们需要定义一个新的动态规划函数g(i,j)，它表示用j个蛋尝试i次在最坏情况下能确定E的最高楼层数。

算法五

很显然，无论有多少鹰蛋，若只试1次就只能确定一层楼，即$g(1,j)=1$ ($j>=1$)

而且只用1个鹰蛋试i次在最坏情况下可在i层楼中确定E，即$g(i,1)=i$ ($i>=1$)

状态转移也十分简单。

$$g(i,j)=g(i-1,j-1)+g(i-1,j)+1 \quad (i,j>1)$$

算法五

我们的目标便是找到一个x，使x满足g(x-1,M)<N且g(x,M)>=N，答案即为x.

这个算法乍一看是$O(N\log_2 N)$的，但实际情况却并非如此。

经过观察，我们很快会发现，函数g(i,j)与组合函数C(i,j)有着惊人的相似，而且可以很容易证明对于任意i,j (i,j>=1), 总有g(i,j)>= C(i,j).

算法五

这样，我们可以得到C(x-1,M)<=g(x-1,M)<N。

根据这个式子，我们可以证明运算量 (即xM)与$\sqrt[M]{N}$同阶，这里证明从略。因此，我们若在M=1时作特殊判断，就可以使运算量最差与$\sqrt{N}$同阶。

算法五

在新的动态规划模型之下，我们找到了一个比前几种算法都优秀得多的方法。这就提醒我们不要总是拘泥于旧的思路。换个角度来审视问题，往往能收到奇效。倘若我们仅满足于算法四，就不能打开思路，找到更高效的解题方法。可见多角度地看问题对于动态规划的优化也是十分重要的。

总结

本文就《鹰蛋》一题谈了五种性能各异的算法，这里做一比较：

算法编号	时间复杂度	空间复杂度
算法一	$O(N^3)$	$O(N)$
算法二	$O(N^2\log_2 N)$	$O(N)$
算法三	$O(N(\log_2 N)^2)$	$O(N)$
算法四	$O(N\log_2 N)$	$O(N)$
算法五	$O(\sqrt{N})$	$O(\log_2 N)$

总结

从这张表格中，我们可以很明显地看出优化能显著提高动态规划算法的效率。并且，优化的方法也是多种多样的。这就要求我们在研究问题时必须做到：

深入探讨　　大胆创新

永不满足　　不断改进

总结

在实际问题中，尽管优化手段千变万化，但万变不离其宗，其本质思想都是：

一、找到动态规划算法中仍不够完美的部分，进行进一步改进；

二、另辟蹊径，建立新的模型，从而得到更高效的算法。

总结

而在具体的优化过程中，需要我们做到以下几点：

减少状态总数

挖掘动态规划方程的特性

优化状态转移部分

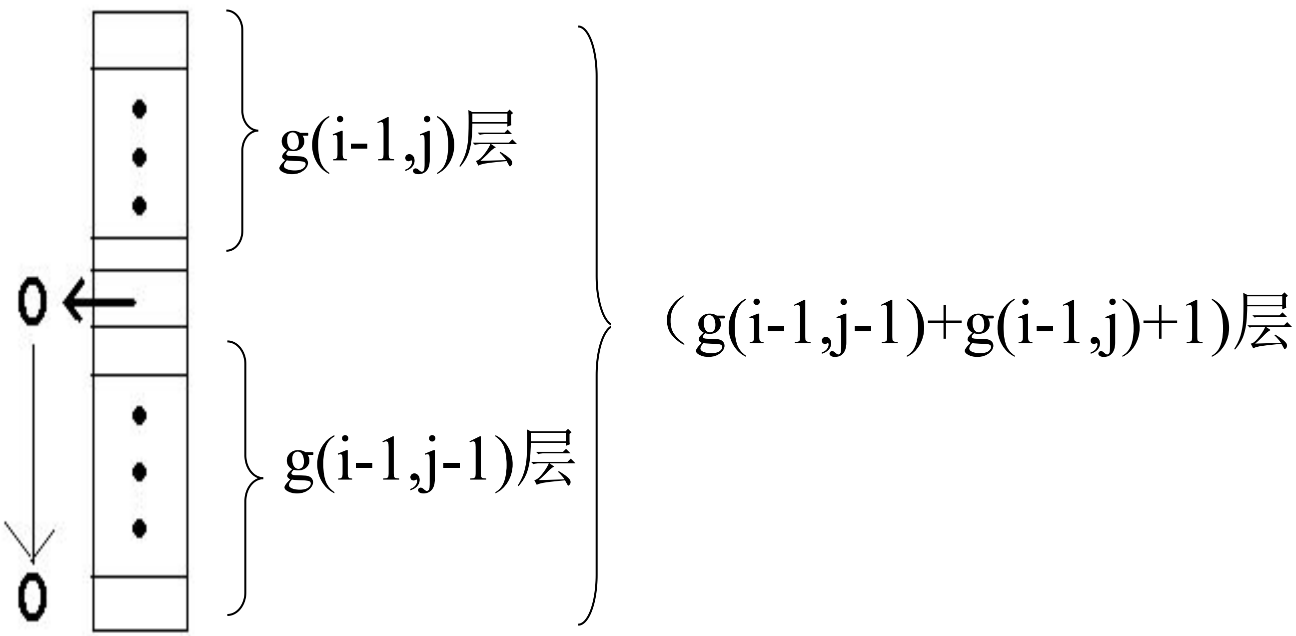
建立新的动态规划模型

结束语

优化，再优化，让我们做得更好！

谢谢大家！

算法五



因此，有如下等式成立：

$$g(i,j)=g(i-1,j-1)+g(i-1,j)+1 \quad (i,j>1)$$