# 染色法和构造法在棋盘上的应用

广东北江中学 方奇

# 目录

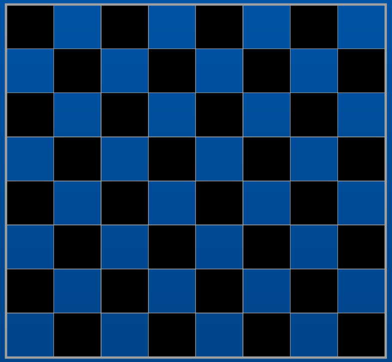
- 1 基本概念
- 2 棋盘的覆盖
  - (1) 同形覆盖
  - (2) 异形覆盖
  - (3) 小结
- 3 马的遍历
  - (1) 马的哈密尔顿链
  - (2) 马的哈密尔顿圈
- 4 其它问题
  - (1) Worm world
- 5 结语

# 1 基本概念

- 棋盘

所谓 m*n 棋盘，指由 m 行 n 列方格构成的 m*n 矩形。每个方格成为棋盘的格，位于 第 i 行 j 列的格记为 a(i,j)。当 i+j 为奇（偶）数时，称 a(i,j) 为奇（偶）格。

- 染色法



用不同颜色对棋盘格子进行染色，起到分类的效果。

类似国际象棋盘上的黑白二染色，称为“自然染色”。

- 构造法

直接列举出某种满足条件的数学对象或反例导致结论的肯定与否定，或间接构 造某种对应关系，使问题根据需要进行转化的方法，称之为构造法。

# 2　棋盘的覆盖

- 棋盘的覆盖

指用若干图形去覆盖棋盘。覆盖的每个图形也由若干格子组成，称为覆盖形。约定任两个覆盖形互不重叠，任一覆盖形中任一格总与棋盘上某格重合。

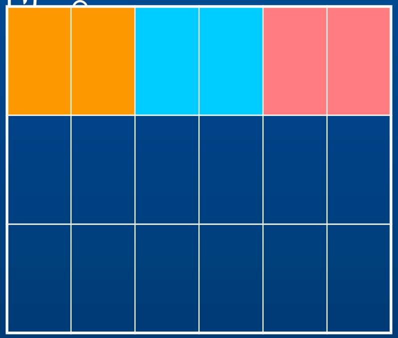
按覆盖效果，可分为完全覆盖、饱和覆盖、无缝覆盖和互异覆盖。

完全覆盖：各个覆盖形的总格子数等于棋盘的总格子数

按覆盖形，可分为同形覆盖（只有一种覆盖形）和异形覆盖（有多种覆盖形）。

# 2-1 同形覆盖

- 例 **1** 给出 m,n,k，试用若干 1*k 的矩形覆盖 m*n 的棋盘。
- 分析
- 有定理 **1**： *m*n* 棋盘存在 *1*k* 矩形的完全覆盖的充分必要条件是 $k|m$ 或 $k|n$ 。
- 证明:
- 充分性是显然的。用构造法。当 k|n 时，每一行用 n/k 个 1*k 的矩形恰好完全覆盖。k|m 情况类似。



- 必要性。当 n,m 均不能被 k 整除时，设
- $m=m1*k+r, 0<r<k$
- $n=n1*k+s, 0<s<k$
- 并约定 $r>=s$（否则旋转 90°)

# 2-1　同形覆盖

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | … | k | 1 | 2 | 3 | … | k | …… | 1 | 2 | 3 | … | s |
| 2 | 3 | 4 | … | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 1 | …… | 2 | 3 | 4 | … | s+1 |
| 3 | 4 | … | … | 2 | 3 | 4 | … | … | 2 | …… | 3 | 4 | … | … | : |
| : | : | | | : | : | : | | | : | …… | : | : | | | : |
| k | 1 | … | … | k-1 | k | 1 | … | … | k-1 | …… | k | 1 | … | … | s+k-1 |
| 1 | 2 | 3 | … | k | 1 | 2 | 3 | … | k | …… | 1 | 2 | 3 | … | s |
| 2 | 3 | 4 | … | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 1 | …… | 2 | 3 | 4 | … | s+1 |
| 3 | 4 | … | … | 2 | 3 | 4 | … | … | 2 | …… | 3 | 4 | … | … | : |
| : | : | | | : | : | : | | | : | | : | : | | | : |
| k | 1 | … | … | k-1 | k | 1 | … | … | k-1 | …… | k | 1 | … | … | s+k-1 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | …… | : | : | : | : | : |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | | : | : | : | : | : |
| 1 | 2 | 3 | … | k | 1 | 2 | 3 | … | k | …… | 1 | 2 | 3 | … | s |
| 2 | 3 | 4 | … | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 1 | …… | 2 | 3 | 4 | … | s+1 |
| 3 | 4 | … | … | 2 | 3 | 4 | … | … | 2 | …… | 3 | 4 | … | … | : |
| : | : | | | : | : | : | | | : | …… | : | : | | | : |
| r | r+1 | … | … | r+k-1 | r | … | … | … | r+k-1 | …… | r | r+1 | … | … | r+s-1 |

m=m1*k+r　n=n1*k+s
r>=s

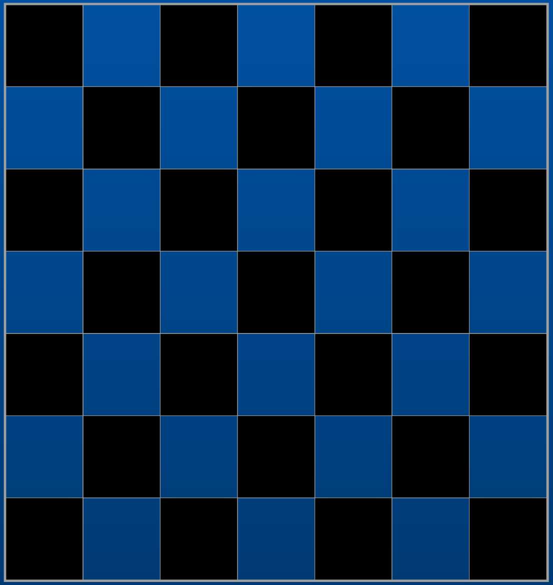
# 2-1　同形覆盖

- 由上面的定理 **1**， 可彻底解决 m*n 棋盘的 p*q 矩形完全覆盖问题

- 定理 **2** $m*n$ 棋盘存在 $p*q$ 矩形的完全覆盖充分必要条件是 $m,n$ 满足下列条件之一:
- （$i$） $p|x$ 且 $q|y$
- （$ii$） $p|x,q|x$, 且存在自然数 $a,b$， 使 $y=ap+bq$
- 其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$

# 2-2　异形覆盖

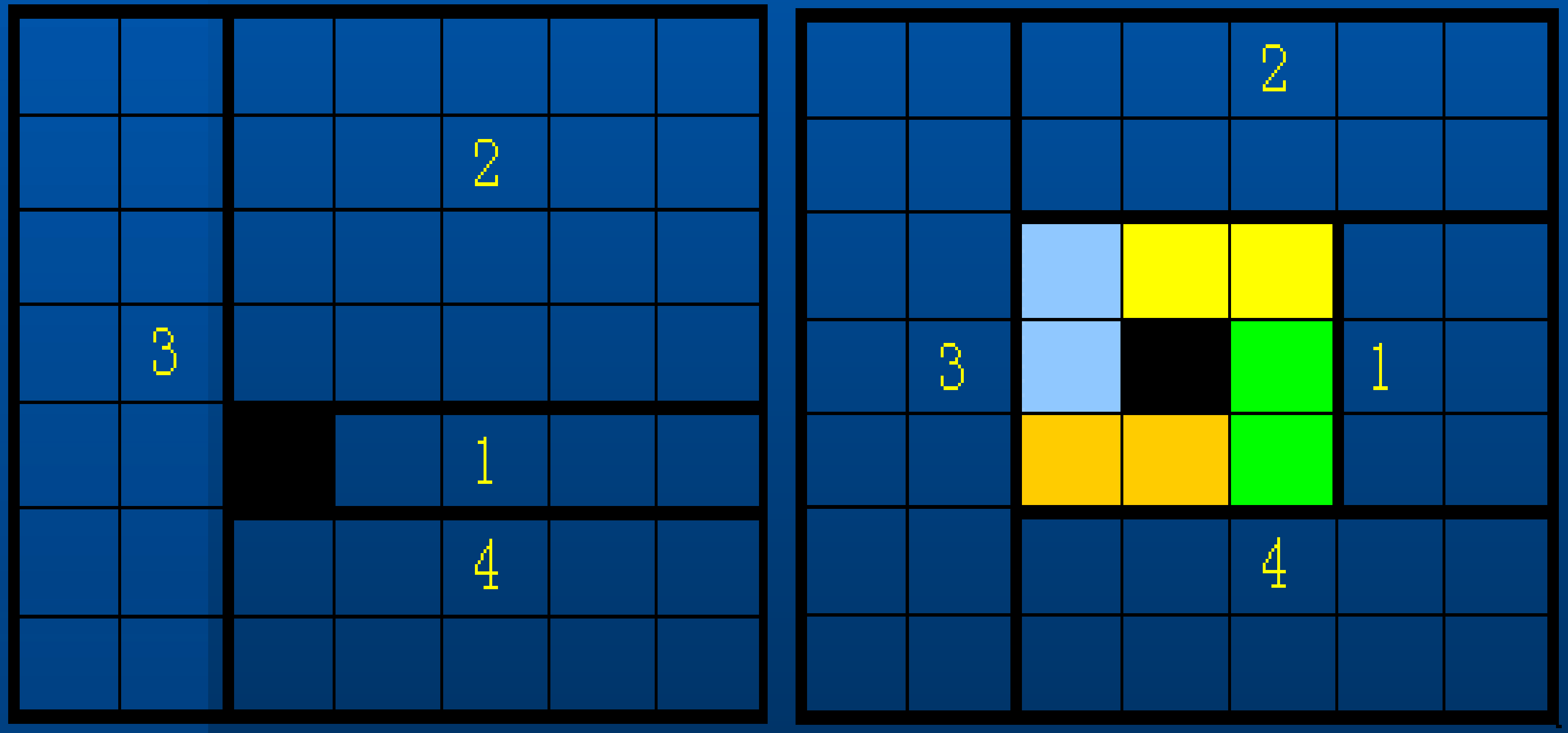
- 例 **2**　设有 m*n 的棋盘，当 m*n 为奇数时，尝试删去一个格子，剩下部分用若干 1*2 的矩形覆盖；当 m*n 为偶数时，尝试删去两个格子，剩下部分用若干 1*2 的矩形覆盖。



- 分析：
- 1　先来考虑 m*n 为奇数的情况
- 　一方面，将棋盘自然染色。无论怎么放，一个 1*2 的矩形必盖住一个黑格和一个白格，而棋盘上的黑格比白格多 1 ，于是只能去掉一个黑格（即偶格）。

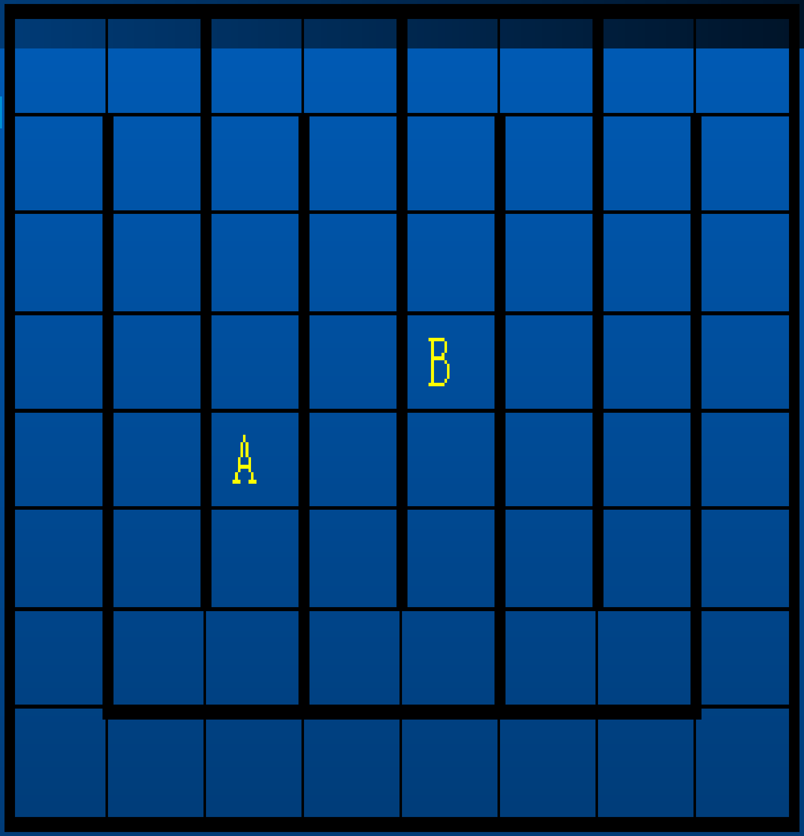
# 2-2 异形覆盖

- 另一方面，设去掉偶格为 a(i,j)，用构造法必能得到可行解
  - i 与 j 同为奇数
  - i 与 j 同为偶数



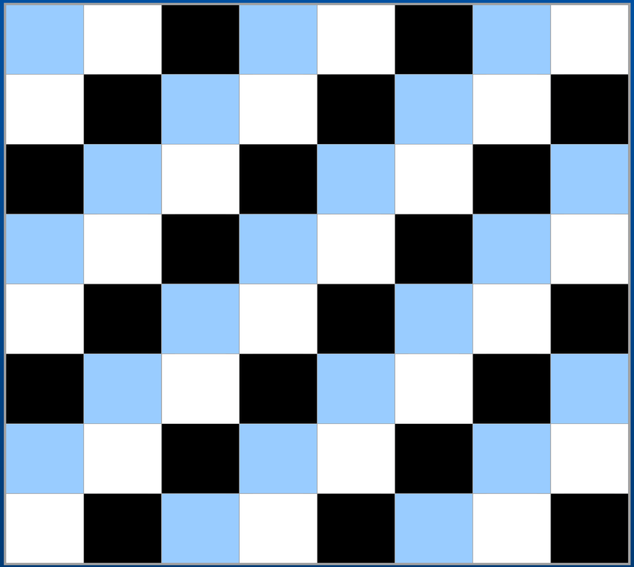
# 2-2 异形覆盖

- 2 再考虑 m*n 为偶数的情况
- 类似地，由自然染色法得知，去掉的两格必定异色，即一个奇格，一个偶格（不然两种格子总数不等）
- 另一方面，用构造法，总可以用一些粗线将棋盘隔成宽为 1 的长条路线，使从任一格出发可以不重复地走遍棋盘并回到出发点。



# 2-2　异形覆盖

- 针对染色法，上面的例子都是利用“各类颜色格子总数必须相等”这一条件推出矛盾，但有些时候，只考虑这个条件是不够充分的。
- 例 **3**　8*8 棋盘剪去哪个方格才能用 21 个 1*3 的矩形覆盖?
- 分析
- 　考虑到对称性，只有剪去 **a(3,3)** 、 **a(3,6)** 、 **a(6,3)** 、 **a(6,6)** 中的某一个　才能满足题意。



蓝色：21个

白色：22个

黑色：21个

# 2-3　小结

- 　　覆盖类问题其实是一个难度较大的课题，这里只讨论了一些简单的情况，以说明染色法与构造法的应用
- 　　需要补充的是，染色法的种类形形色色、五花八门。考虑到可推广性和易操作性，本文只着重研究了“间隔染色法”（即自然染色法的推广）

# 3　马的遍历

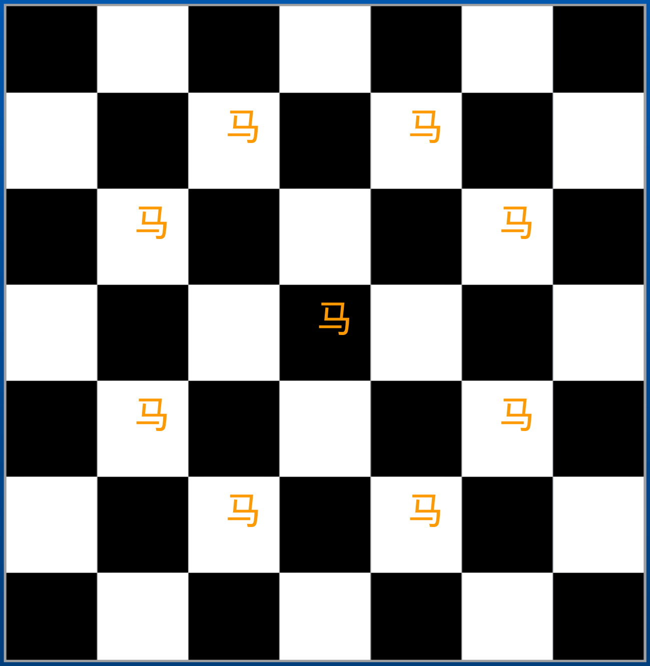
- 马行走规则
- 　　从 2*3 的矩形一个角按对角线跳到另一个角上
- 马的遍历
- 　　从一个格出发按跳马规则不重复地走遍所有格
- 棋盘中马的遍历问题分两类
- 　(1)　马的哈密尔顿链
- 　(2)　马的哈密尔顿圈

# 3-2　马的哈氏链

- 通常有三种方法
- 1　贪心法——每一步跳向度最小的点　（度数指可一步到达且未经过的点的个数）
- 2　分治法——将棋盘分成几个小棋盘，分别找哈氏链，再接起来
- 3　镶边法——先在一个小棋盘中找到哈氏链，然后在棋盘四周镶边，已产生大棋盘的哈氏链。
- 按上述方法不难得到下面结论：
- n*n 棋盘存在哈氏链的充要条件是 n>3 。

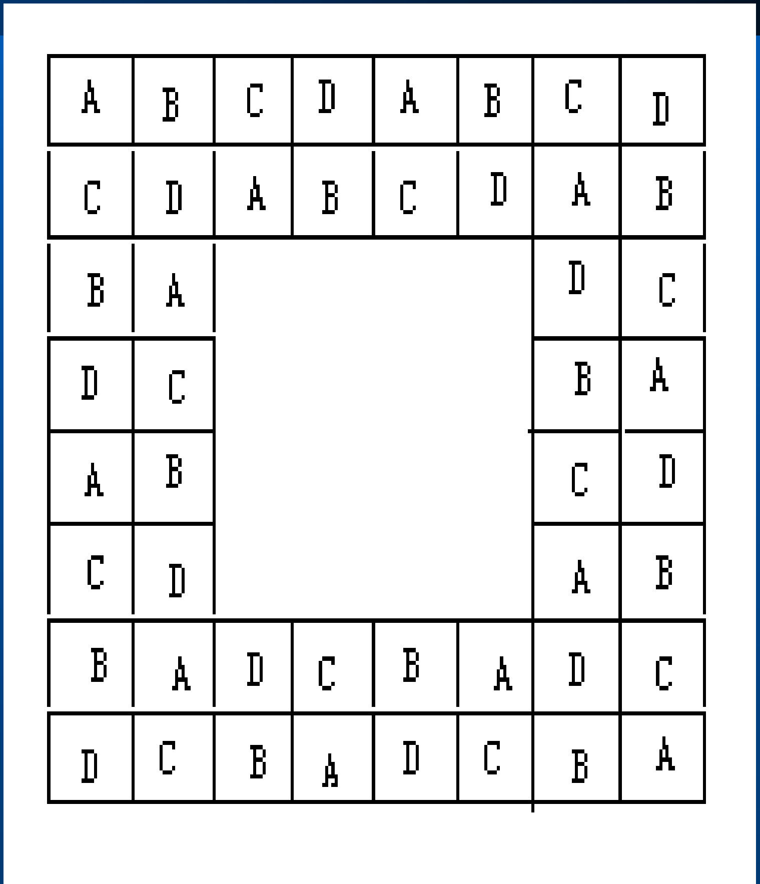
# 3-2　马的哈氏圈

- 例 4 求 n*n 棋盘的哈氏圈
- 分析：
- 将棋盘自然染色，考察无解情况。
- 马无论怎么走，都必须按黑格－白格－黑格－白格．．．．．．如此循环。由于要回到起点（起点与终点同色），途经两种颜色的格子数必相等，可知 n 为奇数时无解。
- 因为大小限制， n<6 时也无解



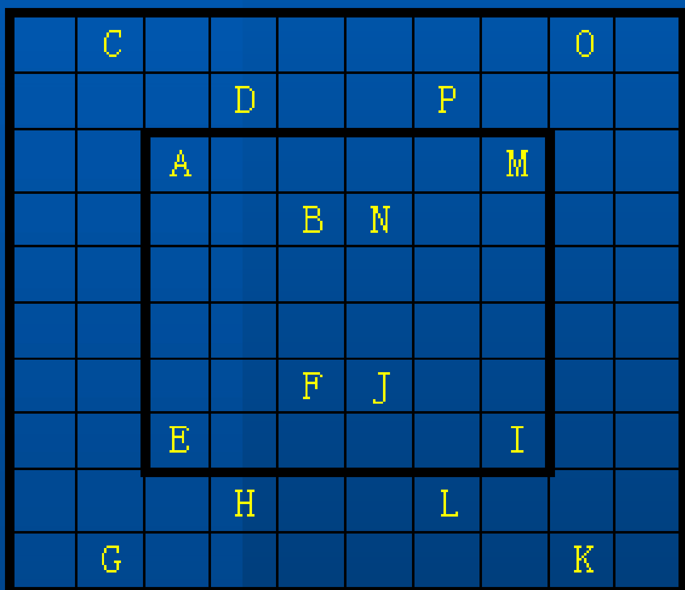
# 3-2　马的哈氏圈

- 当 n>=6 且为偶数时，用镶边法构造
- n*n 的大矩形是由 (n-4)*(n-4) 的小矩形套上一个宽为 2 的环组成的。而宽为 2 的环有一个特点，就是可用四条回路 A 、 B 、 C 、 D 刚好覆盖
- 假设 (n-4)*(n-4) 的棋盘已找到哈氏圈
- 那么只要设法将 A 、 B 、 C 、 D 四条回路嵌入其中，则 n*n 的矩形的哈式圈就构造出来了



# 3-2　马的哈氏圈

- 1）　n 除以 4 余 2 时，
- 在内矩形四个角（A 、E 、I 、M）上分别开口。

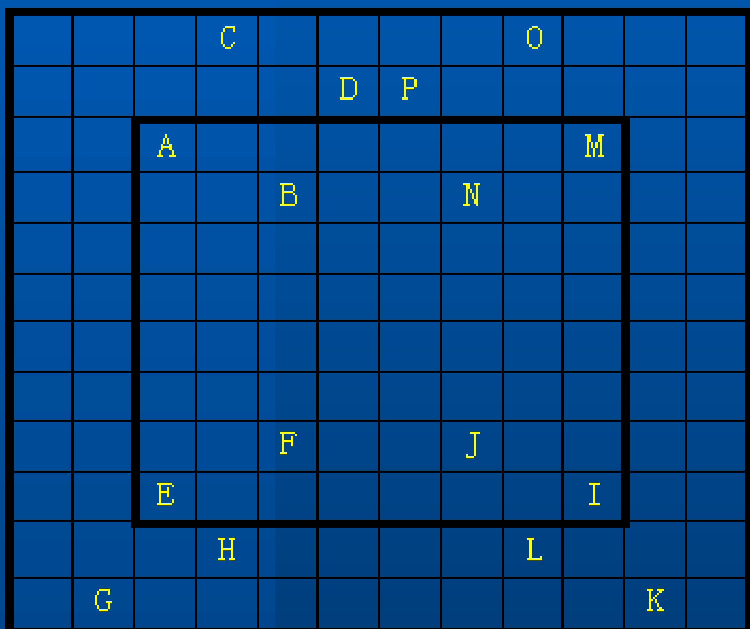



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 19 | 26 | 7 | 4 |
| 20 | 25 | 2 | 5 | 18 | 27 |
| 15 | 26 | 17 | 8 | 3 | 6 |
| 24 | 21 | 32 | 11 | 28 | 9 |
| 35 | 14 | 23 | 30 | 33 | 12 |
| 22 | 31 | 34 | 13 | 10 | 29 |

- 1　将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A 、 B 上对接，变成 A-C-．．．．-D-B
- 2　将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E 、 F 上对接，变成 E-G-．．．．-H-F
- 3　将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I 、 J 上对接，变成 I-K-．．．．-L-J

# 3-2 马的哈氏圈

- 2） n 除以 4 余 0 时
- 在内矩形四个角（A 、E 、I 、M ）上分别开口。




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 54 | 47 | 38 | 49 | 52 | 31 | 26 |
| 46 | 39 | 2 | 53 | 32 | 27 | 22 | 51 |
| 55 | 64 | 37 | 48 | 3 | 50 | 25 | 30 |
| 40 | 45 | 56 | 33 | 28 | 23 | 4 | 21 |
| 63 | 36 | 61 | 44 | 57 | 20 | 29 | 24 |
| 60 | 41 | 34 | 15 | 12 | 5 | 8 | 19 |
| 35 | 62 | 43 | 58 | 17 | 10 | 13 | 6 |
| 42 | 59 | 16 | 11 | 14 | 7 | 18 | 9 |

- 1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A 、 B 上对接，变成 A-C- . . . -D-B
- 2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E 、 F 上对接，变成 E-G- . . . -H-F
- 3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I 、 J 上对接，变成 I-K- . . . -L-J

# 3-2 马的哈氏圈

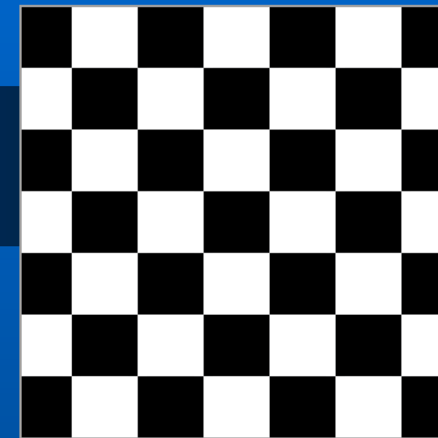
- 一个猜想:
- m*n （m<=n）棋盘不存在哈氏圈的充要条件是：
- m,n 满足下列条件之一
- （1） m,n 都是奇数
- （2） m=1,2 或 4
- （3） m=3 且 n=4,6,8
- 还没有证明

# 4　其它应用

- 例 **5**　蠕虫世界 （Uva）
- 蠕虫在一张 N*N 的网上爬行。每个网格上有一个数字，蠕虫不能经过相同的数字两次。开始的时候，蠕虫任意选择一个格子作为起始点。它爬行只能沿水平或竖直方向，且不能超出网外。蠕虫如何移动才能到达尽可能多的网格呢？右面是一个样例。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 18 | 15 | 24 | 20 | 2 | 20 |
| 6 | 2 | 15 | 2 | 17 | 15 | 3 | 7 |
| 0 | 11 | 18 | 16 | 20 | 15 | 1 | 11 |
| 6 | 2 | 6 | 13 | 4 | 17 | 20 | 16 |
| 5 | 12 | 7 | 2 | 3 | 5 | 18 | 23 |
| 7 | 13 | 3 | 2 | 2 | 11 | 4 | 23 |
| 16 | 23 | 10 | 2 | 4 | 12 | 5 | 20 |
| 17 | 12 | 10 | 1 | 13 | 12 | 6 | 20 |

# 4　其它应用



- 分析：
- 采用“染色法”贪心出一个上界。
- 1　自然染色
- 2　设 Tfree,Tblack,Twhite 分别记录三类格子数量
- 　对每一种数字（1， 2， 3……）分析
- 　1）只存在标有该数字的白色格子， Twhite←Twhite+1
- 　2）只存在标有该数字的黑色格子， Tblack←Tblack+1
- 　3）存在标有该数字的黑白两色格子， Tfree←Tfree+1
- 3　估价上界
- **Lmax= (Twhite+Tfree)*2+1 (Twhite+Tfree<Tblack)**
- **Twhite+Tfree+Tblack (Twhite+Tfree≥Tblack)**
- ( 假设 Twhite<=Tblack, 否则交换即可 )

# 5　结语

- 染色法　→
- 存在性问题

- 构造法　→
- 可行性问题

- 在以棋盘为模型的问题中，综合运用这两种方法，双管齐下，往往能收到事半功倍的效果！

谢谢！