

# 浅谈信息学竞赛中的区间问题

华东师大二附中  
周小博

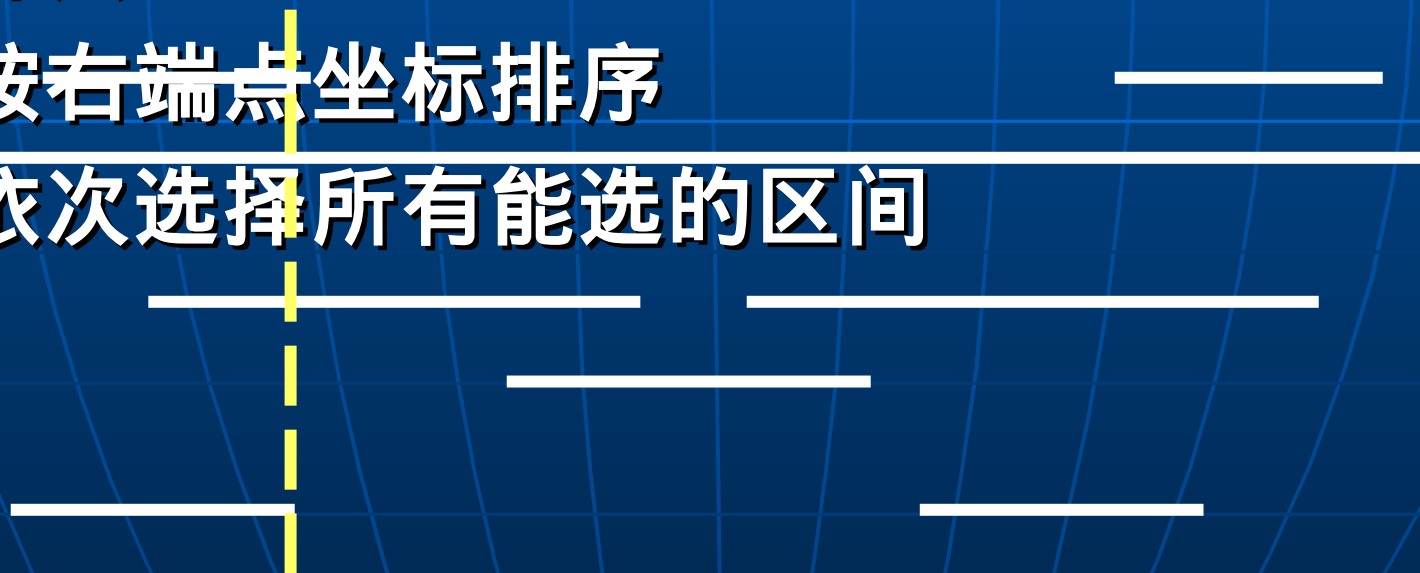
# 引言

- 在信息学竞赛中，有很多问题最终都能转化为区间问题。
- 这类问题变化繁多，解法各异。论文归纳总结出了几种常用模型，我们将对它们做简要分析。

**证明没给出，可在论文中找到**

# 1. 最大区间调度问题

- 数轴上有  $n$  个区间，选出最多的区间，使得这些区间不互相重叠。
- 算法：
- 按右端点坐标排序
- 依次选择所有能选的区域



## 2. 多个资源的调度问题

- 有  $n$  个区间和无限多的资源，每个资源上的区间之间不互相重叠。将每个区间都分配到某个资源中，使用到的资源数量最小。



- 定义区间集合深度  $d$  为包含任意一点的区间数量的最大值

- 至少需要  $d$  个资源

- 算法 1 :

- 可以证明每个区间都能分配到资源

- 计算出  $d$

- 按左端点坐标排序

- 依次将区间任意地分配到  $d$  个资源中

# 实现

- 记录每个资源的最大右端点
- $O(nd)$
- 用二叉堆维护这些坐标
- $O(n \log d)$

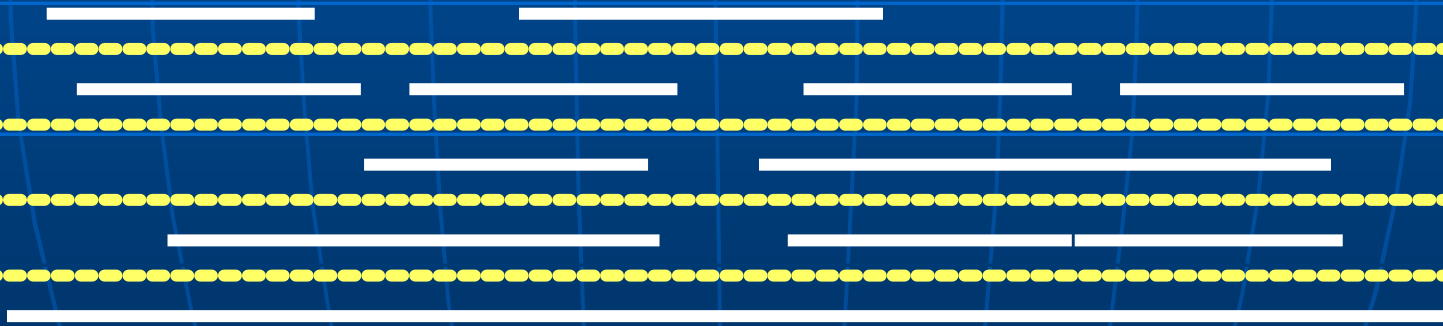
其实这里可以不用计算d的值



不断添加新资源

## 算法 2 :

- 计算  $d$  (也可以不用计算)
- 按右端点坐标排序
- 每个区间都分配到右端点坐标最大的可用资源中。



- 平衡二叉树  $\rightarrow O(n \log d)$

**实现麻烦,但能解决更多问题**

### 3. 有最终期限的区间调度问题

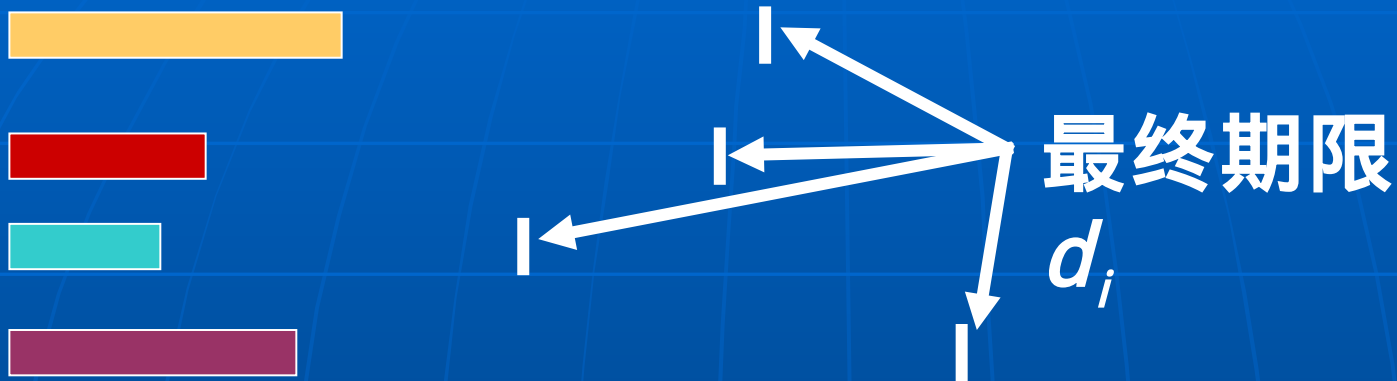
- 有  $n$  个长度固定、但位置可变的区间，将它们全部放置在  $[0, +\infty)$  上。每个区间有两个已知参数：长度  $t_i$  和最终期限  $d_i$ ，设  $f_i$  为其右端点坐标。定义

$$l_i = \begin{cases} f_i - d_i & \text{if } f_i > d_i \\ 0 & \text{if } f_i \leq d_i \end{cases}$$

$$L = \max_{1 \leq i \leq n} \{l_i\}$$

- 放置所有区间，使它们不互相重叠且最大延迟  $L$  最小。





- 算法：
- 按最终期限排序
- 顺序安排各区间



## 4. 最小区间覆盖问题

- 有  $n$  个区间，选择尽量少的区间，使得这些区间完全覆盖某线段  $[s, t]$ 。

S

T

- 算法：
- 按左端点坐标排序
- 每 区间中右端点坐标最
- 直到所选区间已包含  $t$

Max

# 5. 带权区间调度、覆盖问题

动态规划

优化

线段树

栈 单调决策

平衡二叉树

并查集

二叉堆

## 例题：USACO 2005 dec silver

- 仓库从第  $M$  秒到第  $E$  秒的任意时刻都需要有人打扫。有  $N$  个工人，每人给出自己的工作时间段：从第  $T1$  秒到第  $T2$  秒，需要支付工资  $S$  元。
- 录用一部分人，要保证从  $M$  秒到第  $E$  秒的任意时刻都得有人打扫，问最少要付多少工资。

# 转化

- 问题转化为：在一些带权区间中，选出一部分，使它们覆盖  $[M, E]$  上的所有整数点，求权和最小值。
- 算法：按右端点坐标排序，做动态规划
- 状态： $f[i]$  = 覆盖  $[M, T2_i]$  的权和最小值
- 方程：

$$f[i] = \begin{cases} \min_{1 \leq j < i} \{ f[j] \mid T2_j + 1 \geq T1_i \} + S_i & \text{if } M \notin [T1_i, T2_i] \\ S_i & \text{if } M \in [T1_i, T2_i] \end{cases}$$

# 优化 1

- 建立线段树  $[M, E]$
- 得到  $f[i] \rightarrow$  插入在  $T2_i$  处
- 计算  $f[i]$  : 选取区间  $[T1_{i-1}, T2_{i-1}]$  中的最小值进行状态转移

时间复杂度  $O(N \log(E-M))$

## 优化 2

- 建立一个栈
- 保持栈中区间  $f$  值的单调性

### 单调决策

- 状态转移  $\rightarrow$  二分查找 :  $O(\log N)$
- 栈的维护 :  $O(N)$

时间复杂度  $O(N \log N)$

## 优化 3

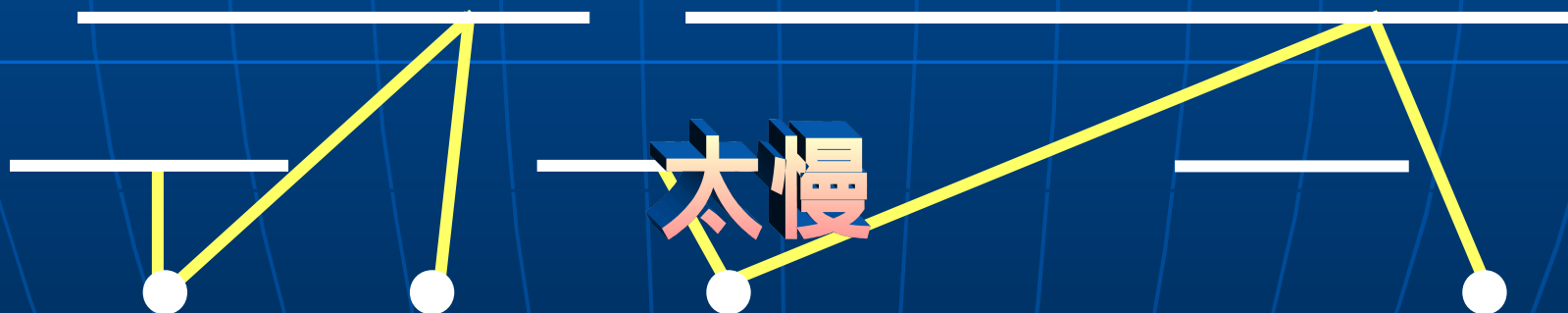
- 按左端点坐标排序
- 维护一个二叉堆，以  $f$  值为关键字
- 状态转移 **二叉堆**  
(删除右端点坐标太小的区间)

总时间复杂度  $O(N \log N)$



## 6. 区间和点的有关问题

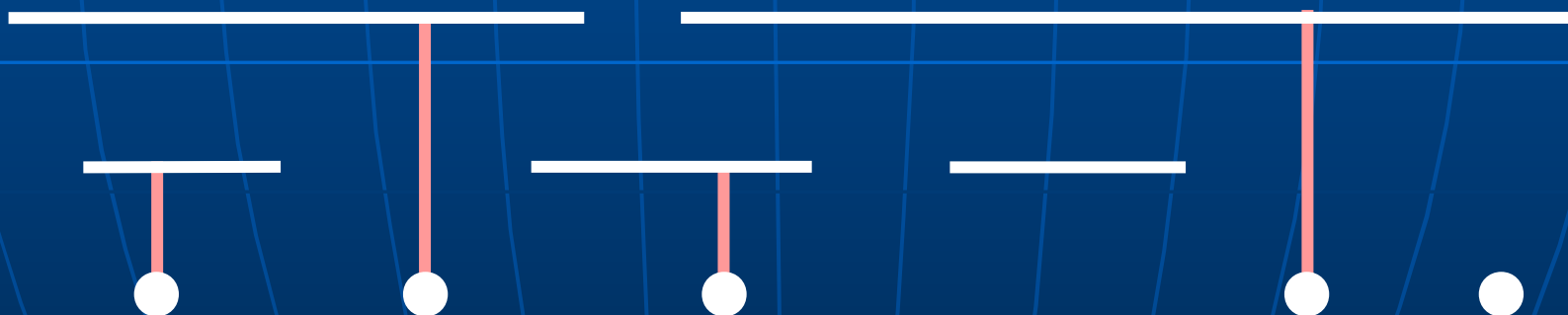
- 有  $n$  个区间， $m$  个点。若某区间包含了某点，则构成一对匹配关系。选出最多的区间和相同数量的点，使对应的区间和点构成匹配关系。



# 二分图匹配？

# 算法：

- 所有点按坐标排序
- 选取包含该点且右端点坐标最小的区间



时间复杂度  $O(nm)$

# 优化

- 维护区间左端点排序，得到有序表  
插入左端点小于等于该点坐标的区间  
删除右端点小于该点坐标的区间  
取出右端点坐标最小的与该点匹配并删除一
- 维护二叉堆，以区间右端点为关键字
  - 所有点按坐标从小到大依次处理
- 时间复杂度  $O(n \log n + m \log m)$**
- 有序表



# 总结

- 有序性
- 算法的选择
- 优化——数据结构的选择

**谢谢！**