

平面图在信息学中的应用

海南省海南中学 刘才良

引言

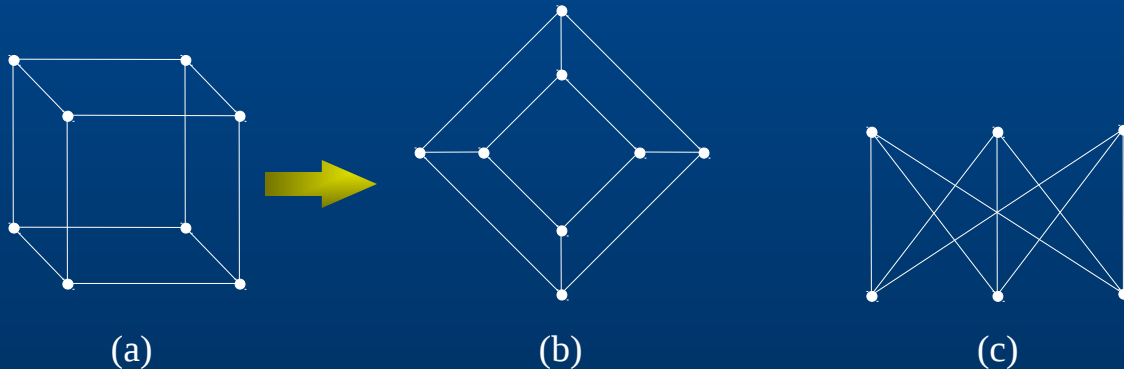
- 平面图是图论中一类重要的图，在实际生产中应用非常广泛。比如集成电路的设计就用到平面图理论。在信息学中，虽然有关平面图题目并不多见，但对于某些题目，如果通过建模转化，应用平面图的性质，将大大提高算法的效率。因此，掌握一些平面图理论会对我们有很大的帮助。

相关定义、定理及推论

● 平面图

- 一个无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，如果能把它画在平面上，且除 V 中的节点外，任意两条边均不相交，则称该图 G 为平面图。

例如：图 (a) 经变动后成为 (b)，故图 (a) 为平面图。而图 (c) 无论如何变动，总出现边相交，图 (c) 为非平面图。



相关定义、定理及推论

- 面

- 设 G 为一平面图，若由 G 的一条或多条边所界定的区域内不含图 G 的节点和边，这样的区域称为 G 的一个面，记为 f 。包围这个区域的各条边所构成的圈，称为该面 f 的边界，其圈的长度，称为该面 f 的度，记为 $d(f)$ 。为强调平面图 G 中含有面这个元素，把平面图表示为 $G = \langle V, E, F \rangle$ ，其中 F 是 G 中所有面的集合。

相关定义、定理及推论

- 定理 1: 若 $G=\langle V, E, F \rangle$ 是连通平面图, 则 $\sum_{f \in F} d(f) = 2|E|$.
- 定理 2: 若 $G=\langle V, E, F \rangle$ 是连通平面图, 则 $|V|-|E|+|F|=2$.

证明:

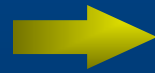
首先假定 G 是树, 则 $|E|=|V|-1$, G 只有一个无限面, 因此 $|V|-|E|+|F|=|V|-(|V|-1)+1=2$.

现在假设 G 不是树, 由于 G 是连通的, 故 G 中至少存在一个基本圈 C , 于是 G 必有一个有限面 f , 而 f 的边界是由基本圈 C 及可能连同计算两次的一些边组成. 如果从 G 中删去基本圈 C 上的一条边后得到的平面图 $G_1=\langle V_1, E_1, F_1 \rangle$, 则 $|V_1|=|V|$, $|E_1|=|E|-1$, $|F_1|=|F|-1$, 故 $|V_1|-|E_1|+|F_1|=|V|-|E|+|F|$, 仿此做下去, 最终得到 G 的一棵生成树 $T_0=\langle V_0, E_0, F_0 \rangle$, 于是 $|V|-|E|+|F|=|V_0|-|E_0|+|F_0|=2$.

相关定义、定理及推论

- 推论 1：给定连通简单平面图 $G=\langle V, E, F \rangle$ ，若 $|V|\geq 3$ ，则 $|E|\leq 3|V|-6$ 且 $|F|\leq 2|V|-4$.
- 推论 2：设 $G=\langle V, E, F \rangle$ 是连通简单平面图，若 $|V|\geq 3$ ，则存在 $v\in V$ ，使得 $d(v)\leq 5$.

推论 1： $|E|=O(|V|)$



邻接表、散列表结构 $O(|V|)$
VS
邻接矩阵结构 $O(|V|^2)$

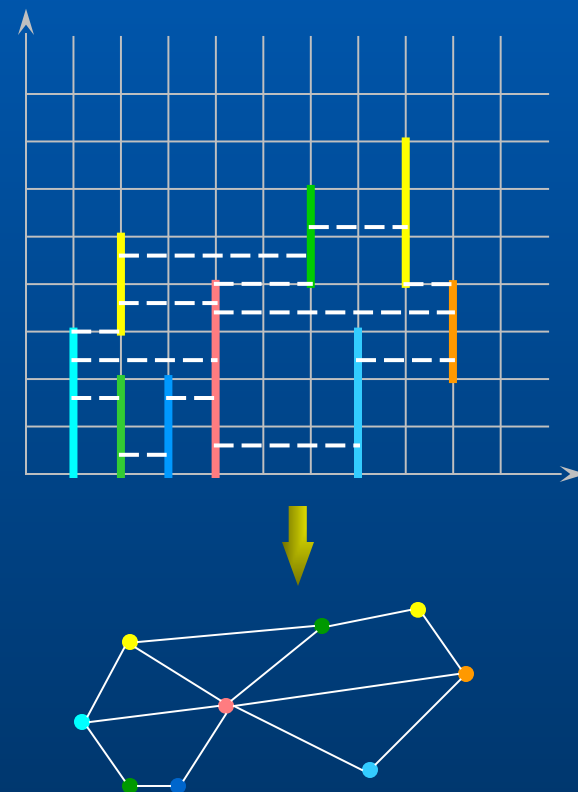
应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

平面上有 $N(N \leq 8000)$ 条互不相连的竖直线段。如果两条线段可以被一条不经过第三条竖直线段的水平线段连接，则这两条竖直线段被称为“水平可见”的。三条两两“水平可见”的线段构成一个“三元组”。求给定输入中“三元组”的数目。（坐标值为 0 到 8000 的整数）

应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

分析

- 把线段看成点
- 若两条线段水平可见，则在对应两点之间连一条边，建立无向图 G
- 统计 G 中的三角形的数目

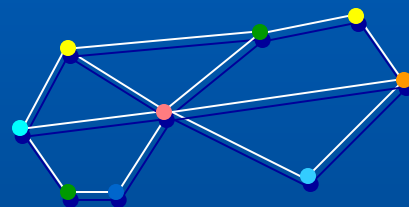


应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

如何建立图 G ?

- 算法一

- 设数组 $C[I]$ ($I=0..2Y_{max}$) , $C[2y]$ 表示覆盖 y 点的最后一条线段, $C[2y+1]$ 表示覆盖区间 $(y,y+1)$ 的最后一条线段
- 把线段按从左到右的顺序排序
- 依次检查每一条线段 $L(L=[y', y''])$
 - 检查 L 覆盖的所有整点和单位区间 ($C[u]$, $u=2y'..2y''$)
 - 若 $C[u] \neq 0$, 则 $G.AddEdge(C[u], L)$
 - $C[u] \leftarrow L$



时间性能分析

$\Leftarrow O(N \log N)$

$\Leftarrow O(N)$

$\Leftarrow O(Y_{max})$

总计: $O(NY_{max})$

应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

如何建立图 G ?

- 算法二

- 定义线段树 T :

- 设节点 N 描述区间 $[a,b]$ 的覆盖情况

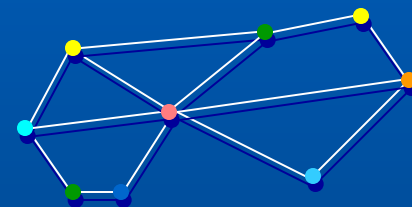
- 0 (无线段覆盖 $[a,b]$)

- 则 $N.Cover = L$ (线段 L 完全覆盖 $[a,b]$)

- 1 (其他情形)

- 线段树的存储:

使用完全二叉树的数组结构, 可以免去复杂的指针运算和不必要的空间浪费。



时间性能分析

排序: $O(N \log N)$

检索: $O(N \log Y_{max})$

插入: $O(N \log Y_{max})$

总计: $O(N \log Y_{max})$

空间性能分析

线段: $O(N)$

线段树: $O(Y_{max})$

边表: $O(N)$

应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

统计图 G 中三角形的数目

- 算法一

枚举所有的三元组，判断三个顶点是否两两相邻。由于总共有 C_n^3 个三元组，因此时间复杂度为 $O(N^3)$

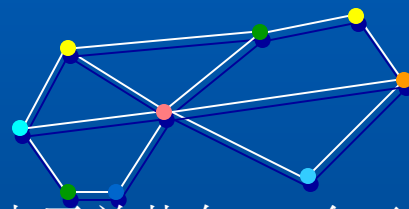
- 算法二

枚举一条边，再枚举第三个顶点，判断是否与边上的两个端点相邻。根据水平可见的定义可知 G 为平面图， G 中的边数为 $O(N)$ ，故算法二的复杂度为 $O(N^2)$

- 算法一与算法二的比较

算法一只是单纯的枚举，没有注意到问题的实际情况，而实际上三角形的数目是很少的，算法一作了许多无用的枚举，因此效率很低。

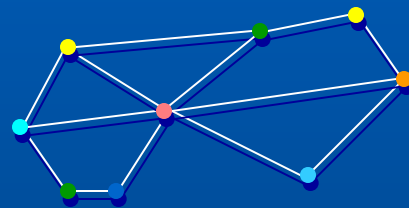
算法二从边出发，枚举第三个顶点，这正好符合了问题的实际情况，避免了许多不必要的枚举，所以算法二比算法一更加高效。



应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

有没有更好的办法?

- 算法三—换个角度，从点出发
每次选取度最小的点 v ，由推论 2 知 $d(v) \leq 5$ ，只需花常数时间就可以计算含点 v 的三角形的数目。
应用二叉堆可以提高寻找和删除点 v 的效率，总的时间复杂度仅为 $O(N \log N)$
- 算法二与算法三的比较
算法二是以边作为出发点的，从整体上看，平面图中三角形的个数只是 $O(N)$ 级的，而算法二的复杂度却是 $O(N^2)$ ，这种浪费是判断条件过于复杂造成的。算法三从点出发，则只需要判断某两点是否相邻即可。



应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

在同一水平面上有 $N(N \leq 500)$ 个洞穴，洞穴之间有通道相连，且每个洞穴恰好连着三个通道。通道与通道不相交，每个通道都有一个难度值，现从 **1** 号洞穴开始遍历所有的洞穴刚好一次并回到洞穴 **1**，求通过通道难度值之和的最小值。（给定所有通道的信息和在外圈上的洞穴）

应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

分析

- 本题求的是最优路径，但最优路径具备什么性质并不明显，故考虑深度优先搜索。
- N 最大达到 500，考虑剪枝以提高效率。
- 基本剪枝条件：若当前路径的难度值的总和比当前最优值大则放弃当前路径。
- 为了找到强剪枝条件，考虑问题所具有的特性
 - 所有点的度数为 3
 - 所给的图是平面图
 - 外圈上的点已知

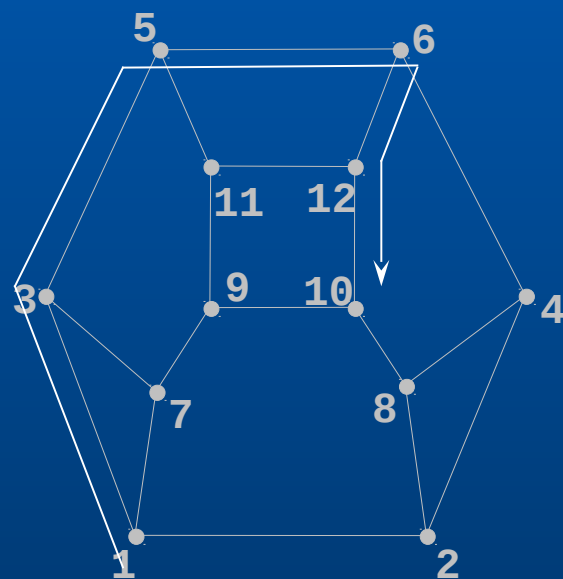
应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

- 情形一

考虑路径 1-3-5-6-12-10，由于每个洞穴必须被访问到，而 11 号洞穴只有一条可用通道 9-11，访问 11 后不能再回到 1，故该路径不可能遍历所有点。

- 剪枝条件一

在所有未访问的洞穴中，与其相邻的已访问过的洞穴（第 1 个与当前访问的最后一个除外）的个数小于等于 1。



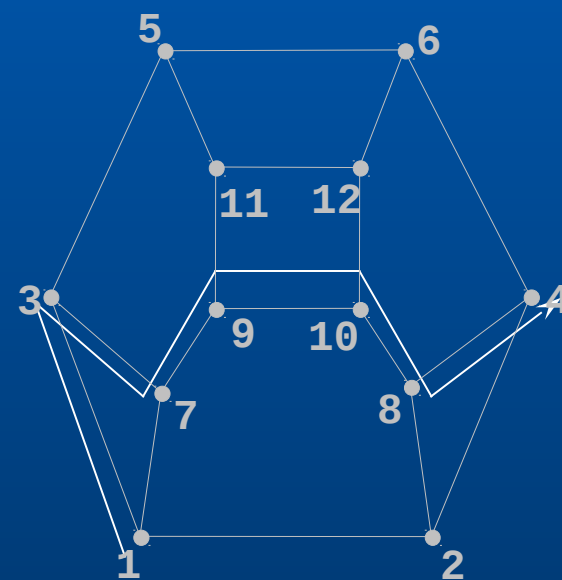
应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

- 情形二

路径 1-3-7-9-10-8-4 把图分成两部分，而且两部分中都有未访问过的点。由于图是平面图，其中必有一部分点不能被访问到。

- 剪枝条件二

设外圈上的点按连接顺序为 $1, a_2, \dots, a_k$ ，则访问的顺序只能为：
 $1, \dots, a_2, \dots, a_3, \dots, \dots, a_k, \dots, 1.$



应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

给定一地图，要求用不超过 5 种颜色涂每一个区域，使得相邻区域的颜色不同。

(区域数 ≤ 500)

分析:

把每个区域看成点，相邻区域之间连一条边，则问题转化为对每个点着色并使得相邻点颜色不同。

根据地图的平面性可知：转化后的图是平面图。

对于任意平面图 G ，是否都能用不超过 5 种颜色着色？

应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

定理：对于任意平面图 G ，都能用不超过 5 种颜色着色。

证明：只需考虑 G 是连通简单平面图的情形。

若 $|V| \leq 5$ ，则命题显然成立。

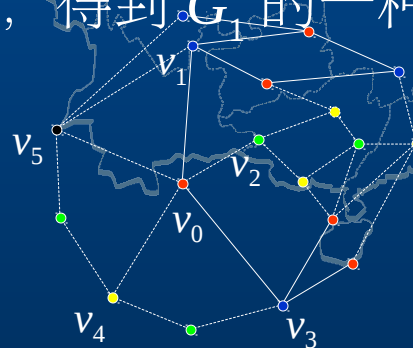
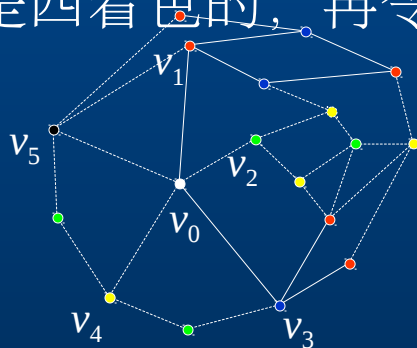
假设对所有的平面图 $G = \langle V, E \rangle$ ，当 $|V| \leq k$ 时命题成立。现在考虑图 $G_1 = \langle V_1, E \rangle$ ， $|V_1| = k+1$ 的情形。由推论 2 可知：存在 $v_0 \in V_1$ ，使得 $d(v_0) \leq 5$ 。在图 G_1 中删去 v_0 ，得图 $G_1 - v_0$ 。由归纳，图 $G_1 - v_0$ 可用 5 种颜色着色。

若邻接结点使用颜色数不超过 4，则可对 v_0 着色

应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

若 $d(v_0)=5$ 且各邻接点分别着不同的颜色, 则设与之相邻的点的按顺时针排列为 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . 它们分别着不同的颜色 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 .

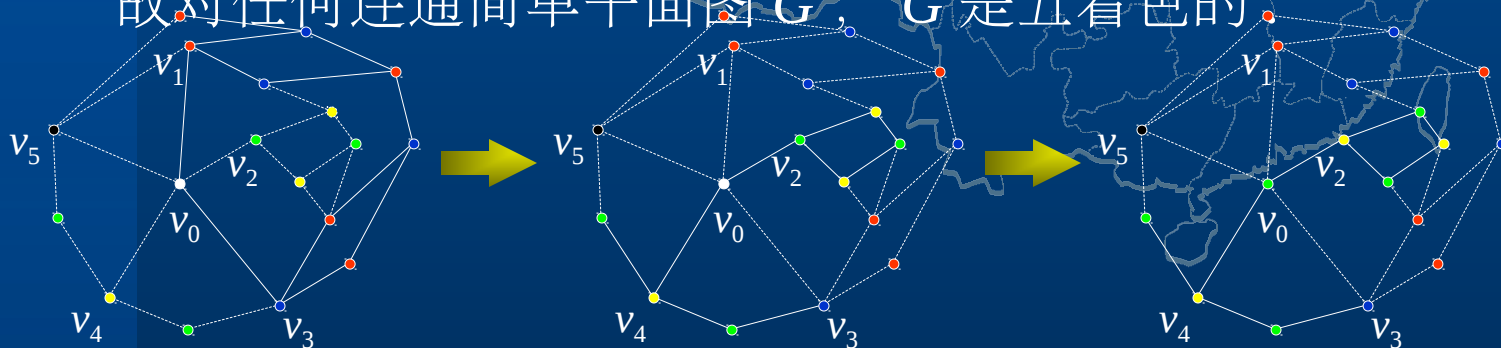
考虑点集 $V_{c_1, c_3} = \{v | v \in V(G_1 - v_0) \wedge \alpha(v) = c_1 \text{ 或 } c_3\}$ 所诱导的 $G_1 - v_0$ 的子图 $\langle V_{c_1, c_3} \rangle$. 若 v_1, v_3 属于 $\langle V_{c_1, c_3} \rangle$ 的不同的分图, 则在 v_1 所在的分图中, 调换颜色 c_1 与 c_3 后, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 五个点是四着色的, 再令 v_0 着 c_1 色, 得到 G_1 的一种五着色.



应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

若 v_1, v_3 属于 $\langle V_{c_1, c_3} \rangle$ 的同一的分图, 则点集 $V_{c_1, c_3} \cup \{v_0\}$ 所诱导的 G_1 的子图中含有一个圈 C , 而 v_2, v_4 不能同时在圈的内部或外部, 即 v_2, v_4 不是邻接点, 于是考虑 $V_{c_2, c_4} = \{v \mid v \in V(G_1 - v_0) \wedge \alpha(v) = c_2 \text{ 或 } c_4\}$ 所诱导的子图 $\langle V_{c_2, c_4} \rangle$, v_2, v_4 必属于 $\langle V_{c_2, c_4} \rangle$ 的不同的分图. 做与上面类似的调整, 又可得到 G_1 的一种五着色.

故对任何连通简单平面图 G , G 是五着色的.



应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

算法:

procedure Paint(G :Graph);

- 找出度最小的点 v_0
- Paint($G-v_0$)
- 考虑图 G , 若无法对 v_0 着色, 则对 v_0 的相邻点, 枚举所有点对, 直到找到属于不同分图的点对, 对其进行调整.
- 任选剩下的一种颜色, 对 v_0 着色

时间复杂度: $O(N^2)$

空间复杂度: $O(N)$

总结

以上例子分别论述了平面图理论在几类信息学问题中的应用。我们研究平面图就是为了更深刻地认识平面图，提高算法效率，但有时候单独应用平面图理论还不够，还需要和其它理论知识综合起来应用。然而要达到理想的效果并非一朝一夕的事情，它还需要我们平时多积累、多思考，遇到问题时才能运用自如。相信随着对平面图的研究不断深入，平面图的应用一定会更加广阔。

谢谢！