猜想及其应用

内容简介

- 前言
- 类比猜想

  与熟悉的问题类比

  巨人与鬼←→青蛙的烦恼

  与特殊的问题类比

  圆圈点（略）
- 归纳猜想

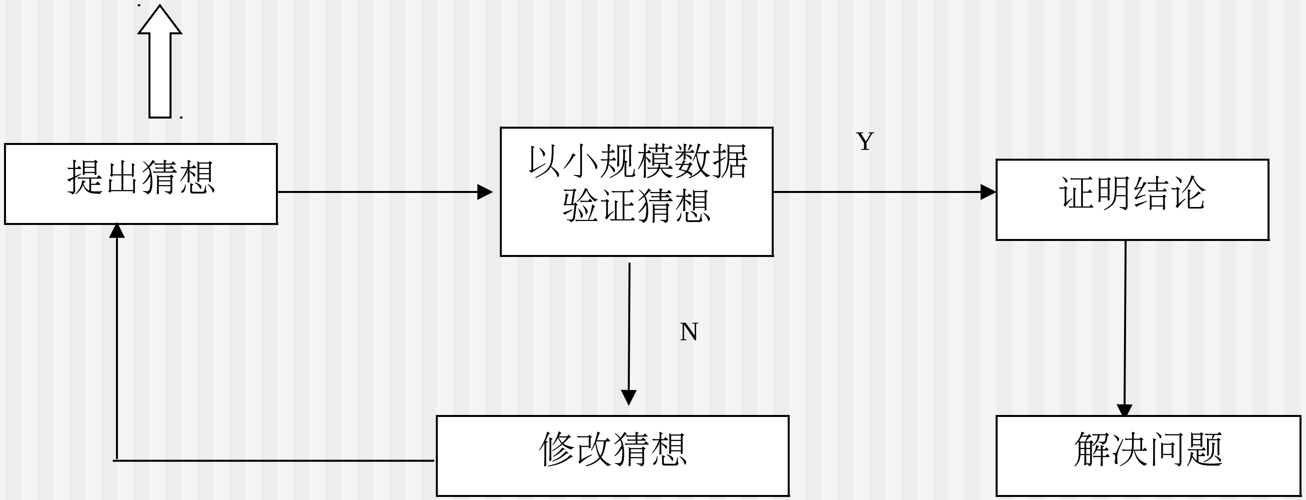
  青蛙过河（略）

  排列问题
- 结语

前言

猜想是一种主观不充分似真推理。它建立在观察、分析、联想、归纳的基础上

类比猜想、归纳猜想



由此可见，猜想是在深入分析问题的基础上，不懈探索、反复修正的过程。决不可能一蹴而就。提出猜想是整个过程的核心和重点。

类比猜想

事物 A		事物 B
性质 a		性质 a′
性质 b		性质 b′
性质 c		性质 c′
性质 d	类比、猜想	性质 d′

引例：巨人与鬼（1）

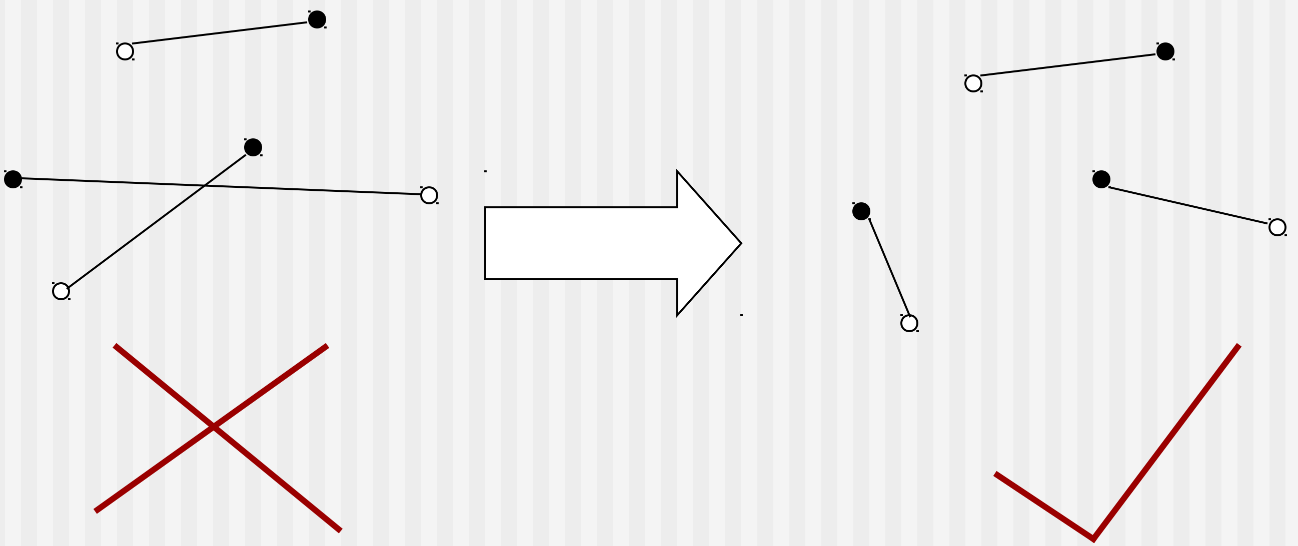
问题描述

平面上有 n 个巨人和 n 个鬼（1<=n<=50）。每个巨人都有新式激光武器，可以对鬼进行直线攻击。然而这种武器有一种很大的弱点：两个不同武器发出的激光不能交叉，否则就有爆炸的危险。

已知任意三个个体（包括巨人和鬼）都不在一条直线上，每个巨人负责攻击一个鬼。当然激光不能交叉。

现在的问题是：请你求出任意一种攻击的方案。（即确定哪个巨人攻击哪个鬼）

引例：巨人与鬼（2）



试题中是实际上是要确定巨人与鬼之间的一一对应关系——这使我们很自然的联想到了匹配。

引例：巨人与鬼（3）

构图：

将巨人、鬼都抽象成为顶点。巨人组成的点集记为 X，鬼组成的点集记为 Y 。在所有的 x∈X 、 y∈Y 之间连一条边。

任务：

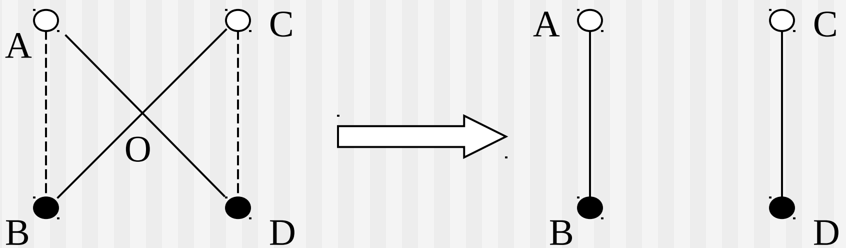
1 、找到一个完备匹配。

2 、匹配边不相交。

假设有相交边：

OA+OB>AB， OC+OD>CD

AD+CB > AB + CD



方案 1　　方案 2

方案 1 的“匹配边长度总和”

>

方案 2 的“匹配边长度总和”

引例：巨人与鬼（4）

方案 2 与方案 1，“匹配边的长度总和”减小了。故而：

每一个“包含相交边的完备匹配”都能够转换成为“匹配边长度总和”更小的一个完备匹配——换句话说，“匹配边长度总和”最小的完备匹配一定不包含相交边！

而我们要求的，正是一个不包含相交边的完备匹配！

建立二分图最佳匹配模型：每条边的权值设为它两端顶点的欧几里德距离。用匈牙利算法求最佳匹配模型。

问题解决了。

引例小结

本题二分图中的顶点具有特殊性：每个顶点都对应于平面上的一点。因此，顶点与顶点之间不仅有逻辑关系，还有几何直观关系。正是由于充分利用了“几何直观”这一隐蔽关系才使得算法模型豁然开朗。

例 1： 青蛙的烦恼 (1)

问题描述

池塘里有 n 片荷叶（1<=n<=1000），它们正好形成一个凸多边形。我们按照顺时针方向将这 n 片荷叶顺次编号为 1, 2, ..., n 。

有一只小青蛙站在一号荷叶上，它想跳过每片荷叶一次且仅一次（它可以从所站的荷叶跳到另外任意一片荷叶上）。同时，它又希望跳过的总距离最短。

请你编程，帮助小青蛙设计一条路线

构图：

首先将每片荷叶抽象成一个顶点，在任意两个顶点 x, y 之间连

一条边，边的权值设为顶点 x 与 y 的欧几里德距离。

模型：

以 1 为起点的最短 Hamilton 链。

例 1： 青蛙的烦恼 (2)

经过观察分析，发现构造的图：

- 是一个完全图。
- 边的权值等于它两端顶点的欧几里德距离。
- 图中的每个顶点对应于平面上的一点。

这些性质和【引例】是多么相似啊！ （这是表面上的类似）

由于图中的每个顶点对应于平面上的一点，所以顶点之间不仅存在着由“边”连接的逻辑关系，还存在着特殊的“几何直观”关系。利用好这个隐含的条件是解题的关键——这正与【引例】的基本特性不谋而合！ （这是本质上的类似）

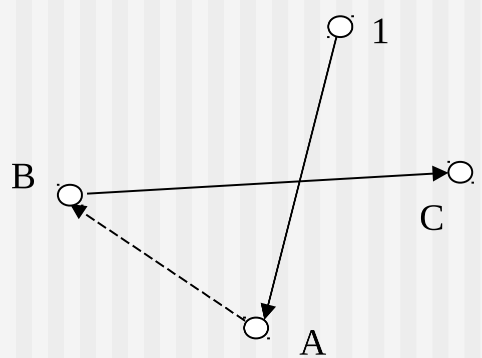
解决【引例】时利用这个特性可以将“匹配边总长度”不断的缩短；而本题所求的问题也是一个最短路问题。

例 1： 青蛙的烦恼 (3)

根据两题诸多相似之处，我们猜测：

猜想 B　最短 **Hamilton** 链中不存在相交的边。

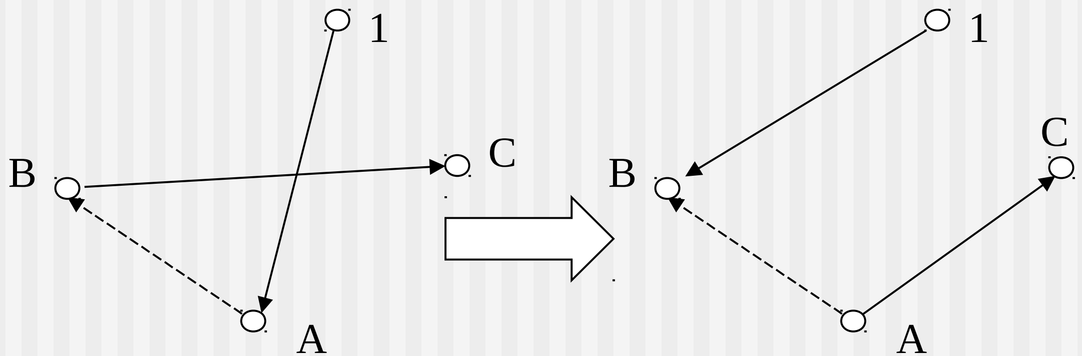
证明 设从 1 出发，首先到达顶点 A(2 < A < n) 。由于所有点在一个凸包上、 2<A<n ，所以除 1 、i 以外的顶点必然被分作两个部分，分别位于线段 <1, A> 的两侧。不失一般性，设从 i 出发经过若干步到左侧的顶点 B ，再到右侧的顶点 C ，如下图所示：



实线表示一步到达；虚线表示多步到达

例 1： 青蛙的烦恼 (4)

我们可以做这样的变换:

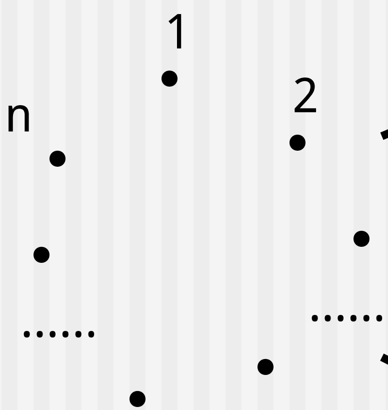


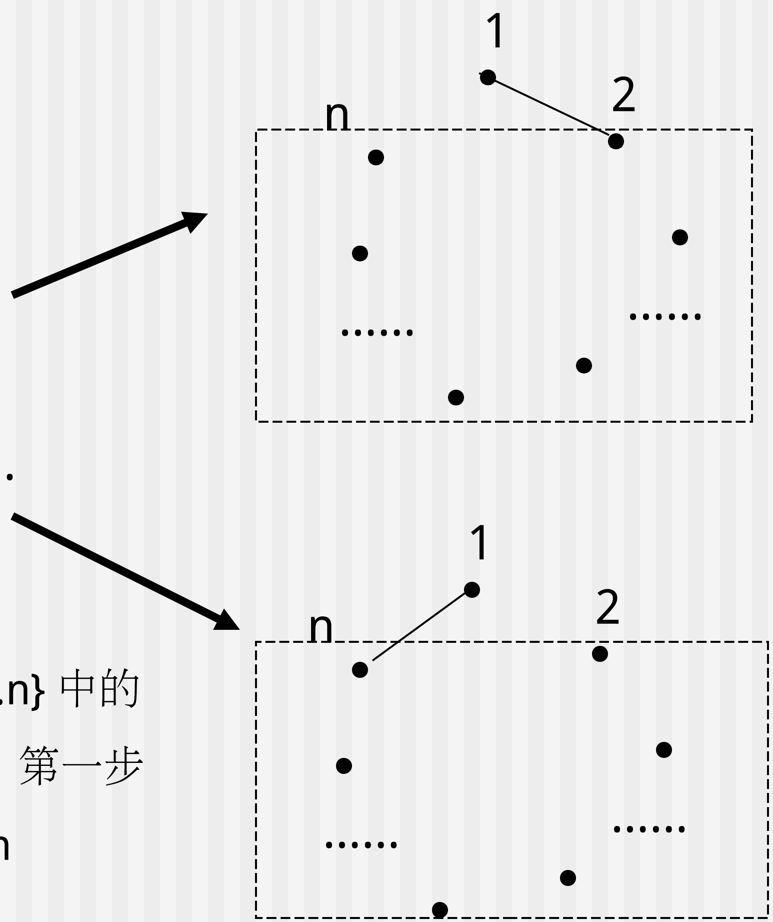
实线表示一步到达；虚线表示多步到达

实线表示一步到达；虚线表示多步到达

变换后的链的长度，显然比变换前的要短。所以变换前的方案必然不是最优解。因此最优 Hamilton 链肯定不存在相交边。

例 1： 青蛙的烦恼 (5)





以 2 为起点，遍历 {2..n} 集合中的顶点一次且仅一次

以 n 为起点，遍历 {2..n} 集合中的顶点一次且仅一次

从 1 出发，遍历 {1..n} 中的顶点一次且仅一次，第一步必然是到 2 、或者 n

例 1： 青蛙的烦恼 (6)

设 f[s, L, 0] 表示从 s 出发，遍历 {s..s+L-1} 中的顶点一次且仅一次的最短距离； f[s, L, 1] 表示从 s+L-1 出发，遍历 {s..s+L-1} 中的顶点一次且仅一次的最短距离。则:

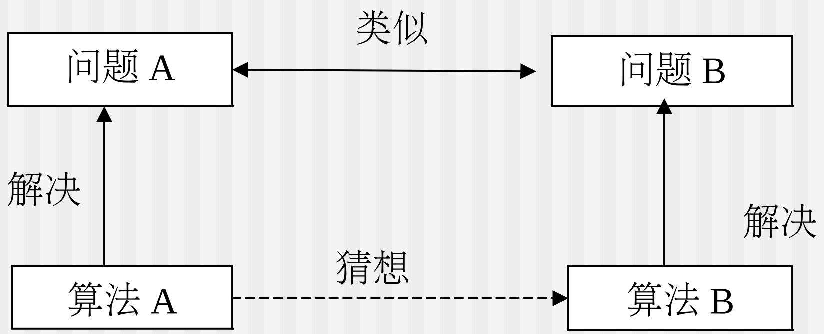
$$f[s, L, 0] = \min\{dis(s,s+1) + f(s + 1, L-1, 0), dis(s,s+L-1) + f(s + 1, L-1, 1)\}$$

$$f[s, L, 1] = \min\{dis(s+L-1, s+L-2) + f(s, L-1, 1) \quad dis(s+L-1, s) + f(s, L-1, 0)\}$$

$$f[s, 1, 0] = 0, f[s, 1, 1] = 0$$

求: f[1, n, 0]

“与熟悉的问题类比”小结



深入、透彻的分析模型。

观察、联想。

与熟悉的问题进行类比的基本步骤是:

- 分析：分析问题的特征抽象出模型。
- 联想：与熟悉的，拥有类似特征、模型的问题类比。
- 比较：确定类比对象后将两者比较，分析异同。
- 猜想：根据已知问题猜想新问题的解决方法。

归纳猜想（1）

归纳，是指通过对特例的分析来引出普遍结论的一种推理形式

若干已知的个别、特殊事实

前提

归纳

结论

普遍性的陈述、判断，猜想

观察、分析、联想、概括的过程

主观的、不充分、似真推理

必须经过严格的逻辑论证

归纳猜想（2）

归纳猜想的一般步骤:

- 列举。将一些特殊的、简单的、小规模的数据列举出来。（这一步可以用手推，或者编写简单的搜索小程序）
- 观察。观察列举数据的规律。
- 猜想。根据部分数据猜想一般结论。
- 证明。证明猜想的正确性。（一般采用数学归纳法）

例 4： 排列问题（ 1 ）

问题描述

在整数 1 ， 2 ， ……， N 的排列中，有些排列满足下面一个性质 A ：该排列中除了最后一个整数以外的每一个整数后面都跟有（不必直接紧跟）一个同它相差为 1 的整数。例如： N = 4 ，排列 1432 是具有性质 A 的，而 2431 则不满足。

设有一个 N 个数的排列，已知其中 P(P <= N) 个位置上的数，求共有多少个这样的排列——在 P 个位置上具有已知的数，且具有上述性质 A 。例如： N = 4 ，且已知第 1 位、第 2 位分别是 1 和 4 ，则 1432 ， 1423 就是这样的两个排列。

例 4： 排列问题（2）

当 n = 5 时，有 16 组满足要求的序列（搜索出的解）：

1 2 3 4 5	1 2 3 5 4
1 2 5 3 4	1 2 5 4 3
1 5 2 3 4	1 5 2 4 3
1 5 4 2 3	1 5 4 3 2
5 1 2 3 4	5 1 2 4 3
5 1 4 2 3	5 1 4 3 2
5 4 1 2 3	5 4 1 3 2
5 4 3 1 2	5 4 3 2 1

观察发现:

任何一个排列的后 k 位（ **1<=k<=n** ）是若干连续整数组成的集合

例 4：排列问题（3）

任何一个排列的后 k 位（**1<=k<=n**）是若干连续整数组成的集合

5 1 2 4 3

后 5 位：	51243	{1..5}
后 4 位：	1243	{1..4}
后 3 位：	243	{2..4}
后 2 位：	43	{3..4}
后 1 位：	3	{3}

例 4： 排列问题（ 4 ）

猜想 1 任何一个排列的后 **k** 位 （ **1<=k<=n** ） 是若干连续整数组成的集合。

证明 约定序列的第 i 位用 v[i] 表示。设序列后 x 位 （ x>=1 ） 是若干连续整数，这些整数构成集合 {s..t} 。那么倒数第 x+1 位上的数 v[n-x+1] 必然等于 p-1 或者 p+1 （ p∈{s..t} ） 。显然 v[n-x+1]∪{s..t}={s-1..t} 或者 {s..t+1} ， 还是若干连续整数。

猜想 2 如果一个排列的后 **k** 位 （ **1<=k<=n** ） 是若干连续整数组成的集合，则这个排列符合题目要求。

证明 约定该序列的第 i 位用 v[i] 表示。设 {v[n], v[n-1], …, v[n-k+1]}={s..t} 。因为 {v[n-1],…,v[n-k+1]} 也是若干连续整数的集合， 所以 v[n] = s 或 t 。

如果 v[n] = s ， 那么必有： s+1∈{ v[n-1],…,v[n-k+1]}

如果 v[n] = t ， 那么必有： t-1∈{ v[n-1],…,v[n-k+1]}

即这是一个满足要求的序列。

例 4：排列问题（5）

因此问题转化为：求后 k 位（1<=k<=n）是若干连续整数组成的集合的排列总数（由 1， 2， ……， N 组成）。

设 g[s, r] 表示满足下面条件的序列 C 的总数：

C 由集合 [s..s+r-1] 中的数组成，且后 k 位（1<=k<=r）是若干连续整数组成的集合。

如果原问题中倒数第 i 个位置上的数已经确定为 x （1<=i<=r），那么 C 的倒数第 i 个位置上的数也要是 x 。

例 4： 排列问题（6）

	g[s+1,r-1]	如果倒数第 r 位确定为 s
g[s, r] =	g[s,r-1]	如果倒数第 r 位确定为 s+r-1
	g[s,r-1]+g[s+1,r-1]	如果倒数第 r 位不确定
	0	其他情况

g[s, 1] = 1

求： g[1, n]

例 4 小结

题目给定的条件比较复杂，很不便于转化利用，极容易诱使选手走上“搜索”的“不归路”。

本题解决的关键在于通过对特例的观察，归纳出两个大胆的猜想，将复杂、不利于利用的条件，变换到一个我们熟悉的形式，

为动态规划模型的建立打开了通道。

结语

其实我们解题时都在不知不觉的猜想——猜想问题的性质；猜想模型的形式；猜想算法的内容……猜想是从已知向未知探索的重要途径。

猜想≠偶然 + 运气。

猜想是建立在观察、分析、联想、归纳基础上的一种主观不充分似真推理。

它是观察能力、概括能力、联想能力、创新能力的综合体现。猜想的水平，

最能反映一个人思维品质的高低。

根据猜想方式的不同可分为：类比猜想和归纳猜想

但无论那种方法都离不开观察、分析和实践。可以说：

- 观察是猜想的血液——贯穿于整个猜想过程之中；
- 分析是猜想的灵魂——提出猜想的前提和基础；
- 实践是猜想的骨架——支撑猜想的基石，脱离了实际，猜想毫无意义。