

偶图的算法及应用

南京师范大学附属中学 孙方成

目录

- ▶ 匹配的概念
- ▶ 偶图的定义和判定
- ▶ 偶图的最大匹配
- ▶ 偶图的最小覆盖问题
- ▶ 偶图的最佳匹配问题
- ▶ 小结



匹配的概念 (1)

定义1 设图 $G=(V(G), E(G))$ ，而 M 是 $E(G)$ 的一个子集，如果 M 中的任两条边均不邻接，则称 M 是 G 的一个匹配。 M 中的一条边的两个端点叫做在 M 下是配对的。

若匹配 M 中的某条边与定点 v 关联，则称 M 饱和顶点 v ，并称 v 是 M 饱和的。

匹配的概念 (2)

设 M 是图 G 的一个匹配，若 G 中存在一条基本路径 R ，路径的边是由属于 M 的匹配边和不属于 M 的非匹配边交替出现组成，则称 R 为交替路。若 R 的两个端点都是 M 的非饱和点，则称这条交替路为可增广路。

设图 $G = (V(G), E(G))$ ， $V(G)$ 被分成两个非空的互补顶点子集 X 和 Y ，若图 G 的一个匹配 $M \subseteq E(G)$ 能饱和 X 中的每个顶点，换言之， X 中的全部顶点和 Y 中的一个子集的顶点之间确定一个一一对应关系，则称 M 是图 G 的一个完备匹配。



偶图的定义

定义2 设图 $G = (V, E)$ ，若能把 V 分成两个集合 V_1 和 V_2 ，使得 E 中的每条边的两个端点，一个在 V_1 中，另一个在 V_2 中，这样的图称为偶图，也叫二分图，或是二部图。偶图也可表示为 $G = (V_1, V_2; E)$ 。

对于顶点集 $V \subseteq V_1$ 用 $P(V)$ 表示 V_2 中所有和 V 相连的顶点的集合。

定义3 如果偶图 G 的互补结点子集 V_1 中的每一结点都与 V_2 中的所有结点邻接，则称 G 为完全偶图。

偶图的判定

定理1 当且仅当无向图 G 的每一个回路的次数均为偶数时， G 才是一个偶图。如果无回路，相当于任一回路的次数为0,0视为偶数。



偶图的最大匹配

Edmonds 于 1965 年提出了解决偶图的最大匹配的匈牙利算法:

- (1) 从 G 中取一个初始匹配 M 。
- (2) 若 X 中的顶皆为 M 中边的端点, 止, M 即为完备匹配; 否则, 取 X 中不与 M 中边关联的顶 u , 记 $S = \{u\}, T = \emptyset$ 。
- (3) 若 $P(S) = T$, 止, 无完备匹配, 否则, 取 $y \in P(S) - T$ 。
- (4) 若 y 是 M 中边的端点, 设 $yz \in M$, 令 $S \leftarrow S \cup \{z\}, T \leftarrow T \cup \{y\}$, 转(3); 否则, 取可增广路径 $R(u, y)$, 令 $M \leftarrow M \oplus E(R)$, 转(2)。



偶图的最小覆盖问题

一般图的最小覆盖问题是一个已被证明的 **NPC** 问题。换一句话说，一般图的最小覆盖问题，是没有有效算法的图论模型。所以，将一个实际问题抽象成最小覆盖问题，是没有任何意义和价值的。

但是，如果问题可以抽象成偶图的最小覆盖问题，结局就不一样了。由于偶图的特殊性，偶图的最小覆盖问题存在多项式算法。

最大匹配与最小覆盖的关系

在证明这个定理的过程中，要用到 **Hall** 婚姻定理：

设 G 是一个偶图，顶集划分成 V_1 和 V_2 。 G 中存在对于 V_1 的完备匹配的充要条件是，对于一切 $S \subseteq V_1$ ，都有 $|S| \leq |P(S)|$ 。

1931 年 König 给出最大匹配与最小覆盖的关系定理如下：

在偶图 G 中，若 M^* 是最大匹配， K^* 是最小覆盖集，则 $|M^*| = |K^*|$ 。



偶图的最佳匹配问题

定义4 $G=(V_1,V_2;E)$ 是加权完全偶图, $V_1=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $V_2=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$, 权 $w(x_i y_j) \geq 0$ 。如果有一完备匹配 M , 对所有完备匹配 M' , 都有 $W(M) \geq W(M')$, 则称 M 为偶图 G 的最佳匹配。

由于引入了权, 所以最佳匹配不能直接套用最大匹配算法进行求解。同时, 由于对最佳匹配的定义是建立在完全加权偶图的基础上的, 对于不完全图, 可以通过引入权为 0 (或是其他不影响最终结果的值), 使得偶图称为完全偶图, 从而使用最佳匹配算法来解决。

KM 算法前的准备

在介绍求最佳匹配的 KM 算法前，首先介绍一些相关的概念：

定义5 映射 $l: V(G) \rightarrow R$ 满足 $\forall x \in V_1, \forall y \in V_2$, 成立 $l(x) + l(y) \geq w(xy)$, 则称 $l(v)$ 是偶图 G 的可行顶标；令

$$E_l = \{ xy \mid xy \in E(G), l(x) + l(y) = w(xy) \}$$

称以 E_l 为边集的生成子图为“相等子图”，记做 G_l 。

可以证明， G_l 的完备匹配即为 G 的最佳匹配。

以此为基础，1955 年 Kuhn，1957 年 Munkres 给出修改顶标的方法，使新的相等子图的最大匹配逐渐扩大，最后出现相等子图的完备匹配。这就是 KM 算法。

KM 算法

- (1) 选定初始可行顶标 l ，在 G_l 上选取一个初始匹配 M 。
- (2) 若 V_1 中的顶皆为 M 中边的端点，止， M 即为最佳匹配；否则，取 G_l 中不与 M 中边关联的顶 u ，记 $S = \{u\}, T = \emptyset$ 。
- (3) 若 $P(S) \supset T$ ，转(4)；若 $P(S) = T$ ，取

$$a_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} \quad l'(v) = \begin{cases} l(v) - a_l, v \in S, \\ l(v) + a_l, v \in T, \\ l(v), \text{ 其它。} \end{cases}$$

$$l \leftarrow l', G_l \leftarrow G_{l'}。$$

- (4) 选 $P(S) - T$ 中的一点 y ，若 y 是 M 中边的端点，且 $yz \in M$ ，则 $S \leftarrow S \cup \{z\}, T \leftarrow T \cup \{y\}$ ，转(3)；否则，取 G_l 中 M 可增广路径 $R(u, y)$ ，令 $M \leftarrow M \oplus E(R)$ ，转(2)。



一个例题

某公司有工作人员 x_1, x_2, \dots, x_n ，他们去做工作 y_1, y_2, \dots, y_n ，每个人都能做其中的几项工作，并且对每一项工作都有一个固定的效率。问能否找到一种合适的工作分配方案，使得总的效率最高。要求一个人只能参与一项工作，同时一项工作也必须由一个人独立完成。不要求所有的人都有工作。

一个实例

| | Y_1 | Y_2 | Y_3 | Y_4 | Y_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| X_1 | 3 | 5 | 5 | 4 | 1 |
| X_2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| X_3 | 2 | 4 | 4 | 1 | 0 |
| X_4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| X_5 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 |

若工人 x
完全不能
参与工作
 y ，则
 $w(x,y)=0$

流程 (1)

首先，选取可行顶标 $l(v)$ 如下：

$$l(y) = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$l(x_1) = \max\{3, 5, 5, 4, 1\} = 5,$$

$$l(x_2) = \max\{2, 2, 0, 2, 2\} = 2,$$

$$l(x_3) = \max\{2, 4, 4, 1, 0\} = 4,$$

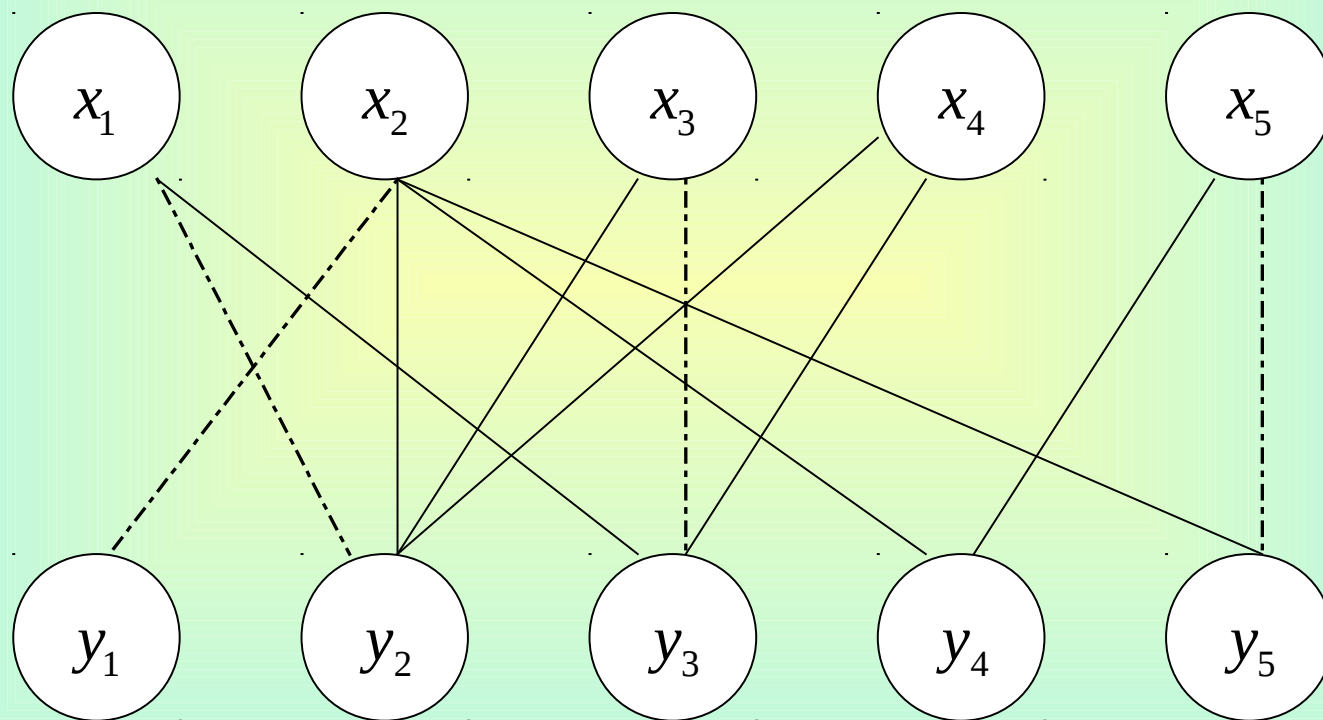
$$l(x_4) = \max\{0, 1, 1, 0, 0\} = 1,$$

$$l(x_5) = \max\{1, 2, 1, 3, 3\} = 3$$

构造 G_1 ，并求其最大匹配：（其流程过长，此处略）

流程 (2)

其最终得到的最大匹配如图所示：



图中粗点划线构成最大匹配。

流程 (3)

G_1 中无完备匹配，故修改顶标。

由于 $u = x_4, S = \{x_4, x_3, x_1\}, T = \{y_3, y_2\}$ ，所以

$$a_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} = 1$$

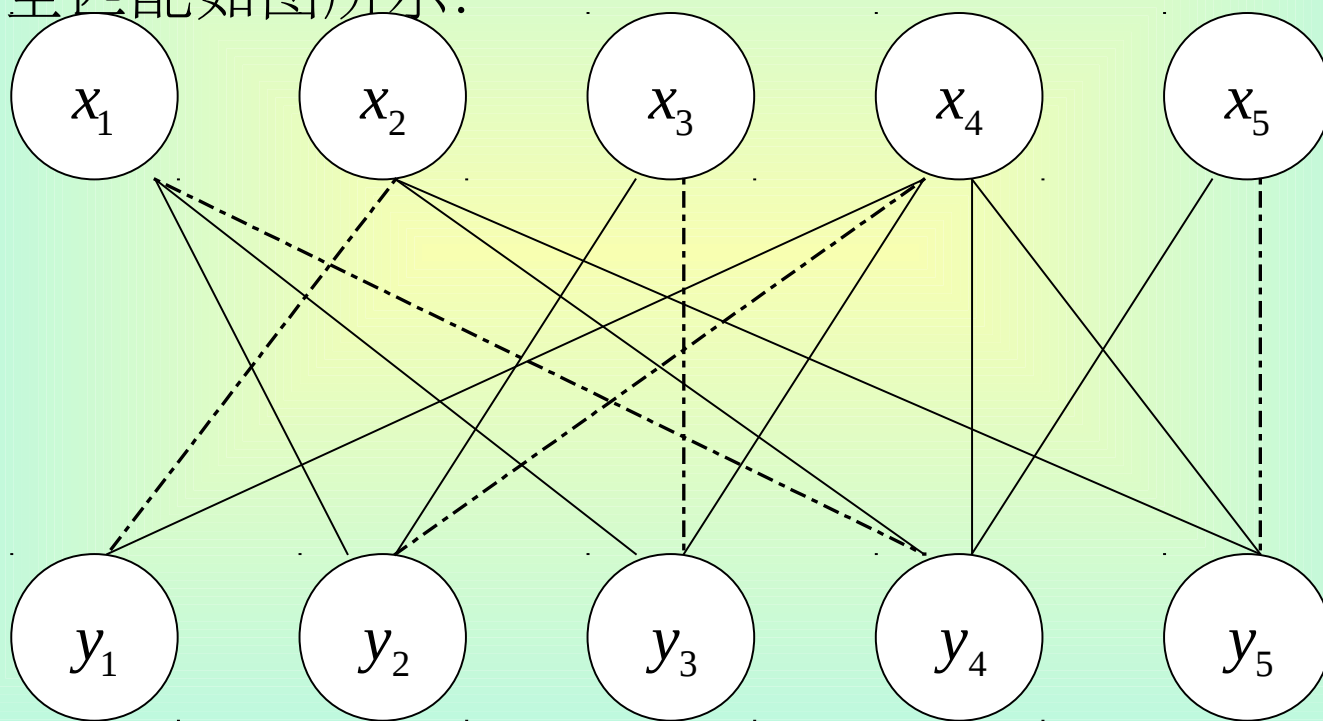
修改后的顶标为：

$$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 3;$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1, y_4 = 0, y_5 = 0$$

流程 (4)

根据新的顶标构造 G_1 ，并求其上的一个完全匹配如图所示：



图中粗点划线给出了一个最佳匹配，其最大权为 $4 + 2 + 4 + 1 + 3 = 14$ 。题目完成。



小结

偶图是一种特殊的图，所以它不但具备了信息量丰富这个图模型共有的优点，同时它也具备了大量一般图所不具备的内涵和算法优势。

偶图的结点分成两个部分，这就是它和自然界、数学界的对应关系，或者说匹配关系有着深刻的联系。因此，匹配的算法是所有偶图算法的核心。

如果能将实际问题，通过合理的抽象，变成两种事物之间的矛盾，则这种问题就可以抽象成偶图的模型。所以，偶图的模型有着广泛的应用。同时，偶图的算法有着高效实用的特点，所以也使通过偶图模型解决问题成为可能。

综上所述，我认为，偶图是一种高效的，有着广泛使用价值的模型。合理、有效的使用偶图模型，将大大提高编程及解决现实生活中实际问题的能力。



谢谢！