浅析信息学中的“分”与“合”

福建省福州第三中学
杨沐

引言

- **分**

- “ 分”的思想是将一个难以直接解决的大问题，转化成一些规模较小或限制某些条件的子问题来思考，以求将问题解决。

- **合**

- “ 合”的思想与“分”相对，是将一些零散的小问题的解决合并成一个大问题，从而取得整个问题的解决。

引言

- ❖ 运用“分”与“合”思想方法解题的精髓在于通过在“分”与“合”之间的转化，找出解决问题的关键，从而解决问题。“分治法”是运用“分”与“合”思想方法解题的重要应用，此外，“分”与“合”的思想方法还有更多广泛的应用。

- ❖ [例一] 牛奶模版

N,K 限制下最优化问题→N,K,Len 限制下存在性问题

- ❖ [例二] 树的重建

规模为 **n** 的问题→规模为 **n-1** 的问题

- ❖ [例三] 最优序列

[例三]最优序列

- 给定一个长度为 **N** 的正整数序列。
- 求一个子序列，使得原序列中任意长度为 **M** 的子串中被选出的元素不超过 **K** 个。
- 要求选出的元素之和最大。
- 数据范围：

1≤N≤1000

1≤K， M≤100

[例三]最优序列

- 输入数据：
  N=10， M=4， K=2
  {7， 3， 4， 8， 2， 6， 5， 7， 4， 8}
- 输出答案：
  36

- {7， 3， 4， 8， 2， 6， 5， 7， 4， 8}

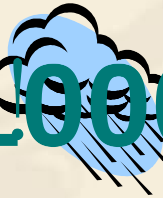
[例三]最优序列——分析

~~动态规划~~

超时

$O(2^N)$

$O(N*1000)$



~~线段树？~~

无从入手

怎么办？

“分”

[例三]最优序列——“分”繁为简

- 动态规划之所以不可行，原因在于——题目中 **K** 和 **M** 的范围太大了！

- 利用“分”的思想，我们尝试限制 **K**，令 **K=1**，也就是对于长度为 **M** 的子串，最多只选一个元素作为原题的一个子问题：

[例三]最优序列——子问题

- 给定一个长度为 **N** 的正整数序列。
- 求一个子序列，使得原序列中任意长度为 **M** 的子串中被选出的元素不超过 **1** 个。
- 要求选出的元素之和最大。
- 数据范围：

1≤N≤1000

1≤M≤100

[例三] 最优序列——“分”繁为简

- 对于这个子问题，由于 **K** 做了限制，我们可以用动态规划来解决这个问题。

- 设 **dp[i]** 表示前 **i** 个元素，在满足题意的前提下选出的最大和

  dp[i]=max(dp[i-1],dp[i-M]+value[i])　　　i≥M

  dp[i]=max(dp[i-1],value[i])　　　0<i<M

  dp[0]=0

[例三]最优序列——进一步分析

1　　　　　　　　　　　　K

子问题 → 原问题

是否可以通过求解 **K** 次的子问题从而解决原题呢 **?**

[例三]最优序列——进一步分析

- 命题

  原问题的解集等价于由 **K** 组互不相交的子问题的解组成的解集。

- 引理一

  原问题的任意一组解都可以由 **K** 组不相交的子问题的解组成。

- 引理二

  任意 **K** 组不相交的子问题的解的并均为原问题的解。

[例三]最优序列——进一步分析

- 题目中存在着一个潜条件，即：

  每个元素只能被选一次

- 若直接套用 **K** 次动态规划来求解，有可能导致某个元素被取多次，无法满足题目中的这个条件。

[例三]最优序列——进一步分析

- N=10， M=4， K=2

{1 3 1 1 1 1 1 1 3 1}

3 3

3 3

并 1 3 1 1 3 1

- 动态规划： 12
- 贪心： 9

标准答案： 10

[例三]最优序列——整体分析

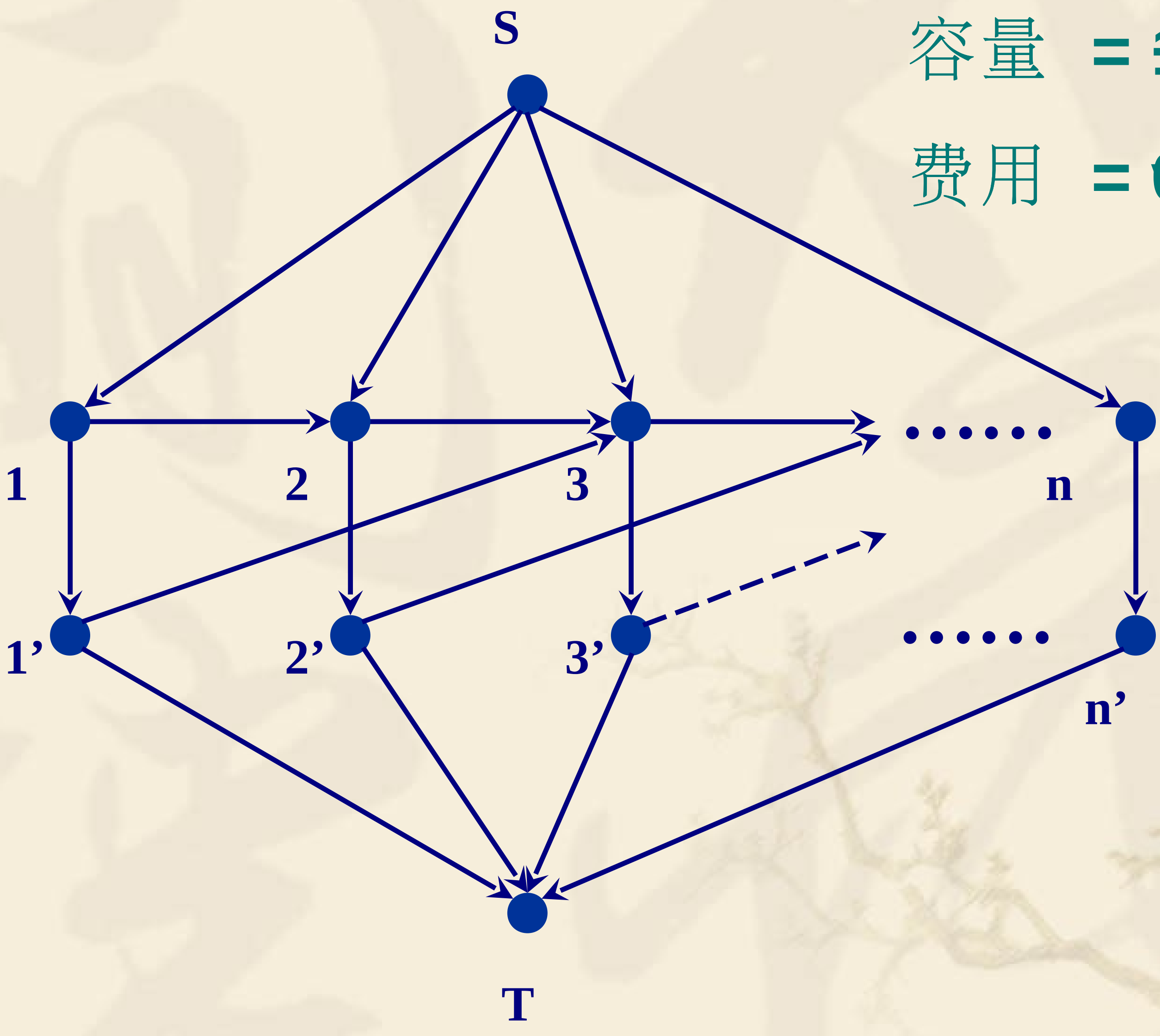
- 考虑动态规划与贪心之所以不能得到正确解，其关键原因在于——题目中存在着一个元素只能被取一次的限制，而对于这种限制各点被选取次数的题目，我们通常使用网络流来解决，那么这道题是否也能通过转化图论模型来使用网络流解决呢？答案是肯定的。

[例三] 最优序列——整体分析

- 构造带权网络 **G=(V,A,C)**
- 序列中的每个元素 **i** 用顶点 **i** 与 **i’** 表示， **i→i’** 连边，容量为 **1**，费用为该元素的数值 **value[i]**，图中包含源 **S** 与汇 **T** 。
- 所有点 **i** 向点 **(i+1)** 连边，容量为 **+∞** ，费用为 **0**
- 源 **S** 向所有点 **i** 各连一条边，容量为 **+∞**，费用为 **0**
- 所有点 **i’** 向汇 **T** 各连一条边，容量为 **+∞**，费用为 **0**
- 所有点 **i’** 向点 **(i+M)** 连边，容量为 **+∞** ，费用为 **0**

容量 = 1∞

费用 = 0value[i]



[例三] 最优序列——整体分析

- 构图完成之后，网络中的每个单位流量表示一个子问题的解，因此，我们只需要在网络中寻找 **K** 次最大费用增广路即可得到答案。

- 由于这张图的边数与顶点数同阶，若使用 **SPFA** 算法求增广轨，则期望时间复杂度仅为 **O(KN)**，是个十分优秀的算法。

总结

转化

辨证关系

对立

分

合

统一

"分"的思想帮助我们迅速地切入问题核心，但若过分细化则会使问题太过凌乱，失去求解的方向；而"合"的思想则以线串珠，使各种纷杂无序的问题具有了整体性。

分中有合，合中有分

善于归纳总结

勇于创新

谢 谢