

从一道题目的解法试谈网络流的构造与算法

福建师大附中 江鹏

1. 引论

A. 对网络流算法的认识

网络流算法是一种高效实用的算法，相对于其它图论算法来说，模型更加复杂，编程复杂度也更高，但是它综合了图论中的其它一些算法（如最短路径），因而适用范围也更广，经常能够很好地解决一些搜索与动态规划无法解决的，看似 NP 的问题。

B. 具体问题的应用

网络流在具体问题中的应用，最具挑战性的部分是模型的构造。这没用现成的模式可以套用，需要对各种网络流的性质了如指掌（比如点有容量、容量有上下限、多重边等等），并且归纳总结一些经验，发挥我们的创造性。

2. 例题分析

【问题 1】项目发展规划（Develop）

Microsoft® 公司准备制定一份未来的发展规划。公司各部门提出的发展项目汇总成了一张规划表，该表包含了许多项目。对于每个项目，规划表中都给出了它所需的投资或预计的盈利。由于某些项目的实施必须依赖于其它项目的开发成果，所以如果要实施这个项目的話，它所依赖的项目也是必不可少的。现在请你担任 Microsoft® 公司的总裁，从这些项目中挑选出一部分，使你的公司获得最大的净利润。

- 输入

输入文件包括项目的数量 N ，每个项目的预算 C_i 和它所依赖的项目集合 P_i 。格式如下：

第 1 行是 N ；

接下来的第 i 行每行表示第 i 个项目的信息。每行的第一个数是 C_i ，正数表示盈利，负数表示投资。剩下的数是项目 i 所依赖的项目的编号。

每行相邻的两个数之间用一个或多个空格隔开。

- 输出

第 1 行是公司的最大净利润。接着是获得最大净利润的项目选择方案。若有多个方案，则输出挑选项目最少的一个方案。每行一个数，表示选择的项目的编号，所有项目按从小到大的顺序输出。

- 数据限制

$$0 \leq N \leq 1000$$

$$-1000000 \leq C_i \leq 1000000$$

- 输入输出范例

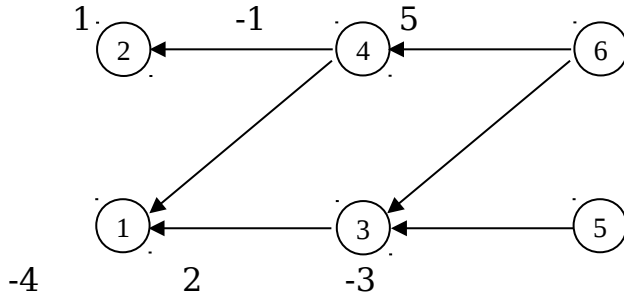
Sample Input	Sample Output
6	3
-4	1
1	2
2 2	3
-1 1 2	4
-3 3	6
5 3 4	

【分析解答】

1. 抽象原题（图论模型）

给定包含 N 个顶点的有向图 $G = (V, E)$ ，每个顶点代表一个项目，顶点有一权值 C_i 表示项目的预算。用有向边来表示项目间的依赖关系，从 u 指向 v 的有向边表示项目 u 依赖于项目 v 。

问题：求顶点集的一个子集 V' ，满足对任意有向边 $\langle u, v \rangle \in E$ ，若 $u \in V'$ ，则 $v \in V'$ ，使得 V' 中所有顶点的权值之和最大。



2. 搜索

枚举 V 的所有符合条件的子集，时间复杂度 $O(2^n)$ ，指数级。无论如何剪枝优化，也摆脱不了非多项式。

3. 动态规划

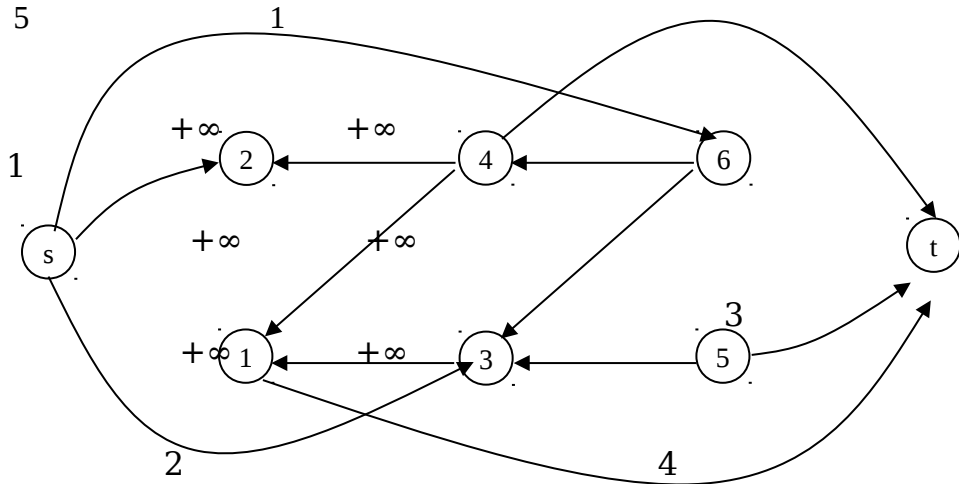
本题的结构是有向无环图，而非树形结构，不适合动态规划。如果一定要做，实质类似于搜索，由于状态数量众多，仍是指数级的时间复杂度。

4. 网络流

流网络的构造方法：

建立 N 顶点代表 N 个项目，另外增加源 s 与汇 t 。若项目 i 必须依赖于项目 j ，则从顶点 i 向顶点 j 引一条容量为无穷大的弧。对于每个项目 i ，若它的预算 C 为正（盈利），则从源 s 向顶点 i 引一条容量为 C 的边；若它的预算 C 为负（投资），则从顶点 i 向汇 t 引一条容量为 $-C$ 的边。

求这个网络的最小割 (S, T) ，设其容量 $C(S, T) = F$ 。设 R 为所有盈利项目的预算之和（净利润上界），那么 $R - F$ 就是最大净利润； S 中的顶点就表示最优方案所选择的项目。



最小割: $S = \{s, 1, 2, 3, 4, 6\}$; $T = \{5, t\}$
 $C(S, T) = 5$ 净利润 $R - C(S, T) = 8 - 5 = 3$

证明算法的正确性:

- 建立项目选择方案与流网络的割 (S, T) 的一一对应关系:

任意一个项目选择方案都可以对应网络中的一个割 (S, T) , $S = \{s\} + \{\text{所有选择的项目}\}$, $T = V - S$ 。

对于任意一个不满足依赖关系的项目选择方案, 其对应的割有以下特点:

存在一条容量为 $+\infty$ 弧 $\langle u, v \rangle$, u 属于 S 而 v 属于 T 。这时割的容量是无穷大, 显然不可能是网络的最小割。

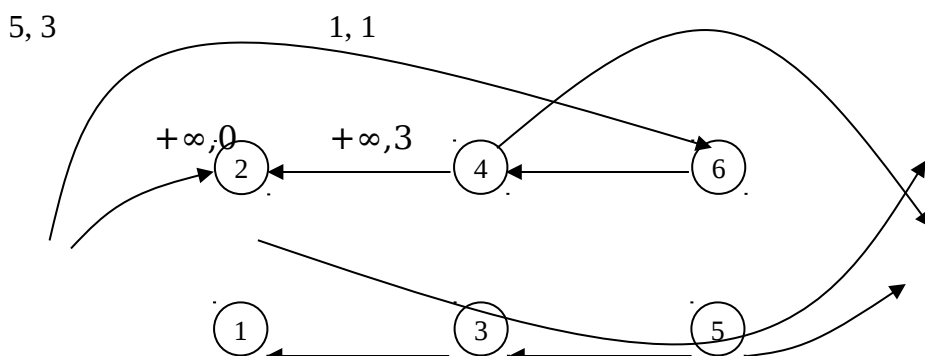
- 对于任意一个割 (S, T) , 如果其对应一个符合条件的方案, 它的净利润是 $R - C(S, T)$ 。导致实际净利润小于上届 R 的原因有:

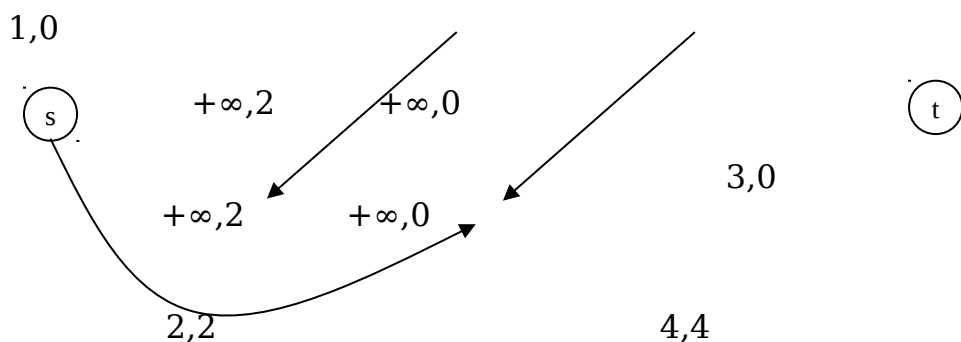
1. 未选取盈利项目 i , 即顶点 i 包含在 T 中, 那么存在一条从源 s 至顶点 i 的容量为 C_i 的弧
 2. 选取投资项目 i , 即顶点 i 包含在 S 中, 那么存在一条从顶点 i 至汇的容量为 $-C_i$ 的弧
- $C(S, T)$ 就是上述两种弧的容量之和。

综上所述, 割的容量越小, 方案的净利润就越大。

- 最小割的求法:

根据最大流最小割定理, 网络的最小割可以通过最大流的方法求得。





本题解题的关键在于流网络数学模型的建立。本题建模的独到之处在于：以前的网络流问题通常使用流量表示解答方案，而本题使用割表示解答方案，并充分利用了割的性质，流只是求得最小割的手段。这为我们开辟了一条构造网络流解决问题的新思路。

初看这个问题，要把它和网络流联系起来，有相当的难度。必须熟练地掌握流网络的各种性质，经过反复的类比尝试，才能发现它们之间的共性。

【联想思考】

作为本题的一个衍生，给每个项目估计一个完成时间，并假设公司同时只能进行一个项目。现在的问题是：如何选择一些能在给定时间内完成的项目，使得公司得到最大收益。这个问题我至今还没有找到有效算法，希望有兴趣的同学来共同研究。

3. 编程技巧

◆ 数据结构：邻接表

◆ 直接表示原问题

优点：节省空间

缺点：编程复杂度大，不具有通用性