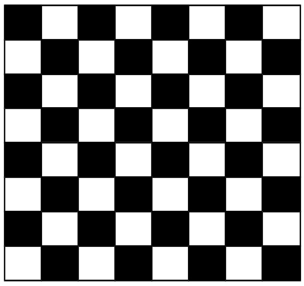
染色法和构造法在棋盘上的应用

广东北江中学 方奇

棋盘：

所谓 m*n 棋盘，指由 m 行 n 列方格构成的 m*n 矩形。每个方格成为棋盘的格，位于第 i 行 j 列的格记为 a(i,j)。当 i+j 为奇（偶）数时，称 a_{ij} 为奇（偶）格。



染色法：

用不同颜色将棋盘格子进行染色，起到分类的效果。特别地，类似国际象棋盘上的黑白二染色，我们称之为“自然染色”。

构造法：

直接列举出某种满足条件的数学对象或反例导致结论的肯定与否定，或间接构造某种对应关系，使问题根据需要进行转化的方法，称之为构造法。

棋盘的覆盖

指用若干图形去覆盖 m*n 的棋盘。覆盖的每个图形也由若干格子组成，称为覆盖形。

约定任两个覆盖形互不重叠，任一覆盖形中任一格总与棋盘上某格重合。

按覆盖效果，可分为完全覆盖、饱和覆盖、无缝覆盖和互异覆盖。（只讨论）

完全覆盖：各个覆盖形的总格子数等于棋盘的总格子数

按覆盖形分，可分为同行覆盖和异型覆盖。

同形覆盖：只有一种覆盖形；

异型覆盖：有多种覆盖形

同形覆盖

例1 给出 m,n,k，试用若干 1*k 的矩形覆盖 m*n 的棋盘。

分析：

定理 1 m*n 棋盘存在 1*k 矩形的完全覆盖的充分必要条件是 k|m 或 k|n。

证明：

充分性是显然的。用构造法。当 k|n 时，每一行用 n/k 个 1*k 的矩形恰好完全覆盖。K|m 情况类似。

必要性：

设 m=m1*k+r,0<r<k

设 n=n1*k+s,0<s<k

1	2	3	…	K	1	2	3	…	k	……	1	2	3	…	S
2	3	4	…	1	2	3	4	…	1	……	2	3	4	…	S+1
3	4	…	…	2	3	4	…	…	2	……	3	4	…	…	:
:	:			:	:	:			:	……	:	:			:
K	1	…	…	k-1	K	1	…	…	k-1	……	k	1	…	…	S+k-1
1	2	3	…	K	1	2	3	…	K	……	1	2	3	…	S
2	3	4	…	1	2	3	4	…	1	……	2	3	4	…	S+1
3	4	…	…	2	3	4	…	…	2	……	3	4	…	…	:
:	:			:	:	:			:		:	:			:
K	1	…	…k-1		K	1	…	…	k-1	……	k	1	…	…	S+k-1
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	……	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:		:	:	:	:	:
1	2	3	…	K	1	2	3	…	K	……	1	2	3	…	S
2	3	4	…	1	2	3	4	…	1	……	2	3	4	…	S+1
3	4	…	…	2	3	4	…	…	2	……	3	4	…	…	:
:	:			:	:	:			:	……	:	:			:
R	r+1	…	…	R+k-1	r	…	…	…	r+k-1	……	R	r+1	…	…	r+s-1

约定 r>=s

由上面的定理 1，可彻底解决 m*n 棋盘的 p*q 矩形完全覆盖问题

定理 2 m*n 棋盘存在 p*q 矩形的完全覆盖充分必要条件是 m,n 满足下列条件之一：

（i）　p|x 且 q|y

（ii）　p|x,q|x,且存在自然数 a,b，使 y=ap+bq

其中{x,y}={m,n}

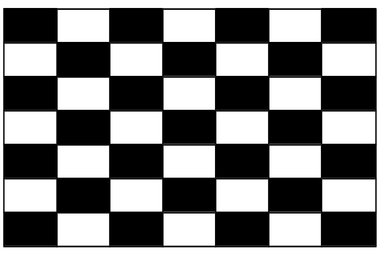
异型覆盖

例 2　设有 m*n 的棋盘，当 m*n 为奇数时，尝试删去一个格子，剩下部分用若干 1*2 的矩形覆盖；当 m*n 为偶数时，尝试删去两个格子，剩下部分用若干 1*2 的矩形覆盖。

分析：

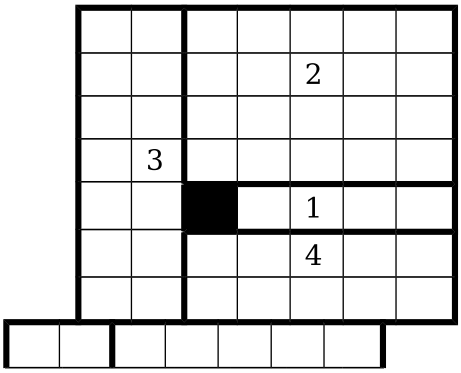
(1) 先来考虑 m*n 为奇数的情况

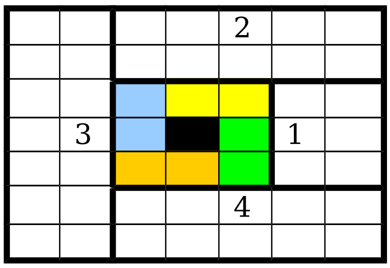
一方面，将棋盘自然染色。无论怎么放，一个 1*2 的矩形必盖住一个黑格和一个白格，而棋盘上的黑格比白格多 1，于是只能去掉一个黑格(即偶格)



另一方面，设去掉偶格为 a(i,j)，用构造法必能得到可行解

1）I 与 j 同为奇数　　　　　　　　2）I 与 j 同为偶数

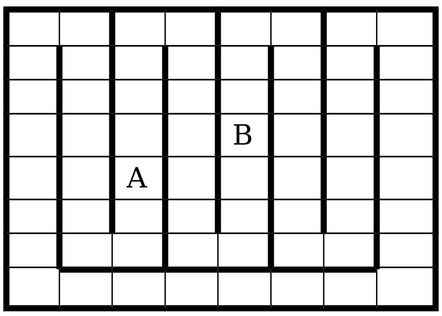




（2）再考虑 m*n 为偶数的情况

类似地，由自然染色法得知，去掉的两格必定异色，即一个奇格，一个偶格（不然两种格子总数不等）

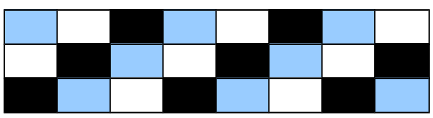
另一方面，用构造法，将用一些粗线将棋盘隔成宽为 1 的长条路线，使从任一格出发可以不重复地走遍棋盘并回到出发点。

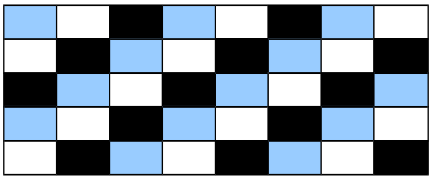


针对染色法，上面的例子都是利用“各类颜色格子总数必须相等”这一条件推出矛盾，但又些时候，只考虑这个条件是不够充分的。

例3　8*8 棋盘剪去哪个方格才能用 21 个 1*3 的矩形覆盖?

分析：





蓝色：21 个　　白色：22 个　　黑色：21 个

考虑到对称性，只有剪去 a(3,3)、a(3,6)、a(6,3)、a(6,7)中的某一个才能满足题意。

小结

覆盖类问题其实是一个难度较大的课题，这里只讨论了一些简单的情况，以说明染色法与构造法的应用

需要补充的是，染色法的种类形形色色、五花八门。考虑到可推广性和易操作性，本文只着重研究了“间隔染色法”（即自然染色法的推广）

马的遍历

马行走规则：从 2*3 的矩形一个角按对角线跳到另一个角上

棋盘中马的遍历问题分两类

(1) 马的哈密尔顿链

(2) 马的哈密尔顿圈

马的哈氏链

通常有四种方法

1　贪心法——每一步跳向度最小的点

2　分治法——将棋盘分成几个小棋盘，分别找哈氏链，再连接起来

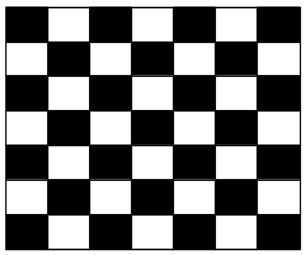
3　镶边法——先在一个小棋盘中找到哈氏链，然后在棋盘四周镶边，已产生大棋盘的哈氏链。

按上述方法不难得到下面结论

n*n 棋盘存在哈氏链的充要条件是 n>3。

马的哈氏圈

例4　求 n*n 棋盘的哈氏圈



分析

将棋盘自然染色，考察无解情况。

马无论怎么走，都必须按黑格－白格－黑格－白格. . . . . . 如此循环。由于要回到起点（起点与终点同色），途经两种颜色的格子数必相等，可知 n 为奇数时无解。

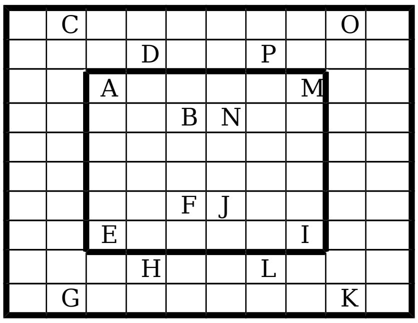
因为大小限制，n<6 时也无解

当 n>=6 且为偶数时，用镶边法构造

假设(n-4)*(n-4)的棋盘已找到哈氏圈

1）　n 除以 4 余 2 时，

在内矩形四个角（A、E、I、M）上分别开口。



1	16	19	26	7	4
20	25	2	5	18	27
15	26	17	8	3	6
24	21	32	11	28	9
35	14	23	30	33	12
22	31	34	13	10	29

1 将C与D所在的外回路与“内矩形”的回路在A、B上对接，变成A-C-．．．-D-B。

2 将G与H所在的外回路与“内矩形”的回路在E、F上对接，变成E-G-．．．-H-F。

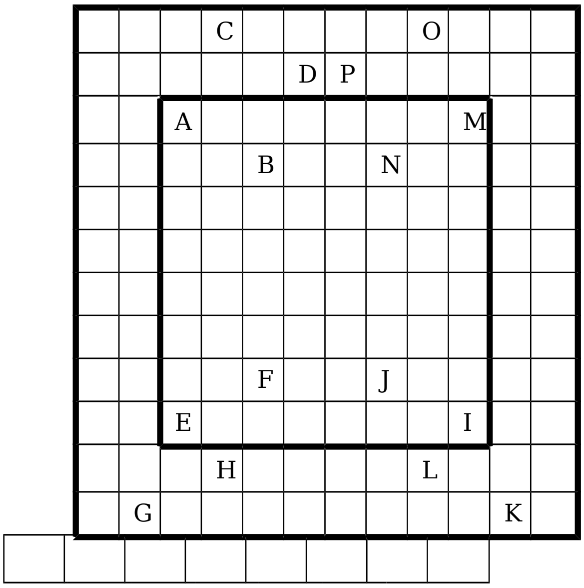
3 将K与L所在的外回路与“内矩形”的回路在I、J上对接，变成I-K-．．．-L-J。

4 将O与P所在的外回路与“内矩形”的回路在M、N上对接，变成M-O-．．．-P-N。

{　在这里，要注意一个问题，就是作为基础矩形的“内矩形”的回路，首先要满足：A的下一步到B，E的下一步到F，I的下一步到J，M的下一步到N。只有这样，构造成的新矩形才能继续作为“内矩形”按上述规则向外扩展。现给出满足要求的基础矩形的一组解（N=6）}

2） n除以4余0时

在内矩形四个角（A、E、I、M）上分别开口。

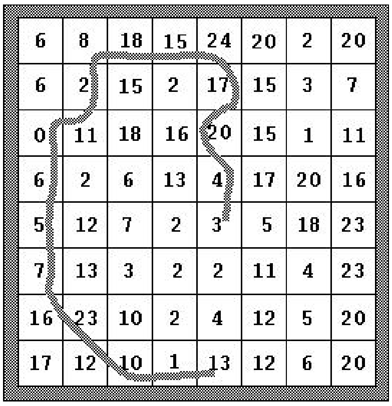


1	54	47	38	49	52	31	26
46	39	2	53	32	27	22	51
55	64	37	48	3	50	25	30
40	45	56	33	28	23	4	21
63	36	61	44	57	20	29	24
60	41	34	15	12	5	8	19
35	62	43	58	17	10	13	6
42	59	16	11	14	7	18	9

1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A、B 上对接，变成 A-C-．．．-D-B。
2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E、F 上对接，变成 E-G-．．．-H-F。
3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I、J 上对接，变成 I-K-．．．-L-J。
4 将 O 与 P 所在的外回路与“内矩形”的回路在 M、N 上对接，变成 M-O-．．．-P-N。

一个猜想：
m*n（m<=n）棋盘不存在哈氏圈的充要条件是：
m,n 满足下列条件之一
（1） m,n 都是奇数
（2） m=1,2 或 4
（3） m=3 且 n=4,6,8

其它应用
例 5 蠕虫世界 （Uva）
蠕虫在一张 N*N 的网上爬行。每个网格上有一个数字，蠕虫不能经过相同的数字两次。开始的时候，蠕虫任意选择一个格子作为起始点。它爬行只能沿水平或竖直方向，且不能超出网外。蠕虫如何移动才能到达尽可能多的网格呢？下面是一个样例。



分析：
采用“染色法”贪心出一个上界。
1 自然染色
2 设 Tfree,Tblack,Twhite 分别记录三类格子数量
对每一种数字（1，2，3……）分析
1）只存在标有该数字的白色格子，Twhite←Twhite+1
2）只存在标有该数字的黑色格子，Tblack←Tblack+1
3）存在标有该数字的黑白两色格子，Tfree←Tfree+1
3 估价上界

$$L\max=\begin{cases}(Twhite+Tfree)*2+1 & (Twhite+Tfree<Tblack)\\ Tblack+Twhite+Tfree & (Twhite+Tfree\ge Tblack)\end{cases}$$

(假设 Twhite<=Tbalck,否则交换即可)

结语

存在性问题——〉染色法

可行性问题——〉构造法

在以棋盘为模型的问题中，综合运用这两种方法，双管齐下，往往能收到事半功倍的效果！

谢谢