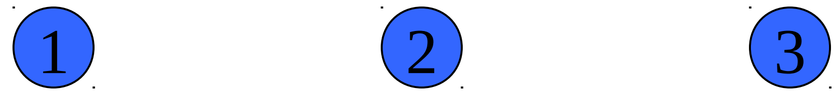
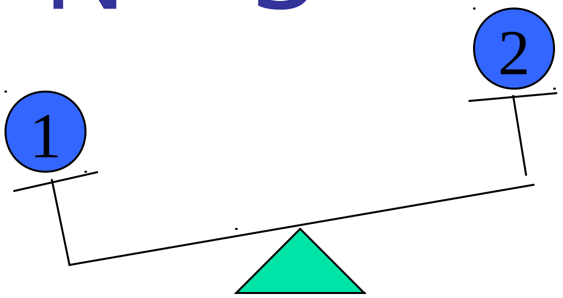
一类称球问题的解法

问题的提出

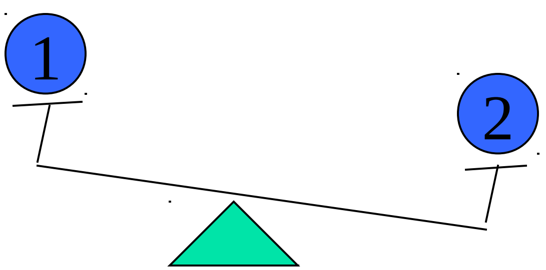
- 给定 N 个球
- 有个比标准球重的次品混入其中
- 你有一架天平，用最少的次数找出这个次品。

N = 3



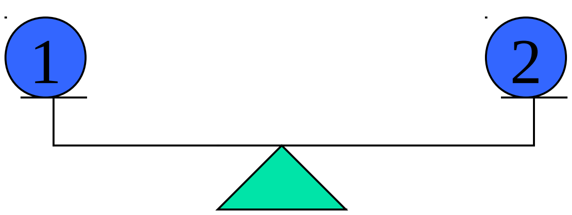


① 是次品

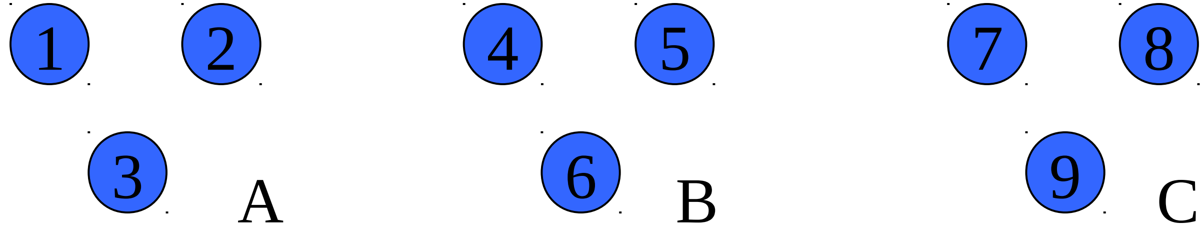


② 是次品

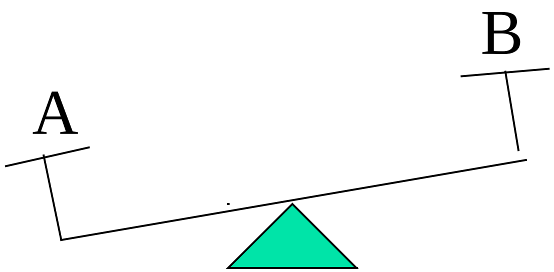
N=3 时称 1 次就可以找出次品



③ 是次品

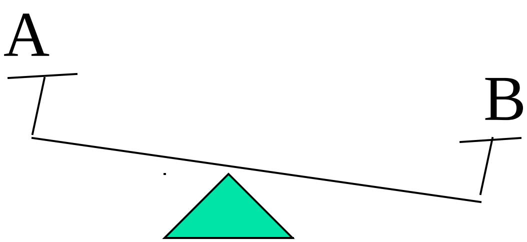


N = 9



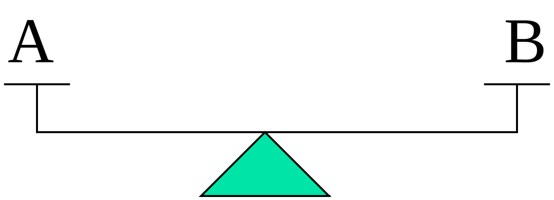
次品在 A 中

- 通过一次称量，可以把次品可能存在的范围从 9 个，缩小到 3 个



次品在 B 中

- N = 3 的时候一次就能称出次品



次品在 C 中

N = 9 时称 2 次

更一般的情况

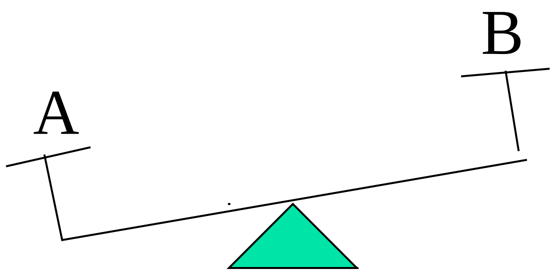
$N = 3k$

1　2　……　k　　A

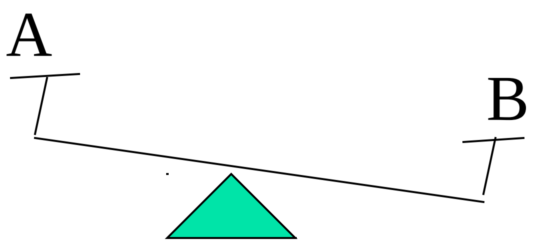
1　2　……　k　　B

1　2　……　k　　C

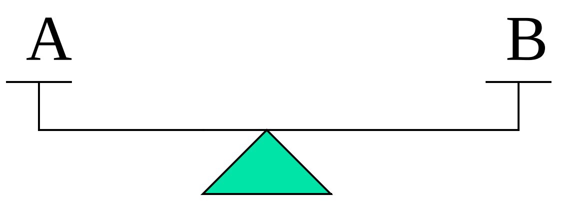
更一般的情况



次品在 A 中



次品在 B 中



次品在 C 中

范围缩小到原来的 1/3

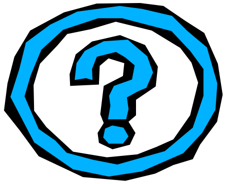
更一般的情况

- n = 3k+1，n = 3k+2 和 n=3k 类似，也是均分成三堆
- 每次称量把范围大致缩小到原来的 1/3
- 因此：从 n 个球中找次品至多要称 $[\log_3 n]$ 次。（[] 统一表示取上整）

判定树

$[\log_3 n]$ 无疑是可行解。

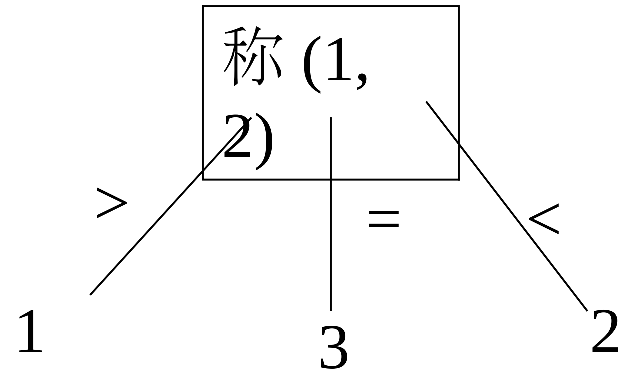
最优性



为什么三分?

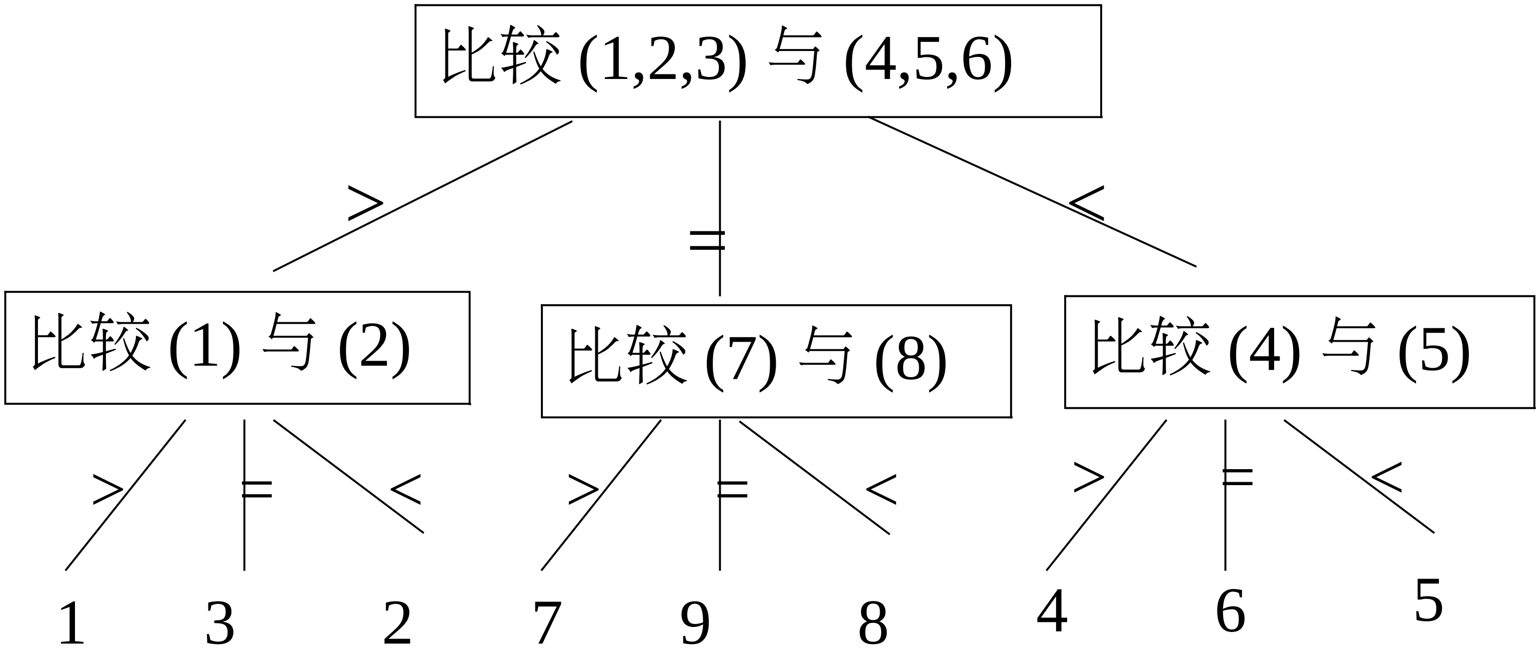
因为天平只有三种可能：左偏、右偏、平衡

判定树



- 叶子代表结果
- 非叶子代表一次称量
- 每个非叶子节点都有三个孩子，表示天平左偏、右偏、平衡

判定树



- 判定树的深度就是称量次数
- 一个有意义的判定树至少 n 个叶子节点

判定树

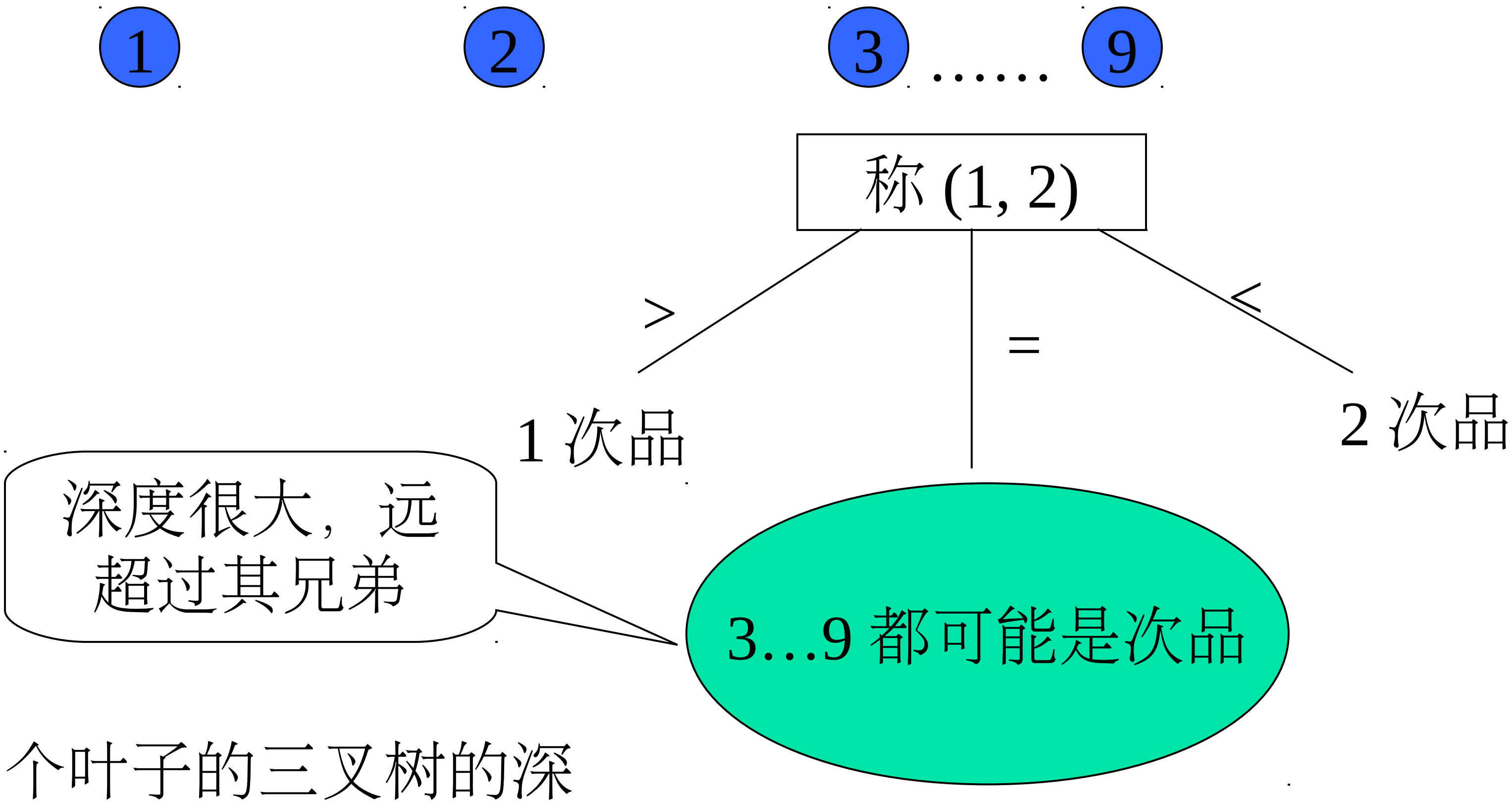
- N 个叶子的三叉树的深度 h >= [$\log_3 n$]

[$\log_3 n$] 是最优解

小结

- 引进了有力工具：判定树。将主观的直觉严谨化。
- 三分法是解决这类问题的根本着眼点。
- 三分时必须充分的均匀

分配的均匀性

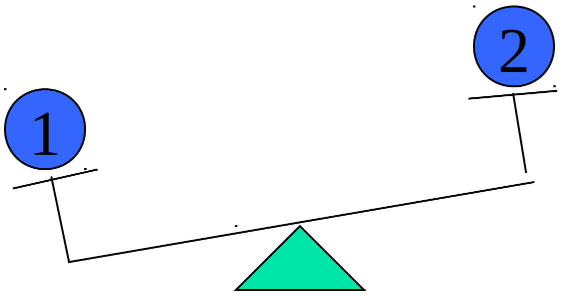


- N 个叶子的三叉树的深度 h >= [$\log_3 n$]

问题 2 的提出

- N 个球，混入了一个轻重不详的次品
- 手中有一架天平和一个标准球
- 用最少的次数称出次品并求出次品的轻重

问题 2 的基本分析



可得如下信息:

次品若在①中，则它偏重。

次品若在②中，则它偏轻。

引理的提出

•已知两堆球，第一堆有 a 个、第二堆有 b 个
。

•若次品在第一堆，必是重球

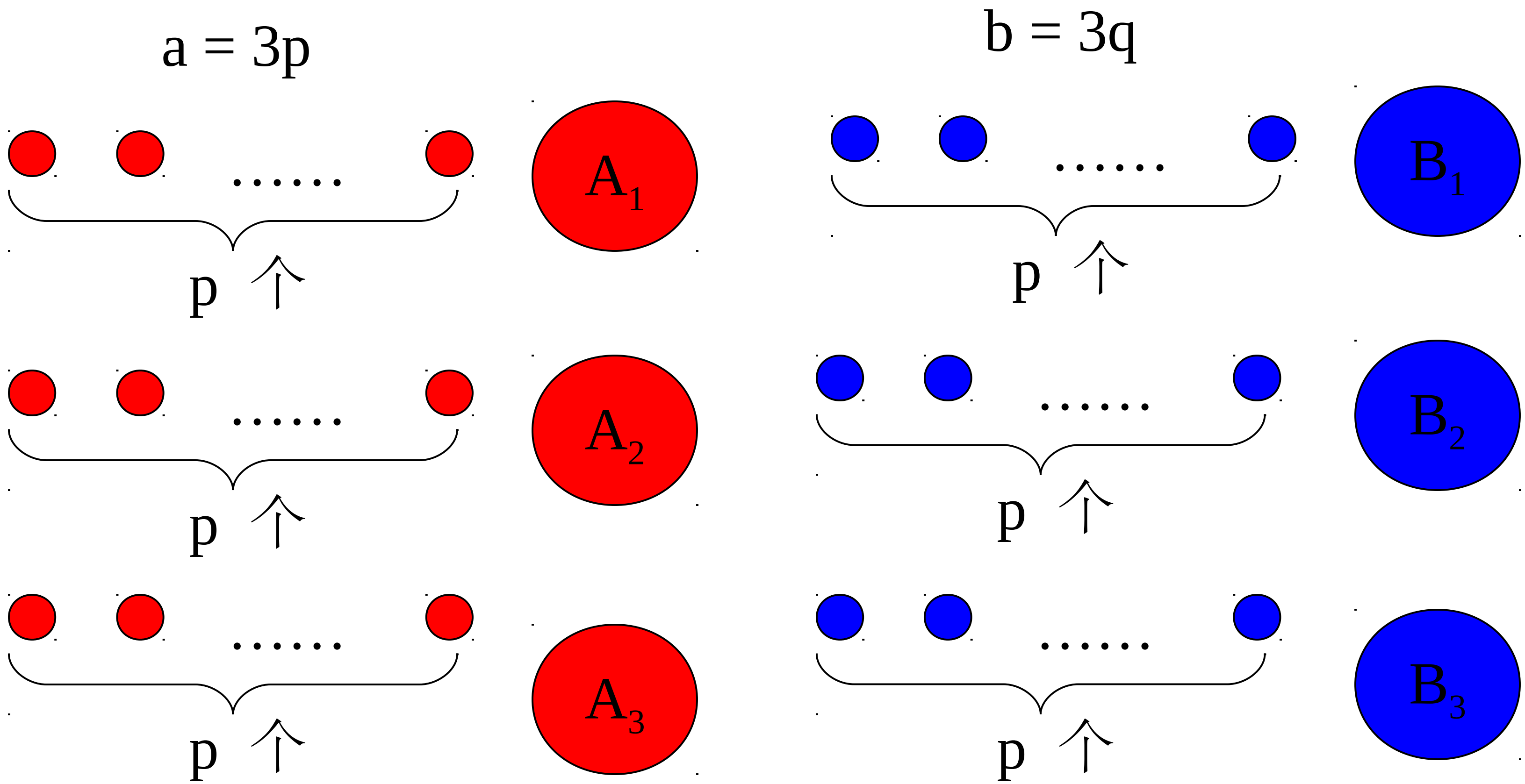
•若次品在第二堆，必是轻球

•只要称 $[\log_3(a+b)]$ 次就能找到次品

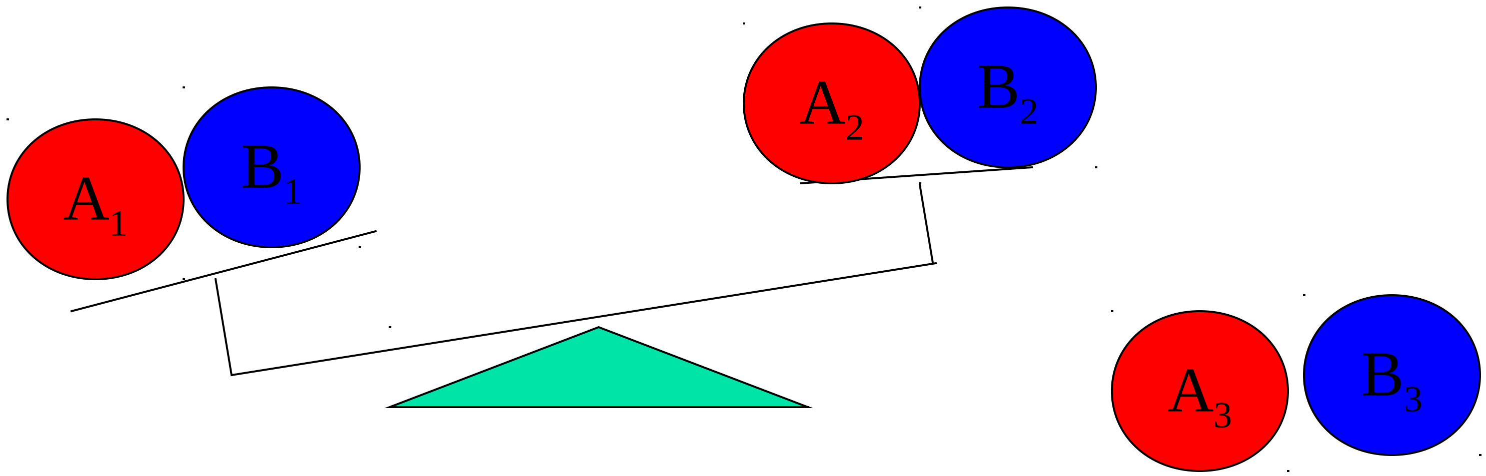
分析

- 总共 a+b 个球
- 每个球都有可能是次品
- 判定树至少 a+b 个叶子
- 树的深度 h >= $[\log_3(a+b)]$

引理的分析



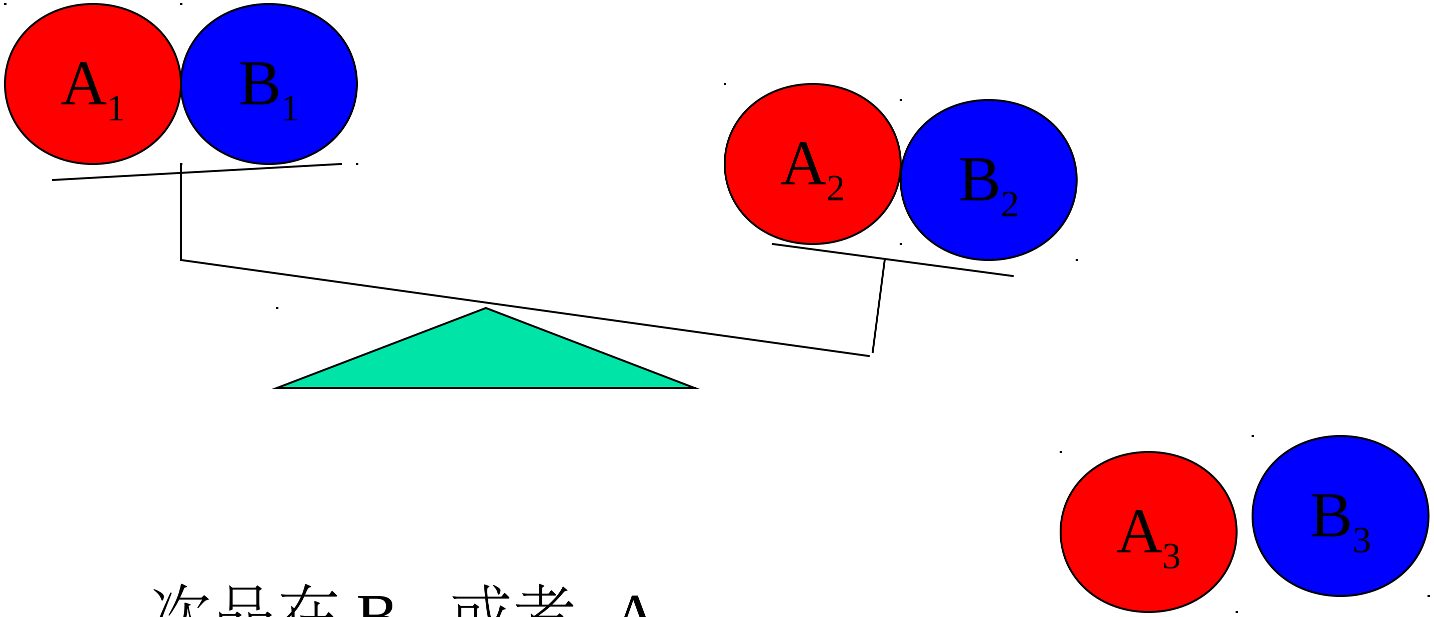
引理的分析



次品在 A_1 或者 B_2

范围被缩小到 p+q 个球里面

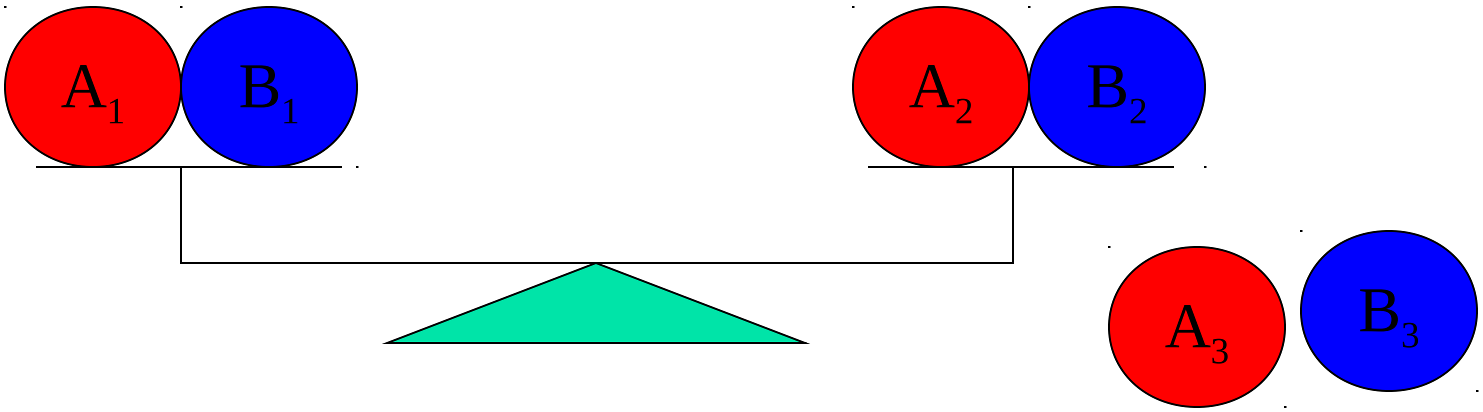
引理的分析



次品在 B_1 或者 A_2

范围被缩小到 p+q 个球里面

引理的分析



次品在 A_3 或者 B_3

范围被缩小到 p+q 个球里面

子问题的分析

- 总共 a+b=3(p+q) 个球
- 无论天平怎么偏，都可以把范围缩小到 p+q 个球中，即原来的 1/3
- 根据 a, b mod 3 的余数分类，上面讨论的是 a mod 3 = b mod 3 = 0 的情况。其他情况可类似进行。关键要“均”分。

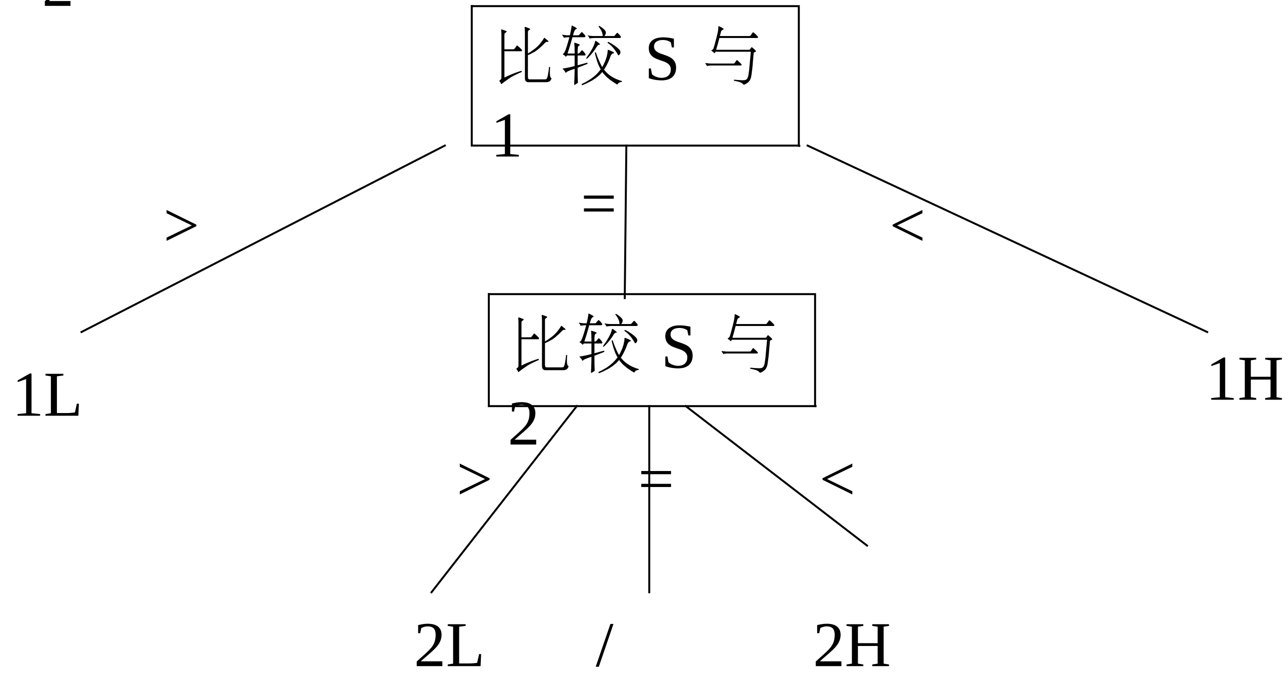
引理中问题称 $[\log_3(a+b)]$ 次即可。

问题 2 的分析

- n 个球，每个球都有可能是轻球或者重球，有 2n 种不同的可能结果
- 判定树至少要 2n 个叶子节点
- 判定树的深度 h >= $[\log_3(2n)]$

问题 2 的分析

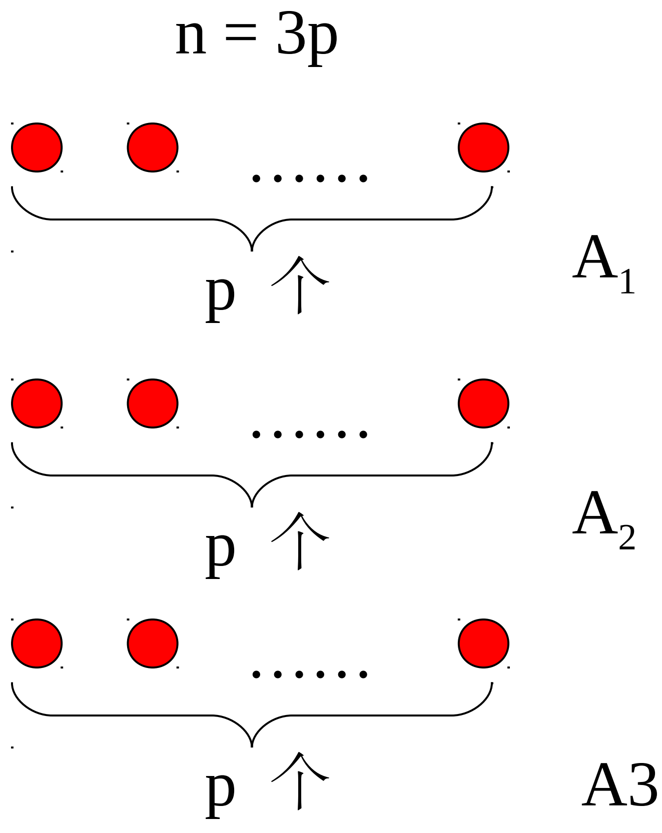
N=2



接着对 n 归纳

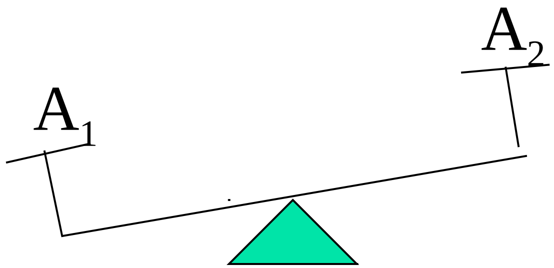
问题 2 的分析

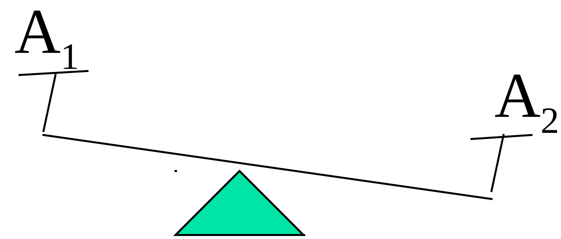
假设小于 n 的球都能在 $[\log_3(2n)]$ 次内称出次品



问题 2 的分析

天平不平衡，次品必在 A_1 或者 A_2 中





A_1 中的球只可能重

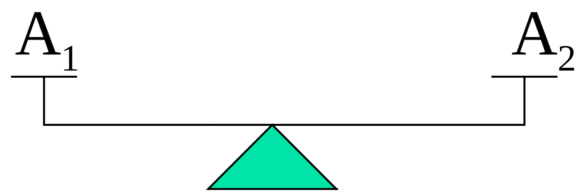
A_2 中的球只可能轻。

A_2 中的球只可能重

A_1 中的球只可能轻。

归结到引理，只要称 $[\log_3(p+p)]$ 次

问题 2 的分析



次品在 A_3 中，根据归纳假设，还要称 $[\log_3(2p)]$ 次

- 无论天平怎么偏，称完一次后都还要称 $[\log_3(2p)]$ 次
- 共称 $[\log_3(2p)]+1=[\log_3(6p)]=[\log_3(2n)]$ 次

问题 2 的分析

$|A_1|=|A_2|=|A_3|=p$

总共有 6p 个叶子节点

称 (A_1,A_2)

$>$ $=$ $<$

A_1 重或 A_2 轻

2p 个叶子节点

A3 轻重都有可能

2p 个叶子节点

A_1 轻或 A_2 重

2p 个叶子节点

问题 2 的分析

- n=3k+2 分法

$|A_1|=k+1$ $|A_2|=k+1$ $|A_3|=k$

6k+4 个叶子节点分摊到每个孩子是:

2k+2 2k+2 2k

是均匀的

问题2的分析

- N = 3k + 1

分法一： k， k， k+1

分摊的叶子节点： 2k， 2k， 2k+2

分法二： k+ 标准球， k+1 ， k

分摊的叶子节点： 2k+1 ， 2k+1 ， 2k

问题 2 的小结

- $[\log_3(2n)]$ 即是问题 2 的解。最优性和可行性均已证明
- 判定树是一种估界和证明最优性的有力工具。
- 通过对判定树的研究，衍生了一条重要的原则：均匀。均分的对象不是球，而是叶子节点（即不同的结果）。

其他形式

- 只要求次品，不求轻重。结论是 $[\log_3(2n-1)]$
- 问题 2 去掉标准球。第一次称的时候就不能保证一定均匀。结论是 $[\log_3(2n+2)]$

万变不离其宗，解决此问题的精髓在四个字：均匀三分

总结

1 、从简单入手

2 、求同存异

3 、严谨细心