浅谈“调整”思想在信息学中的应用

浙江绍兴一中 唐文斌

引入

"调整"？？

- "调整"的本义为：
  - 改变原有的情况，使之更适应客观环境和要求

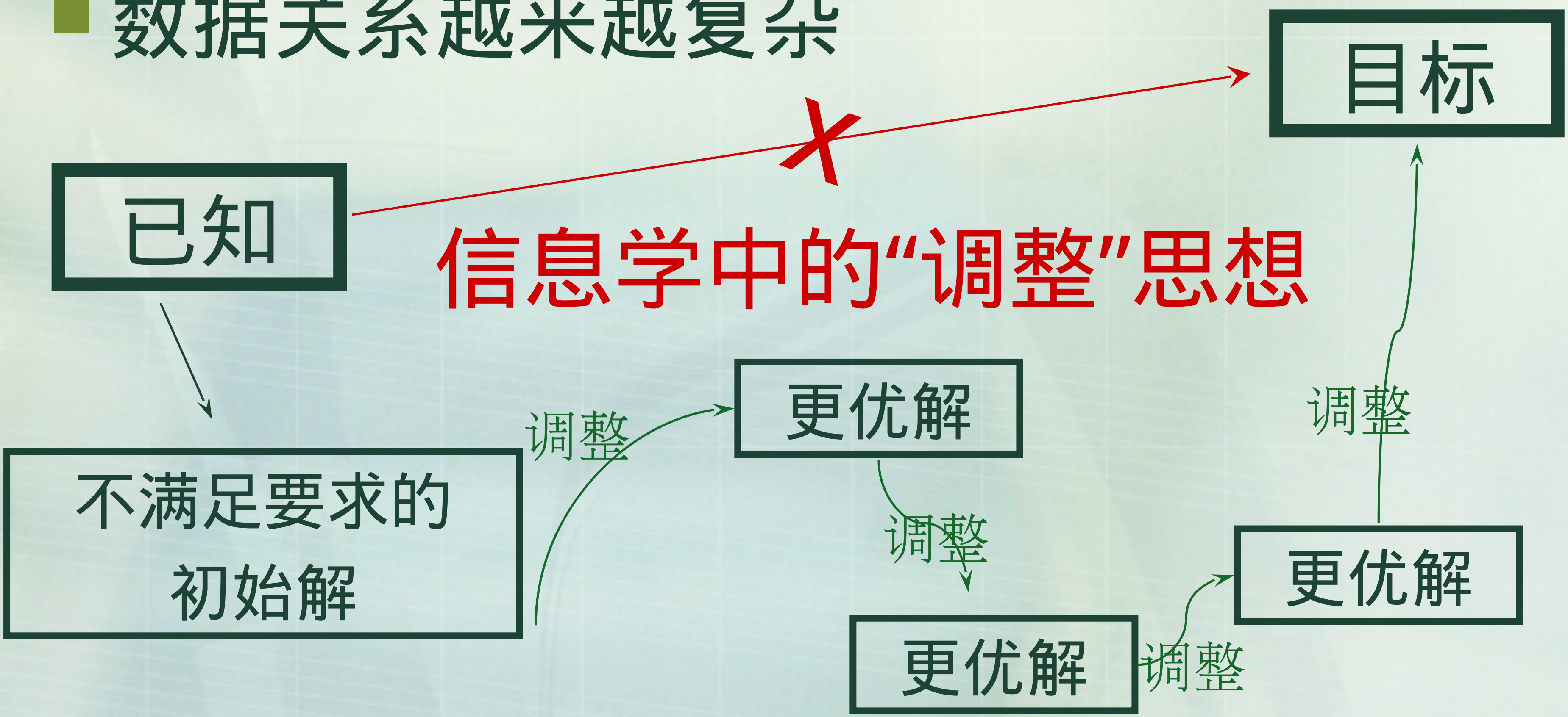
- 产业结构调整
- 军事战略调整

单纯形算法

模拟退火算法

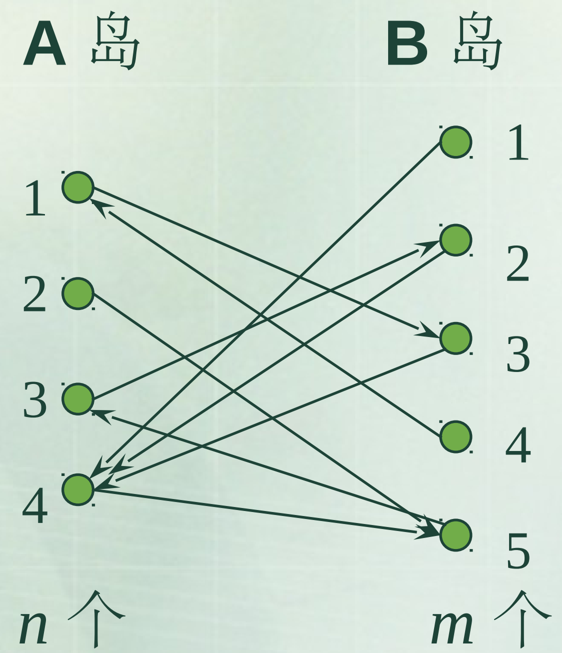
引入

- 题目难度越来越大
- 数据关系越来越复杂



[例一] 远程通信（Baltic2001）

- 波罗的海上有两个小岛
- 每个小岛上都有一些远程通信端口
- 每个端口都连接着对方小岛上的一个端口，称为“目标端口”
- 每个端口可以工作在
  - 发送模式（黄色标记）
  - 接收模式（蓝色标记）



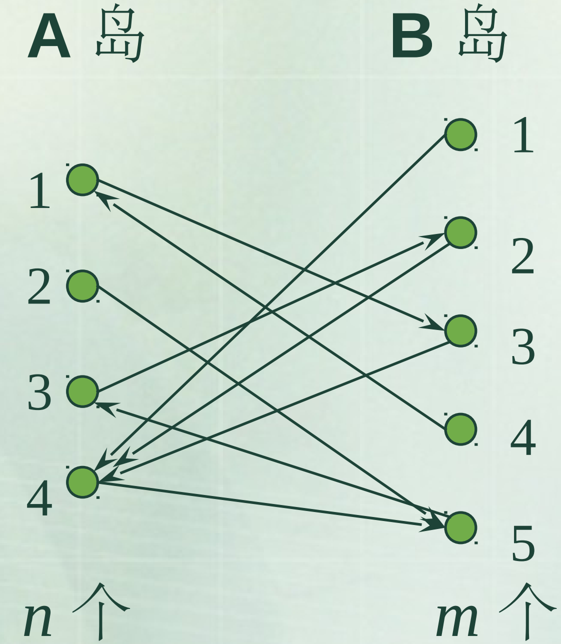
[例一] 远程通信

发送端口

接收端口

- 请设置这 $n+m$ 个端口的工作模式，使得所有端口都处于工作状态。($n+m<10^5$)
- 即要求：
  - 对于发送端口 A，其目标端口必须处于接收模式
  - 对于接收端口 B, 至少存在另一个端口以 B 为目标端口且处于发送模式

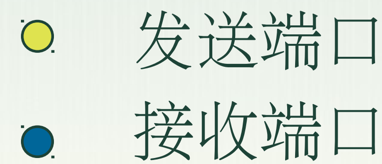
先从样例下手



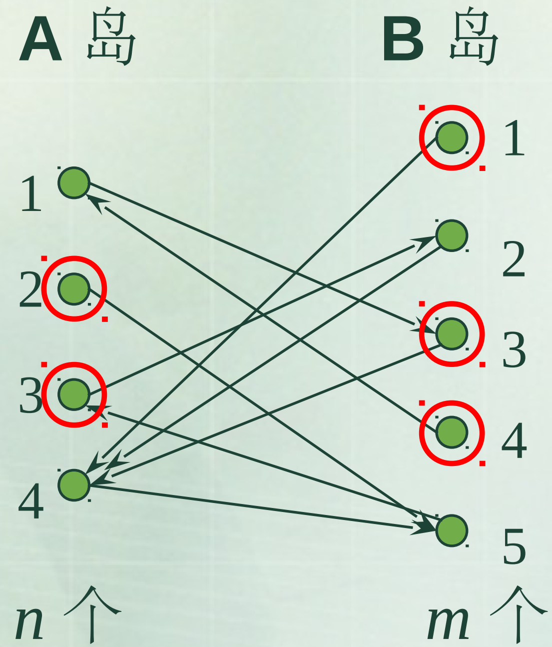
发出去的数据有人接

有数据可收

[例一] 远程通信

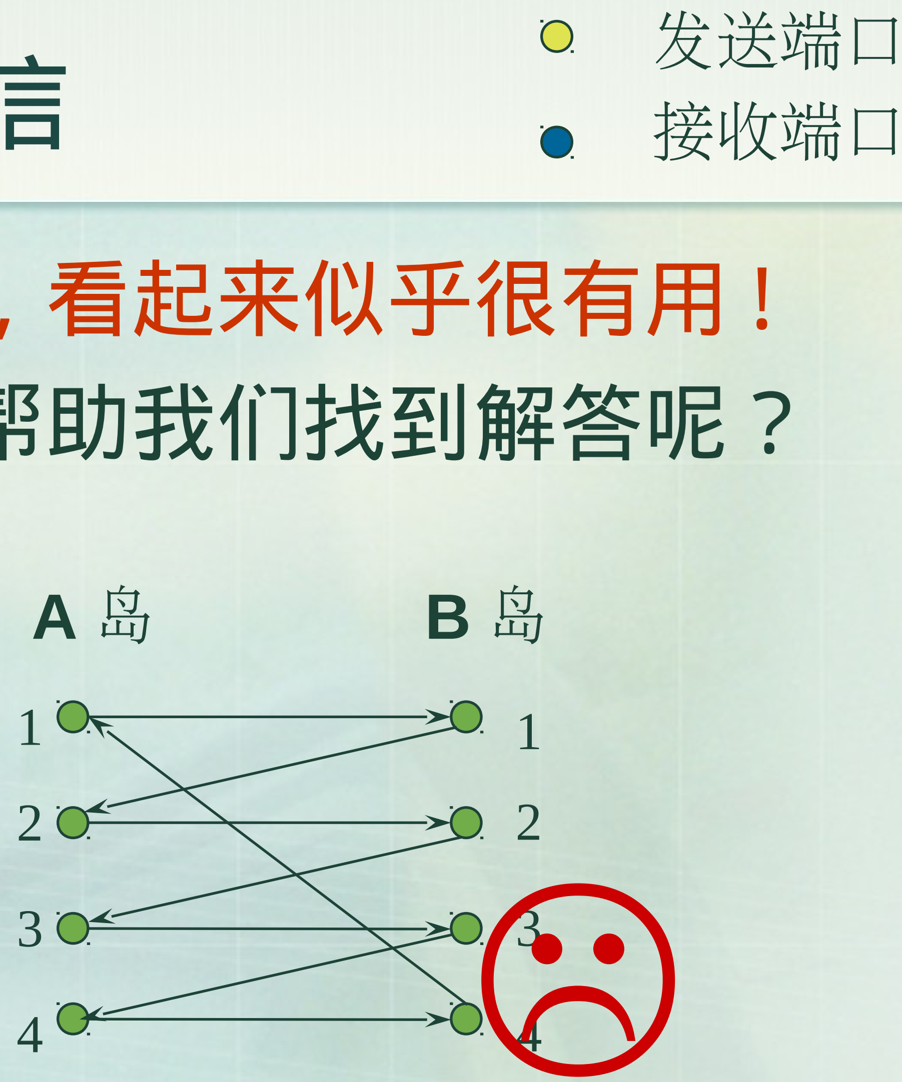


- 从样例下手：
- A 岛的 2 号
- B 岛的 1 号、 4 号
- 只能设置为发送模式
- 其目标端口必须为接收模式
- A 岛的 3 号和 B 岛的 3 号



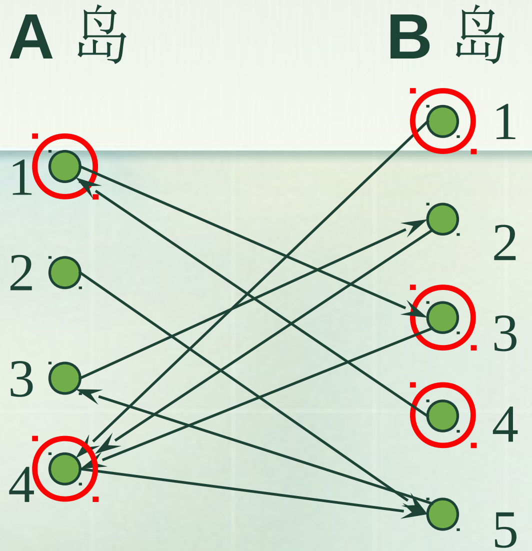
[例一] 远程通信

- 这个简单的事实，看起来似乎很有用！
- 那它是否总是能帮助我们找到解答呢？
- 答案是否定的



从一个不满足要求的“初始解”开始

[例一] 远程通信



- " 调整"算法
  - (1) 设置初始解 (不一定满足要求)

    设 A 岛上的所有端口都是发送模式

    设 B 岛上的所有端口都是接收模式

" 调整"操作 :

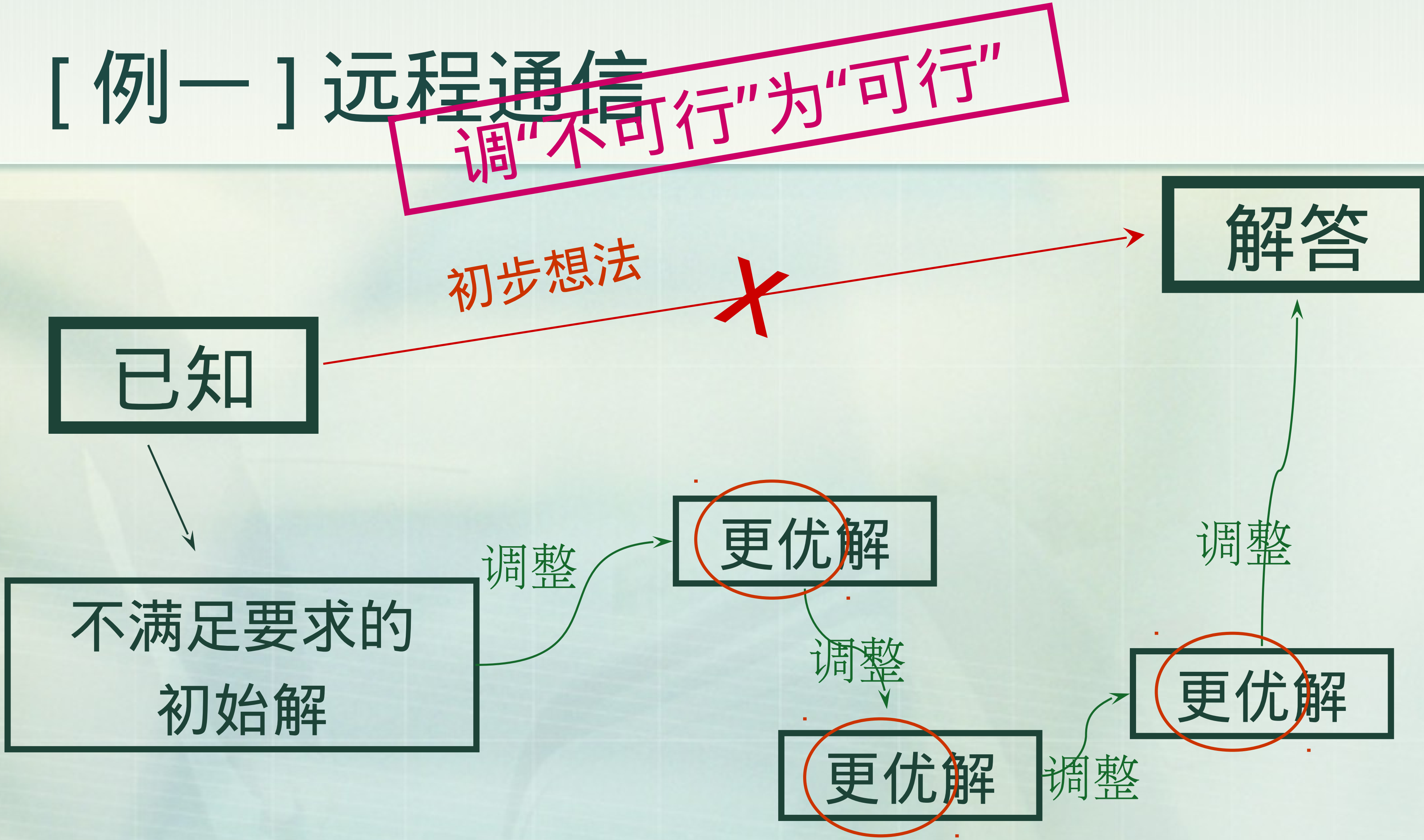
- (2) **While** B 岛上存在无用接收端口 x **Do**
- (3) 改变 x 的状态 , 设为发送模式
- (4) 设置 x 的目标端口为接收模式

[例一] 远程通信

- “ 调整”算法可行性 ：
  - 每一次”调整”操作，会把 B 岛上的一个接收端口改为发送端口
  - B 岛上最初一共有 m 个接收端口，所以调整次数不会超过 m 次
  - 算法必然会结束 ，即算法可行

- “ 调整”算法正确性 ：
  - 可采用“分类讨论”的方法很简单地证明

[例一] 远程通信



- 更优：　　B 岛上接收端口数目减少

因为问题总是出现在 B 岛的接收端口上

[例三] 零件装配（ CTSC2004 提交答案 ）

- 给定一个 *N*M* 的整数矩阵 A($N,M\le 500$)
- 同一列中的两个数可以调换
- 请求出一个经过若干次调换的矩阵
- 使得最大的行和最小

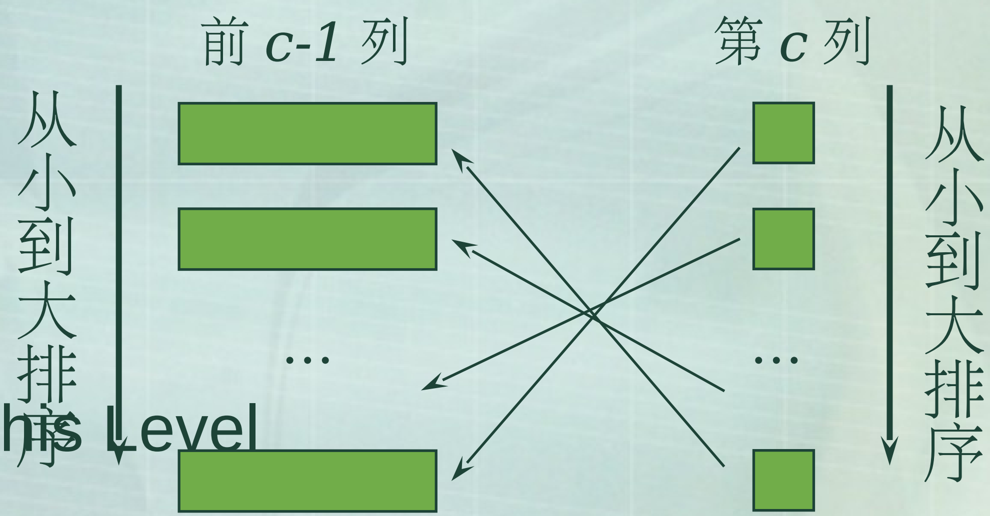
$$\left.\begin{array}{lcl}
A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}\ldots A_{1,m} & \longrightarrow & Sum_1 \\
A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}\ldots A_{2,m} & \longrightarrow & Sum_2 \\
\ldots & \longrightarrow & \ldots \\
A_{n,1}, A_{n,2}, A_{n,3}\ldots A_{n,m} & \longrightarrow & Sum_n
\end{array}\right\}\text{最大和最小}$$

可交换

[例三] 零件装配

- 常规算法:
  - 动态规划：状态是指数级别的
  - 搜索：N,M 过大，搜索不可能出解
  - 贪心算法：

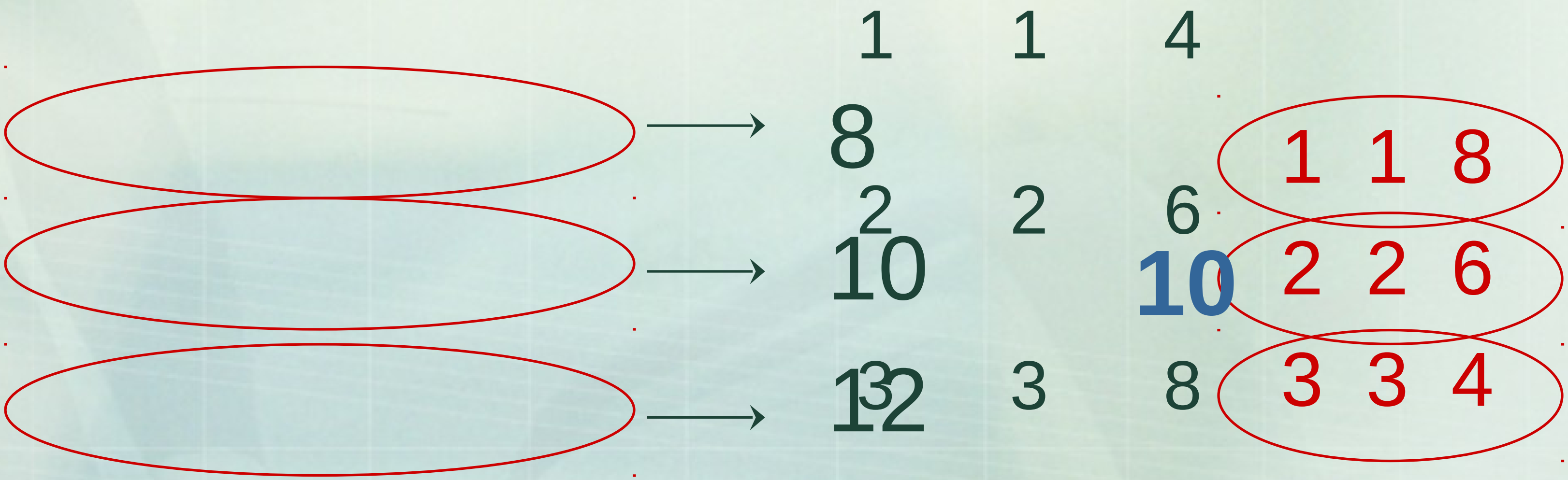
- 贪心算法：
  - 最大和最小，等价与让所有的和都尽量平均。
  - 一个直观的贪心思想： 把最大和最小凑一起
  - 依次安排每一列。
  - 当我们安排第 *c* 列时，前 *c-1* 列已经被安排好。



- Tab For this Level

[例三] 零件装配

- 然而这个贪心算法得到的解并不优。
- 请看下面例子：



局部的最优，可能导致全局的不优

[例三] 零件装配

- 调整算法：
  - $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}\ldots A_{1,m} \rightarrow Sum_1$
  - $A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}\ldots A_{2,m} \rightarrow Sum_2$
  - $\ldots \rightarrow \ldots$
  - $A_{n,1}, A_{n,2}, A_{n,3}\ldots A_{n,m} \rightarrow Sum_n$

尝试交换

Sum_1'

$Sum_1' = Sum_1 - A_{1,3} + A_{n,3}$

Sum_n'

$Sum_n' = Sum_n - A_{n,3} + A_{1,3}$

如果满足 $|Sum_1' - Sum_2'| < |Sum_1 - Sum_n|$

我们称此方案“可调整”

“极优”方案

[例三] 零件装配

- 调整算法：
  - (1) 得到一个随机的初始方案 A
  - (2) **While** 方案 A“ 可调整” **DO**
  - (3) 寻找数对进行调整操作
  - (4) 得到“极优”方案 A
- 由于不同的初始方案可能得到不同的“极优”方案，所以我们可以采用多次随机初始方案，得到若干个极优方案从中取最优的方法，效果非常好。

[例三] 零件装配

- 把最大的和最小的凑在一起
- 第二种"调整"方法

从小到大排序

$$
\begin{array}{llll}
A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}\ldots A_{1,m} \\
A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3}\ldots A_{2,m} \\
\cdots & \cdots & \cdots\quad \cdots\cdots \\
A_{n,1}, & A_{n,2}, & A_{n,3}\ldots A_{n,m}
\end{array}
$$

按照贪心思想分配

从小到大排序

基准列

每次调整，方案很可能会更优，至少不会变差

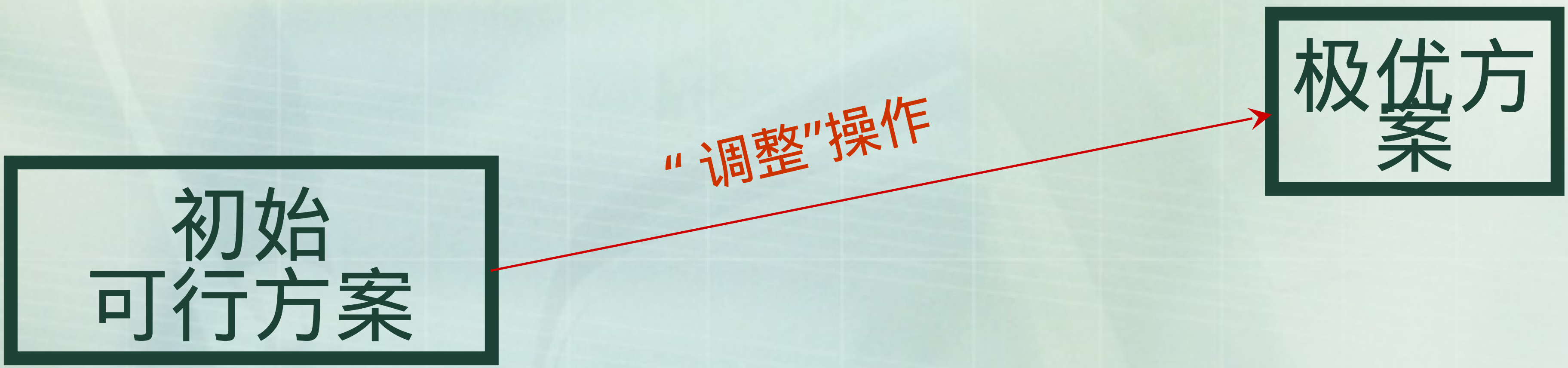
[例三] 零件装配

调"可行"为"更优"

- 局部调整

☺

- 整体调整



回顾与总结

[例一]

调“不可行”为“可行”

从无到有

一类构造性问题

[例二]《混合图欧拉回路问题》

[例三]

调“可行”为“更优”

从有到优

一类非最优化的开放性问题中

[例四]Ural 著名难题《皇帝的困惑》

「调整」思想的精髓

Thank You !

模拟退火算法简介 (1)

- 模拟退火算法来源于固体退火原理。
- 将固体加温至温度充分高，再让其徐徐冷却．
- 加温时，固体内部粒子随着温度升高变为无序状，内能增大；而徐徐冷却时粒子渐趋有序，在每个温度都达到平衡状态，最后在常温时达到基态，内能减为最小。
- 根据 Metropolis 准则，粒子在温度 T 时趋于平衡的概率为

$$e - \frac{\Delta E(\text{内能改变量})}{k(Boltzmann\text{常数}) * T}$$

模拟退火算法简介 (2)

- (1) 初始化：初始温度 T(足够大), 初始解 (S),L
- (2)For k = 1 → L Do
- (3) 产生新解 S’
- (4) 计算增量 dt’ = C(S’) – C(S)
- (5) 如果 dt’ < 0 接受新解 S’ 作为当前解
  否则以概率 exp(- dt’ / T) 接受 S’
- (6) 如果满足终止条件则终止
- (7) 温度 T 减小 (但保证 T>0), 回到第 (2) 步

$\boxed{\text{“ 调整”思想}}$

[例一] 调整算法正确性证明

- (2) While B 岛上存在无用接收端口 x Do
- (3)   改变 x 的状态，设为发送模式
- (4)   设置 x 的目标端口为接收模式

B 岛上的接收端口 √

B 岛上的发送端口 √

A 岛上的接收端口 √

A 岛上的发送端口 √

正确性

任意输入均有解

[例二] 混合图欧拉回路

- 给定一个混合图 (有的边是有向边 , 有的边是无向边)， 求其欧拉回路。
- 首先将所有无向边**任意定向**
- **调整操作 :**
  - **从一个出度大于入度的点开始，沿着被定向的无向边走到一个入度大于出度的结点。把一路上所有边均反向。**