生成树的计数及其应用

芜湖一中 周冬

引入

生成树

最小（大）生成树

最小（大）度限制生成树

最优比率生成树

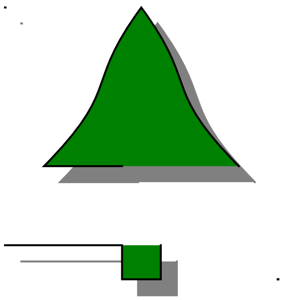
……

[例一] 高速公路

- 一个国家需要在 n 座城市之间建立通信网络。
- 某些城市之间可以铺设通信线路。
- 要求任意两座城市之间恰好有一条通讯路线，试求方案个数。
- 满足： $1 \leq n \leq 12$ 。

分析

- 首先将问题抽象成图论模型
  - 点：城市
  - 边：通讯线路
- 任意两点之间恰好只有一条路径
  - 这是一颗树！



- 问题转化为：给定一个 n 个点的无向图，其中无重边和自环，试求其生成树的个数。

分析

- 由于原题规模较小，因此我们可以使用一些复杂度较高的算法来解决它，如指数级的动态规划算法。
- 但是，如果规模更大一些呢?
- 预备知识

关联矩阵、 Kirchhoff 矩阵

图的关联矩阵

- 对于无向图 *G*，我们定义它的关联矩阵 *B* 是一个 $n*m$ 的矩阵，并且满足：
  - 如果 $e_k=(v_i, v_j)$，那么 B_{ik}和 B_{jk}一个为 1，另一个为 -1，而第 *k* 列的其他元素均为 0 。
- 图 *G* 的关联矩阵如右下角所示：

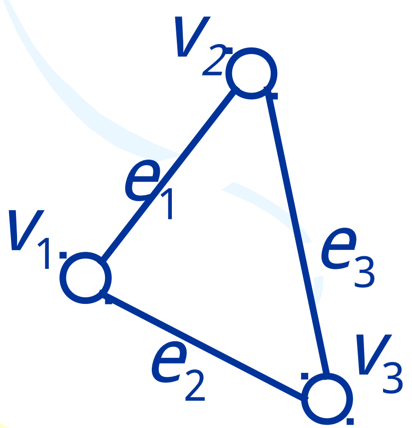


图 *G*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

图的关联矩阵

- 图的关联矩阵有什么特殊的性质呢?我们不妨来考察一下 B 和它的转置矩阵 B^T 的乘积。

图的关联矩阵

- 根据矩阵乘法的定义，我们可以得到：

$$BB^T{}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik} B^T{}_{kj} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik} B_{jk}$$

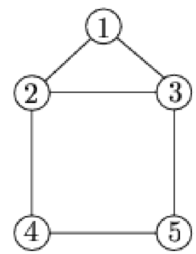
- 也就是说， $BB^T{}_{ij}$是 B 第 i 行和第 j 行的内积。
- 因此，当 $i=j$ 时， $BB^T{}_{ij}=v_i$的度数；而当 $i\neq j$ 时，如果存在边 (v_i， v_j)，那么 $BB^T{}_{ij}=-1$，否则 $BB^T{}_{ij}=0$ 。
- 我们通常将 BB^T称为图的 Kirchhoff 矩阵。

图的 Kirchhoff 矩阵

- 对于无向图 G，它的 Kirchhoff 矩阵 C 定义为它的度数矩阵 D 减去它的邻接矩阵 A。显然，这样的定义满足刚才描述的性质。
- 有了 Kirchhoff 矩阵这个工具，我们可以引入 Matrix-Tree 定理：
  - 对于一个无向图 G，它的生成树个数等于其 Kirchhoff 矩阵任何一个 n-1 阶主子式的行列式的绝对值。
  - 所谓 n-1 阶主子式，就是对于任意一个 r，将 C 的第 r 行和第 r 列同时删去后的新矩阵，用 C_r 表示。

Matrix-Tree 定理

- 让我们通过一个例子来解释一下定理。如图所示， G 是一个由 5 个点组成的无向图。

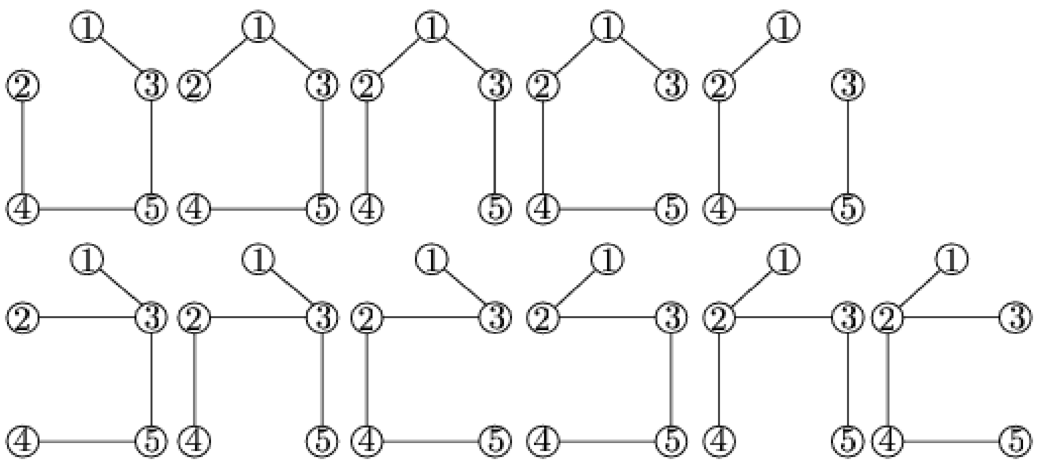


- 它的 Kirchhoff 矩阵 C 为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrix-Tree 定理

- 我们取 r=2，根据行列式的定义易知 $|\det C_2|=11$，这 11 颗生成树如下图所示。



- 这个定理看起来非常“神奇”，让我们尝试着去证明一下吧！

定理的证明

- 经过分析，我们可以发现图的 Kirchhoff 矩阵 C 具有一些有趣的性质：
  - C 的行列式总是 0 。
  - 如果图是不连通的，则 C 的任一个 n-1 阶主子式的行列式均为 0 。
  - 如果图是一颗树，那么 C 的任一个 n-1 阶主子式的行列式均为 1 。
  - 证明略。

定理的证明

- 我们知道，　$C=BB^T$，因此，我们可以把 C 的问题转化到 BB^T 上来。
- 设 B_r 为 B 去掉第 r 行得到的矩阵，容易知道 $C_r = B_r B_r^T$。这时，根据 Binet-Cauchy 公式，我们可以将 C_r 的行列式展开。

$$\det(C_r)=\det\left(B_r B_r^T\right)=\sum_{\substack{x\subset\{1,2,\cdots,m\}\\|x|=n-1}}\det\left(B_r^x\right)\det\left(B_r^{x^T}\right)=\sum_{\substack{x\subset\{1,2,\cdots,m\}\\|x|=n-1}}\det\left(B_r^x B_r^{x^T}\right)=\sum_{\substack{x\subset\{1,2,\cdots,m\}\\|x|=n-1}}\left(\det\left(B_r^x\right)\right)^2$$

- 其中，B_r^x 是把 B_r 中属于 x 的列抽出后形成的新矩阵。

定理的证明

$$\det(C_r)=\det\left(B_rB_r^T\right)=\sum_{\substack{x\subset\{1,2,\cdots,m\}\\|x|=n-1}}\det\left(B_r^x\right)\det\left(B_r^{x^T}\right)=\sum_{\substack{x\subset\{1,2,\cdots,m\}\\|x|=n-1}}\det\left(B_r^xB_r^{x^T}\right)=\sum_{\substack{x\subset\{1,2,\cdots,m\}\\|x|=n-1}}\left(\det\left(B_r^x\right)\right)^2$$

- 注意观察上面的式子，$B_r^xB_r^{x^T}$ 实际上是图 G_x 的 Kirchhoff 矩阵的 *n*-1 阶主子式。其中 G_x 是由所有的顶点和属于 *x* 的边组成的 *G* 的子图。
- 若底 *x* 的 *n*-1 条边形成了一棵树，由矩阵树的性质可知 $\det\left(B_r^xB_r^{x^T}\right)$ 等于 1。
- 若底 *x* 的 *n*-1 条边没有形成树，则 G_x 中必定有两个连通块，这时 $\det\left(B_r^xB_r^{x^T}\right)$ 等于 0。
- 因此，我们认为：每次从边集中选出 *n*-1 条边，若它们形成了生成树，则答案加 1，否则不变。

定理的理解

- 当 x 取遍边集所有大小为 n-1 的子集后，我们就可以得到原图生成树的个数。这样我们成功证明了定理！
- 刚才的证明过程看起来有些“深奥”，下面就让我们从直观上来理解一下这个定理的原理。

定理的理解

- 试求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

所有非负整数解的个数。

- 这是大家都很熟悉的一道组合计数问题。
- 通常的解法是，设有 2 个 1 和两个△，我们将这 4 个元素任意排列，那么不同的排列的个数就等于原方程解的个数，即 C_4^2 。
- 为什么要这样做呢?

定理的理解

- 我们将所有 6 种排列列出后发现，一种排列就对应了原方程的一个解：
  - △△11 对应 $x_1=0$， $x_2=0$， $x_3=2$
  - △1△1 对应 $x_1=0$， $x_2=1$， $x_3=1$
  - △11△ 对应 $x_1=0$， $x_2=2$， $x_3=0$
  - ……
- 也就是说，我们通过模型的转化，找出了原问题和新问题之间的对应关系，并利用有关的数学知识解决了转化后的新问题，也就同时解决了原问题。
- 这种转化的重要意义在于：在不同问题之间的架起了互相联系的桥梁。

定理的理解

- 回到我们讨论的 Matrix-Tree 定理上来。
- 我们同样是经过模型的转化后（将图模型转化为矩阵模型），发现 Binet-Cauchy 公式展开式中的每一项对应着边集一个大小为 n-1 的子集。其中，值为 1 的项对应一颗生成树，而没有对应生成树的项值为 0 。这样，将问题转化为求展开式中所有项之和。再利用已有的数学知识，就可以成功解决这个问题。

两个问题的对比

类似

方程的解 ⟺ 图的生成树

对应 ⇕ 　　　　　⇕ 对应

类似

排列方案 ⟺ 展开式的项

不同之处在于:

相互之间的对应关系更加隐蔽、复杂

需要更加强大的数学理论来支撑

定理的扩展

- 利用该定理，我们可以容易得到著名的 Cayley 公式：完全图 K_n 有 n^{n-2} 颗生成树。
- 我们刚才只对图中没有重边的情况进行了分析。实际上，图中有重边时该定理仍然成立，并且证明与没有重边的情况类似。
- 该定理也可以扩展到有向图上，用来计算有向图的外向树的个数。

信息学竞赛中的应用

- [例二] UVa p10766 Organising the Organisation
- [例三] 国王的烦恼

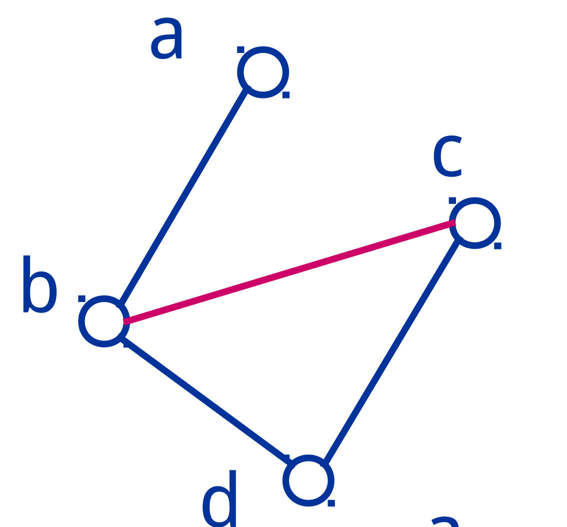
[例三] 国王的烦恼

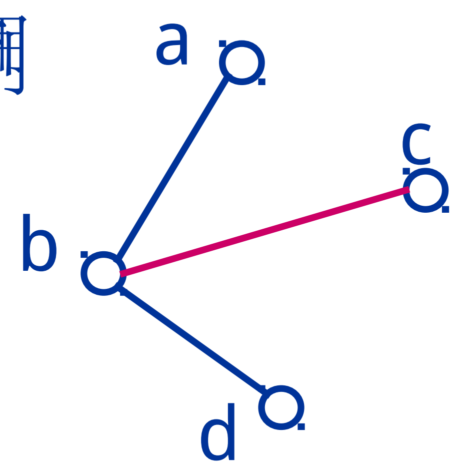
- 一个王国由 n 座城市组成。
- 由于遭到了洪水的袭击，许多道路都被冲毁了。
- 国王组织了专家进行研究，列举出了所有可以正常通行的道路。其中有的已经被冲毁，需要重新修复；有的则可以继续使用。并且所有可以继续使用的道路没有形成环。

[例三] 国王的烦恼

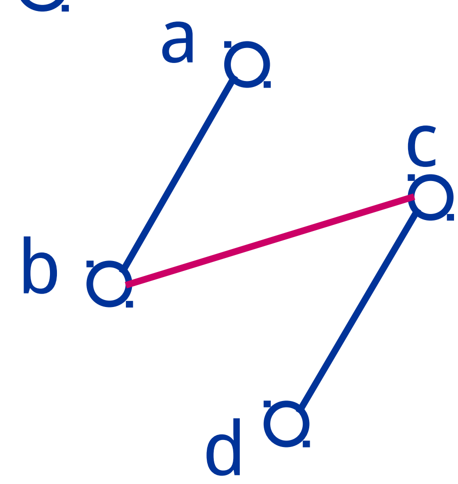
- 如右图所示，王国由a、b、c、d 4座城市组成。
- 其中
  - 蓝色边表示可以通行但需要修复的道路
  - 红色边表示可以继续使用的道路

- 国王希望修建最少的道路，使得任意两个城市之间都能互达。
- 请你计算可行方案的总数。
- 下面我们通过一个例子来看一下。
- 共有 2 种方案，如右下角所示





方案 1



方案 2

问题分析

- 难点在于
  - 由于必选边的存在，我们无法直接应用 Matrix-Tree 定理
- 我们知道，如果要求生成树中必须包含某条边 *e*，那么，我们可以将 *e* 压缩，将原图的问题转化到新图上来。
- 因此，我们需要

  1 、将所有的必选边压缩

  2 、求压缩后的图的生成树的个数

问题分析

- 压缩一条边的时间复杂度为 $O(n)$，而最多只要压缩 n-1 条边。因此，第一步的复杂度为 $O(n^2)$。
- 计算一个图的生成树的个数的时间复杂度依赖于求其 Kirchhoff 矩阵行列式的时间复杂度，为 $O(n^3)$。
- 因此，整个算法的时间复杂度为 $O(n^3)$。

总结

矩阵的行列式

模型转化

数学证明

图的生成树

扎实的数学功底是解决问题的保证

创造性的联想则是解决问题的灵魂