# 计算几何中的二分思想

——贵阳市第一中学 程芃祺

## 【摘要】

本文简要阐述了计算几何中的二分思想，并通过例题对其进行应用，体现二分在计算几何中简洁高效的优势。

## 【关键字】

计算几何　二分

## 【引言】

二分思想，古已有之，邵子曰："一分为二，二分为四，四分为八也。"正是根据这样的思想，我们的祖先创造了太极八卦。在当今的信息时代中，这一古老的智慧依旧闪耀着光芒，通过渗透到各门新兴学科中发扬光大，计算几何学就是其中之一。在此基础上，产生了无数经典算法，例如用分治法求解最近点对、凸包、三角剖分和空间分区二叉树。

在近年来的各类信息学竞赛中，不断涌现了大批关于计算几何的试题，其中许多复杂的题目可以利用二分思想得到简单解决。掌握了这一思想，无疑是多了一把解决相关问题的利器。

## 【例题解析】

下面，就让我们通过几个例题，一起探究二分思想的应用。

例题一、Simplified GSM Network ( 2005 ACM/ICPC World Finals )

题意：

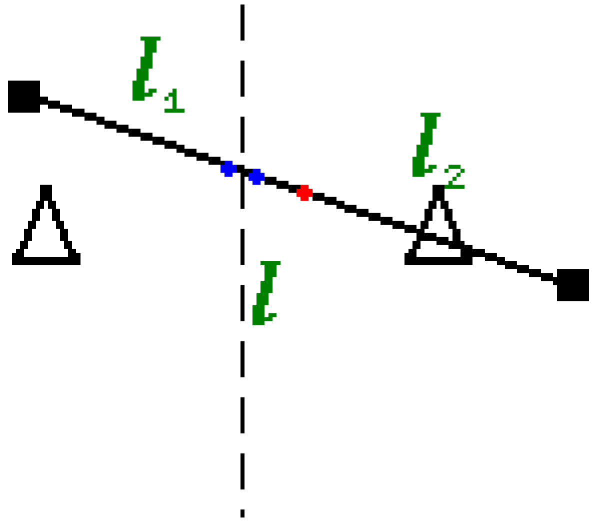
已知 $B$（$1 \le B \le 50$）个信号站和 $C$（$1 \le C \le 50$）座城市的坐标，坐标的绝对值不大于 1000，每个城市使用最近的信号站。给定 $R$（$1 \le R \le 250$）条连接城市线路的描述和 $Q$（$1 \le Q \le 10$）个查询，求相应两城市间通信时最少需要转换信号站的次数。

分析：

显然，题目要求的是最短路，关键在于线路权值的计算。题目中告诉我们：每个城市使用最近的信号站，也就是说，该城市所处位置位于平面中离这一信

号站最近的点的轨迹内，而离各点最近点的轨迹就是 Voronoi 图。因此，每条路线的权值就是这条线段所穿过的 Voronoi 边的数量。由上可看出，题目即为求 Voronoi 图与最短路的简单组合，只需分别解决。

通过以上的分析，我们发现了一种最直接的办法：先求 Voronoi 图，再求最短路。此法时间效率也足以通过测试，可是求 Voronoi 图的编程复杂度很高，调试麻烦，在真实的竞赛环境中实用性不强。有没有更好一点的解法呢？考虑一条线段 $l$，如果 $l$ 两端点所属的信号站相同，显然 $l$ 的权值为零，否则将 $l$ 从中点（红点）分为两部分（分割点不在 Voronoi 边上）$l_1$ 和 $l_2$，$l$ 所对应的权值自然就等于 $l_1$ 和 $l_2$ 的权值之和。




然后，对 $l_1$ 和 $l_2$ 进行同样的操作。由于不可能无限的分割下去，当两端点的距离小于某个设定的小正常数 $\varepsilon$（实验证明 $\varepsilon \in [10^{-10},10^{-5}]$ 均能 AC），并且与两端点所属信号站不同（蓝点），两点之间就一定存在一条 Voronoi 边与线段相交，该段权值为一。

利用上述办法，可以在不作 Voronoi 图的情况下，简单地求出各边的权值，避免了冗长的代码；之后使用 Floyd 或 Dijkstra 等最短路算法，问题即可完整解决。

小结：

计算几何有许多诸如 Voronoi 图的经典模型，在方便思考的同时，也会让我们陷入固有的思维定势，难以自拔。当原有的模型不能方便地解决问题时，就需要另辟蹊径，跳出传统思维来考虑问题。

在本例中，通过二分思想，将一条线段分为两半，利用分治法解出问题，使题目化繁为简，易于编程，避开了求作 Voronoi 图的套路。

例题二、Collecting Luggage ( 2007 ACM/ICPC World Finals )

题意：

已知一简单 $N$（$3 \le N \le 100$）边形的各顶点坐标，行李箱从第一个顶点以速度 $V_l$ 沿多边形边界移动，人从点（$p_x$，$p_y$）出发，速度为 $V_p$（$0<V_l<V_p \le 10000$，单位为米每分），所有坐标均为绝对值不大于 10000 的整数（单位为米），求

人最快取得行李的时间（精确到秒）。

分析：

乍一看，题目似乎与最短路有密切的联系，然而目标点随时间在改变，可以在多边形边界上的任何一点，所求是一个动态过程。要计算到达一个顶点所需的时间，是个很简单的问题，但是怎样抵达最后的目的地呢？这正是题目的难点所在。

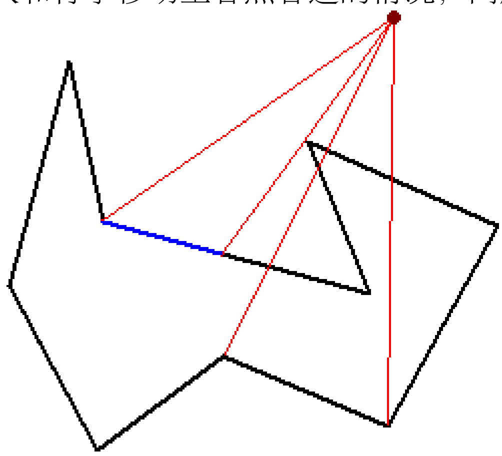
首先，考虑简单情形：人站在原始位置，行李在一条直线上移动，初始时位于（$x_0$，$y_0$）处，以速度 $\boldsymbol{V}_l=$（$a$，$b$）移动。人在 $t$ 时刻取得行李，此时行李坐标为（$at+x_0$，$bt+y_0$），可得如下关系：

$$\sqrt{[x-(at+x_0)]^2+[y-(bt+y_0)]^2}=V_p t$$

$$t=\frac{\left\{a(x-x_0)+b(y-y_0)\pm\sqrt{[a(x-x_0)+b(y-y_0)]^2+(V_p^2-V_l^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}\right\}}{(V_l^2-V_p^2)}$$

利用以上公式，可以求出任意一组点到直线的动态最短距离，对于题目中的线段，只需附加目的点在线段上这一条件就能求解。

得到了距离公式，问题似乎已经大部分被解决，可是当我们把它搬到多边形中时，却发现问题并不是我们想象中的那么简单：如图所示，点不一定能够沿直线到达边，也不一定就能沿直线到达可达边的全部。这样一来，还必须求出可达范围，并且枚举人和行李移动至各点各边的情况，问题的复杂性大大增加。

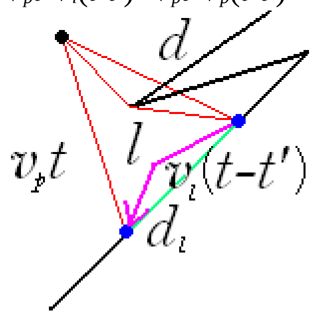


怎样才能简化复杂的过程？其实，关键之处在于“化动为静”，把题目中的动态过程转化为静态。假设人“暂停”，行李先经过 $t$ 时间运动到一点，如果行李静止在边上，只需再建立一个顶点，把边拆成两段，则可以很轻松地求出最短距离，人再花 $t$ 时间行走，看能否取得行李，即比较求得的距离与人行距离的大小。

这样的做法，可以知道人是否可以在规定时间内完成动作，但一秒一秒枚举是不可能的，时间效率太低。是否可以二分判断？这就必须满足单调性：若在 $t$ 时间内刚好可以（从一个可达顶点）到达，则少于 $t$ 时间无法到达，多于 $t$ 时间一定能到达。

先证明少于 $t$ 时间无法到达，设 $t'<t$，$d_l$ 为两时刻行李之间直线距离，$l$ 为到达 $t'$ 时刻行李所在位置的最短路径，$d$ 为其直线距离，$d_l$ 为行李在 $t'$ 和 $t$ 时刻之间

的直线距离。由三角形两边之差小于第三边，有关系：$d>V_p t-d_l$，又由 $V_l<V_p$ 与 $d_l<V_l(t-t')$ 可得到：$l\geq d>V_p t-d_l>V_p t-V_l(t-t')>V_p t-V_p(t-t')=V_p t'$，即用时 $t'$ 无法到达。




对于多于 $t$ 时间一定能到达的证明类似，同样利用三角形的三边关系就能得出结论，这里就不再赘述。

回到原题，完成题目首先需要建立可视图并求出从起点到各顶点的最短路。因为单调性成立，只需要二分时间 $t$，求出时间 $t$ 后行李的位置再建立新顶点，求到各顶点的最短路，经过比较找出临界点。一个很好的界是：从到达多边形边界的最小时间到最大时间，该界确保了能够覆盖多边形的全部范围，但是最值点不一定是顶点，而计算点边距离比较麻烦；还有一个方便计算的界：从零到走过最近顶点距离与半周长之和所用时间，经实测效果较好。

完成了算法的主体部分，还应注意一个非常重要的细节：如果正好需要用时 $N$+0.5 秒（其中 $N$ 为自然数），“四舍”和“五入”将使上下界对应的秒数永远不同，程序会陷入死循环！尽管在实际评测的数据中为了简单，没有设计针对性数据，但从算法的严谨性考虑，必须重视这一问题。为了避免这种情况的发生可以在上下界之差小于某个小正数时停止二分，以上界的“五入”为准。

至此，算法全部完成。

小结：

求解动态问题，往往是计算几何中的难点，凡是该类型的题目，在编程时需要仔细考虑各种情况，像变量的取值范围，边界的取舍情况，避免复杂计算扩大浮点误差等都值得认真思考。

本题用传统方法，也可以顺利解答，但计算费力，过程复杂；运用二分法以及题目所蕴含的单调性质，使题目化动为静，有效地简化了思维复杂度和编程复杂度。

例题三、Heliport ( 2004 ACM/ICPC World Finals )

题意：

已知一个只由水平边和垂直边构成的（简单）$N$（$1\leq N\leq 20$）边形屋顶，每边长为不超过 50 的正整数，要在上面修建一个圆形直升机场，求可能的最大半径。

分析：

题目的意思描述得比较清楚，就是求在一个只有水平边和垂直边的简单多边形 $P$ 内的最大内切圆。设水平线段 $i$ 纵坐标为 $h_i$，两端横坐标为 $l_i$，$r_i$（$l_j<r_j$），垂直线段 $j$ 横坐标为 $v_j$，两端纵坐标为 $d_j$，$u_j$（$d_j<u_j$），其数学模

型为：

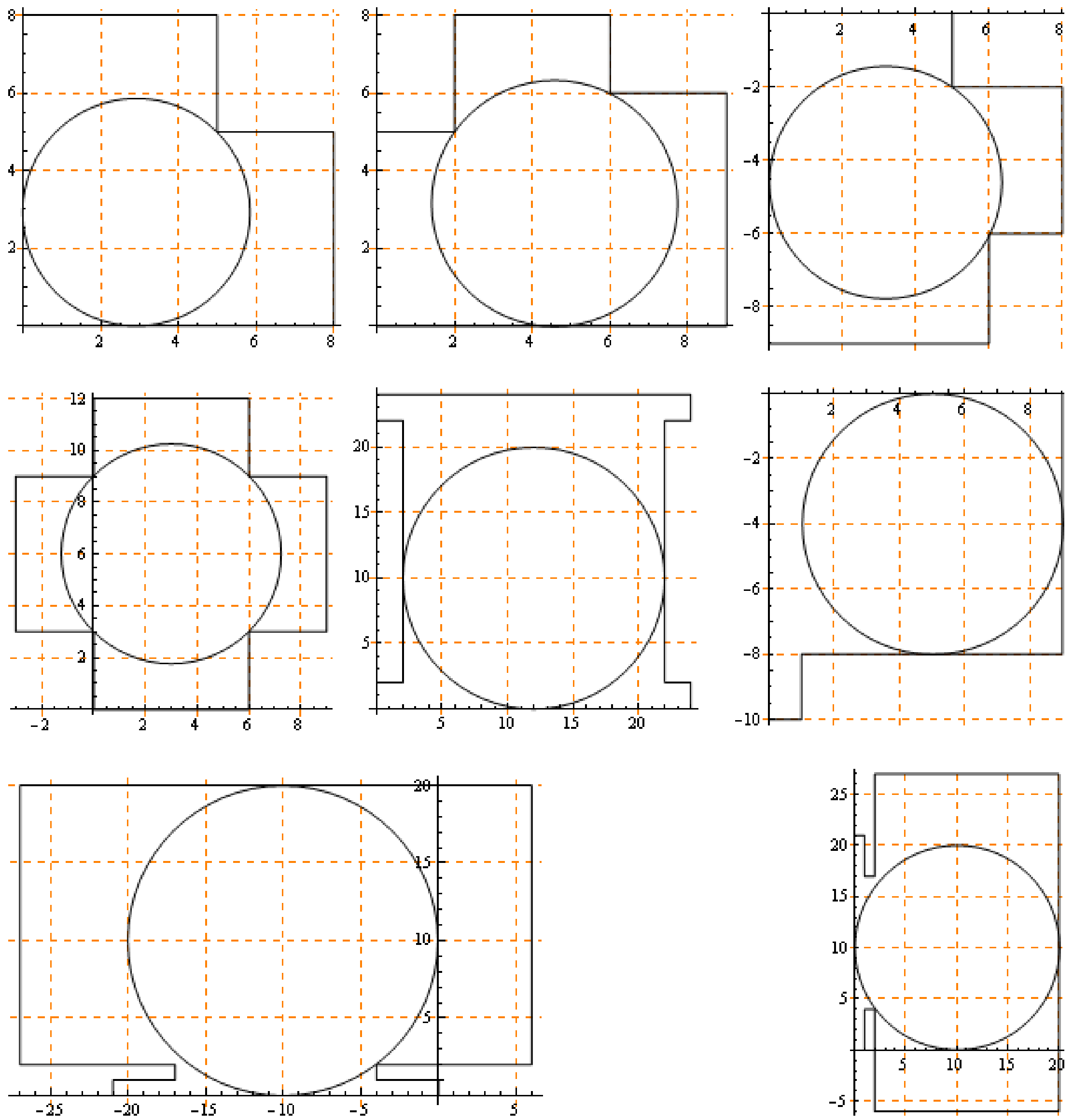
最大化　　$r$

约束条件　$\begin{cases} r^2 \le (x-x_i)^2+(y-y_i)^2, \forall i \\ x\in[l_j,r_j] \to r^2 \le (y-h_j)^2, \forall j \\ y\in[d_k,u_k] \to r^2 \le (x-v_k)^2, \forall k \\ x,y\in R,(x,y)\in P \end{cases}$

这是一个二次规划问题，通过使其中的三个等式成立，在满足其它条件的情况下，可以得到一个解，最优解必然是其中之一。

通过上式，已经将一个几何问题成功地代数化，由于题目中的 $N$ 很小，不需要套用复杂的二次规划专用算法，只需要通过枚举，令其中的三个等式成立再验证其它关系。题目中的式子有三类：到点的距离（记作 P），到水平边的距离（记作 H），到垂直边的距离（记作 V），成立三个等式共有以下十种情况：PPP、PPH、PPV、PHH、PVV、PHV、HHV、HVV、HHH、VVV。

分别考虑各种情况：首先，HHH 和 VVV 是不可能的，三条平行线不能决定一个圆。而对于剩下的 PPP、PPH、PPV、PHV、HHV、HVV、PHH、PVV 八种情况则不可忽略，见以下各图：



通过对各种情况分别列式，可以解得圆心坐标，题目似乎也已彻底解决。不过在实际操作中，不难发现方程计算非常复杂，还有分母为零或出现复数根的可能。即使用软件求解，在编程时也很有可能因输入不细心或考虑不周而出错，从而带来调试上的麻烦，也增加了通过测试的难度，因此我们最好换一种思路以减少计算量。

刚才已经看到，八种情况已经是最优了，难道就没有办法继续化简了吗？首先考虑确定有限个圆的条件：三个距离相等且等于半径，每个距离分别对应一个边界点或一条切线；如果已知半径，就只另需使两个距离等于半径，减少一个距离公式也可以确定圆。

以上八种情况，分别是：PPP、PPH、PPV、PHV、HHV、HVV、PHH、PVV，对于每种情况，替换一个距离为半径，则可减少为四种：PP、PH、PV、HV，这样一来，计算量大为减少，方程求解简单了许多，也降低了发生错误的几率。

可是，题目所求的正是半径，半径是未知量，不可能把它当作已知数进行列式！正当我们一筹莫展的时候，二分思想无疑又告诉了我们解决此题的诀窍：将 $r$ 二分！

题目的单调性显而易见：从几何上讲，最优解在原来位置缩小仍合法，扩

大则会超越边界；从代数上讲，关于半径约束条件全部同向，都是小于或等于。

在二分 $r$ 以后，通过与四种情况列式，判断解的合法性，据此不断调整直到满足精度要求，便可得出答案。

小结：

从字面理解，“计算几何”显然离不开“计算”，尽管许多问题看起来难度不大，可是计算却相当复杂，如不注重细节，则很可能发生许多意想不到的小错误，使答案“差之毫厘，失之千里”。通过二分思想，在一些情况下可以大幅度简化计算，降低思维复杂度和编程复杂度。

这道题目就属于“易而繁”的类型，算法本身并不困难，而计算和编程十分繁琐。对于本题而言，二“分”不仅没有破坏其结构，反而起到了化零为整的作用，将零散的情形加以集中，从而优化了算法。

例题四、Flight Safety ( 2007 ACM/ICPC NWERC )

题意：

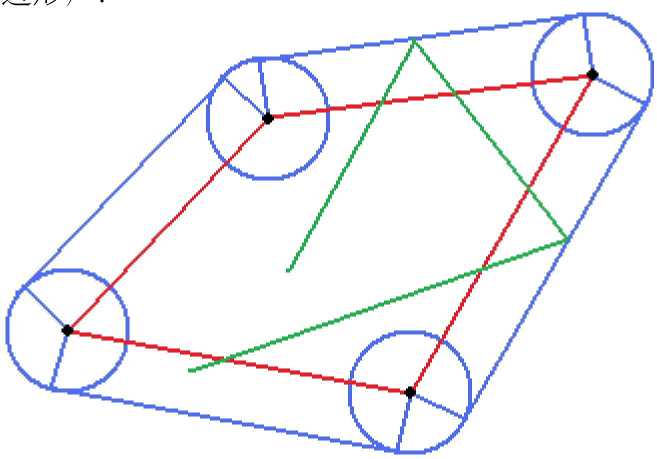
有 $C$（$1 \le C \le 20$）块互不相交、由简单多边形构成的大陆，边数为 $M$（$3 \le M \le 30$），航线是由 $N$（$2 \le N \le 20$）条线段构成的折线段，求航线上的点离大陆的最近距离的最大值。

分析：

本题是一个几何距离问题，由于航线是有多条线段构成的，可以分别考虑各线段，题目即化归为线段与多个多边形的距离的最大值。

求线段与多个多边形的距离，如果直接解，会比较麻烦。因为两个或更多的多边形相互作用，使得最值点不一定是线段的端点或多边形顶点在线段上的投影；要求最值，需要考虑多边形的相互关系，是一个困难的问题。

为了找到一个解，假设已知这个解，怎样来判断它的合法性与最优性呢？如果解合法，则航线上的所有点与各多边形的距离一定小于或等于该解，换一个角度考虑，这也就等价于所有的点在向外“扩张”了这么多距离的多边形内。“扩张”过的多边形是什么样呢？对于顶点，会向外变成一个圆，而边就向外部扩张成了一个相应宽度的矩形，如图所示（绿色表示航线，红色为原多边形，蓝色为扩张后的多边形）：



图中的航线顶点在扩张后的多边形的边界上，正好是最优解；如果航线的

一部分在外部，则解不合法；如果航线没有触碰边界，则解非最优。

判断内外的关系，可以求出航线各段与每一大陆各边或圆的交点，沿它们切割开，则每一段或全在某个图形内，或全在某个图形外，该段的内外等价于中点的内外：只要中点在各圆或各矩形或原多边形内，则该段在图形内；否则在图形外，解不合法。

显然距离越远，扩张就越大，因此题目满足单调性。要想找到最优解，二分又帮了我们一把：有外点则增加答案，否则减小答案，直到上下界足够接近，输出结果。

小结：

像本题一类几何图元较多且相互关系十分复杂的题目，是计算几何中经常碰到的，直接求解会很困难，编码和调试也会遇到很多麻烦。二分思想可以破除各种不必要的制约，只提取其中关键的部分，使题目大为简化。

本题的各多边形相互制约，难以找到极值，二分法避开了这个困难之处，把最优化问题转化成判定性问题，化求为证，使编程轻松、算法简易，让问题得以顺利解决。

## 【总结】

计算几何学博大精深，相关的题目可谓是千变万化，解法也无定势可言，一些经典问题稍加修改之后，用传统方式解题可能就毫无优势可言。这要求我们必须跳出思维定势，采用全新的思想，二分思想就是其中不可或缺的一员。

通过对以上几个例题的分析，我们对二分思想在计算几何中的应用又有了新的认识。具备了这一思想，可以使题目化繁为简、化动为静、化零为整、化求为证，用简单方法解答题目，减省了纷繁的细节处理和约束关系，简洁高效地得到令人满意的结果。可以说，二分带给我们一种全新的思路，是成功解决计算几何问题的一把利器。

## 【感谢】

感谢刘汝佳老师提供本文的例三和例四！
感谢各位老师、同学对本文提出的各种意见和建议！

## 【参考文献】

[1] 刘汝佳，黄亮．算法艺术与信息学竞赛．北京：清华大学出版社，2004．1．

[2]周培德．计算几何：算法设计与分析（第 2 版）．北京：清华大学出版社，2005．4．

[3]Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, Otfried Schwarzkopf. Computational Geometry: Algorithms and Applications (2nd Edition). Springer,

2000.

## 【附录】

例一原题:
http://acmicpc-live-archive.uva.es/nuevoportal/data/problem.php?p=3270
例二原题:
http://acmicpc-live-archive.uva.es/nuevoportal/data/problem.php?p=2397
例三原题:
http://acmicpc-live-archive.uva.es/nuevoportal/data/problem.php?p=2994
例四原题、数据及解答:
http://2007.nwerc.eu/problems/nwerc07-problemset.pdf : Problem F
http://2007.nwerc.eu/problems/nwerc07-contest-testdata.zip
http://2007.nwerc.eu/problems/nwerc07-solutions.zip