解析一类组合游戏

四川省绵阳南山中学 王晓珂

国际象棋，中国象棋，围棋

各类取石子游戏

Alice &Bob 的各种消遣游戏

1)2 人游戏

2) 没有平局

3)2 人的待遇相同

判断是否存在必胜策略

存在时寻找必胜策略

尽量小的时空花费

怎样分析组合游戏？

归纳

分解游戏

转化

归纳 的对象

必败状态的特征

SG 函数值

分解游戏：

游戏的和：

将一个完整的游戏看作若干子游戏的和

两名参与者轮流操作若干子游戏，每次操作可以选择任意一个子游戏进行操作，最后操作者胜利。

这样的游戏称为其子游戏的和！

分析子游戏

利用分析子游戏的结论分析原来的游戏

Sprague-Grundy 函数

它是定义在组合游戏状态上的函数

请注意g（x）= 0当且仅当x为必败状态

用g（x）表示x状态的函数值。

游戏状态的SG值 必胜状态、策略

它的定义如下：

g（x）=min{n| n∈N ,n≠ for y∈F(x) }

Sprague-Grundy 定理

$$g(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = g_1(x_1) \text{ xor } g_2(x_2) \ldots\ldots g_n(x_n)$$

例题 1

n i m游戏

两人轮流从若干石堆中取走石子，每次可以取走任意一堆中任意数目的石子，但必须取走至少一枚，取走最后一枚石子的人胜利。

先取的人是否存在必胜策略？
如果存在，怎样保证必胜？

一堆石子的游戏：

多堆石子的游戏：

g(x1,x2 ，……，xn)=g(x1) xor g(x2 ）xor ……g(xn)

（第 i （1<=i<=n）堆石子的个数是 x i）

SG值：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 …

状态： 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 …

转化游戏

等价转化

不等价转化

例题 1 ：

ACM ICPC 2006 Asia Regional Contest,Beijing
A Funny Stone Game

David 玩一个石子游戏。游戏中，有 n 堆石子，被编号为 0..n-1 。两名玩家轮流取石子。每一轮游戏，每名玩家选取 3 堆石子 i,j,k(i<j,j<=k, 且至少有一枚石子在第 i 堆石子中），从 i 中取出一枚石子，并向 j ，k 中各放入一枚石子（如果 j=k 则向 k 中放入 2 颗石子）。最先不能取石子的人输。

石堆**1**：

石堆**2**：

石堆**3**：

新操作：

拿走一个非 0 的石堆，并放入 2 个规模小于他的石堆 (可以为 0)

游戏可以分解！

例题三

IPSC 2003 Got Root?

Alice&Bob 在一个无向图上玩伐木游戏，**无向图有唯一的根**。两人轮流从图中截取一条边，将与根部相连的部分抛弃。

这样，最先不能操作的人输。

对于给出的无向图，Alice 先行，两人都按最优策略操作，输出胜者的名字。

转化成链？

图转化成树 → 树转化成链 → 求出 SG 值

Nim!

树转化成链

简单情况：

状态只有根节点一个分叉

猜想： Nim!

从末端开始进行这样的操作，将分叉的地方合并成一条链，长度为每条链的异或结果，SG 值不变。

图转化成树

猜想：

将环上的点缩为一点，所有的边都保留，如果他的端点缩去了，那么将它的端点替换为缩成的点，SG值不变。

self-loop与一条长为1的链是等价的

总结：

以上三种方法只作启发之用，实际应用之中，我们还不仅要掌握已知的方法，还要将其灵活地结合起来运用。

解决组合游戏并不困难，重要的是拓宽知识，多做总结，灵活运用、扩展已知方法。

谢谢