维基百科,自由的百科全书 (重定向自广义五边形数)



本条目**部分链接不符合格式手册规范**。 跨语言链接及章节标题等处的链接可能需要清理。 (2015年12月11日)

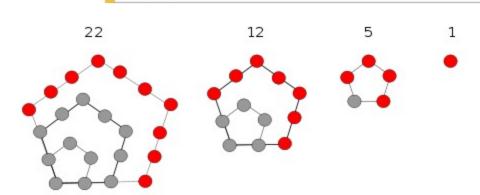


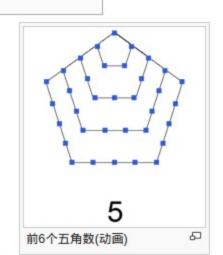
请协助改善此条目。 参见WP:LINKSTYLE 、 WP:MOSIW以了解细节。 突出显示跨语言链接可以便于检查。



本条目**需要扩充。** (2013年2月14日)

请协助改善这篇条目 ,更进一步的信息可能会在讨论页或扩充请求中找到。 请在扩充条目后将此模板移除。





**五边形数**是能排成五边形的多边形数。 其概念类似三角形数及平方数 ,不过五边形数和三角形数及平方数不同,所对应的形状没有旋转 对称 (Rotational symmetry)的特性。

第 n 个五边形数可用以下公式求得

$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

 $\mathbb{E} n > 0$ .

首几个五边形数为1,5,12,22,35,51,70,92,117...(OEIS:A000326),其奇偶排列是「奇奇偶偶」。

第 n 个五边形数是第 3n-1 个三角形数的  $\frac{1}{3}$  。 首 n 个五边形数的算术平均数是第 n 个三角形数。

#### 目录 [隐藏]

- 1 五边形数测试
- 2 用五边形数的和来表示整数
- 3 广义五边形数
- 4 广义五边形数和中心六边形数
- 5 参见
- 6 参考资料
- 7 外部连结

### 五边形数测试 [编辑]

利用以下的公式可以测试一个正整数x是否是五边形数(此处不考虑广义五边形数):

$$n = \frac{\sqrt{24x + 1} + 1}{6}.$$

- 若n是自然数 ,则x是五边形数 ,而且恰为第n个五边形数。
- 若n不是自然数 ,则x不是五边形数。

# 用五边形数的和来表示整数 [編輯]

依照费马多边形数定理 ,任何整数都可以表示为不超过5个五边形数的和。 但大多数的整数都可以表示不超过3个五边形数的和 $^{[1]}$  。 在小于 10 $^6$  的整数中,只有以下6个整 数需用5个五边形数的和来表示:

9, 21, 31, 43, 55, 89 (OEIS:A133929)

而以下210个整数需用4个五边形数的和来表示:

4, 8, 9, 16, 19, 20, ..., 20250, 33066 (OEIS:A003679)

## 广义五边形数 [编辑]

广义五边形数的公式和五边形数相同, 只是n可以为负数和零, n 依序为0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4..., 广义五边形数也可以用下式表示:

$$p_n = \frac{3n^2 \pm n}{2}$$

n 依序为0, 1, 2, 3, 4...,

其产生的数列如下:

0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, 117, 126, 145, 155, 176, 187, 210, 222, 247, 260, 287, 301, 330, 345, 376, 392, 425, 442, 477, 495, 532, 551, 590, 610, 651, 672, 715, 737, 782, 805, 852, 876, 925, 950, 1001, 1027, 1080, 1107, 1162, 1190, 1247, 1276, 1335... (OEIS:A001318)

在欧拉的整数分拆理论中,五边形数定理说明广义五边形数和整数分拆的关系。

用第n个五边形数 (n>2)排列组成的正五边形,外围点的个数有 5(n-1) 个,因此在内部的点个数为:

$$\frac{3n^2 - n}{2} - 5(n - 1) = \frac{3n^2 - 11n + 10}{2} = \frac{(3n - 5)(n - 2)}{2} = \frac{3(n - 2)^2 + (n - 2)}{2}$$

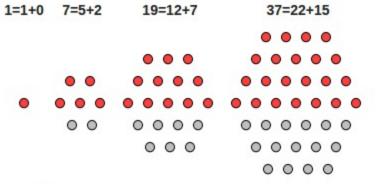
刚好也是一个广义五边形数。

所有的整数都可以表示成不超过3个广义五边形数的和[1]。

若三角形数可以被3整除,则除以3之后的数必为广义五边形数[2]。

### 广义五边形数和中心六边形数 [編輯]

广义五边形数和中心六边形数有密切的关系。 将中心六边形数以阵列的方式排出,并且从中间将正六边形分为二个梯形,较大的梯形可以表示为五边形数,而较小的梯形可 以表示为广义五边形数,因此中心六边形数可以表示为二个广义五边形数的和(五边形数也是广义五边形数的一种):



一般来言:

$$3n(n-1) + 1 = \frac{1}{2}n(3n-1) + \frac{1}{2}(1-n)[3(1-n) - 1]$$

等式右侧为二个广义五边形数,且第一项是五边形数 $(n \ge 1)$ 。