浅析平面 Voronoi 图的构造及应用

新疆乌鲁木齐市第一中学　王栋

引言：

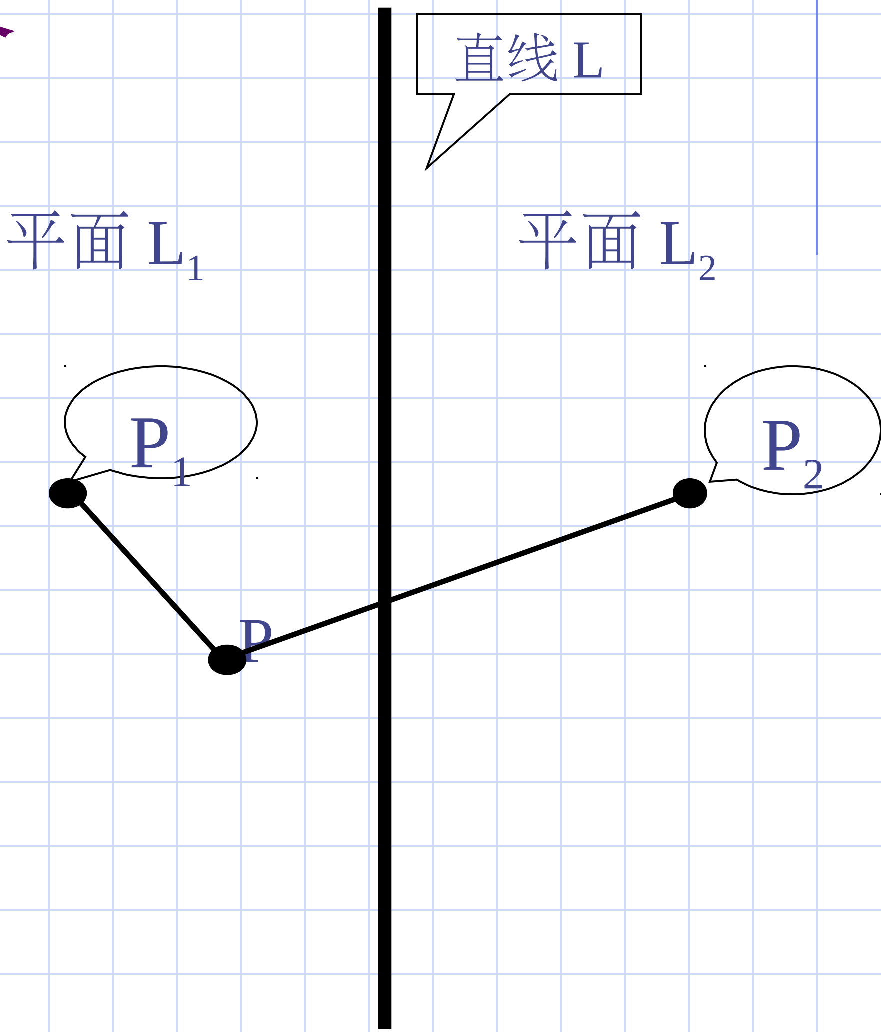
在计算几何这一领域中， Voronoi 图是仅次于凸壳的一个重要的几何结构。这是由于 Voronoi 图在求解点集或其他几何对象与距离有关的问题时起重要作用。

常见的问题包括谁离谁最近，谁离谁最远，等等。

现在，让我们大家首先来了解一下 Voronoi 图的定义！

Voronoi 图的定义

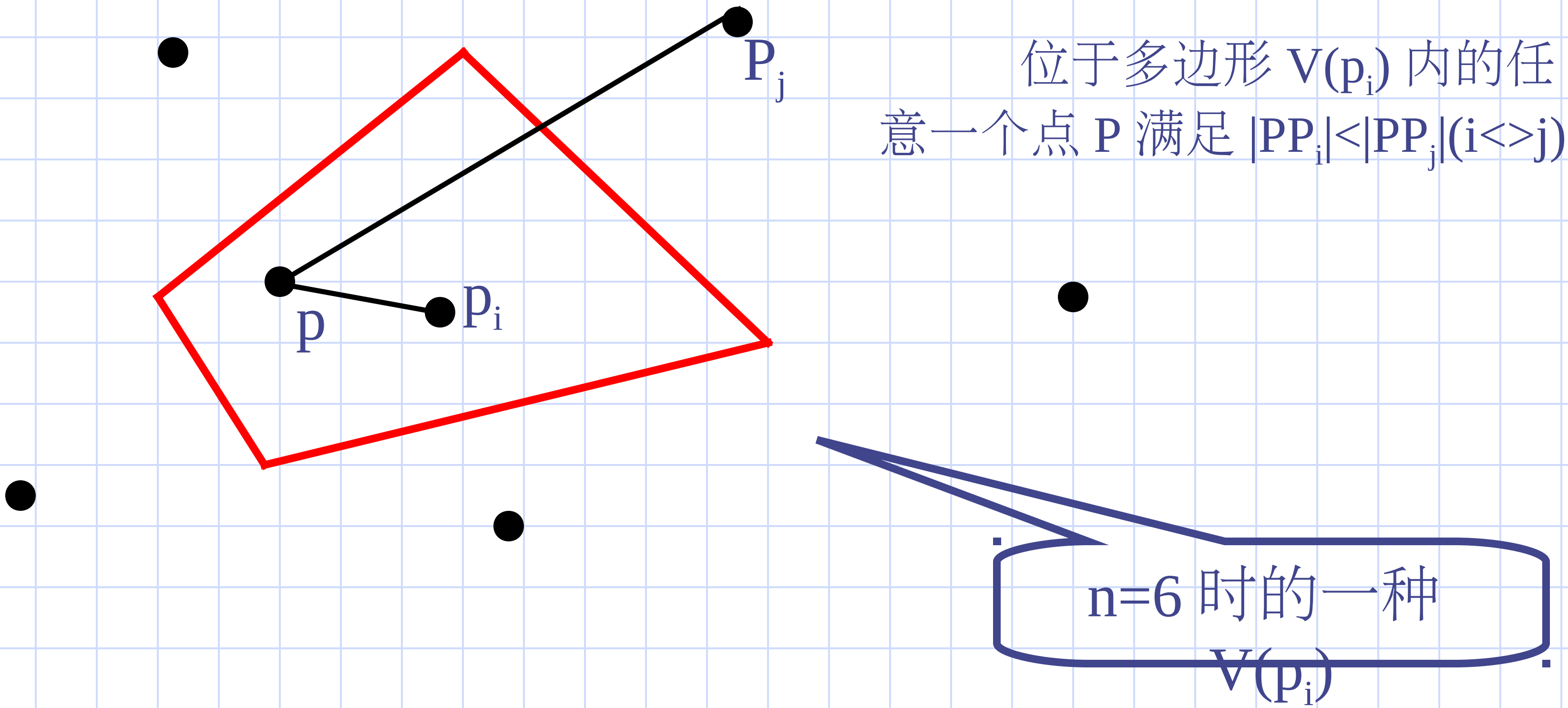
设 P_1,P_2 是平面上的两个点， L 是的它们的中垂线， L 将平面分成两部分半平面 L_1 和半平面 L_2，在 L_1 内的点 P 具有特性 $|PP_1|<|PP_2|$，即位于 L_1 内的点比平面中其他点更接近点 P_1，我们记半平面 $H(P_1, P_2)= L_1$，同理半平面 $H(P_2, P_1)= L_2$。



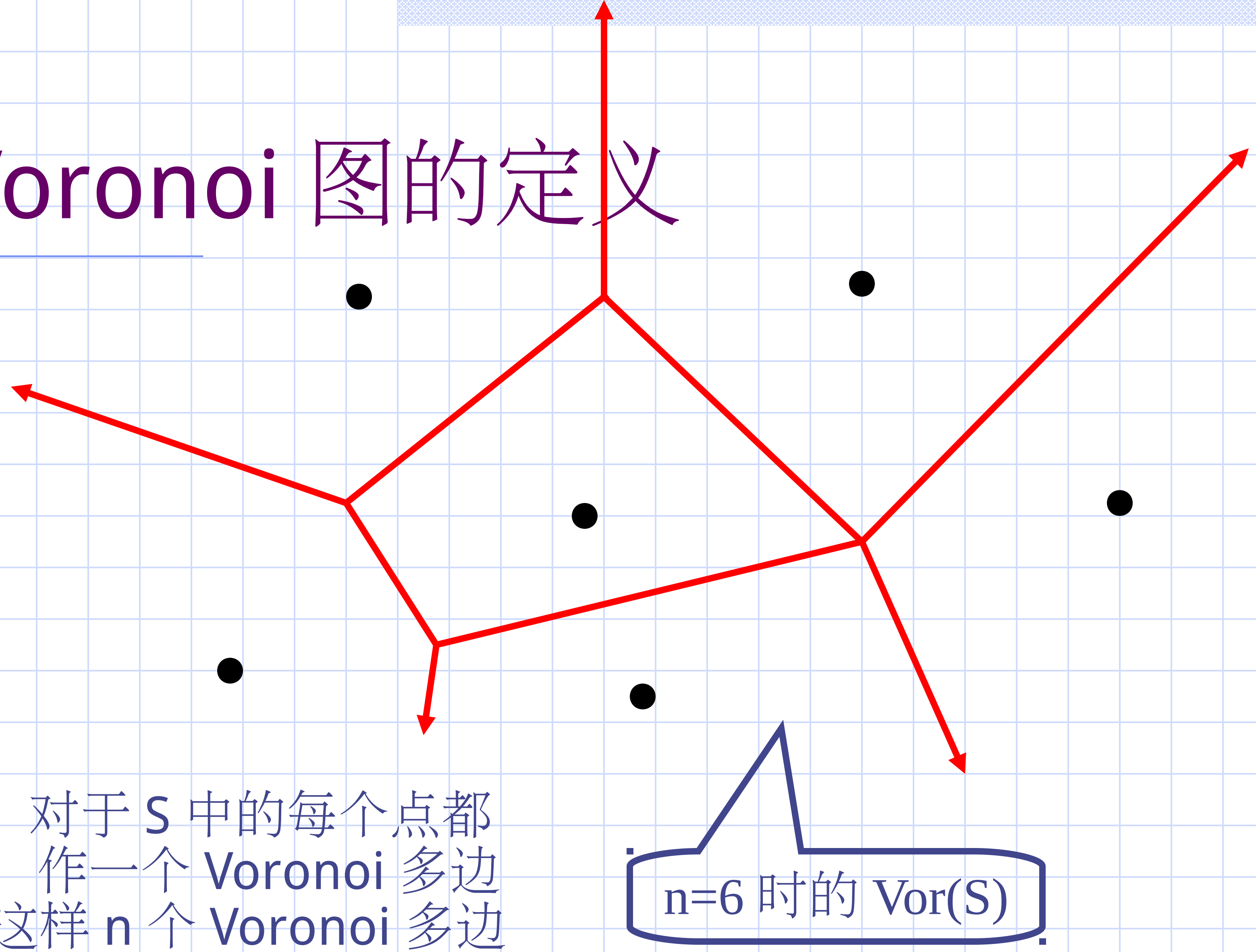
Voronoi 图的定义

对于平面上 n 个点的点集 S, 定义 $V(P_i)=\cap H(P_i,P_j)$，即 $V(P_i)$ 表示比其他点更接近 P_i 的点的轨迹是 n-1 个半平面的交集，它是一个不多于 n-1 条边的凸多边形区域，称为关联于 P_i 的 Voronoi 多边形或关联于 P_i 的 Voronoi 多边形域。

位于多边形 $V(p_i)$ 内的任意一个点 P 满足 $|PP_i|<|PP_j|(i<>j)$



Voronoi 图的定义



对于 S 中的每个点都可以 作一个 Voronoi 多边形，这样 n 个 Voronoi 多边形组成的图称为 Voronoi 图，记为 Vor(S) 。

Voronoi 图的构造

传统的构造方法

编写麻烦

难于理解

分治法构造 Delaunay 三角剖分法

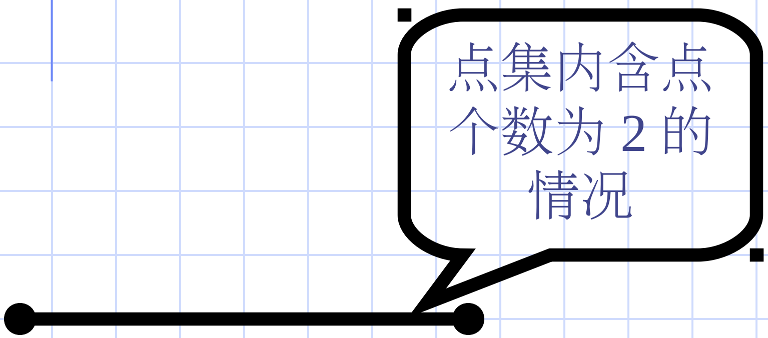
编写容易

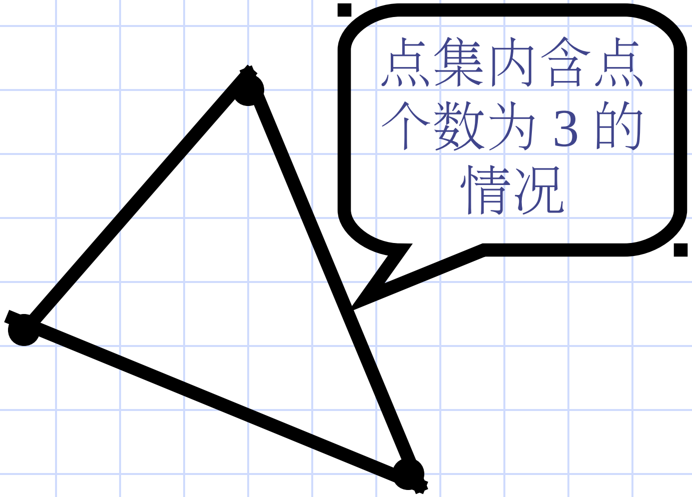
易于理解

O(N log N)

Voronoi 图的构造

用分治法构造角最优三角剖分，首先要对点集依照 X 坐标排序。如果点集内点的个数小于等于三，那么可以直接构造，否则将点集拆分成为两个含点数目近似的点集进行构造，最后合并这两个点集。

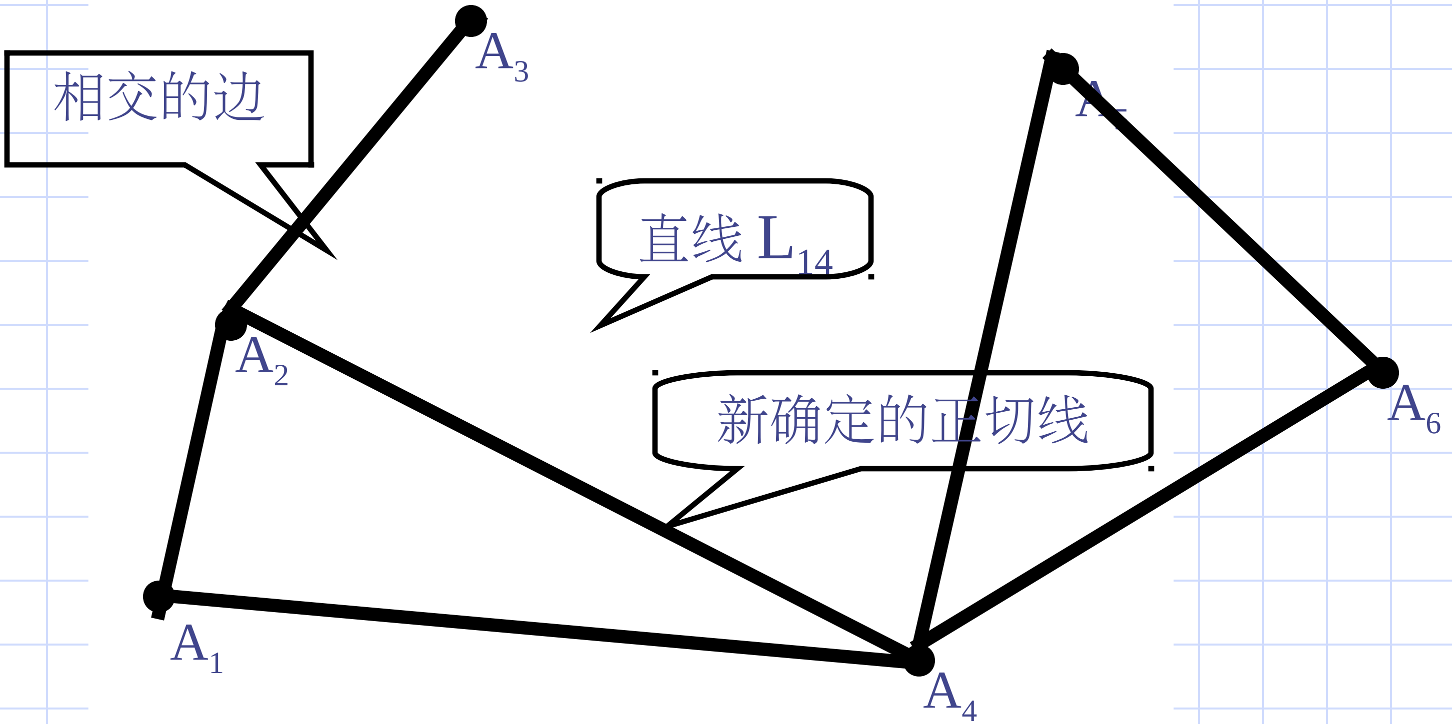




如何合并呢？

合并两个子点集的角最优三角剖分

[illegible] 如果有多个边，那么选择交点Y坐标最小的点所关联边。

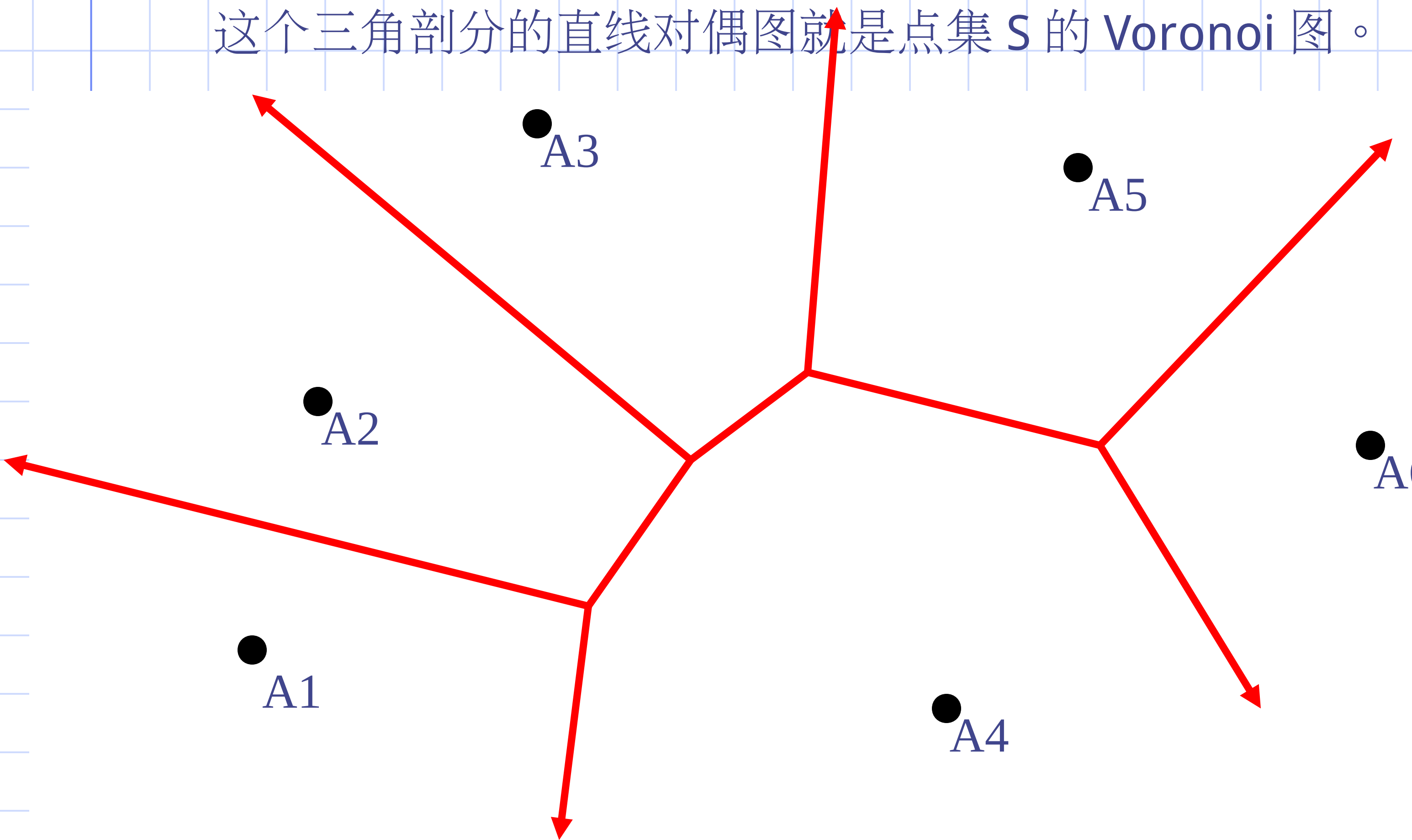


Voronoi 图的构造

重复上述步骤，我们就能合并两个点集的角最优三角剖分。

这样，依照该方案，我们就能构造出来点集 S 的角最优三角剖分了。

这个三角剖分的直线对偶图就是点集 S 的 Voronoi 图。



Voronoi 图的构造

$O(N\log N)$

$$T(N)=2T(N/2)+O(N)$$

求解含有 n 个点的点集的角最优三角剖分

求解含有 n/2 个点的点集的角最优三角剖分

合并两个点集的角最优三角剖分

Voronoi 图的在信息学中的应用

例 1.Run Away

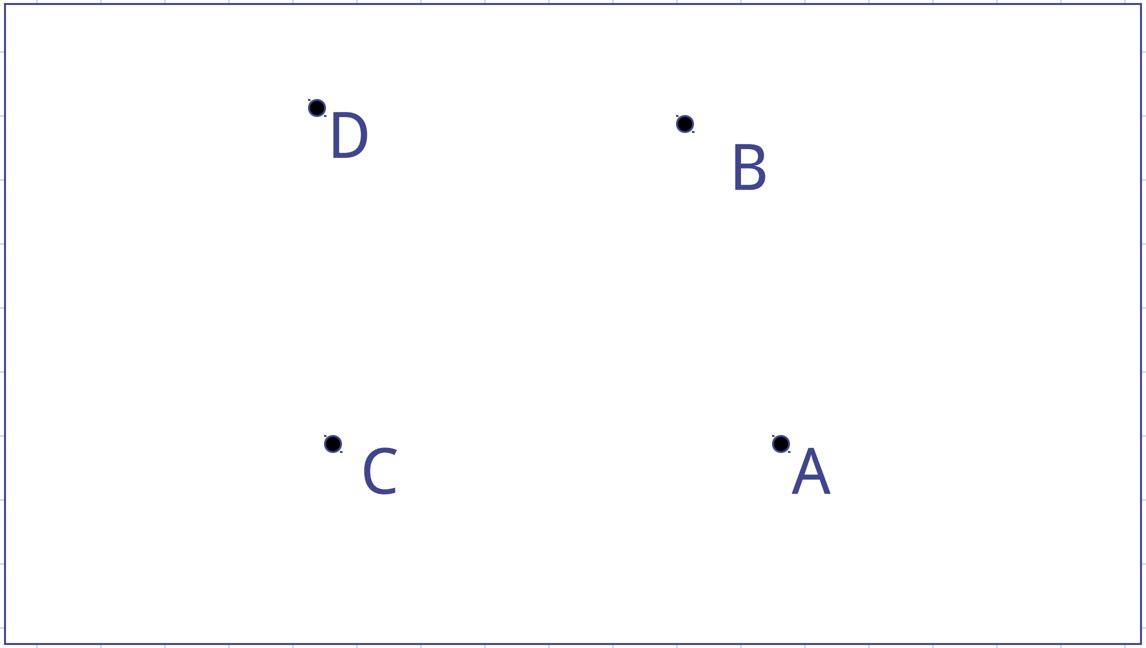
例 2.Voronoi 图与平面 MST 问题

例 3.Fat Man

Voronoi 图的在信息学中的应用

例 1.Run Away

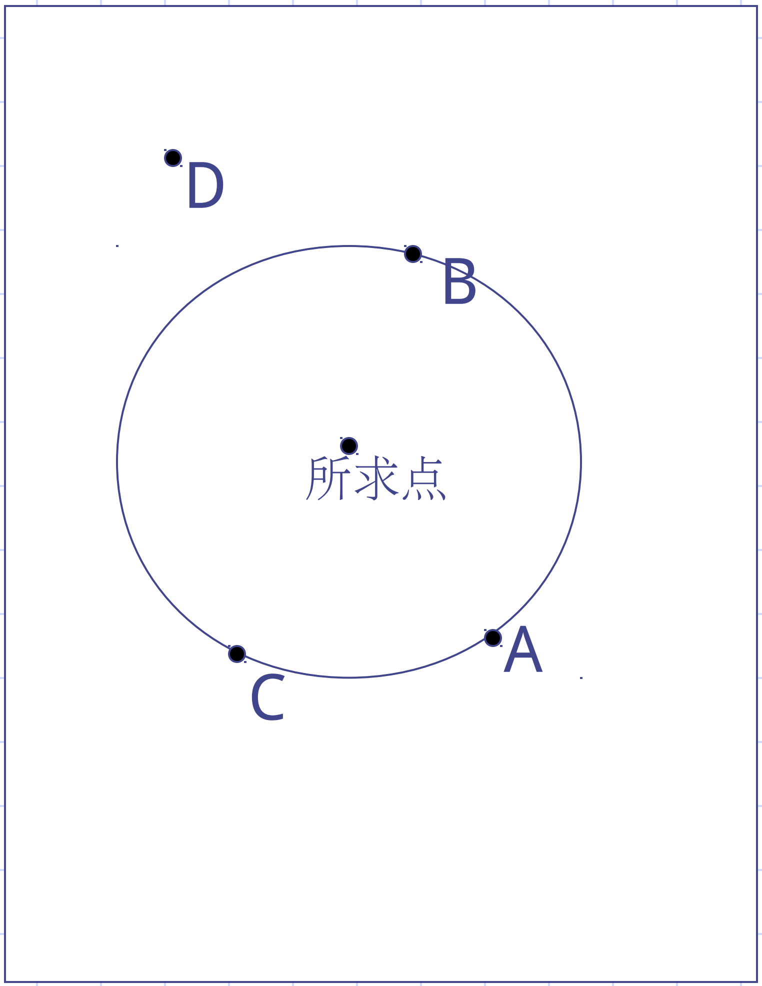
平面上有一个矩形，在矩形内有一些点，请你求得矩形内另一个点，该点离与它最近的已知点最远（点的个数 <=1000）。



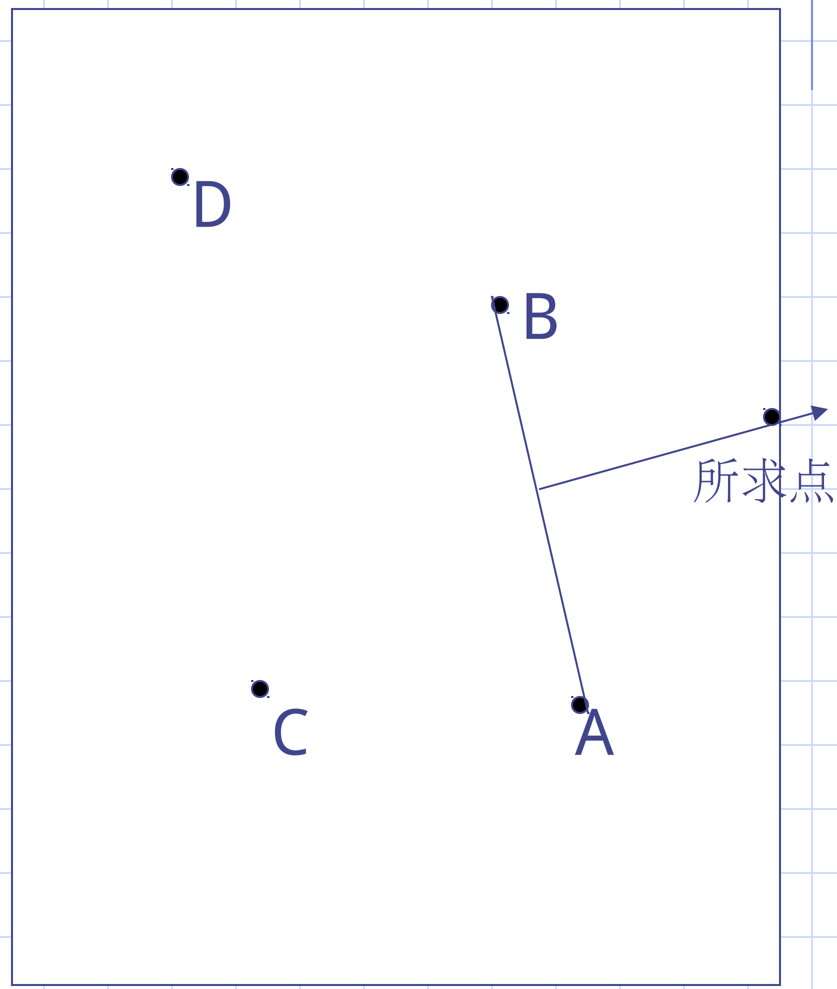
Voronoi 图的在信息学中的应用

思路一：大家可能很容易想到用枚举法

情况一：过三点的圆的圆心



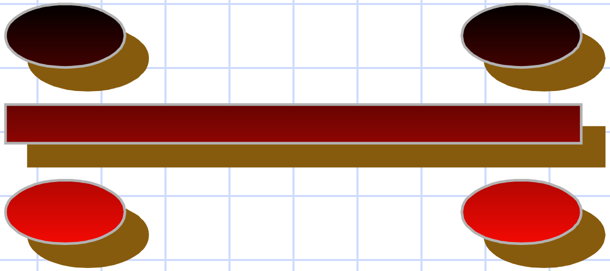
情况二：两点中垂线与矩形的边的交点



Voronoi 图的在信息学中的应用

根据刚才分析的两种情况，我们可以构造两种方案。第一种方案针对所求点为过三个点的圆的圆心的状态，我们枚举三个点，求出它们组成的三角形的外心和半径，然后枚举其它的点，看它们是不是在这个圆中。第二种方案是枚举两个点的中垂线，求出中垂线与矩形的交点，然后根据这三个点来计算最远位置，进行判断。

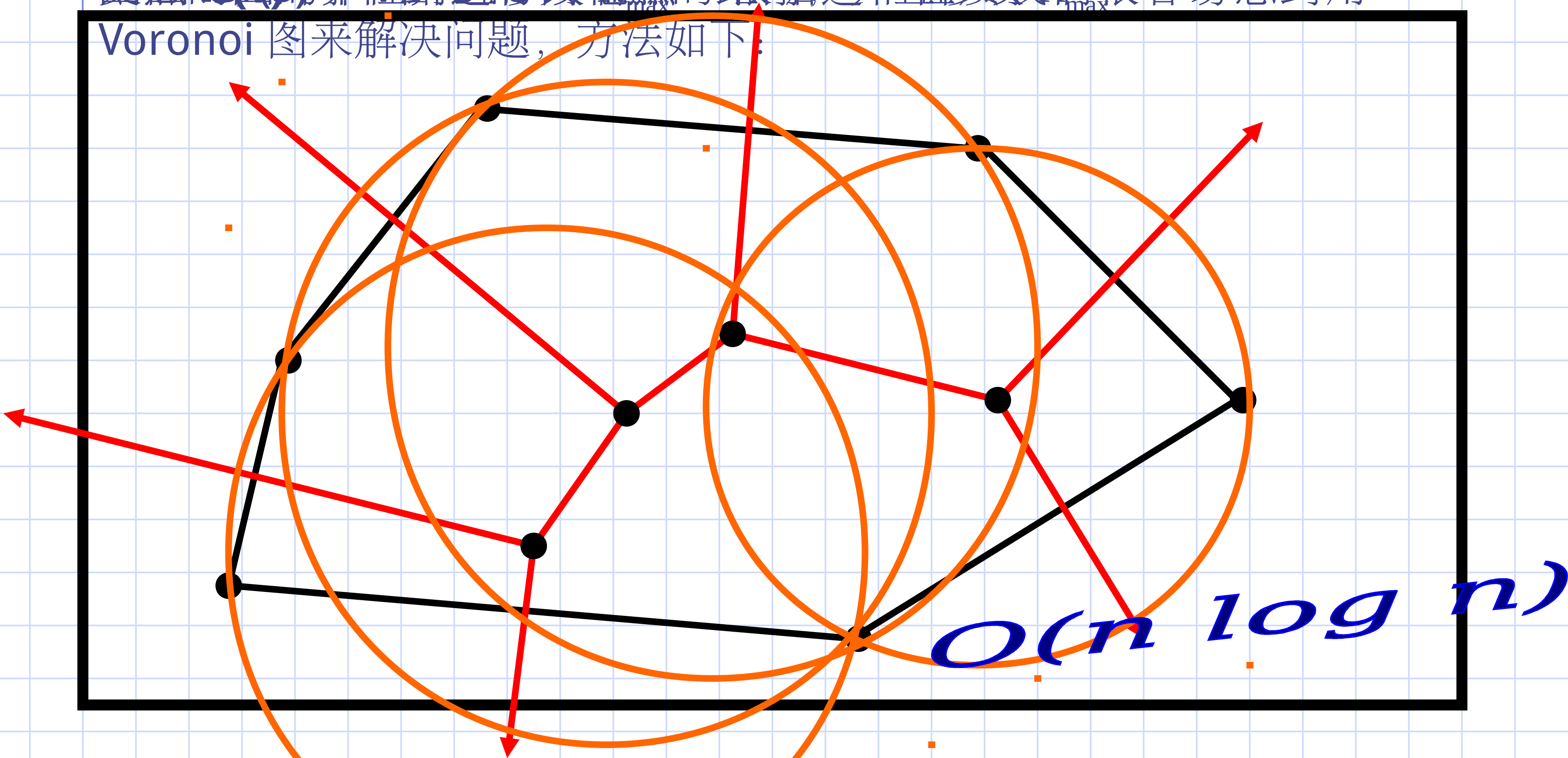
它的时间复杂度： **$O(n^4)$**



Voronoi 图的在信息学中的应用

思路二： Voronoi 图

……我们很容易想到用 Voronoi 图来解决问题，方法如下：



Voronoi 图与平面 MST 问题

例 2. 平面 MST 问题

给定平面上的点集 S， 求出连接 S 中所有点的最小长度的树，并且要求最小生成树的结点恰好是 S 中的点。

Voronoi 图与平面 MST 问题

传统的求最小生成树的方法是贪心法，要是纯粹使用贪心法求平面最小生成树，我们所作的程序时间复杂度至少为：$O(n^2)$

有没有更快的方法呢?

当然有！用 Voronoi 图。

Voronoi 图与平面 MST 问题

我们都知道 Voronoi 图的对偶图是点集的角最优三角剖分，我们把这个三角剖分中的边组成的集合叫做 DT(S).

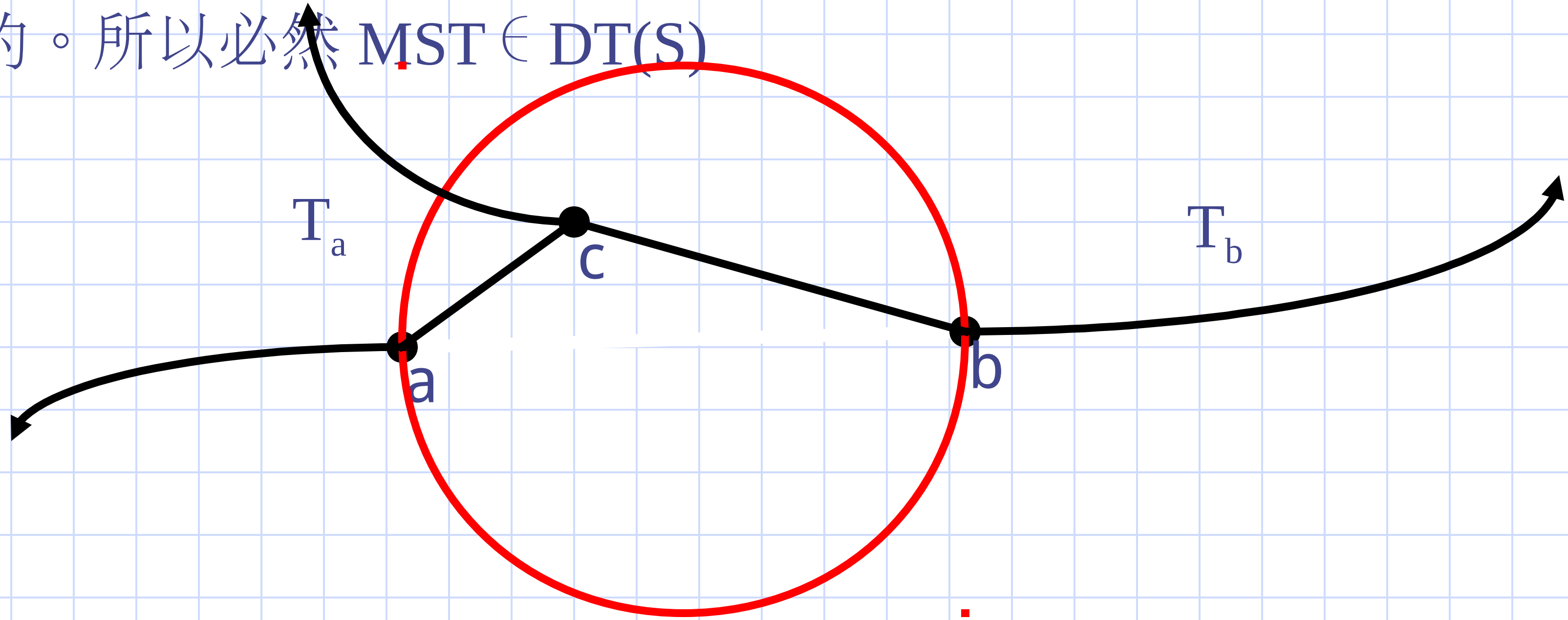
那么，我们可以得出这样一个定理:

最小生成树 MST 是角最优三角剖分 DT(S) 的一个子集

关于定理的证明

证明：也就是说，具有直径 ab 的圆周上或圆内必有 S 中的点，假设在该圆周上或者圆内，那么由三角剖分的定理可以知道过 a,b 的圆，因此如果 ab 不属于 DT(S)，不那么过 ab 的圆不可能是空的。

假设 c 在该圆内。假设边 ab ∈ DT(S)，那么 |ac|<|ab|，并且 |bc|<|ab|。我们删除 ab，把树 T 分成 T_a 和 T_b 两部分，假设 c ∈ T_a，那么我们添加边 cb，可以合并成新的树，并且的总长度小于 T，因此包含 ab 的树长度不可能是最小的。所以必然 MST ∈ DT(S)



Voronoi 图与平面 MST 问题

根据这个条件，我们可以得到一个新的方案，构造角最优三角剖分，然后计算最小生成树，总的时间复杂度是 O(n log n) 。

可能大家会问这样一个问题:

除了距离问题 ,Voronoi 图还有什么用呢？

我想告诉大家！ Voronoi 图不仅能快速解决距离问题

Voronoi 图还可以扩宽我们的解题思路

Voronoi 图拓宽解题思路

例 3.Fat Man

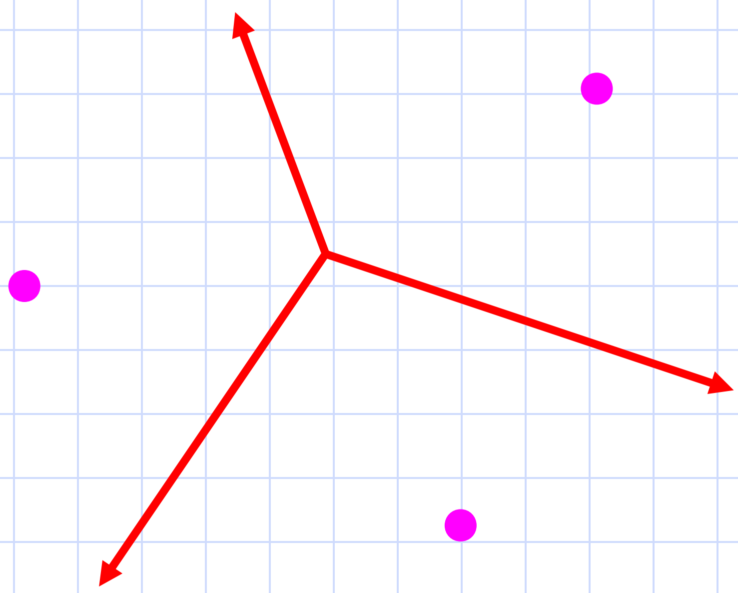
在超市走廊上两边都是墙，中间有一些障碍物，这些障碍物都是一些很小的半径可以忽略的点，你是一个胖子，可以将你的抽象成一个圆柱。现在你要从走廊的一头走到另一头。请问你最大的直径是多少？（走廊长 L, 宽 W）

问题分析：

刚开始拿到题目可能会手足无措，如果只是知道平面上的一些点，我们很难确定从走廊一头到另一头的路线，也很难运用枚举等方法来解决问题。但是，当你学了 Voronoi 图，情况就不一样了！

Voronoi 图拓宽解题思路

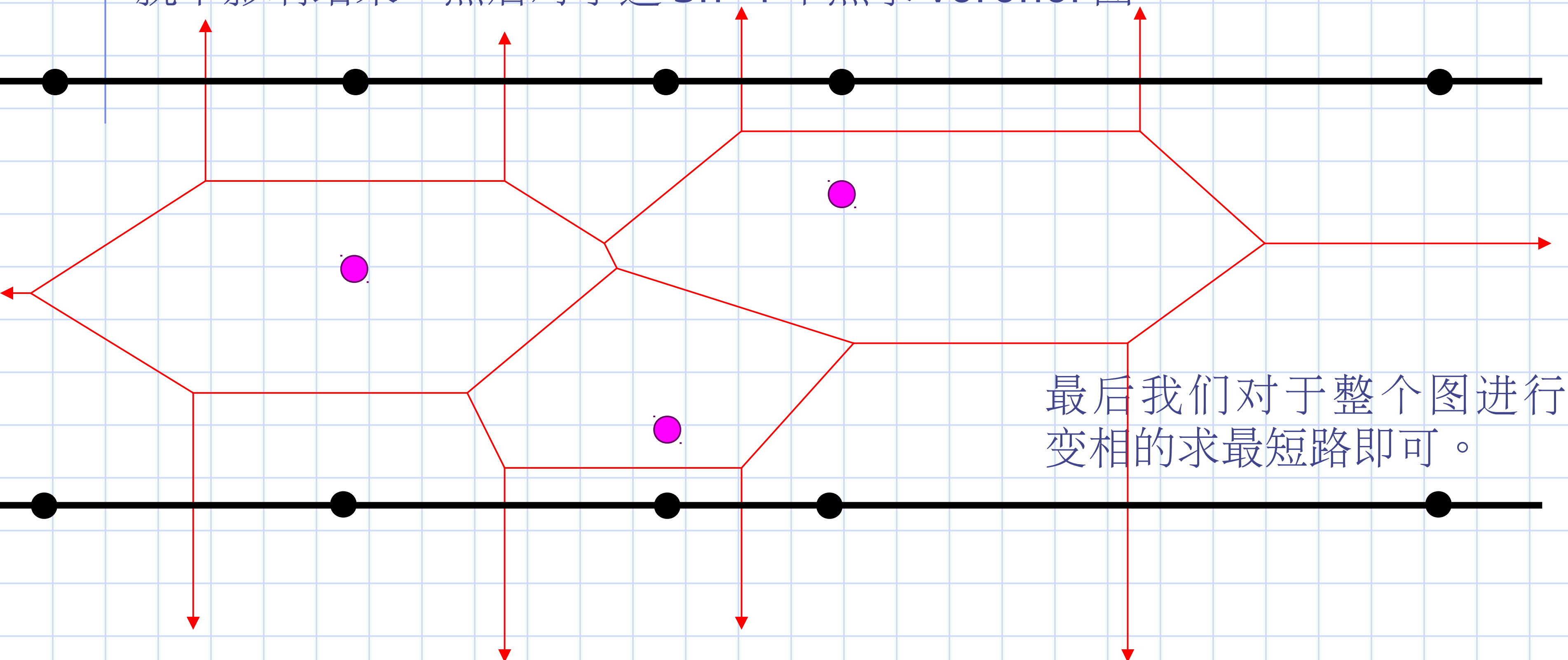
首先我们建立 Voronoi 图，显然一个人如果想穿过这些障碍物，那么走 Voronoi 边才是最佳的，因为如果不走 Voronoi 边，必然会使你的圆心进入一个 Voronoi 多边形内，这将使人更靠近一个障碍物，因而会减少人的半径。所以最佳路线必定由一些 Voronoi 边组成。



Voronoi 图拓宽解题思路

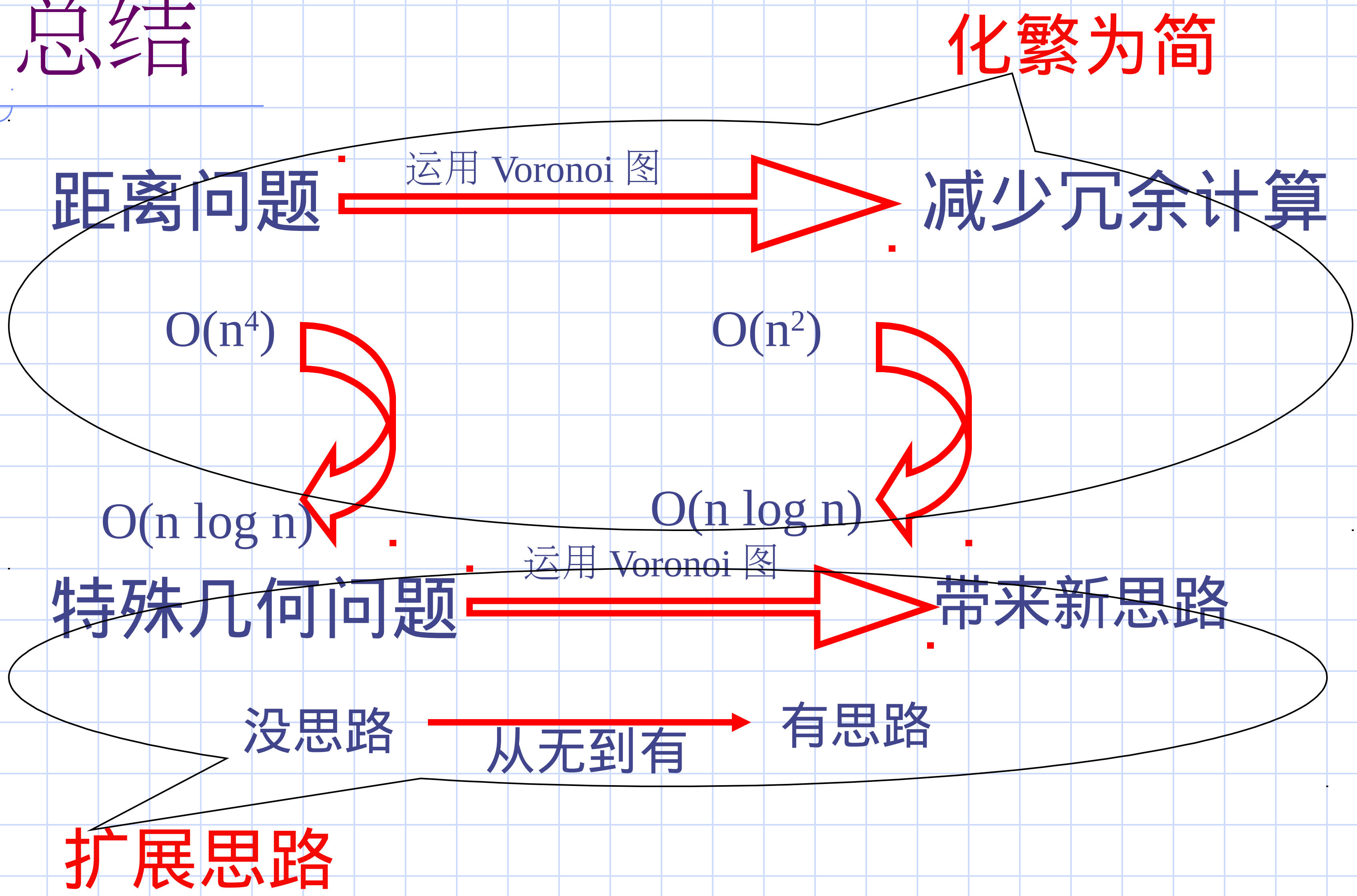
- 新增点
- 原来障碍点

接下来，由于人还可以从走廊边与障碍物之间通过，那么对于每一个障碍点 (x,y) 我们可以在走廊壁上增加障碍点 (x,0),(x,W), 一共增加 2n 个障碍点。另外在走廊开始和尽头增加四个障碍点（-W,0），（-W,W），（L+W,0），（L+W,W）这四个点与其它点之间距离不小与 W，这样就不影响结果。然后对于这 3n+4 个点求 Voronoi 图。



最后我们对于整个图进行变相的求最短路即可。

总结


化繁为简
距离问题
运用 Voronoi 图
减少冗余计算
O(n⁴)
O(n²)
O(n log n)
O(n log n)
特殊几何问题
运用 Voronoi 图
带来新思路
没思路
从无到有
有思路
扩展思路

总结 II

巧用算法

勇于实践