

冗繁削尽留清瘦 ——浅谈信息的充分利用

长沙市雅礼中学 张一飞

【摘要】

在算法设计中，人们往往不自觉地进行了大量多余的运算。这些累赘将大大降低算法的效率。作者认为，充分利用已知信息是解决这一问题的一个有效方法。

所谓充分利用信息，就是在算法设计中，把已知信息尽可能充分地利用起来，以避免冗余运算，降低算法的时空复杂度，从而提高算法的效率。本文对充分利用信息，在优化回溯法、动态规划和数值计算中的应用作了初步的探讨。

【关键字】

信息，算法优化

“冗繁削尽留清瘦”^[1]虽然讲的是画竹，却包含着深刻的哲理。算法设计同画竹一样，也需要削尽冗繁。但在解题实践中，人们往往不自觉地做了一些多余的运算，而忽视了对已知信息的充分利用。

所谓充分利用信息，就是在算法设计中，把已知信息尽可能充分地利用起来，以避免冗余运算，降低算法的时空复杂度，从而提高算法的效率。限于篇幅，本文仅对这种方法提高回溯法、动态规划和数值计算的效率进行探讨。

1、提高回溯法的效率

我们知道，回溯法实质上是从树根出发，遍历一棵解答树的过程。如果解答树中存在一些性质相同的子树，那么，只要我们知道了其中一棵子树的性质，就可以根据这个信息，导出其它子树的性质。这就是自顶向下记忆化搜索^[2]的基本思想。

记忆化搜索避免了一些多余的运算，因而比非记忆化搜索效率要高。但在有些记忆化搜索中，对信息的利用仍不够充分，还有进一步优化的余地。

下面，我们看一个例子：

【序关系计数问题】

用关系‘<’和‘=’将3个数A、B和C依次排列有13种不同的关系：

$A < B < C, A < B = C, A < C < B, A = B < C, A = B = C, A = C < B,$
 $B < A < C, B < A = C, B < C < A, B = C < A,$
 $C < A < B, C < A = B, C < B < A。$

编程求出N个数依序排列时有多少种关系。

<1>.枚举出所有的序关系表达式

我们可以采用回溯法枚举出所有的序关系表达式。N个数的序关系表达式，是通过N个大写字母和连接各字母的N-1个关系符号构成。依次枚举每个位置上

的大写字母和关系符号，直到确定一个序关系表达式为止。

由于类似于‘A=B’和‘B=A’的序关系表达式是等价的，为此，规定等号前面的大写字母在 ASCII 表中的序号，必须比等号后面的字母序号小。基于这个思想我们很容易写出解这道题目的回溯算法。

算法 1-1，计算 N 个数的序关系数。

procedure Count(Step,First,Can);

{Step 表示当前确定第 Step 个大写字母;

First 表示当前大写字母可能取到的最小值;

Can 是一个集合，集合中的元素是还可以使用的大写字母}

begin

if Step=N then begin{确定最后一个字母}

for i:=First to N do if i in Can then Inc(Total); {Total 为统计的结果}

Exit

end;

for i:=First to N do{枚举当前的大写字母}

if i in Can then begin{i 可以使用}

Count(Step+1,i+1,Can-[i]);{添等于号}

Count(Step+1,1,Can-[i]);{添小于号}

end

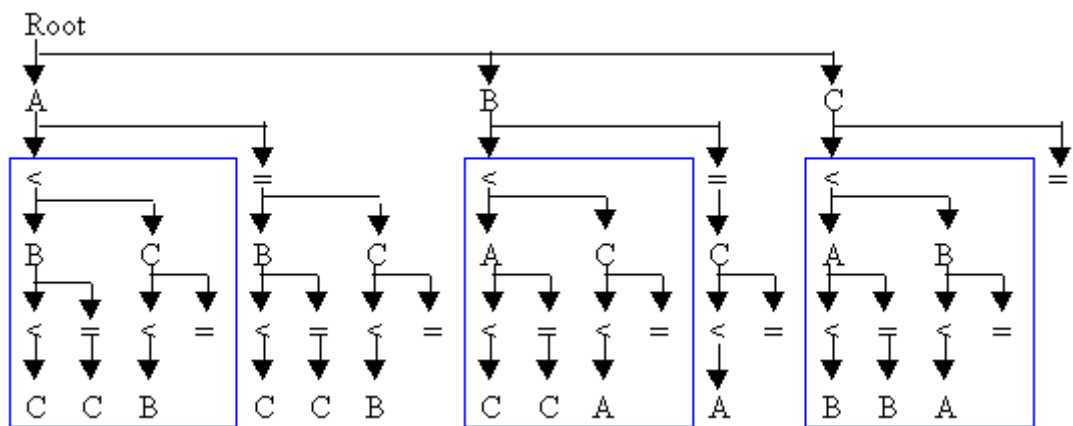
end;

调用 Count(1,1,[1..N])后，Total 的值就是结果。该算法的时间复杂度是 $O(N!)$

<2>.粗略利用信息，优化算法 1-1

算法 1-1 中存在大量冗余运算。如图 1，三个方框内子树的形态完全一样。一旦我们知道了其中某一个方框内所产生的序关系数，就可以利用这个信息，直接得到另两个方框内将要产生的序关系数。

图 1 $N=3$ 时的解答树



显然，在枚举的过程中，若已经确定了前 k 个数，并且下一个关系符号是小于号，这时所能产生的序关系数就是剩下的 $N-k$ 个数所能产生的序关系数。

设 i 个数共有 $F[i]$ 种不同的序关系，那么，由上面的讨论可知，在算法 1-1 中，调用一次 Count(Step+1,1,Can-[i])之后，Total 的增量应该是 $F[N-Step]$ 。这个值可以在第一次调用 Count(Step+1,1,Can-[i])时求出。而一旦知道了 $F[N-Step]$ 的值，就可以用 $Total:=Total+F[N-Step]$ 代替调用 Count(Step+1,1,Can-[i])。这样，我们可以得到改进后的算法 1-2。

算法 1-2，计算 N 个数的序关系数。

```

procedure Count(Step,First,Can);
{Step,First,Can 的含义同算法 1-1}
begin
  if Step=N then begin {确定最后一个字母}
    for i:=First to N do if i in Can then Inc(Total); {Total 为统计的结果}
    Exit
  end;
  for i:=First to N do {枚举当前的大写字母}
    if i in Can then begin {i 可以使用}
      Count(Step+1,i+1,Can-[i]); {添等于号}
      if F[N-Step]=-1 then begin {第一次调用}
        F[N-Step]:=Total;
        Count(Step+1,1,Can-[i]); {添小于号}
        F[N-Step]:=Total-F[N-Step] {F[N-Step]=Total 的增量}
      end else Total:=Total+F[N-Step] {F[N-Step] 已经求出}
    end
  end;

```

开始，将 F[0],F[1],...,F[N-1] 初始化为 -1

调用 Count(1,1,[1..N]) 之后，Total 的值就是结果

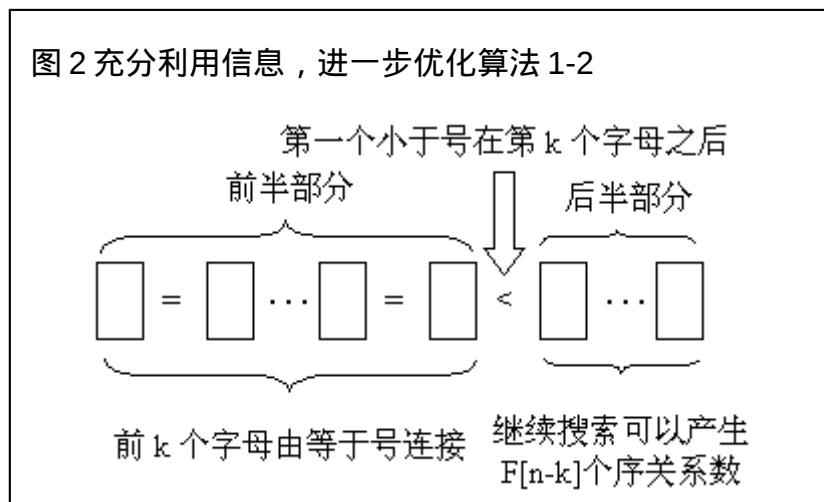
算法 1-2 与算法 1-1 的差别仅限于程序中的粗体部分。

算法 1-2 就是利用了 F[0],F[1],...,F[N-1] 的值，使得在确定添小于号以后，能够避免多余的搜索，尽快地求出所需要的方案数。该算法实质上就是自顶向下记忆化方式的搜索，它的时间复杂度为 $O(2^N)^{[3]}$ 。同算法 1-1 相比，效率虽然有所提高，但仍不够理想。

<3>. 充分利用信息，进一步优化算法 1-2

在搜索的过程中，如果确定在第 k 个大写字母之后添加第一个小于号，则可以得到下面两条信息：

图 2 充分利用信息，进一步优化算法 1-2



第一条信息：前 k 个大写字母都是用等号连接的。

第二条信息：在此基础上继续搜索，将产生 $F[N-k]$ 个序关系表达式。

如图 2 所示，序关系表达式中第一个小于号将整个表达式分成了两个部分。由乘法原理易知，图 2 所示的序关系表达式的总数，就是图中前半部分所能产生的序关系数，乘以后半部分所能产生的序关系数。算法 1-2 实质上利用了第二条信息，直接得到图中后半部分将产生 $F[n-k]$ 个序关系数，并通过搜索得到前半部分将产生的序关系数。但如果我们利用第一条信息，就可以推知图中前半部

分将产生的序关系数，就是 N 个物体中取 k 个的组合数，即 C_n^k 。这样，我们可以得到 $F[n]$ 的递推关系式：

$$\text{公式1: } F[n] = \sum_{k=1}^n C_n^k F[n-k], \text{ 其中 } F[0] = 1$$

采用公式 1 计算 $F[n]$ 的算法记为算法 1-3^[4]，它的时间复杂度是 $O(N^2)$ 。

<4>.小结

下面是三个算法的性能分析表^[5]：

分析项目		算法 1-1	算法 1-2	算法 1-3
理论分析	时间复杂度	$O(N!)$	$O(2^N)$	$O(N^2)$
	空间复杂度	$O(1)$	$O(N)$	$O(N)$
实际运行情况	N=7	1s	<0.05s	<0.05s
	N=8	10s	<0.05s	<0.05s
	N=15	>10s	0.5s	<0.05s
	N=17	>10s	2s	<0.05s

在优化算法 1-1 的过程中，我们通过利用 $F[0], F[1], \dots, F[N-1]$ 的信息，得到算法 1-2，时间复杂度也从 $O(N!)$ 降到 $O(2^N)$ 。在算法 1-2 中，进一步消除冗余运算，就得到了 $O(N^2)$ 的算法 1-3。

算法 1-3 计算 $F[n]$ ，体现了动态规划的思想。也就是说，我们通过充分利用信息，提高回溯法的效率，实质上是将搜索转化成了动态规划。

2、提高动态规划的效率

从上一节中可以看到，动态规划之所以高效，就在于它比较充分的利用了已知信息。但是，在有些动态规划中，仍存在冗余运算。这一节我们将进一步探讨如何充分利用信息，提高动态规划的效率。

下面我们看一个例子：

【理想收入问题】

理想收入是指在股票交易中，以 1 元为本金可能获得的最高收入，并且在理想收入中允许有非整数股票买卖。

已知股票在第 i 天每股价格是 $V[i]$ 元， $1 \leq i \leq M$ ，求 M 天后的理想收入。

<1>.一种动态规划的解法

解这道题目，很容易想到用动态规划。设 $F[i]$ 表示在第 i 天收盘时能达到的最高收入，则有 $F[i]$ 的递推关系式：

$$\text{公式2: } F[i] = \max_{(0 \leq j \leq k < i)} \{F[j] / V[k] * V[i]\}, \text{ 其中 } F[0] = 1, V[0] = 1$$

公式 2 的含义是：在第 i 天收盘时能达到的最高的收入，是将第 j 天收盘后的收入，全部用于买入第 k 天的股票，再在第 i 天将所持的股票全部卖出所得的收入。采用公式 2，可以得到算法 2-1，其时间复杂度是 $O(M^3)$ ，空间复杂度是 $O(M)$ 。

算法 2-1

$F[0] := 1; V[0] := 1; F[1..M] := 0;$

for $i := 1$ to M do

 for $j := 0$ to $i-1$ do

 for $k := j$ to $i-1$ do

$F[i] := \text{Max}\{F[i], F[j] / V[k] * V[i]\}$

<2>.改变状态表示的含义，优化算法 2-1

改变动态规划中状态表示的含义，是优化动态规划的常用方法。例如此题，我们可以采用两种不同的状态表示方法优化算法 2-1。

方法 1：设 $P[i]$ 表示前 i 天能获得的最多股票数，可列出如下状态转移方程：

$$\text{公式3: } P[i] = \max_{(0 \leq j < i)} \{P[i-1], P[j] * V[j] / V[i]\}$$

这是因为前 i 天所能获得的最多股票数，或者是前 $i-1$ 天获得的最多股票数，或者是在第 j 天将前 j 天所能获得的最多的股票全部卖出，再买入第 i 天的股票。显然，前 $i-1$ 天能获得的最多股票数乘以第 i 天的股价，就是第 i 天能达到的最大收入。

方法 2：设 $Q[i]$ 表示前 i 天能达到的最大收入，可列出如下状态转移方程：

$$\text{公式4: } Q[i] = \max_{(0 \leq j < i)} \{Q[i-1], Q[j] / V[j] * V[i]\}$$

就是说前 i 天所能达到的最大收入，或者是前 $i-1$ 天所能达到的最大收入，或者是在第 j 天买入股票，再在第 i 天卖出，所能获得的最大收入。

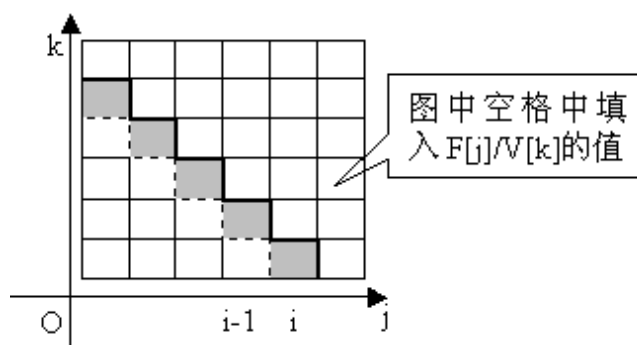
上述两种方法的时间复杂度都是 $O(M^2)$ 。这表明，改变状态表示的含义，在一定程度上提高了算法的效率。但对于这道题目，仅仅改变状态表示的含义，很难进一步优化算法。

<3>.粗略利用信息，优化算法 2-1

算法 2-1 粗体部分的功能是确定 $F[i]$ 所能达到的最大值。由于 $V[i]$ 不变，因此 $F[i]$ 达到最大值，当且仅当 $F[j] / V[k]$ 达到最大值，其中 $0 \leq j \leq k < i$ 。

算法 2-1 中，采用了二重循环来确定 $F[j] / V[k]$ 的最大值。但在确定 $F[i-1]$ 所能达到最大值的时候，我们实际上已经求出当 $0 \leq j \leq k < i-1$ 时， $F[j] / V[k]$ 所能达到的最大值。如果能充分利用这一信息，就可以更快地确定 $F[i]$ 所能达到的最大值。如图 3 所示，要确定粗线下部的最大值，只需比较虚线下部的最大值和灰色部

图 3 初步利用信息，优化算法 2-1



分的最大值即可。

为了表示出图 3 的思想，

设 $MaxFV[i] = \max_{(0 \leq j \leq k < i)} \{F[j]/V[k]\}$, 则

$$\begin{aligned} MaxFV[i] &= \max_{(0 \leq j \leq k < i)} \{F[j]/V[k]\} \\ &= \max\{\max_{(0 \leq j \leq k < i-1)} \{F[j]/V[k]\}, \max_{(0 \leq j \leq k, k=i-1)} \{F[j]/V[k]\}\} \\ &= \max\{MaxFV[i-1], \max_{(0 \leq j \leq i-1)} \{F[j]/V[i-1]\}\} \\ &= \max_{(0 \leq j < i)} \{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由公式2, } F[i] &= \max_{(0 \leq j \leq k < i)} \{F[j]/V[k] * V[i]\} \\ &= \max_{(0 \leq j \leq k < i)} \{F[j]/V[k]\} * V[i] \\ &= MaxFV[i] * V[i] \end{aligned}$$

这样, 我们得到如下递推关系式:

公式5:

$$\begin{aligned} F[i] &= MaxFV[i] * V[i] \\ MaxFV[i] &= \max_{(0 \leq j < i)} \{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\} \end{aligned}$$

从公式 5 中可以看出, 在确定 $MaxFV[i]$ 时, 较充分的利用了确定 $MaxFV[i-1]$ 时产生的结果。采用公式 5 可得算法 2-2, 它的时间复杂度为 $O(M^2)$, 空间复杂度是 $O(M)$ 。

算法 2-2

```
F[0]:=1;MaxFV[0]:=0;V[0]:=1;
for i:=1 to M do begin
  MaxFV[i]:=MaxFV[i-1];
  for j:=0 to i-1 do
    MaxFV[i]:=Max{MaxFV[i],F[j]/V[i-1]}
  F[i]:=MaxFV[i]*V[i]
end;
```

将公式 5 化简, 有

$$\begin{aligned} MaxFV[i] &= \max_{(0 \leq j < i)} \{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\} \\ &= \max_{(0 \leq j < i)} \{MaxFV[i-1], MaxFV[j] * V[j]/V[i-1]\} \end{aligned}$$

在这个公式中, $MaxFV[i]$ 可以看作是前 $i-1$ 天所能获得的最多股票数。这种状态表示方法和公式 3 中 $P[i]$ 的含义本质上是相同的。这样, 我们通过对已知信息的利用, 达到了改变动态规划中状态表示含义的效果。

<4>. 充分利用信息, 进一步优化算法 2-2

在算法 2-2 中, 进一步利用信息, 很容易得到时间复杂度为 $O(M)$ 的算法。

算法 2-2 的粗体部分的功能是确定 $MaxFV[i]$ 所能达到的最大值。由于 $V[i-1]$ 不变, 因此 $F[j]/V[i-1]$ 达到最大值, 当且仅当 $F[j]$ 达到最大值, 其中 $0 \leq j < i$ 。

算法 2-2 中内层循环实质上是在确定 $MaxFV[i]$ 时, 找到 $F[0], F[1], \dots, F[i-1]$ 中的最大值。而在确定 $MaxFV[i-1]$ 时, 我们已经找到了 $F[0], F[1], \dots, F[i-2]$ 中的最大值。如果把这个信息利用起来, 就可以更快的确定 $F[0], F[1], \dots, F[i-1]$ 中的最大值。

设 $MaxF[i] = \max_{(0 \leq j < i)} \{F[j]\}$, 则

$$\begin{aligned} MaxF[i] &= \max_{(0 \leq j < i)} \{F[j]\} \\ &= \max\{\max_{(0 \leq j < i-1)} \{F[j]\}, F[i-1]\} \\ &= \max\{MaxF[i-1], F[i-1]\} \\ MaxFV[i] &= \max_{(0 \leq j < i)} \{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\} \\ &= \max\{MaxFV[i-1], MaxF[i]/V[i-1]\} \end{aligned}$$

这样, 我们得到如下递推关系式:

公式6:

$$F[i] = \text{MaxFV}[i] * V[i]$$

$$\text{MaxFV}[i] = \max\{\text{MaxFV}[i-1], \text{MaxF}[i]/V[i-1]\}$$

$$\text{MaxF}[i] = \max\{\text{MaxF}[i-1], F[i-1]\}$$

从公式 6 中可以看出, 在确定 $\text{MaxF}[i]$ 时, 充分利用了确定 $\text{MaxF}[i-1]$ 时所产生的信息。采用公式 6 可得算法 2-3, 它的时间复杂度是 $O(M)$ 。从公式 6 中的三个递推关系式可以看出, 当前状态都只与前一个状态有关, 因此, 空间复杂度可以进一步降到 $O(1)$ ^[6]。

算法 2-3

$F:=1; \text{MaxF}:=0; \text{MaxFV}:=0; V[0]:=1;$

for $i:=1$ to M do begin

if $F > \text{MaxF}$ then $\text{MaxF}:=F;$

if $\text{MaxF}/V[i-1] > \text{MaxFV}$ then $\text{MaxFV}:=\text{MaxF}/V[i-1];$

$F:=\text{MaxFV}*V[i]$

end;

公式 6 中 $\text{MaxF}[i]$ 可以看作是前 $i-1$ 天能达到的最大收入^[7]。虽然这种状态表示方法和公式 4 中 $Q[i]$ 是类似的, 但算法的时间复杂度却从 $O(M^2)$ 降到了 $O(M)$, 空间复杂度也从 $O(M)$ 降到了 $O(1)$ 。这样, 我们通过充分利用已知信息, 达到了改变状态表示难以达到的优化效果。

<5>.小结

下面是三个算法的性能分析表:

分析项目		算法 2-1	算法 2-2	算法 2-3
理论分析	时间复杂度	$O(M^3)$	$O(M^2)$	$O(M)$
	空间复杂度	$O(M)$	$O(M)$	$O(1)$
实际运行情况	$M=200$ 的随机数据	4s	0.05s	<0.05s
	$M=1000$ 的随机数据	>60s	1s	<0.05s
	$M=2000$ 的随机数据	>60s	5s	<0.05s

在这道题中, 我们通过避免冗余运算, 将时间复杂度由 $O(M^3)$ 先降到 $O(M^2)$, 再进一步降到 $O(M)$ 。空间复杂度也从 $O(M)$ 降到了 $O(1)$ 。

由此可见, 充分利用信息, 提高动态规划的效率, 是非常有效的。此外, 充分利用信息并不一定要以牺牲空间为代价, 同样可以优化算法的空间复杂度。

3、提高数值计算的效率

从前面的分析中, 我们深深地体会到了动态规划的核心思想——充分利用已知信息。但这个思想并不仅限于动态规划。下面我们将看到, 充分利用已知信息, 对提高数值计算的效率, 也十分有效。

我们看一道数值计算题:

【高精度计算问题】(湖南 1998 省赛试题)

输入 n, m, k , 计算 $S_m(n)$ 的后 k 位数。其中 $S_m(n)=1^m+2^m+\dots+n^m$, $1 \leq k \leq 99$, $1 \leq n, m \leq 9999$ 。

<1>.分析

由于 k 可以达到 99, 因此必须采用高精度计算。本题只要求出 $S_m(n)$ 的后 k 位数, 所以, 每次计算只取结果的后 k 位数即可。显然, 计算 $S_m(n)$ 将耗费大量的时间用于乘幂运算。下面, 我们分析乘幂运算的算法。

<2>. 朴素的乘幂算法

根据乘幂的定义，我们将 i 自乘 m 次即可。

算法 3-1，计算 i^m

```
Func Power(i,m);
begin
  SetValue(x,1); {x 是高精度数}
  for k:=1 to m do
    x:=Mul(x,i); {Mul 是高精度乘法，返回 x*y 的值}
  Power:=x
end;
```

采用算法 3-1 计算 i^m ，需要进行 M 次高精度乘法。

<3>. 粗略利用信息，优化算法 3-1

算法 3-1 对信息的利用很不充分。例如，要计算 i^5 ，现在已经求出了 i^3 的值，算法 3-1 会利用 i^3 和 i 的值，求出 i^4 ，进而求出 i^5 。而实际上，在计算 i^3 之前，我们已经求出了 i^2 的值，将 i^3 乘上 i^2 ，就可以求出 i^5 。

我们用数组 $p[k]$ 保存已经计算出的 i^k 的结果，在计算过程中，尽可能的使用已经计算过的信息。例如，我们可以这样计算 i^{15} ：

```
p[1]=i
p[2]=p[1]*p[1]
p[3]=p[2]*p[1]
p[6]=p[3]*p[3]
p[7]=p[6]*p[1]
p[14]=p[7]*p[7]
p[15]=p[14]*p[1]
```

这样，我们只用了 6 次高精度乘法，就求出了 i^{15} 。

从上面的例子可以看出，将一个已知结果平方，就可以只用一次乘法，求出一个比较大的指数幂，根据这个思想就可得到算法 3-2：

$$i^m = \begin{cases} (i^{\frac{m}{2}})^2 & m \text{ 为偶数} \\ i(i^{\frac{m-1}{2}})^2 & m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

算法 3-2，计算 i^m

```
Func Power(i,m);
begin
  if m=1 then Power:=i
  else begin
    Temp:=Power(i,m div 2);
    Temp:=Mul(Temp,Temp);
    if Odd(m) then Power:=Mul(Temp,i)
    else Power:=Temp
  end
end;
```

算法 3-2 计算 i^m 需要 $O(\log_2 m)$ 次高精度乘法。这样，我们通过对信息的粗略利用^[8]，将时间复杂度从 $O(m)$ 降到了 $O(\log_2 m)$ 。

算法 3-2 实质上就是二分法。采用二分法求乘幂，之所以比累乘的方法高效，就在于它更加充分的利用了已知信息。

<4>.充分利用信息，进一步优化算法 3-2

注意到在计算 i^m 时，我们已经知道了 $1^m, 2^m, \dots, (i-1)^m$ 的值，而这些值在算法 3-2 计算 i^m 时没有起任何作用。如果能够建立 i^m 与 $1^m, 2^m, \dots, (i-1)^m$ 的关系，就可更快计算 i^m 。

例如，求 120^m 。这时，我们已经计算了 5^m 和 24^m 的值。显然， 5^m 和 24^m 相乘，就可以得到 120^m 。

当 i 是合数时，设 $i=pq$ ，其中 $1 < p, q < i$ 。显然， $i^m = (pq)^m = p^m q^m$ 。由于 $p, q < i$ ，因此在计算 i^m 时， p^m 和 q^m 都是可以直接利用的信息。这样，对于合数 i ，我们只需要一次高精度乘法，就可以求出 i^m 。

采用这种方法得到算法记为算法 3-3。设 $1..n$ 中，有 x 个合数，则算法 3-3 只做了 $(n-x)\log_2 m + x$ 次高精度乘法。自然数中素数的分布十分稀疏，实践证明，当 $n=m=9999, k=99$ 时，算法 3-3 的效率是算法 3-2 的 5 倍。

<5>.小结

下面是三个算法的性能分析表：

分析项目		算法 3-1	算法 3-2	算法 3-3
理论分析	时间复杂度	$O(nm)$	$O(n\log_2 m)$	$O(n\log_2 m)$
	空间复杂度	$O(k)$	$O(k)$	$O(nk)$
实际运行情况	$N=M=100, K=99$	0.1	<0.05	<0.05
	$N=100, M=9999, K=99$	20s	0.5s	0.1s
	$N=M=1000, K=99$	15s	3s	1s
	$N=M=9999, K=99$	>60s	55s	10s

在这个例子中，我们首先通过对信息的粗略利用，优化朴素的乘幂算法 3-1，得到采用二分法的算法 3-2。进一步分析发现，二分法在计算 i^m 时，没有利用已经求出的 $1^m, 2^m, \dots, (i-1)^m$ 等信息，充分利用这些信息，得到了更快的算法 3-3。由于算法 3-3 需要保存一些已经求过的值^[9]，所以，该算法实质上是以空间为代价换取了时间。

4、结束语

在搜索中加入记忆化信息提高回溯法的效率，改变动态规划中状态表示的含义提高动态规划的效率，采用二分法提高数值计算的效率，都不同程度的体现了对已知信息的充分利用。但仅使用这些常用技巧优化算法，仍可能存在多余的运算。如果能够更加充分的利用已知信息，就可以收到更好的效果。

在算法中削去冗繁，关键在于找到可利用的已知信息，一旦把它们充分利用起来，就可以大大提高算法效率。

【参考文献】

1. 《信息学奥林匹克》. 1999(3)
2. 吴文虎，王健德.《实用算法与程序设计》. 电子工业出版社. 1998.01
3. 刘福生，王建德.《青少年国际信息学（计算机）奥林匹克竞赛指导——人工智能搜索与程序设计》. 电子工业出版社. 1993.04
4. 《郑板桥集》

【附录】

[1]. 摘自《郑板桥集》第 206 页，全诗如下：

题画竹
四十年来画竹枝
日间挥写夜间思
冗繁削尽留清瘦
画到生时是熟时

[2]. 见参考文献[2]。

[3]. 在后面的分析中可以看到，调用粗体部分程序段的总次数是

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i C_i^j = \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1}$$

故算法的时间复杂度为 $O(2^{n+1})=O(2^n)$ 。

[4]. 也可以直接采用数学方法推导公式 1。但我认为，这比本文中使用的方法更难掌握。在参考文献[1]中，给出了一个形式上更简单的计算公式，但这个公式的设计也颇有难度。参考文献[1]中给出的公式是：

$$F(m, t) = [F(m-1, t-1) + F(m-1, t)] \times t$$

$$\text{边界条件: } F(1, 1) = 1, F(1, t) = 0 (t > 0)$$

$$n \text{ 个数的序关系数是: } \sum_{i=1}^n F(n, i)$$

[5]. 本文中所有程序的运行环境均为 Pentium 100MHz，BP7.0 编译。

[6]. 如果我们边读数据边规划，就只要保存 $V[i-1]$ 和 $V[i]$ ，而没有必要定义长度为 M 的数组 V 。这样，算法的空间复杂度降到了 $O(1)$ 。

[7]. 公式 6 可进一步化简：

$$\begin{aligned} \text{MaxF}[i] &= \max\{\text{MaxF}[i-1], F[i-1]\} \\ &= \max\{\text{MaxF}[i-1], \text{MaxFV}[i-1] * V[i-1]\} \\ \text{MaxF}[i]/V[i-1] &= \max\{\text{MaxF}[i-1], \text{MaxFV}[i-1] * V[i-1]\} / V[i-1] \\ &= \max\{\text{MaxF}[i-1]/V[i-1], \text{MaxFV}[i-1] * V[i-1]/V[i-1]\} \\ &= \max\{\text{MaxF}[i-1]/V[i-1], \text{MaxFV}[i-1]\} \\ &\geq \text{MaxFV}[i-1] \\ \text{MaxFV}[i] &= \max\{\text{MaxFV}[i-1], \text{MaxF}[i]/V[i-1]\} \\ &= \text{MaxF}[i]/V[i-1] \\ \text{MaxF}[i] &= \max\{\text{MaxF}[i-1], \text{MaxFV}[i-1] * V[i-1]\} \\ &= \max\{\text{MaxF}[i-1], \text{MaxF}[i-1]/V[i-2] * V[i-1]\} \end{aligned}$$

这样可以得到如下递推关系式：

$$\text{MaxF}[i] = \max\{\text{MaxF}[i-1], \text{MaxF}[i-1]/V[i-2] * V[i-1]\}$$

在源程序 Pro_2.pas 中，给出了这个公式的算法 2-4。算法 2-4 的时空复杂度同算法 2-3，只是形式上更加简单。

^[8] 值得说明的是，采用二分法求乘幂，并不是最充分利用已知信息的方法。例如，采用二分法计算 i^{15} 需要 6 次乘法，而实际上，我们只需 5 次乘法即可。

```
p[1]=i;  
p[2]=p[1]*p[1]  
p[3]=p[2]*p[1]  
p[6]=p[3]*p[3]  
p[9]=p[6]*p[3]  
p[15]=p[9]*p[6]
```

要得到求乘幂的最优方案，需要耗费大量的时间 (见参考文献[3])。由于二分法的计算次数，与最优的次数非常接近，因此，本文选择了二分法。

^[9] 我们只需保存已算出的 $1^m, 2^m, \dots, 4999^m$ 的值即可。当然，还可以进一步优化空间复杂度，详见程序 Pro_3.pas。