绝密★启用前

准考证号________ 姓名________ 班级________ 学校________

2023 普通高等学校招生全国统一考试·北京卷

数学

一、选择题(本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid\sqrt{x}\leqslant 2\}$,集合 $B=\{y\mid y=x^2+2\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $[1,4]$　　B. $[2,4]$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 复数 z 满足 $z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$,则下列结论正确的是 ( )

A. $z^2+2z-5=0$　　B. $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$

C. z 在复平面内对应的点位于第四象限　　D. $|z|=\sqrt{5}$

3. 若 $(1-2x)^{2\,023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2\,023}x^{2\,023}$,则 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2\,023}}{2^{2\,023}}$ 的值为 ( )

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. "$\alpha>\frac{\pi}{6}$"是"$\alpha-\sin\alpha>\frac{\pi-3}{6}$"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$,若直线 $l:x+y+m=0$ 上有且只有一个点 P 满足:过点 P 作圆 C 的两条切线 PM,PN,切点分别为 M,N,且使得四边形 $PMCN$ 为正方形,则正实数 m 的值为 ( )

A. 1　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 7

6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,$g(x)=xf(x)$,若 $a=g(-\log_2 5.1)$,$b=g(3)$,$c=g(2^{0.8})$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

7. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点关于渐近线的对称点在双曲线 E 上,则双曲线 E 的离心率为 ( )

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 英国数学家牛顿在 17 世纪给出一种求方程近似根的方法—*Newton-Raphson method* 译为牛顿-拉夫森法.做法如下:设 r 是 $f(x)=0$ 的根,选取 x_0 作为 r 的初始近似值,对点 $(x_0,f(x_0))$ 做曲线 $y=f(x)$ 的切线 $l:y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,则 l 与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}(f'(x_0)\neq 0)$,称 x_1 是 r 的一次近似值;重复以上过程,得 r 的近似值序列,其中 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(f'(x_n)\neq 0)$,称 x_{n+1} 是 r 的 $n+1$ 次近似值.运用上述方法,并规定初始近似值不得超过零点大小,则函数 $f(x)=\ln x+x-3$ 的零点一次近拟值为(精确到小数点后 3 位.参考数据:$\ln 2=0.693$) ( )

A. 2.207　　B. 2.208　　C. 2.205　　D. 2.204

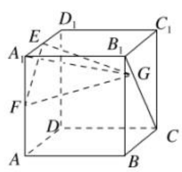
9. 如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别为棱 A_1D_1、AA_1 的中点,G 为线段 B_1C 上一个动点,则下列错误的是 ( )

A. 存在点 G,使直线 $B_1C\perp$ 平面 EFG

B. 存在点 G,使平面 EFG∥平面 BDC_1

C. 三棱锥 A_1-EFG 的体积为定值

D. 平面 EFG 截正方形所得截面的最大面积为 $\frac{9}{8}$



10. 平面内到两定点距离之积为常数的点的轨迹为卡西尼卵形线，它是1675年卡西尼在研究土星及其卫星的运行规律时发现的，已知在平面直角坐标系 xOy 中，$M(-2,0)$，$N(2,0)$，动点 P 满足 $|PM|\cdot|PN|=5$，则下列结论正确的是（　　）

A. 点 P 的横坐标的取值范围是 $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

B. $|OP|$ 的取值范围是 $[1,3]$

C. $\triangle PMN$ 面积的最大值为5

D. $|PM|+|PN|$ 的取值范围是 $[2\sqrt{5},5]$

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分）

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=2$，且 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}=\frac{5}{4}$，则 a_1+a_3 的值为________.

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，它的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，若 $\boldsymbol{m}=(1,0)$，$\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3})$，则 $|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=$________.

13. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$ 的零点依次构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 是________函数.（填奇、偶、非奇非偶）

14. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A、B 两点，若 $|AF|=\lambda|BF|=\lambda$，则 $\lambda=$________.

15. 对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a,b]\subseteq D$ 使得 $f(x)$ 同时满足：① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数；②当 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$ 时，$f(x)$ 的值域也为 $[a,b]$，则称区间 $[a,b]$ 为该函数的一个"和谐区间"，M 则下列正确的序号是________.

①函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x$ 有3个"和谐区间"

②函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$，$x\in[0,+\infty]$ 存在"和谐区间"

③若定义在 $(3,12)$ 上的函数 $f(x)=\frac{2tx-4t-9}{x-2}$ 有"和谐区间"，则 t 的取值范围为 $(4,6)$

④若函数 $f(x)=m-\sqrt{x+3}$ 在定义域内有"和谐区间"，则 m 的取值范围为 $\left(-\frac{9}{4},-2\right]$

三、解答题（共6小题，共85分。解答应写出文字说明.演算步骤或证明过程.）

16. （本小题满分13分）在① $2a\cos C+c=2b$，② $\cos^2\frac{B-C}{2}-\cos B\cos C=\frac{3}{4}$，③ $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2A+3\sin B\sin C$ 这三个条件中任选一个补充在下面的横线上，并加以解答.

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且________.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=2$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

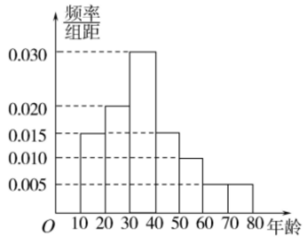
17.(本小题满分 13 分)

阅读对人的成长影响是巨大的,一个人的精神发展史,在一定意义上就是他本人的阅读史,而一个民族的精神境界,在很大程度上取决于全民族的阅读水平,为了倡导全民阅读,1995 年,联合国教科文组织宣布,每年的 4 月 23 日为“世界读书日”.在今年的“世界读书日”来临之际,某书店为了了解市民阅读情况,在某小区随机抽取了 40 名居民,为他们的年龄分成 7 段,$[10,20)$、$[20,30)$、$[30,40)$、$[40,50)$、$[50,60)$、$[60,70)$、$[70,80]$,得到如图所示的概率分布直方图.

(1)求这 40 名居民中年龄不低于 70 岁的人数;

(2)①若从样本中年龄在 40 岁及以上的居民中任取 4 名赠送图书,求这 4 名居民中至少有 1 人年龄不低于 70 岁的概率;

②该书店采用抽奖方式来提升购书意愿,将某特定书籍售价提高 10 元,且允许购买此特定书籍的居民抽奖 3 次.规定中奖 1 次、2 次、3 次分别奖现金 x 元、$2x$ 元、$3x$ 元,且居民每次中奖的概率均为 $\frac{1}{5}$.若要使抽奖方案对该书店有利,则奖金 x 最高可定为多少元?(结果精确到个位数).

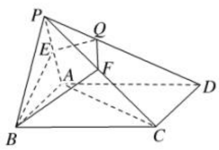


18.(本小题满分 14 分)

如图,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形,侧面 PAB 是等边三角形,$BC=2AB$,$AC=\sqrt{3}AB$,$PB\perp AC$.

(1)求证:平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$;

(2)设 Q 为侧棱 PD 上一点,四边形 $BEQF$ 是过 B,Q 两点的截面,且 $AC/\!/$平面 $BEQF$,是否存在点 Q,使得平面 $BEQF\perp$ 平面 PAD?若存在,求 $\frac{PQ}{QD}$ 的值;若不存在,说明理由.



19.(本小题满分 15 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,F 为椭圆的右焦点,A 为椭圆的下顶点,A 与圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 上任意点距离的最大值为 $3+\sqrt{3}$.

(1)求椭圆的方程;

(2)设点 D 在直线 $x=1$ 上,过 D 的两条直线分别交椭圆于 M,N 两点和 P,Q 两点,点 F 到直线 MN 和 PQ 的距离相等,是否存在实数 λ,使得 $|DM|\cdot|DN|=\lambda|DP|\cdot|DQ|$?若存在,求出 λ 的值,若不存在,请说明理由.

20.(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=x-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 单调性;

(2)若 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立,求实数 a 的值;

(3)若 $x_1>0$,$x_2>0$,$e^{x_1}+\ln x_2>x_1+x_2$,证明:$e^{x_1}+x_2>2$.

21.(本小题满分 15 分)

已知数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的各项均为整数,且以任意 $i=1,2,\cdots,N-1$,都有 $|a_{i+1}-a_i|=1$.将 A 的所有项之和记为 $S(A)$.

(1)若 $N=5, a_1=-2$,求 $S(A)$ 的最大值;

(2)若 $N=2026$,问:$S(A)$ 是否可以为零,请说明理由;

(3)设 $N=15$,将所有符合题意且 $S(A)=0$ 的数列 A 的总个数记为 M,判断 M 是否为 4 的倍数,并说明理由.