week2

SmpaelFx

2024 年 10 月 10 日

1 思路

不难发现，这是一道推式子题：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lfloor\frac{n}{max(i,j)}\rfloor[(i,j)=1]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left([(i,j)=1]\sum_{1\leqslant ik,jk\leqslant n}1\right) \tag{1}$$

设 $ik=p,jk=q$，则

$$原式=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k|(p,q)}[\left(\frac{p}{k},\frac{q}{k}\right)=1] \tag{2}$$

不难发现，当且仅当 $k=(p,q)$ 时，$\left(\frac{p}{k},\frac{q}{k}\right)=1$。

证明. 充分性：

考虑反证，假设 $\left(\frac{p}{k},\frac{q}{k}\right)=n\neq 1$

则 $n\mid\frac{p}{k},n\mid\frac{q}{k}$

则 $nk\mid p,nk\mid q$

则 nk 是 p,q 的公约数，则有 $nk\mid k$，矛盾。

必要性：

仍考虑反证，假设存在 $a|k$ 且 $a\neq k$ 的 a 满足 $\left(\frac{p}{a},\frac{q}{a}\right)=1$，设 $ma=k(n\neq 1)$

则 $\frac{p}{a}=\frac{mp}{k},\frac{q}{a}=\frac{mq}{k}$

则 $\left(\frac{p}{a},\frac{q}{a}\right)=m\left(\frac{p}{k},\frac{q}{k}\right)=m\neq 1$，矛盾。 □

因此 $\sum_{k|(p,q)}[\left(\frac{p}{k},\frac{q}{k}\right)=1]=1$，则

$$原式=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}1=n^2 \tag{3}$$

2 代码

（被顶到下一页了）

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll n;
int main(){
    scanf("%lld",&n);
    printf("%lld",n*n);
    return 0;
}
```