Week1

SmpaelFx

2024 年 9 月 29 日

1 物理

1.1 无空气阻力

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1}$$

解得轨迹为

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} \tag{2}$$

v_0 与 θ 的关系比较复杂，这里地方太小，我写不下。

1.2 有空气阻力

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_x = -kv_x & (3) \\ \dfrac{d}{dt}v_y = -kv_y - g & (4) \end{cases}$$

由 (3)，

$$dv_x = -kv_x dt \tag{5}$$

$$\frac{1}{v_x} dv_x = -kdt \tag{6}$$

两边同时积分，

$$\int \frac{1}{v_x} dv_x = \int -kdt \tag{7}$$

$$\ln|v_x| = -kt \tag{8}$$

$$v_x = C_1 e^{-kt} \tag{9}$$

$\because t = 0 \;\; v_x = v_0 \cos\theta$
$\therefore C_1 = v_0 \cos\theta$

$$v_x = v_0 \cos\theta e^{-kt} \tag{10}$$

两侧同时对 t 积分

$$\begin{aligned} x &= \int_0^T v_0 \cos\theta e^{-kt} dt \\ &= \left(-\frac{v_0 \cos\theta e^{-kt}}{k} \right) \Big|_0^T \\ &= -\frac{v_0 \cos\theta e^{-kT}}{k} + \frac{v_0 \cos\theta}{k} \\ &= \frac{v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-kT}\right)}{k} \end{aligned} \tag{11}$$

由 (4)，
两侧同时对 t 求导

$$\frac{d}{dt} a_y = -k a_y \tag{12}$$

同理 (3)，解得

$$a_y = C_2 e^{-kt} \tag{13}$$

$\because t = 0 \;\; a_y = -k v_0 \sin\theta - g$
$\therefore C_2 = -k v_0 \sin\theta - g$

$$a_y = (-k v_0 \sin\theta - g) e^{-kt} \tag{14}$$

两侧同时对 t 积分

$$v_y = (v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}) e^{-kt} + C_3 \tag{15}$$

$\because t = 0 \;\; v_y = v_0 \sin\theta$
$\therefore v_0 \sin\theta + \frac{g}{k} + C_3 = v_0 \sin\theta$
$\therefore C_3 = -\frac{g}{k}$

$$v_y = (v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}) e^{-kt} - \frac{g}{k} \tag{16}$$

两侧同时对 t 积分

$$
\begin{aligned}
y &= \int_0^T \left((v_0\sin\theta+\frac{g}{k})e^{-kt}-\frac{g}{k}\right)dt \\
&= \left(-\frac{(v_0\sin\theta+\frac{g}{k})e^{-kt}+gt}{k}\right)\Big|_0^T \\
&= \frac{\left(v_0\sin\theta+\frac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kT}\right)-gT}{k}
\end{aligned} \tag{17}
$$

联立 (11) 与 (17) 得

$$
\begin{cases}
x=\frac{v_0\cos\theta\left(1-e^{-kt}\right)}{k}\\
y=\frac{\left(v_0\sin\theta+\frac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right)-gt}{k}
\end{cases} \tag{18}
$$

解得轨迹

$$
y=\frac{k\tan\theta x+\frac{gx}{v_0\cos\theta}+\frac{g\ln\left(1-\frac{kx}{v_0\cos\theta}\right)}{k}}{k} \tag{19}
$$

应该也能解出来范围，但这里地方太小，我写不下。