西安邮电大学 2019----2020 学年第一学期期末试题（B）卷

参考答案

课程：概率论与数理统计 类型：B 卷 专业、年级:网络、智能、电子等 18 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	32	56	12							100

一、填空题(本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

1. 0.3. 2. $\frac{19}{27}$. 3. $\frac{1}{9}$. 4.. $\frac{1}{2e}$. 5. $\frac{1}{2}$. 6. $\frac{1}{20}$. 7.2. 8. $\frac{1}{4}$.

二、计算题（本大题共 7 小题，每小题 8 分，共 56 分）

1.设事件 A_i 表示“任挑一箱是第 i 条箱”，B_i 表示“第 i 次取到的零件是一等品”，其中 $i=1,2$. 因为“第一次取的零件是一等品”发生的原因有:此一等品可能是第一箱的零件，也可能是第二箱的零件，因此 A_1, A_2 是 B_1 发生的原因，故 A_1, A_2 是样本空间 S 的一个划分，且 $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$. 由题设有

$$P(B_1\mid A_1)=\frac{C_{10}^1}{C_{50}^1}=\frac{1}{5},\ P(B_1\mid A_2)=\frac{C_{18}^1}{C_{30}^1}=\frac{3}{5}.$$

由全概率公式得第一次取得零件是一等品的概率为

$$P(B_1)=P(A_1)\cdot P(B_1\mid A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1\mid A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$ (4 分)

由条件概率及全概率公式有

$$P(B_2\mid B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{P(A_1)P(B_1B_2\mid A_1)+P(A_2)P(B_1B_2\mid A_2)}{P(B_1)}$$

$$=\frac{5}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}\right]=\frac{690}{1241}.$$ (8 分)

2.由分布函数的性质得

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(A+Be^{-\frac{x^2}{2}})=A=1$$

又根据连续型随机变量分布函数的连续性得

$$\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0+}(A+Be^{-\frac{x^2}{2}})=A+B=\lim_{x\to 0-}F(x)=0$$

故所求 $A=1$，$B=-1$. (4 分)

再根据已知条件

$$P\{-1<X<1\}=P\{X<1\}-P\{X\le -1\}=F(1^-)-F(-1)$$

又 X 是连续型随机变量，所以 $F(x)$ 是连续函数，故 $F(1^-)=F(1)$，从而

$$P\{-1<X<1\}=F(1)-F(-1)=(1-e^{-\frac{1}{2}})-0=1-\frac{1}{\sqrt{e}}$$

根据分布函数与概率密度的关系，所求求概率密度

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ (8 分)

3.随机变量 X、Y 的取值均为 1，2，3，4，由条件概率公式得

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}=\frac{1}{4}\times 0=0.$$

类似可求得当 $j\le i$ 时，

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\big|X=i\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i},$$

当 $j>i$ 时

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\big|X=i\}=0.$$ (4 分)

于是 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律为

X \ Y	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$p_{\cdot j}$	25/48	13/48	7/48	3/48	

(8 分)

4.用 X 表示在某时刻开工的车床数，根据题设条件可知：$X\sim B(200,0.6)$. 假设需要 M 千瓦的电力就能以 99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产，故应有 $P\{15X\le M\}\ge 0.999$. 又

$$P\{15X\le M\}=P\{X\le\frac{M}{15}\}=P\{\frac{X-120}{\sqrt{48}}\le\frac{M/15-120}{\sqrt{48}}\}\approx\Phi(\frac{M/15-120}{\sqrt{48}}),$$ (4 分)

欲使 $P\{15X\le M\}\ge 0.99900$，只要

$$\frac{M/15-120}{\sqrt{48}}\ge 3.09,$$

解得 $M\ge 15(120+3.09\sqrt{48})\approx 2121.1$. 因此应供应 2121.1 千瓦电力就能以 99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产. (8 分)

5. 总体均值

$$E(X)=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$$

样本均值

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\times\left(3+1+3+0+3+1+2+3\right)=2.$$

说明：1．标准答案务必要正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

令$E(X)=\bar{x}$，即： $3-4\theta=2$，解得θ的矩估计值为$\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.　(4 分)

对于给定的样本值， $X=0$(1 个)，1(2 个)，2(1 个)，3(4 个)，似然函数为

$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$，

取对数

$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$，

令

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0,$$

解得$\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，舍去$\theta_1=\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$，故$\theta$的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.　(8 分)

6.对于给定的置信水平为$1-\alpha=0.95,\ \alpha=0.05,\ n=100$,.$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$. 于是由已知条件

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=80-\frac{12}{\sqrt{100}}\times1.96\approx77.65,$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=80+\frac{12}{\sqrt{100}}\times1.96\approx82.35.$$　(4 分)

因此该地旅游者平均消费额μ的置信水平为 0.95 的置信区间为(77.65, 82.35)，即在已知$\sigma=12$情形下，可以 95%的置信度认为每个旅游者的平均消费额在 77.65 元至 82.35 元之间.　(8 分)

7.根据题意，待检假设 $H_0:\mu=1600$，$H_1:\mu\neq1600$. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{25}$来自正态总体$N(1600,\sigma^2)$的一个样本，则$\frac{\bar{X}-1600}{150/\sqrt{25}}\sim t(24)$. 选取统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$　(4 分)

对于给定的$\alpha=0.05$，可确定$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(24)=2.06$，统计量的观测值$|t|=\left|\frac{1654-1600}{150/\sqrt{25}}\right|=1.8<2.06$. 由$T$ 统计量检验法知，在显著性水平$\alpha=0.05$下，可认为这批灯泡的平均寿命等于 1600 小时.　(8 分)

三、综合解答题（本大题满分 12 分，解答应写出推理，演算步骤）

由已知

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\quad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{1}{6}$$

于是$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{6}$，,$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$，

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$，

$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3}$，

因此(X,Y)的概率分布

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(6 分)

(2) 容易得到X，Y 的概率分布分别为

X	0	1
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
概率	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

从而$E(X)=\frac{1}{4}$，$D(X)=\frac{3}{16}$，$E(Y)=\frac{1}{6}$，$D(Y)=\frac{5}{36}$，$E(XY)=\frac{1}{12}$. 因此X 与Y 的相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

(10 分)

又因为

(X,Y)	(0，0)	(0，1)	(1，0)	(1，1)
X^2+Y^2	0	1	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

所以Z 概率分布

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

(12 分)