装 订 线　　班内序号______　学号______　姓名______　专业班级______　装 订 线

西安邮电大学期中考试试题 (A 卷)

(2023—2024 学年第二学期)

课程名称：高等数学 A2

考试专业、年级：通工、电子、计算机、自动化等专业 2023 级

考核方式：　闭卷　　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

得分______一、判断题：每小题 2 分，共 8 分. 请在试题预留的括号内对正确陈述打“√”，对错误陈述打“×”.

1、 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.（　　）

2、 若二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，则函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 连续.（　　）

3、 在点 $(1,-2)$ 处，函数 $z=xy^3$ 沿向量 $\vec{l}=(-2,3)$ 的方向的方向导数最大.（　　）

4、 设 D 是由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 所围成的有界闭区域，则 $\iint_D x^3y^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.（　　）

得分______二、填空题：每小题 2 分，共 8 分.

5、 函数 $f(x,y)=\sqrt{x-y}+\ln(x+y)$ 的定义域为 ________________.

6、 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=$ ________________.

7、 函数 $z=y^{xy+1}$ 的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$ ________________.

8、 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________________，其中 D 是由直线 $y=0$、$y=x$ 及圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}\,(x\ge0)$ 所围成的有界闭区域.

得分______三、选择题：每小题 2 分，共 10 分. 下列每小题给出的四个选项 A、B、C、D 中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

9、 与两平行平面 $x-2y+2z+1=0$ 与 $x-2y+2z+5=0$ 平行且等距离的平面方程为(　　)

A. $x-2y+2z+3=0$；　　B. $x-2y+2z-3=0$；

C. $x-2y+2z+2=0$；　　D. $x-2y+2z-2=0$.

10、 直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+5}{-1}$ 与平面 $\pi:x+y+4z=0$ 的位置关系为（　　）

A. L 平行于 π；　B. L 在 π 上；　C. L 垂直于 π；　D. L 斜交于 π.

11、 在空间直角坐标系中，$y=2-x^2-z^2$ 的图形是一张（　　）

A. 圆柱面；　B. 旋转抛物面；　C. 球面；　D. 圆锥面.

12、 设二元函数 $f(x,y)=\ln\left(x+|\sin x\sin y|\right)$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 不存在；　B. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 存在；

C. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 存在；　D. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 不存在.

13、 设二元函数 $f(x,y)=x\left(\sqrt[3]{y}+1\right)$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；　B. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续但 $f_y(0,0)$ 不存在；

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微；　D. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微但 $f_y(0,0)$ 存在.

学号______ 姓名______ 专业班级______

得分______四、解答题：每小题 6 分，共 42 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______14、计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$.

得分______15、设 $y^2+z^2+x^2-2x=0\ (x\neq 1)$，求 $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}$.

得分______16、设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，$z=f(x-y,x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

得分______17、求 $u=x^2+y\sin z$ 在点 $(1,\ 2,\ 0)$ 处沿从该点到点 $(2,\ 3,\ \sqrt{2})$ 的方向的方向导数.

得分______18、计算二重积分 $\iint_D 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 与直线 $y=0$ 及 $y=1$ 所围成的有界闭区域.

得分______19、 求曲线 $\begin{cases} z=x^3y, \\ y=1 \end{cases}$ 上点 $M(1,1,1)$ 处的切线和法平面方程.

得分______20、 求曲面 $\mathrm{e}^x-x+yz=3$ 上点 $P(0,1,2)$ 处的切平面和法线方程.

专业班级________　姓名________　学号________

得分______五、解答题：每小题 8 分，共 24 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______21、求函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+3y^2-y^3}$ 的极值.

得分______22、 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\Phi(x-2z,y-3z)=0$ 所确定的隐函数，其中函数 $\Phi(u,v)$ 具有一阶连续的偏导数，试求 $2\dfrac{\partial z}{\partial x}+3\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

得分______23、求内接于椭球面 $4x^2+y^2+z^2=12$ 的体积最大的长方体的体积.

得分______六、证明题：共 8 分．证明应写出文字说明及证明过程．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______24、设 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值 $f(0,0)=0$ ，其中 a,b,c 为常数，试证： $f(0,0)=0$ 为函数 $f(x,y)$ 的最小值.

西安邮电大学 2023----2024 学年第二学期期中试题（A）卷

标准答案

课程： 高等数学 A2 **类型：** A 卷 **专业、年级：** 通工、电子、计科、自动化等专业 2023 级

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分	8	8	10	42	24	8	100

一、 判断题(每小题 2 分，共 8 分)

1、×； 2、√； 3、√； 4、√．

二、 填空题（每小题 2 分，共 8 分）

5、$\{(x,y)\,|\,x-y\geq 0,\ x+y>0\}$； 6、0； 7、$16\ln 2\mathrm{d}x+(12+8\ln 2)\mathrm{d}y$； 8、$\dfrac{\pi}{12}$．

三、 选择题(每小题 2 分，共 10 分)

9、A； 10、A； 11、B； 12、A； 13、C．

四、 解答题 (每小题 6 分，共 42 分)

14、**解：** $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}x=2$．

15、**解：** $2y+(2x-2)\dfrac{\partial x}{\partial y}=0$，$2+2\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2+(2x-2)\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\dfrac{(1-x)^2+y^2}{(1-x)^3}$．

16、**解：** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 1=f_1'+f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot 1+f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot 1=f_{22}''-f_{11}''.$$

17、**解：** $\nabla z\big|_{(1,2,0)}=(2x,\ \sin z,\ y\cos z)\big|_{(1,2,0)}=(2,\ 0,\ 2)$．又 $\boldsymbol{l}=(1,\ 1,\ \sqrt{2})$，故所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,2,0)}=\nabla u\big|_{(1,2,0)}\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=(2,\ 0,\ 2)\cdot\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+\sqrt{2}.$$

18、 **解：** 在 D 上，$-\sqrt{1+y^2}\leq x\leq\sqrt{1+y^2}$，$0\leq y\leq 1$．所以

$$\iint_D 3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 3y\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 6y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y=2\left(1+y^2\right)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$=4\sqrt{2}-2.$$

19、 **解：** 令 $x=t$，则 $y=1$，$z=t^3$，且在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处，$t=1$．从而切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\left(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\right)\big|_{t=1}=\left(1,\ 0,\ 3t^2\right)\big|_{t=1}=(1,\ 0,\ 3),$$

故切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{3},$$

而法平面方程为 $(x-1)+3(z-1)=0$，即 $x+3z-4=0$．

20、 **解：** 令 $F(x,\ y,\ z)=\mathrm{e}^x-x+yz$，则法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(F_x,\ F_y,\ F_z\right)\big|_{(0,1,2)}=\left(\mathrm{e}^x-1,\ z,\ y\right)\big|_{(0,1,2)}=(0,\ 2,\ 1),$$

故切平面方程为 $2(y-1)+(z-2)=0$，即 $2y+z-4=0$，而法线方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

五、解答题（每小题 8 分，共 24 分）

21、 **解：** 令 $u=x^2+3y^2-y^3$，则

$$u_x=2x,\quad u_y=6y-3y^2.$$

解方程组

$$\begin{cases}2x=0,\\ 6y-3y^2=0,\end{cases}$$

得驻点为 $(0,\ 0)$ 及 $(0,\ 2)$．

说明：1．标准答案务必要正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

再求二阶偏导数，得 $u_{xx}=2$，$u_{xy}=0$，$u_{yy}=6-6y$．由列表分析：

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$
$(0,0)$	2	0	6	12
$(0,2)$	2	0	-6	-12

故 $u(0,0)=0$ 为极小值，且函数 $u=x^2+3y^2-y^3$ 无其他极值，从而 $f(0,0)=0$ 为函数 $f(x,y)$ 极小值，且函数 $f(x,y)$ 无其他极值.

22、 **解**：令 $F(x,y,z)=\Phi(x-2z,y-3z)$，则 $F_x=\Phi_1'$，$F_y=\Phi_2'$，$F_z=-(2\Phi_1'+3\Phi_2')$．于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\Phi_1'}{2\Phi_1'+3\Phi_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\Phi_2'}{2\Phi_1'+3\Phi_2'}.$$

故

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=2\cdot\frac{\Phi_1'}{2\Phi_1'+3\Phi_2'}+3\cdot\frac{\Phi_2'}{2\Phi_1'+3\Phi_2'}=\frac{2\Phi_1'+3\Phi_2'}{2\Phi_1'+3\Phi_2'}=1.$$

23、**解**：设长方体位于第一卦限的顶点为 (x,y,z)，则长方体的体积为

$$V=8xyz\quad(x>0.y>0,z>0),$$

且 $4x^2+y^2+z^2=12$.

令 $L=8xyz+\lambda(4x^2+y^2+z^2-12)$，则 $L_x=8yz+8\lambda x$，$L_y=8xz+2\lambda y$，$L_z=8xy+2\lambda z$.

解方程组

$$\begin{cases}8yz+8\lambda x=0,\\8xz+2\lambda y=0,\\8xy+2\lambda z=0,\\4x^2+y^2+z^2=12,\end{cases}$$

得 $x=1,\ y=2,\ z=2$．因此所求体积最大的内接长方体的体积为 $V=8\times1\times2\times2=32$.

六、证明题（共 8 分）

24、**证**：由 $f(0,0)=0$ 为极小值知，存在点 $(0,0)$ 的一个邻域 U，使得在相应的去心邻域 U° 内，恒有

$$f(x,y)>f(0,0)=0.$$

对 U 外的任一点 (x_1,y_1)，在该点与点 $(0,0)$ 的连线上取一点 (x_2,y_2)，使它位于 U° 内，则

$$f(x_2,y_2)>f(0,0)=0.$$

由于点 $(0,0)$、(x_1,y_1) 及 (x_2,y_2) 共线，故可设 $x_1=tx_2$，$y_1=ty_2\ (t\neq0)$，于是

$$f(x_1,y_1)=t^2f(x_2,y_2)>0=f(0,0),$$

综上所述，$f(x,y)\geq f(0,0)$ 且等号仅在 $(x,y)=(0,0)$ 成立，即 $f(0,0)=0$ 为最小值.

装　订　线

班内序号＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　专业班级＿＿＿＿

装　订　线

西安邮电大学期中考试试题 (B 卷)

(2023—2024 学年第二学期)

课程名称：高等数学 A2

考试专业、年级：通工、电子、计算机、自动化等专业 2023 级

考核方式：　闭卷　　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

得分＿＿＿一、判断题：每小题 2 分，共 8 分. 请在试题预留的括号内对正确陈述打“√”，对错误陈述打“×”.

1、 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.（　　）

2、 若二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 存在，则函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续.（　　）

3、 在点 $(1,-2)$ 处，函数 $z=x^2y$ 沿向量 $\vec{l}=(8,\ -2)$ 的方向的方向导数最小.（　　）

4、 设 D 是由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $x=1$ 所围成的有界闭区域，则 $\iint_D x^2y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.（　　）

得分＿＿＿二、填空题：每小题 2 分，共 8 分.

5、 函数 $f(x,y)=\sqrt{x+y}+\ln(x-y)$ 的定义域为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

6、 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

7、 函数 $z=x^{xy+1}$ 的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(2,1)}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

8、 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，其中 D 是由直线 $x=0$ 、 $y=x$ 及圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}\ (x\ge 0)$ 所围成的有界闭区域.

得分＿＿＿三、选择题：每小题 2 分，共 10 分. 下列每小题给出的四个选项 A、B、C、D 中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

9、 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 与 $L_2:\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$，则与它们平行且等距离的平面方程为(　　)

A. $5x+2y+z+1=0$；　　B. $5x-2y+z+1=0$；

C. $5x+2y-z+1=0$；　　D. $5x+2y+z-1=0$.

10、 直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+5}{-1}$ 与平面 $\pi:x+y+4z+16=0$ 的位置关系为（　　）

A. L 平行于 π；　B. L 在 π 上；　C. L 垂直于 π；　D. L 斜交于 π.

11、 在空间直角坐标系中，$x=2-y^2-z^2$ 的图形是一张（　　）

A. 圆柱面；　B. 旋转抛物面；　C. 球面；　D. 圆锥面.

12、 设二元函数 $f(x,y)=\ln(x+|xy|)$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 不存在；　B. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 存在；

C. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 存在；　D. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ 不存在.

13、 设二元函数 $f(x,y)=y\left(\sqrt[3]{x}+1\right)$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；　B. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续但 $f_x(0,0)$ 不存在；

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微；　D. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微但 $f_x(0,0)$ 存在.

专业班级____________ 姓名____________ 学号____________

得分______四、解答题：每小题 6 分，共 42 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______14、计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}$.

得分______15、设 $x^2+z^2+y^2-2y=0\ (y\neq 1)$，求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

得分______16、设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，$z=f(x+y,x-y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

得分______17、求 $u=x^2+z\sin y$ 在点 $(1,\ 0,\ 2)$ 处沿从该点到点 $(2,\ \sqrt{2},\ 3)$ 的方向的方向导数.

得分______18、计算二重积分 $\iint_D 3x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由双曲线 $y^2-x^2=1$ 与直线 $x=0$ 及 $x=1$ 所围成的有界闭区域.

得分______19、 求曲线 $\begin{cases} z=xy^3, \\ x=1 \end{cases}$ 上点 $M(1,1,1)$ 处的切线和法平面方程.

得分______20、 求曲面 $\mathrm{e}^y-y+xz=3$ 上点 $P(1,0,2)$ 处的切平面和法线方程.

得分______五、解答题：每小题 8 分，共 24 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______21、求函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{3x^2+y^2-x^3}$ 的极值.

得分______22、 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\Phi(x-4z,y-5z)=0$ 所确定的隐函数，其中函数 $\Phi(u,v)$ 具有一阶连续的偏导数，试求 $4\dfrac{\partial z}{\partial x}+5\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

得分______23、求内接于椭球面 $x^2+4y^2+z^2=12$ 的体积最大的长方体的体积.

得分______六、证明题：共 8 分．证明应写出文字说明及证明过程．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______24、设 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值 $f(0,0)=0$，其中 a,b,c 为常数，试证：$f(0,0)=0$ 为函数 $f(x,y)$ 的最大值.

专业班级________ 姓名________ 学号________

装　订　线

西安邮电大学试题卷标准答案专用纸

西安邮电大学 2023----2024 学年第二学期期中试题（B）卷

标准答案

课程： 高等数学 A2 **类型：** B 卷 **专业、年级：** 通工、电子、计科、自动化等专业 2023 级

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分	8	8	10	42	24	8	100

一、 判断题(每小题 2 分，共 8 分)

1、×； 2、√； 3、√； 4、√.

二、 填空题（每小题 2 分，共 8 分）

5、$\{(x,y)\,|\,x+y\ge 0,\ x-y>0\}$； 6、0； 7、$(12+8\ln 2)\mathrm{d}x+16\ln 2\mathrm{d}y$； 8、$\dfrac{\pi}{12}$.

三、 选择题(每小题 2 分，共 10 分)

9、A； 10、B； 11、B； 12、A； 13、C.

四、 解答题 (每小题 6 分，共 42 分)

14、**解：** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{xy}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y=2$.

15、**解：** $2x+(2y-2)\dfrac{\partial y}{\partial x}=0$，$2+2\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(2y-2)\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{(1-y)^2+x^2}{(1-y)^3}$.

16、**解：** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 1=f_1'+f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)=f_{11}''-f_{22}''.$$

17、**解** $\nabla u\big|_{(1,0,2)}=(2x,\ z\cos y,\ \sin y)\big|_{(1,0,2)}=(2,\ 2,\ 0)$. 又 $\boldsymbol{l}=(1,\ \sqrt{2},\ 1)$，故所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,1,0)}=\nabla u\big|_{(2,1,0)}\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=(2,\ 2,\ 0)\cdot\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right)=1+\sqrt{2}.$$

18、 **解：** 在 D 上，$-\sqrt{1+x^2}\le y\le\sqrt{1+x^2}$，$0\le x\le 1$. 所以

$$\iint_D 3x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 3x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 6x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=2\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$=4\sqrt{2}-2.$$

19、 **解：** 令 $y=t$，则 $x=1$，$z=t^3$，且在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处，$t=1$. 从而切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\left(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\right)\big|_{t=1}=\left(0,\ 1,\ 3t^2\right)\big|_{t=1}=(0,\ 1,\ 3),$$

故切线方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3},$$

而法平面方程为 $(y-1)+3(z-1)=0$，即 $y+3z-4=0$.

20、 **解：** 令 $F(x,\ y,\ z)=\mathrm{e}^y-y+xz$，则法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(F_x,\ F_y,\ F_z\right)\big|_{(1,0,2)}=\left(z,\ \mathrm{e}^y-1,\ x\right)\big|_{(1,0,2)}=(2,\ 0,\ 1),$$

故切平面方程为 $2(x-1)+(z-2)=0$，即 $2x+z-4=0$，而法线方程为

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}.$$

五、解答题（每小题 8 分，共 24 分）

21、 **解：** 令 $u=3x^2+y^2-x^3$，则

$$u_x=6x-3x^2,\quad u_y=2y.$$

解方程组

$$\begin{cases}6x-3x^2=0,\\ 2y=0,\end{cases}$$

得驻点为 $(0,\ 0)$ 及 $(2,\ 0)$.

说明：1．标准答案务必要正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

再求二阶偏导数，得 $u_{xx}=6-6x$，$u_{xy}=0$，$u_{yy}=2$．由列表分析：

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$
$(0,0)$	6	0	2	12
$(2,0)$	-6	0	2	-12

故 $u(0,0)=0$ 为函数 $u=3x^2+y^2-x^3$ 的极小值，且 $u=3x^2+y^2-x^3$ 无其他极值，从而 $f(0,0)=0$ 为函数 $f(x,y)$ 的极小值，且函数 $f(x,y)$ 无其他极值．

22、 **解**：令 $F(x,y,z)=\Phi(x-4z,y-5z)$，则 $F_x=\Phi_1'$，$F_y=\Phi_2'$，$F_z=-(4\Phi_1'+5\Phi_2')$．于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\Phi_1'}{4\Phi_1'+5\Phi_2'}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\Phi_2'}{4\Phi_1'+5\Phi_2'}．$$

故

$$4\frac{\partial z}{\partial x}+5\frac{\partial z}{\partial y}=4\cdot\frac{\Phi_1'}{4\Phi_1'+5\Phi_2'}+5\cdot\frac{\Phi_2'}{4\Phi_1'+5\Phi_2'}=\frac{4\Phi_1'+5\Phi_2'}{4\Phi_1'+5\Phi_2'}=1．$$

23、**解**：设长方体位于第一卦限的顶点为 (x,y,z)，则长方体的体积为

$$V=8xyz\quad(x>0.y>0,z>0)，$$

且 $x^2+4y^2+z^2=12$．

令 $L=8xyz+\lambda(x^2+4y^2+z^2-12)$，则 $L_x=8yz+2\lambda x$，$L_y=8xz+8\lambda y$，$L_z=8xy+2\lambda z$．

解方程组

$$\begin{cases}8yz+2\lambda x=0,\\8xz+8\lambda y=0,\\8xy+2\lambda z=0,\\x^2+4y^2+z^2=12,\end{cases}$$

得 $x=2,\ y=1,\ z=2$．因此所求体积最大的内接长方体的体积为 $V=8\times2\times1\times2=32$．

六、证明题（共 8 分）

24、**证**：由 $f(0,0)=0$ 为极大值知，存在点 $(0,0)$ 的一个邻域 U，使得在相应的去心邻域 U° 内，恒有

$$f(x,y)<f(0,0)=0．$$

对 U 外的任一点 (x_1,y_1)，在该点与点 $(0,0)$ 的连线上取一点 (x_2,y_2)，使它位于 U° 内，则

$$f(x_2,y_2)<f(0,0)=0．$$

由于点 $(0,0)$、(x_1,y_1) 及 (x_2,y_2) 共线，故可设 $x_1=tx_2$，$y_1=ty_2\ (t\neq0)$，于是

$$f(x_1,y_1)=t^2f(x_2,y_2)<0=f(0,0),$$

综上所述， $f(x,y)\le f(0,0)$ 且等号仅在 $(x,y)=(0,0)$ 成立，即 $f(0,0)=0$ 为最大值．