装 订 线

班内序号＿＿＿＿

学号＿＿＿＿

姓名＿＿＿＿

专业班级＿＿＿＿

装 订 线

西安邮电大学期末考试试题 (A 卷)

(2022—2023 学年第二学期)

课程名称：高等数学 A2

考试专业、年级：通工、电子、计算机、自动化等专业 2022 级

考核方式：　闭卷　　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷人								

得分＿＿＿一、判断题：每小题 2 分，共 8 分. 请在试题预留的括号内对正确陈述打“√”，对错误陈述打“×”.

1、 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分与必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.（　　）

2、 如果 $f(x,y)\ge g(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}x\ge\int_L g(x,y)\mathrm{d}y$.（　　）

3、 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.（　　）

4、 设 Σ 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=4\,(0\le z\le 1)$ 的外侧，则 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.（　　）

得分＿＿＿二、填空题：每空 2 分，共 8 分．请将答案写在试题指定位置上.

5、 函数 $z=x^2+y^2$ 的全微分 $\mathrm{d}z=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

6、 函数 $z=xy^2-x$ 在点 $(1,2)$ 处的最大方向导数为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

7、 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{1+s}}$ 绝对收敛，则常数 s 的取值范围为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

8、 设 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$，则 $\oint_L\left[(x-1)^2+y^2\right]\mathrm{d}s=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

得分＿＿＿三、选择题：每小题 2 分，共 10 分. 下列每小题给出的四个选项 A、B、C、D 中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前面的字母填在试题预留的括号内.

9、 与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+5}{-1}$ 平行的平面的方程是（　　）

A. $2x+2y-z-13=0$；　　B. $x+y+4z-16=0$；

C. $2x+2y-z+13=0$；　　D. $x+y+4z+16=0$.

10、 xOz 面内的抛物线 $z=2+x^2$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面的方程是（　　）

A. $z=2+x^2+y^2$；　　B. $\sqrt{y^2+z^2}=2+x^2$；

C. $z=2+\sqrt{x^2+y^2}$；　　D. $\sqrt{x^2+z^2}=2+x^2$.

11、 设 Σ 为有向光滑曲面，则符号 $\iint_\Sigma f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示（　　）

A. 对坐标的曲面积分；　　B. 对面积的曲面积分；

C. 二重积分；　　D. 第一类曲面积分.

12、 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^{n-1}$ 的收敛域为（　　）

A. $[-1,1]$；　B. $(-1,1]$；　C. $[-1,1)$；　D. $(-1,1)$.

13、 设函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续；

B. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在；

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 偏导数存在但不可微；

D. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

专业班级______ 姓名______ 学号______

得分______四、解答题：每小题 6 分，共 24 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______14、计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin xy}{y}$.

得分______15、判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$的收敛性.

得分______16、设函数 $f(u,v)$具有二阶连续的偏导数， $z=f(x+y,x-y)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

得分______17、试将函数 $f(x)=\frac{1}{x+3}$展开为关于 x 的幂级数.

得分______五、解答题：每小题 6 分，共 18 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______18、计算$\iint\limits_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.

得分______19、 求曲面 $z=1-x^2-y^2\ \ (z\geq 0)$的面积.

得分______20、 求曲线 $x=t,\ y=t^2+t,\ z=t^3-2t$ 上点 $P(1,2,-1)$处的切线和法平面方程.

专业班级________ 姓名________ 学号________

得分______六、解答题：每小题 8 分，共 24 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______21、求函数 $z=3x^2+3y^2-y^3$ 的极值.

得分______22、 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱体 $\Omega: 0\le z\le 1$， $x^2+y^2\le 4$ 表面的外侧.

得分______23、一物体在力 $\boldsymbol{f}=\left(1+y\mathrm{e}^x\right)\boldsymbol{i}+\left(x+\mathrm{e}^x\right)\boldsymbol{j}$ 的作用下，从点 $A(1,0)$ 沿半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 运动至点 $B(-1,0)$，试计算力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功.

得分_____七、证明题：共 8 分．证明应写出文字说明及证明过程．请将答案写在试题预留的空白处．

24、设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$， $f'_+(0)=3$，试证：

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma=2\pi,$$

其中 D 是由圆 $x^2+y^2=t^2\,(t>0)$ 所围成的闭区域.

线　订　装

西安邮电大学试题卷标准答案专用纸

西安邮电大学 2022----2023 学年第二学期期末试题（A）卷

标准答案

课程： 高等数学 A2 **类型：** A 卷　**专业、年级：** 通工、电子、计科、自动化等专业 2022 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分	8	8	10	24	18	24	8	100

一、 判断题(每小题 2 分，共 8 分)

1、√； 2、×； 3、√； 4、√.

二、 填空题（每空 2 分，共 8 分）

5、$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$； 6、5； 7、$s>0$； 8、$2\pi$.

三、 选择题(每小题 2 分，共 10 分)

9、B； 10、A； 11、A； 12、C ；13、C.

四、 解答题 (每小题 6 分，共 24 分)

14、**解：** $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}x=2$. ························ 6 分

15、**解：** 这是一个正项级数，其一般项为 $u_n=\dfrac{n!}{n^n}\ (n=1,2,\cdots)$. ················ 1 分

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$ ························ 4 分

及正项级数的比值审敛法知所给级数收敛. ························ 1 分

16、**解：** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'$， ························ 3 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''+f_{12}''\cdot(-1)+f_{21}''+f_{22}''\cdot(-1)=f_{11}''-f_{22}''$. ························ 3 分

17、**解：** $f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{x}{3}\right)}$ ························ 2 分

$=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x}{3}\right)^n$ ························ 3 分

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n\quad(|x|<3)$ ························ 1 分

五、 解答题 (每小题 6 分，共 18 分)

18、**解：** 在 D 上，$0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x$， ························ 2 分

所以，

$\iint\limits_D(x+2y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(x+2y)\mathrm{d}y$ ························ 2 分

$=\int_0^2(4-2x)\mathrm{d}x=4$. ························ 2 分

19、 **解：** 求导，得 $z_x=-2x,\ z_y=-2y$. ························ 1 分

又，曲面在面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\le 1$， ························ 1 分

故所求面积为 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\dfrac{1}{12}\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$=\dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$. ························ 4 分

20、 **解：** 在点 $(1,2,-1)$ 处 $t=1$， ························ 1 分

从而切向量为 $\tau=\left(x'(t),y'(t),z'(t)_z\right)\big|_{t=1}=\left(1,2t+1,3t^2-2\right)\big|_{t=1}=(1,3,1)$. ························ 3 分

故切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{1}$， ························ 1 分

法平面方程为 $(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$，即 $x+3y+z-6=0$. ························ 1 分

说明：1．标准答案务必要正确无误。　2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

六、解答题（每小题 8 分，共 24 分）

21、由

$$\begin{cases} f_x = 6x = 0, \\ f_y = 6y - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

得驻点为$(0,0)$及$(0,2)$. ························ 2 分

再求二阶偏导，得 $f_{xx}=6,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=6-6y$. ························ 2 分

列表分析：

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$
$(0,0)$	6	0	6	36
$(0,2)$	6	0	-6	-36

故 $f(0,0)=0$ 为极小值，且函数无其他极值. ························ 4 分

22、**解**：由高斯公式，得

$$\oiint_{\Sigma} z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} 3z^2\mathrm{d}v,$$

·· 3 分

又，Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2 \le 4$，所以

$$\iiint_{\Omega} 3z^2\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^1 3z^2\mathrm{d}z$$

$$= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi. \quad \text{························ 4 分}$$

综上所述，

$$\oiint_{\Sigma} z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi. \quad \text{························ 1 分}$$

23、**解**：力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功为

$$W = \int_L (1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y. \quad \text{························ 1 分}$$

作有向线段 $\overline{BA}: y=0\ (x:-1\to 1)$，并记 L 与 $\overline{BA}$ 所围成的闭区域为 D，由格林公式，得

$$\oint_{L+\overline{BA}} (1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}. \quad \text{························ 4 分}$$

又

$$\int_{\overline{BA}} (1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x = 2, \quad \text{························ 2 分}$$

所以$W = \frac{\pi}{2} - 2$. ························ 1 分

七、证明题（共 8 分）

24、**证**：利用极坐标，D 可表示为$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le t$. 于是

$$\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho. \quad \text{························ 3 分}$$

故

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma = \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho}{t^3} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi f(t)t}{3t^2}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} = \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$$

$$= \frac{2\pi}{3}f'_+(0) = 2\pi. \quad \text{························ 5 分}$$