装 订 线

西安邮电大学试题卷参考答案及评分标准专用纸

西安邮电大学 2017-2018 学年第一学期期末试题（A）卷

参考答案及评分标准

课程：概率论与随机过程　　**类型：**A 卷

专业、年级：计算机科学与技术、软件工程、智能科学与技术、工商管理、工业工程，网络工程，16 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	16	16	45	23						100

一、选择题(每小题 4 分，共 16 分)

1. (D)　2. (B)　3. (D)　4 (B)

二、填空题(每小题 4 分，共 16 分)

1. 0.7　2. $\frac{1}{18}$.　3. 1.　4. 弃真(或第一类)

三、计算题(共 5 小题，每小题 9 分，共 45 分)

1.设 A_i 表示事件"第 i 家公司通知她去面试"，$(i=1,2,3,4)$，则

$$P(A_1)=\frac{1}{3},\ P(A_2)=\frac{1}{4},\ P(A_3)=\frac{1}{5},\ P(A_4)=\frac{1}{6}. \quad (4分)$$

根据题意，所求概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})=1-P(\bar A_1\bar A_2\bar A_3\bar A_4)$$
$$=1-P(\bar A_1)P(\bar A_2)P(\bar A_3)P(\bar A_4)$$
$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)][1-P(A_4)]$$
$$=1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{3}. \quad (9分)$$

2. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(A+\pi B\arctan x)=A+\frac{\pi^2}{2}B,$$
$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(A+\pi B\arctan x)=A-\frac{\pi^2}{2}B, \quad (4分)$$

再由分布函数的基本性质 $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$，$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$，得 $\begin{cases}A+\frac{\pi^2}{2}B=1,\\ A-\frac{\pi^2}{2}B=0,\end{cases}$ 即 $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi^2}$.　(7 分)

随机变量 X 落在区间 $(-1,1]$ 内的概率为

$$P\{-1<X\le 1\}=F(1)-F(-1)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1)-[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1)]=\frac{1}{2}.$$

随机变量 X 的概率密度

3.容易得到 $E(V_k)=5$，$D(V_k)=\frac{100}{12}$ $(k=1,2,\cdots,20)$. 根据中心极限定理，随机变量

$$\frac{\sum_{k=1}^{20}V_k-20\times5}{\sqrt{20}\times\sqrt{100/12}}=\frac{V-20\times5}{\sqrt{20}\sqrt{100/12}}$$

近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，　(4 分)

于是，

$$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{20}\times\sqrt{100/12}}>\frac{105-100}{\sqrt{20}\sqrt{100/12}}\}$$
$$=P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{20}\times\sqrt{100/12}}>\frac{\sqrt{15}}{10}\}=1-\Phi(\frac{\sqrt{15}}{10})=0.65,$$

即有 $P(V>105)=0.65$.　(9 分)

4.对于给定的置信水平为 $1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$, $n=100$. 由已知得 $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$. 于是由已知条件

$$\bar x-\frac{s}{\sqrt n}z_{\frac{\alpha}{2}}=82-\frac{12}{\sqrt{100}}\times1.96=79.65,$$
$$\bar x+\frac{s}{\sqrt n}z_{\frac{\alpha}{2}}=82+\frac{12}{\sqrt{100}}\times1.96=84.35. \quad (8分)$$

因此该地旅游者平均消费额 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为(79.65, 84.35)，即在已知 $\sigma=12$ 情形下，可以 95%的置信度认为每个旅游者的平均消费额在 79.65 元至 84.35 元之间.　(9 分)

5.由于 σ^2 未知，采用 T 检验法. 检验假设

$$H_0:\mu=\mu_0=50,\ H_1:\mu\ne50. \quad (3分)$$

选取检验统计量

$$T=\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}=\frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt n}\sim t(n-1) \quad (6分)$$

对于显著水平 $\alpha=0.05$，得 $t_{0.025}(8)=2.306$，拒绝域为 $|t|\ge t_{0.025}(8)=2.306$.

由样本值可计算 T 的观测值

$$|t|=\left|\frac{\bar x-50}{s/\sqrt n}\right|=\left|\frac{49.7-50}{0.36056/\sqrt9}\right|=2.496>2.306=t_{0.025}(8),$$

故应拒绝 H_0，即认为包装机工作非正常.　(9 分)

四、综合应用题(共 3 小题，共 23 分)

1. (本题满分 6 分)设事件 A 表示任取得一个零件是合格品，事件 B_i 表示零件是第 i 台机床加工的，$i=1,2$. 由题意知

$$P(B_1)=\frac{2}{3},\ P(B_2)=\frac{1}{3},\ P(A|B_1)=0.97,\ P(A|B_2)=0.98 \quad (3分)$$

由全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.98=\frac{73}{75}. \quad (5分)$$

由于

说明：1．参考答案及评分标准准确。　2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad (9\text{分})$$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{2}{75}$，$P(\bar{A} \mid B_2) = 1 - P(A \mid B_2) = 0.02$，

于是由条件概率公式得

$$P(B_2 \mid \bar{A}) = \frac{P(B_2\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B_2)P(\bar{A} \mid B_2)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{3}\times 0.02}{\frac{2}{75}} = \frac{1}{4}. \qquad (6\text{分})$$

2. (本题满分 6 分)

参数 p 的矩估计量.

总体 X 的一阶矩为

$$\mu_1 = E(X) = \lambda$$

令 $\mu_1 = A_1$，即 $\lambda = \bar{X}$，解之得参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_M = \bar{X}$. (4 分)

参数 p 最大似然估计量.

由于 X 的概率论密度为

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

故似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda) = -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

解得 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_L = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

极大似然估计量的方差为

$$D(\hat{\lambda}_L) = D(\bar{X}) = \frac{\lambda^2}{n} \qquad (6\text{分})$$

3. (本题满分 11 分)

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^1 A(x+y)dx = A,$$

根据概率密度 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ 得 $A = 1$. (3 分)

所求边缘概率论密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad (6\text{分})$$

根据 (X,Y) 的概率密度及数学期望的定义，有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 x\cdot(x+y)dxdy = \int_0^1 xdx\int_0^1 (x+y)dy = \frac{7}{12}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 x^2\cdot(x+y)dxdy = \int_0^1 x^2dx\int_0^1 (x+y)dy = \frac{5}{12}.$$

于是

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.$$

同理可得 $E(Y) = E(X) = \dfrac{7}{12}$，$D(Y) = D(X) = \dfrac{11}{144}$. 又

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xy\cdot(x+y)dxdy = \int_0^1 xdx\int_0^1 y(x+y)dy = \frac{1}{3}.$$

根据协方差的计算公式，有

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\times\frac{7}{12} = -\frac{1}{144}.$$

再由相关系数的定义，有

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}. \qquad (9\text{分})$$

又

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x+y)f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 w(x+y)(x+y)dx$$

$$= \int_0^1 dy\int_y^{1+y} w(z)zdz = \int_0^1 dz\int_0^z w(z)zdy + \int_1^2 dz\int_{z-1}^1 w(z)zdy$$

$$= \int_0^1 w(z)z^2dz + \int_1^2 w(z)z(2-z)dz,$$

所以随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 < z < 1, \\ z(2-z), & 1 \le z < 2, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \qquad (11\text{分})$$

说明：1．参考答案及评分标准准确。　　2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

说明：1．参考答案及评分标准准确。　　　　2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。