一、填空题

1、积分 $\int_{-4}^{2}(6-t^2)\ [\delta(t)+2\delta(2t+4)]\ dt =$ ______8______

知识点：① 冲激函数的尺度变换性质

② 冲激函数的抽样性质

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t),a\neq 0 \qquad \delta(at-b)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{b}{a}),a\neq 0$$

$$\int_{-4}^{2}(6-t^2)\delta(t)dt+\int_{-4}^{2}(6-t^2)2\delta(2t+4)dt$$

$$=6\int_{-4}^{2}\delta(t)dt+2\int_{-4}^{2}\delta(t+2)dt$$

$$=8$$

2、已知某 LTI 系统的冲激响应 $h(t)=\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$，激励 $f(t)=\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)$，该系统的零状态响应为 $\underline{(t-3)\varepsilon(t-3)-(t-4)\varepsilon(t-4)-(t-5)\varepsilon(t-5)+(t-6)\varepsilon(t-6)}$

知识点：① $\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=t\varepsilon(t)$

② 卷积的时移性

若 $f_1(t)*f_2(t)=f(t)$

则 $f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_1-t_2)*f_2(t)$

$$=f_1(t)*f_2(t-t_1-t_2)$$

$$=f(t-t_1-t_2)$$

3、已知一离散 LTI 系统的阶跃响应 $g(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k \varepsilon(k)$，则该系统的单位序列响应 $h(k)=$ $\underline{\left(\frac{1}{3}\right)^k \varepsilon(k)-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \varepsilon(k-1)}$

知识点：对离散系统，单位序列响应与阶跃响应之间存在差分、累和关系

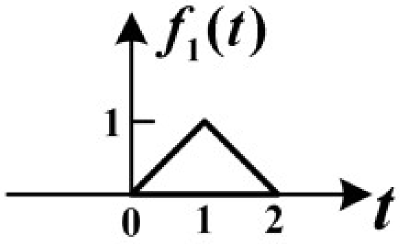
$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

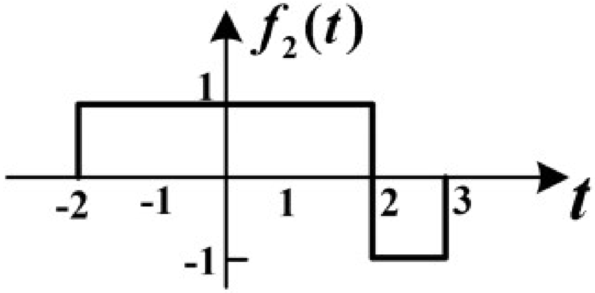
$$h(k)=g(k)-g(k-1)$$

$$\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)$$

$$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)$$

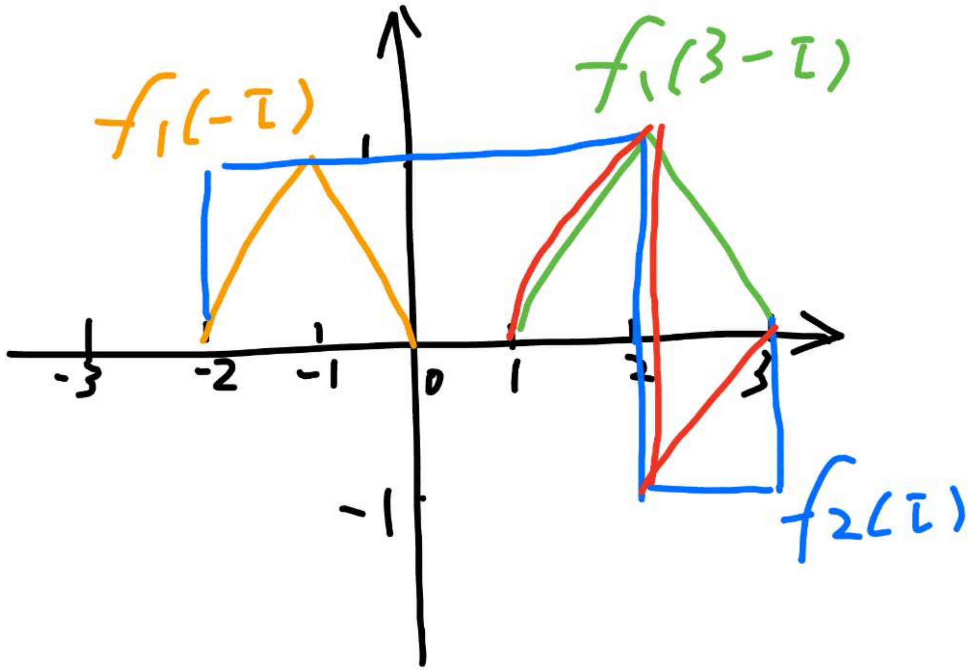
4、已知信号 $f_1(t)$， $f_2(t)$ 如图， $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，求 $y(3)=$ ___0___





知识点：图解法求卷积积分

选择简单的信号进行反转平移，重叠的区域乘积再求积分



5、已知一 LTI 连续系统的单位阶跃响应 $g(t)=3e^{-2t}\varepsilon(t)$，则该系统的单位冲激响应

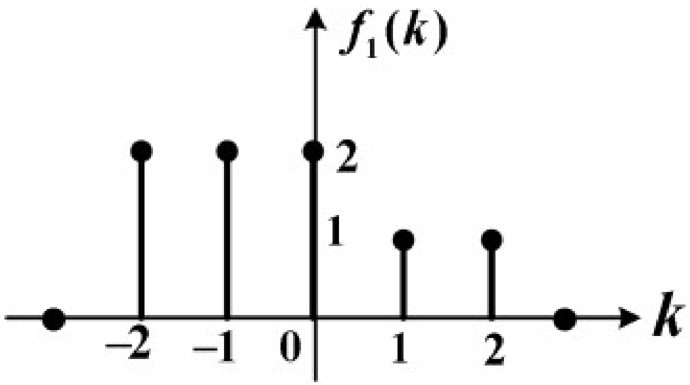
$h(t)=$ $\underline{-6e^{-2t}\varepsilon(t)+3\delta(t)}$

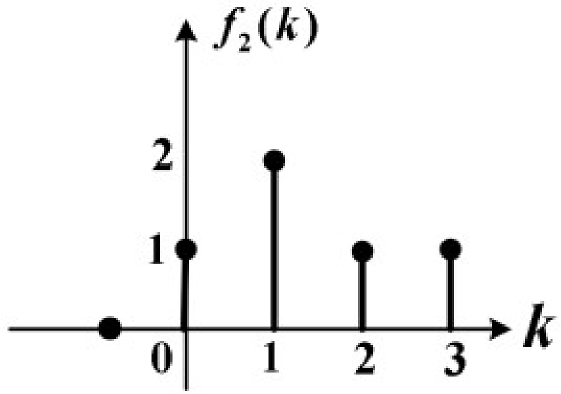
知识点：对连续系统，单位冲激响应和阶跃响应间存在微积分关系

$$h(t)=g'(t)=3\left[-2e^{-2t}\varepsilon(t)+e^{-2t}\delta(t)\right]$$

$$=-6e^{-2t}\varepsilon(t)+3\delta(t)$$

6、信号 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的波形如下图所示，若 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$，则 $f(2)=$ ___7___





知识点：图解法求卷积和

选择简单的信号进行反转平移，重叠的区域乘积再求和

7、已知某系统的输入为 $f(t)$，输出 $y(t)=|f(t-2)|$，则该系统是否为线性系统 否

知识点：线性系统的判定：　① 可加性　② 齐次性

8、已知一个 LTI 因果离散系统，当输入 $\varepsilon(k)$ 时单位阶跃响应为 $g(k)$。当输入为单边序列 $f(k)$ 时，系统的零状态响应为 $y_{zs}(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)$，试求输入 $f(k)$ 为 $\sum_{i=0}^{k}\varepsilon(i)$

知识点：线性系统的线性性质

响应为累和关系，激励也为累和关系

9、周期序列 $f(k)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}k+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}k+\frac{\pi}{6}\right)$，其周期为 24

- **连续正弦信号 $\sin(\omega_0 t)$、$\cos(\omega_0 t)$ 必定是周期信号。** $\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}}$
- **离散正弦序列 $\sin(\omega_0 k)$、$\cos(\omega_0 k)$ 不一定是周期信号。** $\frac{2\pi}{\omega_0}$ **有理数?**
- **两个连续周期信号之和不一定是周期信号。** $\frac{T_1}{T_2}$ **有理数?**
- **两个离散周期序列之和必定是周期信号。** **周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数**

10、序列和 $\sum_{i=-\infty}^{k} 3^i\delta(i-2)=$ $9\varepsilon(k-2)$

知识点：冲激函数的抽样性，冲激函数的累和=阶跃函数

二、画图题

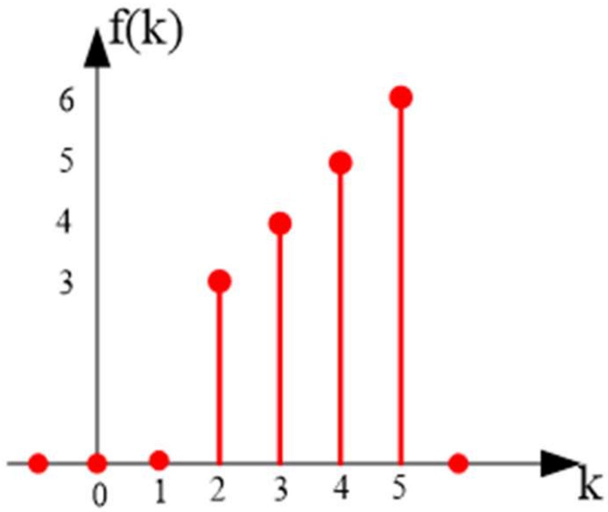
1、画出 $f(k)=(k+1)\left[\varepsilon(5-k)-\varepsilon(1-k)\right]$的波形。

解：根据阶跃函数的定义，对k的取值范围进行分段讨论

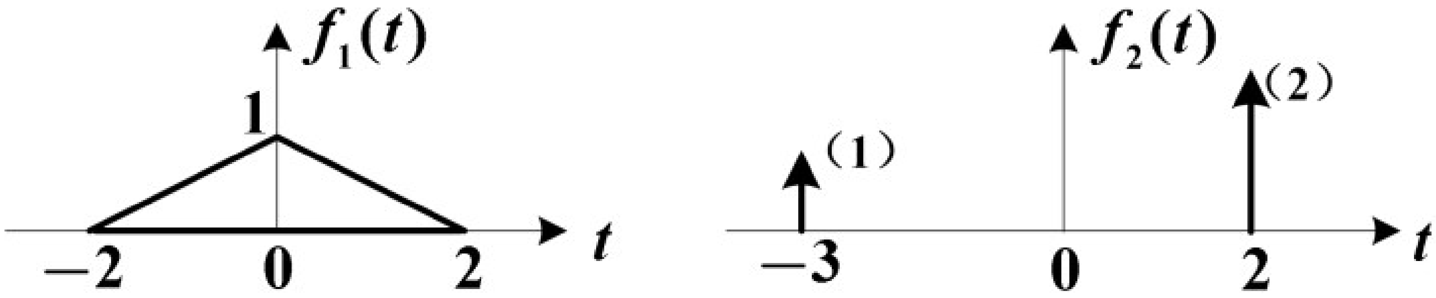
① k≤1

② 1<k ≤5

③ k>5



2、已知信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形如下图所示，画出 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 的波形。



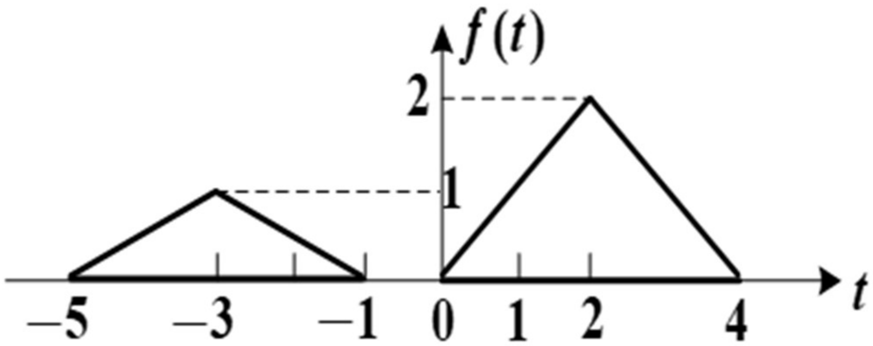
解：写出f2(t)的表达式，根据运算规则进行计算

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

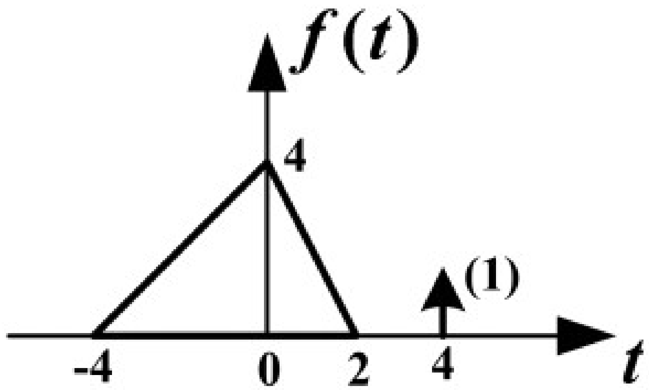
$$f_2(t)=\delta(t+3)+2\delta(t-2)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\delta(t+3)+2f_1(t)*\delta(t-2)$$

$$=f_1(t+3)+2f_1(t-2)$$

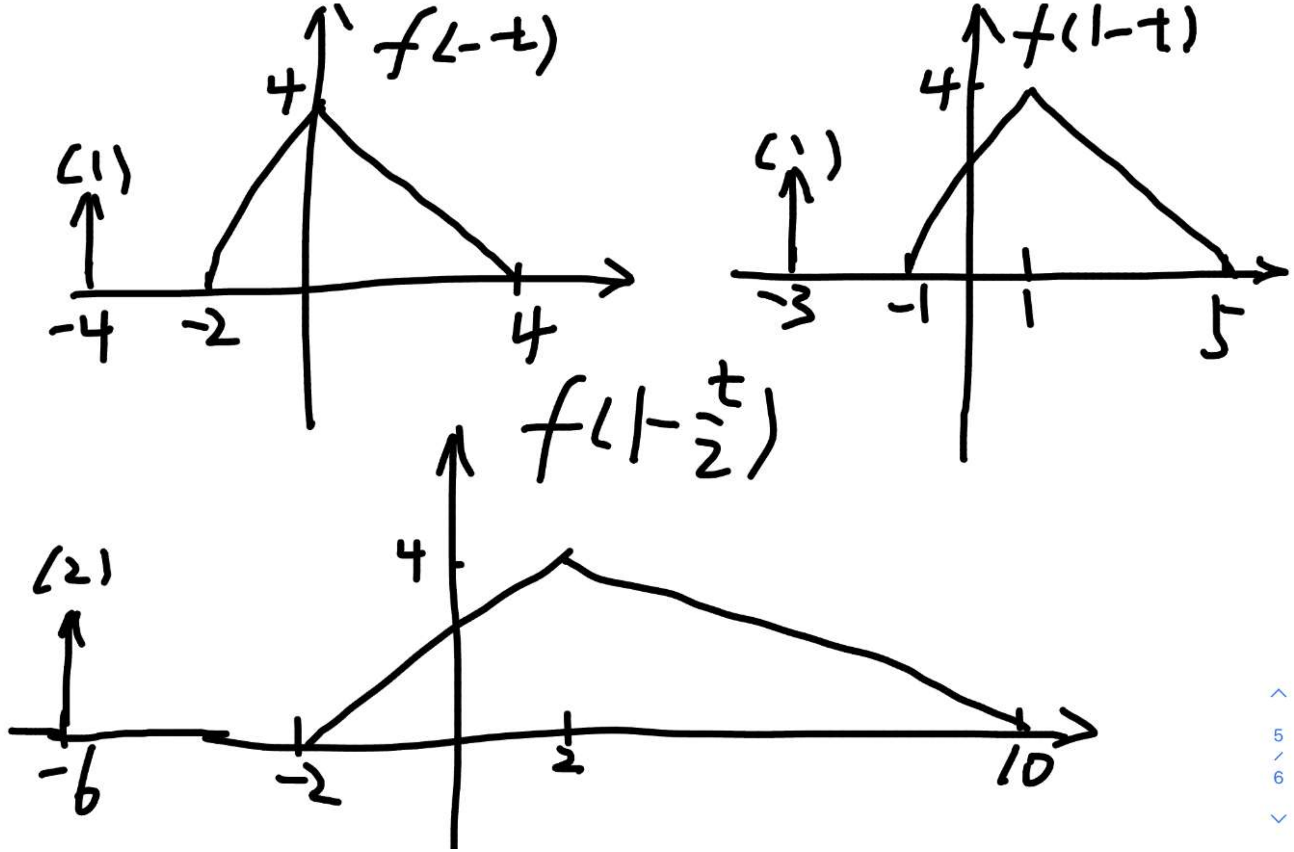


3、已知信号 $f(t)$ 的波形如图示，画出 $f(1-\frac{t}{2})$ 的波形。



知识点：① 信号的自变量变换

②冲激函数的尺度变换性质



三、计算题

1、某系统的输入输出关系为 $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} f(\tau-2)\,\mathrm{d}\tau$，求系统的单位冲激响应 $h(t)$，并判断系统的因果性。

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau-2)\,d\tau$$

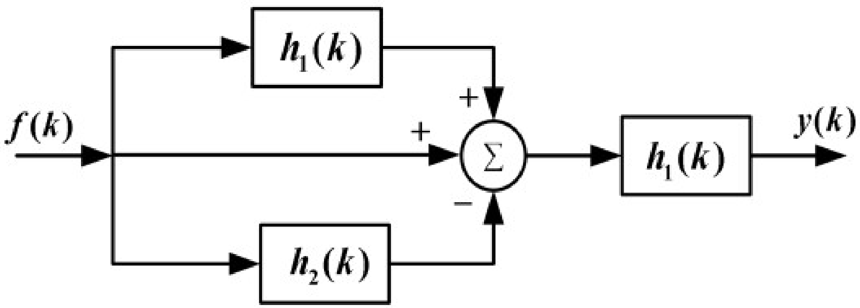
$$=e^{2-t}\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-2)\,d\tau$$

$$=e^{2-t}\varepsilon(t-2)$$

激励δ(t)作用于t=0时刻，响应h(t)发生在t>2的时刻（含有ε(t-2)），因此滞后于激励，因而是因果系统

2、如图所示的复合系统由三个子系统组成，它们的单位序列响应分别为：$h_1(k)=\varepsilon(k-1)$，

$h_2(k)=\varepsilon(k-4)$，求复合系统的单位序列响应。



知识点：① $$\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$$

② 卷积的时移性

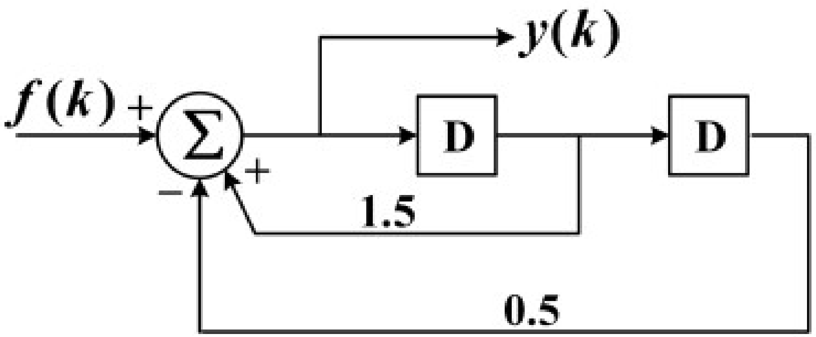
$$h(k)=[h_1(k)+\delta(k)-h_2(k)]*h_1(k)=(k-1)\varepsilon(k-2)+\varepsilon(k-1)-(k-4)\varepsilon(k-5)$$

四、（15 分）已知某 LTI 离散系统的时域框图如下图所示，

（1）求描述该系统的差分方程；（5 分）

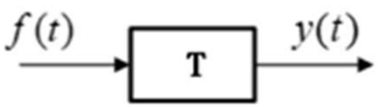
（2）求该系统的单位序列响应 $h(k)$；（5 分）

（3）若激励信号为 $f(k)=\varepsilon(k)$，求系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。（5 分）



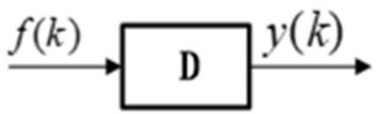
知识点：

延时器



$y(t)=f(t-T)$

延时单元



$y(k)=f(k-1)$

(1)

$$f(k)-0.5y(k-2)+1.5y(k-1)=y(k)$$

$$y(k)-1.5y(k-1)+0.5y(k-2)=f(k)$$

(2) $h(k)-1.5h(k-1)+0.5h(k-2)=\delta(k)$

$$h(-1)=h(-2)=0 \Rightarrow h(0)=1,\ h(1)=1.5$$

令 $k>0$, $h(k)-1.5h(k-1)+0.5h(k-2)=0$

$$\lambda^2-1.5\lambda+0.5=0$$

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=0.5$$

$$h(k)=C_1+C_2 0.5^k,\quad k>0$$

代入 $h(0)=C_1+C_2=1$, $h(1)=C_1+\frac{C_2}{2}=1.5$ $\Rightarrow$ $C_1=2$, $C_2=-1$

$$h(k)=[2-0.5^k]\varepsilon(k)$$

(3) $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$

$$=\varepsilon(k)*[2-0.5^k]\varepsilon(k)$$

$$=2\varepsilon(k)*\varepsilon(k)-\varepsilon(k)*0.5^k\varepsilon(k)$$

$$=2(k+1)\varepsilon(k)-\sum_{i=0}^{k}0.5^i\varepsilon(i)$$

$$=(2k+0.5^k)\varepsilon(k)$$

五、（15 分）已知某系统的数学模型为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+2f(t)$

（1）初始状态 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=3$，试求零输入响应 $y_{zi}(t)$；（5 分）

（2）求该系统的冲激响应 $h(t)$；（5 分）

（3）若输入信号为 $f(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$，求系统的零状态响应。（5 分）

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$

$\lambda^2+3\lambda+2=0$, $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-1$

$y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}$, $t>0$

$y_{zi}(0+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)=C_1+C_2=1$

$y_{zi}'(0+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-2C_1-C_2=3$

$C_1=-4$, $C_2=5$

$y_{zi}(t)=(5e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$

(2) $h''(t)+3h'(t)+2h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

$\delta'(t)$ $\quad$ $\delta(t)$ $\quad$ $\varepsilon(t)$,不含 $\delta(t)$

代入

$$\begin{cases} h(t)=p_1(t) \\ h'(t)=a\delta(t)+p_2(t) & ① \\ h''(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+p_3(t) & ② \end{cases}$$

$\Longrightarrow a=1,\ b=-1$

对式①、②在 0_- 到 0_+ 积分

$\Longrightarrow h(0_+)=1,\ h'(0_+)=-1$

令 $t>0$, $h''(t)+3h'(t)+2h(t)=0$

$h(t)=C_3e^{-2t}+C_4e^{-t},\ t>0$

$$\begin{cases} h(0_+)=C_3+C_4=1 \\ h'(0_+)=-2C_3-C_4=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} C_3=0 \\ C_4=1 \end{matrix}$$

$h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ ($h(t)$中不含 $\delta(t)$)

(3) $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)*e^{-t}\varepsilon(t)$

$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau=\dfrac{e^{-t}(1-e^{-2t})}{2}\varepsilon(t)$

六、（15 分）某 LTI 系统具有一定的起始状态（又称 0-初始状态），

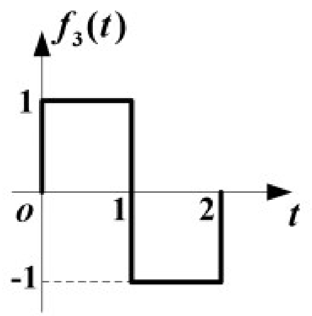
已知当激励 $f_1(t)=\varepsilon(t)$ 时系统的全响应为：　$y_1(t)=(3e^{-t}+4e^{-2t})\varepsilon(t)$；

当激励 $f_2(t)=2\varepsilon(t)$ 时系统的全响应为：　$y_2(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$；

（1）求该系统的零输入响应；（5 分）

（2）求当输入 $f_1(t)$ 时的零状态响应；（5 分）

（3）当激励 $f_3(t)$ 波形如下图所示，求此时系统的全响应 $y_3(t)$。（5 分）



(1) $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

$y_1(t)=y_{zi}(t)+y_{zs1}(t)$

$y_2(t)=y_{zi}(t)+2y_{zs1}(t)$

$\Rightarrow y_{zi}(t)=(e^{-t}+11e^{-2t})\varepsilon(t)$

$y_{zs1}(t)=(2e^{-t}-7e^{-2t})\varepsilon(t)$

(3) $f_3(t)=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$

$y_3(t)=y_{zi}(t)+y_{zs3}(t)$

$=y_{zi}(t)+y_{zs1}(t)-2y_{zs1}(t-1)+y_{zs1}(t-2)$