

装订线

班内序号

学号

姓名

专业班级

装订线

西安邮电大学期末考试试题 (A 卷)

(2022—2023 学年第一学期)

课程名称：高等数学 A1

考试专业、年级：通工、电子、计科、自动化等专业 2022 级

考核方式： 闭卷                      可使用计算器： 否

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

得分\_\_\_\_\_一、判断题:1~5 小题，每小题 2 分，共 10 分。请在括号内对正确陈述打“√”，对错误陈述打“×”。

1. 收敛数列必有界. (     )
2. 无穷小与任一函数的乘积一定是无穷小. (     )
3. 如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处既是左连续的，又是右连续的，则  $f(x)$  在  $x_0$  处连续. (     )
4. 设周期函数  $f(x)$  处处可导，则  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  仍为周期函数. (     )
5. 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可微，则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积. (     )

得分\_\_\_\_\_二、选择题：6~10 小题，每小题 2 分，共 10 分. 下列每小题给出的四个选项 A、B、C、D 中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前面的字母填在题中的括号内。

6.  $x=0$  是函数  $y=\frac{\sin x}{x}$  的 (     )
- A. 跳跃间断点；              B. 可去间断点；              C. 无穷间断点；              D. 振荡间断点.
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x =$  (     ).
- A. 0；                          B. 1；                          C.  $e^{-1}$ ；                          D.  $e$ .

8. 设  $f'(1)=2$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-3\sin x)-f(1)}{x} =$  (     )
- A. 6；                          B. -3；                          C. -6；                          D. 3.

9. 设  $y=(x^2-x)\sin 3x$ ，则  $y'''(0)=$  (     )
- A. 6；                          B. 12；                          C. 18；                          D. 0.

10. 设函数  $f(x)$  可导，则在下列等式中，正确的结果是 (     )
- A.  $\int f'(x)dx = f(x)$ ；    B.  $d\int f(x)dx = f(x)$ ；    C.  $\int df(x) = f(x)$ ；    D.  $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ .

得分\_\_\_\_\_三、计算题：11~15 小题，每小题 5 分，共 25 分。计算应写出必要的文字说明及演算步骤。请将计算过程写在试题预留的空白处。

- 得分\_\_\_\_\_11. 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x-1}-x)$ .

- 得分\_\_\_\_\_12. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right)$ .

学号

姓名

专业班级

得分\_\_\_\_\_13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \sin t^3 dt}{x^4}.$

得分\_\_\_\_\_14. 设  $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \leq 0, \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}$ , 求  $\int_0^1 f(2x-1)dx.$

得分\_\_\_\_\_15. 求由方程  $xe^y - 2y + 2 = 0$  所确定的函数  $y = y(x)$  在  $x = 0$  处的微分  $dy|_{x=0}.$

得分\_\_\_\_\_四、计算题：16~20 小题，每小题 5 分，共 25 分。计算应写出必要的文字说明及演算步骤。请将计算过程写在试题预留的空白处。

得分\_\_\_\_\_16. 设  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}.$

得分\_\_\_\_\_17. 求  $\int xe^x dx.$

得分\_\_\_\_\_18. 设  $y = (1+x^2)^x$ , 求  $y'.$

得分\_\_\_\_\_19. 求解初值问题  $\begin{cases} y' = 2xy^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

得分\_\_\_\_\_20. 判定反常积分  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$  敛散性，并在收敛的情况下求出其值。

学号

姓名

专业班级

得分\_\_\_\_\_五、解答题：21~23 小题，每小题 8 分，共 24 分。解答应写出必要的文字说明及演算步骤。请将解答过程写在试题预留的空白处。

得分\_\_\_\_\_21. 设  $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ，(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间及极值；(2) 求曲线  $y=f(x)$  的凹凸区间及拐点。

得分\_\_\_\_\_22. 设  $D$  是由抛物线  $y=x-x^2$  与  $x$  轴所围成的平面图形。  
(1) 求  $D$  的面积；  
(2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积。

得分\_\_\_\_\_23. 解微分方程  $y''-3y'+2y=2x+1$ 。

得分\_\_\_\_\_六、证明题：本题满分 6 分。证明应写出必要的证明过程。请将答案写在试题预留的空白处。

24. 试证：当  $0 < x < 1$  时， $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x} \leq \sqrt[3]{4}$ 。

线

订

装

西安邮电大学试题卷标准答案专用纸

线

订

装

西安邮电大学 2022——2023 学年第一学期期末试题（A）卷

标准答案

课程：高等数学 A1 类型：A 卷 专业、年级：通工、电子、计科、自动化等专业 2022 级

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分	10	10	25	25	24	6	100

一、判断题:1~5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

1.  $\checkmark$ ; 2.  $\times$ ; 3.  $\checkmark$ ; 4.  $\checkmark$ ; 5.  $\checkmark$ .

二、选择题: 6~10 小题, 每小题 2 分, 共 10 分.

6. B; 7. C; 8. C; 9. C; 10. D.

三、计算题(11~15 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 解 原式  $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+4x-1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}+1} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$   
 $= 2. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

12. 解 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{2x} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

13. 解 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 8x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16x^3}{4x^3} = 4. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

14. 解 令  $u = 2x - 1$ ,  $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$   
原式  $= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(u) du + \frac{1}{2} \int_0^1 f(u) du \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$   
 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (1-2u) du + \frac{1}{2} \int_0^1 3u^2 du = \frac{1}{2} [u-u^2]_{-1}^0 + \frac{1}{2} [u^3]_0^1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$   
 $= \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

15. 解 将  $x=0$  代入所给方程, 解得  $y=1. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

方程两端分别微分, 得  $e^y dx + xe^y dy - 2dy = 0 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

将  $x=0, y=1$  代入上式, 解得  $dy = \frac{e}{2} dx. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

四、计算题(16~20 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

16. 解 求导, 得  $x'(t) = 1 - \cos t, y'(t) = \sin t. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \frac{t}{2}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

17. 解 由分部积分法得

$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

18. 解 取对数, 得  $\ln y = x \ln(1+x^2). \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

两端分别对求导, 得  $\frac{1}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{2x}{1+x^2} + \ln(1+x^2). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

解得  $y' = y \left[ \frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) \right] = (1+x^2)^x \left[ \frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) \right]. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

19. 解 分离变量, 得  $\frac{1}{y^2} dy = 2x dx. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

两端分别积分, 得  $-\frac{1}{y} = x^2 + C. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

将  $x=0, y=1$  代入上式, 解得  $C=-1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

故所求解为  $-\frac{1}{y} = x^2 - 1$ , 即  $y = \frac{1}{1-x^2} (x \neq \pm 1). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

20. 解 函数  $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$  的一个原函数为  $F(x) = -\frac{1}{\ln x}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\ln x} \right) = 0, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

故反常积分收敛, 且其值为  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left[ -\frac{1}{\ln x} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

说明: 1. 标准答案务必要正确无误。 2. 将每道大题得分和总分填入得分栏中。

线

订

装

西安邮电大学试题卷标准答案专用纸

线

订

装

五、解答题（21~23 小题，每小题 8 分，共 24 分）

解 （1）函数的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且在 $(0, +\infty)$ 内

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

令  $y' = 0$ ，得  $x = e$ . ..... 2 分

列表分析如下：

$x$	$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$y'$	+	-

故函数在区间 $(0, e]$ 上单调递增，在区间 $[e, +\infty)$ 上单调递减，在点  $x = e$  处取得极大值

$y = \frac{1}{e}$ . ..... 4 分

(2) 再求导，得

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (x > 0).$$

令  $y'' = 0$ ，得  $x = e^{3/2}$ . ..... 6 分

列表分析如下：

$x$	$(0, e^{3/2})$	$(e^{3/2}, +\infty)$
$y'$	-	+

故曲线  $y = \frac{\ln x}{x}$  在区间 $(0, e^{3/2}]$ 上是凸的，在区间 $[e^{3/2}, +\infty)$ 上是凹的. .... 7 分

当  $x = e^{3/2}$  时， $y = \frac{3}{2}e^{-3/2}$ ，故所求拐点为 $(e^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2})$ . .... 8 分

22. 解 （1） $D$  的面积为  $A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$ . .... 4 分

(2) 旋转体的体积为  $V = \pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \pi \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{30}$ . .... 8 分

23. 解 方程  $y'' - 3y' + 2y = 0$  的特征方程为  $r^2 - 3r + 2 = 0$ ，

解得  $r_1 = 1, r_2 = 2$ . ..... 2 分

因为  $\lambda = 0$  不是特征根，所以方程  $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$  的一个特解可设为

$$Y = ax + b.$$

将它代入所给方程，得  $2ax - 3a + 2b = 2x + 1$ . .... 4 分

比较两端  $x$  同次幂的系数，得

$$\begin{cases} 2a = 2, \\ -3a + 2b = 1. \end{cases}$$

解得  $a = 1, b = 2$ . .... 6 分

故所求通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 2$ ，其中  $C_1, C_2$  为任意常数. .... 8 分

六、证明题（本题满分 6 分）

24. 证 令  $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )，则  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续，在  $(0, 1)$  内可导，且

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

令  $f'(x) = 0$ ，解得  $x = \frac{1}{2}$ . .... 2 分

比较  $f(0) = f(1) = 1$ ， $f(1/2) = \sqrt[3]{4}$ ，得  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值为  $f(1/2) = \sqrt[3]{4}$ . .. 4 分

从而当  $0 \leq x \leq 1$  时， $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} \leq \sqrt[3]{4}$ ，特别地，当  $0 < x < 1$  时， $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} \leq \sqrt[3]{4}$ .

..... 6 分