

多节连续体机器人的正逆向运动学控制模型

**Forward and Reverse Kinematic Control Model for A
Multi-sectional**

目录

第三章 单节连续体机器人运动学	3
3.1 正向运动学	3
3.1.1 齐次矩阵	3
3.1.2 关于躯干参数的位姿变换矩阵	5
3.1.3 工作空间	7
3.2 逆向运动学	8
3.2.1 逆向运动学方法	9
3.2.2 雅可比矩阵求解	10
3.2.3 迭代方法	11
第四章 多节连续体机器人运动学	13
4.1 正向运动学	13
4.1.1 DH 参数	13
4.1.2 工作空间	15
4.2 逆向运动学	16
4.2.1 雅可比矩阵	16
4.2.2 逆向运动单点测试	17
4.2.3 连续多目标点测试	18
4.2.3 同点不同方向测试	18
参考文献:	20

多节连续体机器人的正逆向运动学控制模型

首先对连续体机器人结构进行描述，基于躯干的常曲率假设，将单节连续体机器人躯干通过拟合的方法，构造出虚拟的关节运动副，从而可以利用 DH 参数法进行运动学建模。结合驱动线缆长度与躯干参数的关系建立了正向运动学，得到了机器人的工作空间。逆向运动学基于雅可比矩阵的微分运动学，包括虚拟关节、躯干参数、驱动电缆长度三者对应的雅可比矩阵，然后链式法则串联。通过离散方程和迭代的方法，使得末端操纵器不断接近目标位置和姿态，实现逆向运动学的控制。通过串联单节连续体，得到多节连续体机器人来扩大工作空间，利用齐次矩阵的相乘，得到多节连续体正向运动学，同样基于雅可比矩阵解决逆向运动学问题。最后在 MATLAB 的虚拟环境中模拟实验，验证模型的正确性。

Forward and Reverse Kinematic Control Model for A Multi-sectional Continuum Robot

Abstract Compared to rigid robots, continuum robots exhibit higher degrees of freedom and greater adaptability and safer patient interaction, which is of great interest when it comes to minimally invasive surgery, postoperative trauma, and wound site infection, especially in laparoscopic and endoscopic middle schools.

In this paper, we first describe the structure of the continuum robot and construct a virtual joint motion sub by fitting the torso of a single-section continuum robot based on the assumption of constant curvature of the torso so that the DH parameter method can be used for kinematic modeling. The forward kinematics was established by combining the relationship between the drive cable length and the torso parameters to obtain the robot's workspace. The inverse kinematics is based on the differential kinematics of the Jacobi matrix, including the Jacobi matrix corresponding to the virtual joints, torso parameters, and drive cable length, and then the chain law series. The inverse kinematics is controlled by discrete equations and iterative methods, which make the end manipulator continuously approach the target position and attitude. The multi-segment continuum robot is obtained by chaining single-segment continuum to expand the workspace, and the multiplication of the chi-square matrix is used to obtain the multi-segment continuum forward kinematics, which is also based on the Jacobi matrix to solve the inverse kinematics problem. Finally, the experiments are simulated in the virtual environment of MATLAB to verify the correctness of the model.

Key words Continuum robot Kinematics Inverse motion Jacobian matrix

第三章 单节连续体机器人运动学

3.1 正向运动学

经过上述对连续体机器人运动学的描述，本节开始讨论连续体机器人的正向运动学，正向运动学就是在已知机器人各关节的类型与旋转量或者移动量，以及相邻关节之间的尺寸以及位置姿态的情况下，描述末端操纵器在世界坐标系中的位置姿态。

3.1.1 齐次矩阵

末端操纵器的位置可以描述为一个空间中的点，我们可以通过向量或者笛卡尔坐标系来描述这个点的位置，为了描述末端操纵器的姿态，我们需要将一个坐标系附着在末端操纵器上面，通过描述这个坐标系相对于世界坐标系的位置姿态，我们就可以知道末端操纵器的位置以及姿态，描述坐标系的姿态，只需要描述坐标系三个坐标轴在世界坐标系中的方向即可，所以我们将坐标系每个坐标轴都向世界坐标系投影，得到下面的公式。

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

这种形式的矩阵是正交的，行列式等于 1。在这种情况下，这个旋转矩阵属于 $SO(3)$ 群。 $SO(3)$ 中的旋转矩阵有着特别的性质。

对于刚体运动，需要将旋转矩阵以及位置的变化进行组合，这样就可以使用一个矩阵来描述刚体的旋转以及平移，这个矩阵属于 $SE(3)$ 群，这个群的表示为

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

一个矩阵被叫做齐次矩阵，对于一系列的运动变化，只需要将对应的齐次矩阵相乘，我们就可以得到最终的运动姿态，下面讨论的 DH 公式，就是将一个运动分解为 4 个运动，分别为沿 x 轴的旋转，沿 x 轴的平移，z 轴的平移，沿 Z 轴的旋转，然后将这 4 个齐次矩阵相乘，即可得到对应于 DH 参数表的齐次矩阵，更为广泛的齐次矩阵的最后一行，并不是确定的值，它可以起到透视的作用，以及放大缩小的作用。

接下来讨论了一个关于 DH 公式的推导，该公式将一个概念性的“虚拟”刚性链接机器人与连续骨架拟合。在给定这个修改后的 DH 公式之后，接下来解决几何方面，将 DH 模型与连续主干的形状参数相关联。本文明确描述的 DH 表是用于单节的连续臂。完整的多节臂模型是通过以传统方式相乘单节 DH 变换矩阵而形成的。

DH 参数法包括两种，标准 DH 参数法和改进 DH 参数法，这两种方法在建立坐标系的时候不同，标准方法将连杆的坐标系固定在连杆的远端^[5]，改进的方法将坐标是固定在连杆的靠近端，并且针对参数的 4 个参数，它相乘的顺序也不一样，在使用上，标准方法在应用于树形结构或者闭链结构的机器人时候，会产生一定的歧义，但是针对连续体机器人，并不会出现这种情况，所以我们使用两种方法都可以。

模型首先通过两个旋转变换，这种变化对应着两个旋转关节，并且这两个旋转关节原点相交，接着是一个移动关节，最后是两个带有相交轴的旋转关节，其对应的关节变量由于连续体躯干的几何特性而与前两个旋转关节的关节变量产生关联。将主干弯曲建模为围绕两个轴的弯曲，就像实际机器人机构弯曲一样，产生物理上正确的方向结果。如下图 4

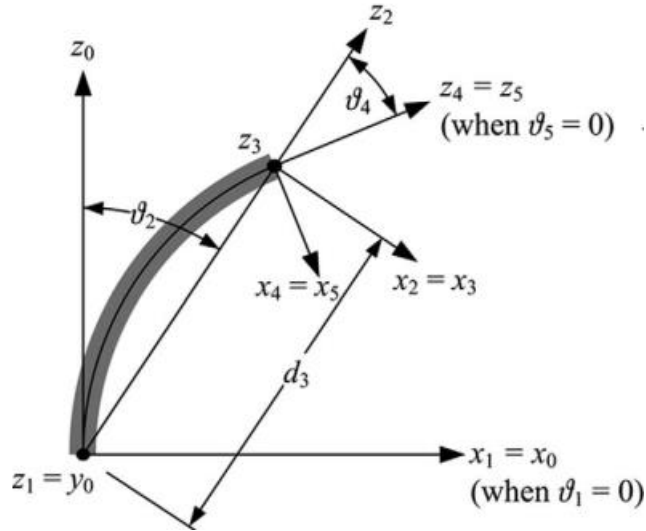


图 4 坐标系布置示意图

位于主干截面底部的前两个旋转关节将本地坐标系指向截面顶部。接下来，棱柱关节将本地坐标系平移到主干部。最后两个旋转关节将本地坐标系定向为沿着主干截面顶部的切线指向，以便后续主干截面可以正确定向。然而，该模型

中的第一对和最后一对变量是耦合在一起的，因为概念性刚性链接机器人适合于恒定曲率连续骨架。因此，该模型仅包含三个独立变量，而不是五个。这表明刚性链接模型中的对称性反映了主干截面中的对称性。这种方法产生了表 I 给出的 DH 表格，它产生了齐次变换矩阵。

表 1 DH 参数表

关节	a	α	d	θ_5
-	0	$\pi/2$	0	0
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	0	$\theta_2 + \pi/2$
3	0	$-\pi/2$	d_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4 + \pi/2$
5	0	0	0	θ_5
-	0	$-\pi/2$	0	0

这里最后两个联合变量将与前两个耦合， $\theta_2 = \theta_4$ 和 $\theta_5 = \theta_1 + \pi$ 。

因此，公式（1）代表了“虚拟”刚性连杆机器人的运动学，其初始和最终条件与真实躯干一致。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -c_1s_2s_4c_5 + c_1c_2c_4c_5 - s_1s_5 & c_1s_2s_4s_5 - c_1c_2c_4s_5 - s_1c_5 & -c_2s_4c_1 + s_2c_4 & c_1c_2d_3 \\ -s_1s_2s_4c_5 + s_1c_2c_4c_5 + c_1s_5 & s_1s_2s_4s_5 - s_1c_2c_4s_5 + c_1c_5 & -s_1c_2s_4 + s_2c_4 & s_1c_2d_3 \\ (c_2s_4 + s_2c_4)s_5 & -(c_2s_4 + s_2c_4)s_5 & c_2c_4 - s_2s_4 & s_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.1.2 关于躯干参数的位姿变换矩阵

下一阶段是将虚拟机器人的关节变量与形状变量相关联。因此，导出下一个变换，将 DH 参数和躯干参数联系起来。

$$[\theta_1 \quad \theta_2 \quad d_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5]^T = f_1(s, \kappa, \phi) = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{\cos\left(\frac{\kappa S}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\kappa S}{2}\right) \cos \phi} \right) \\ \sin^{-1} \left(\sin\left(\frac{\kappa S}{2}\right) \sin \phi \right) \\ \frac{2}{\kappa} \sin \frac{\kappa S}{2} \\ \sin^{-1} \left(\sin\left(\frac{\kappa S}{2}\right) \sin \phi \right) \\ \tan^{-1} \left(\frac{\cos\left(\frac{\kappa S}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\kappa S}{2}\right) \cos \phi} \right) + \pi \end{bmatrix} \quad (6)$$

将公式 (2) 带入至公式 (1) 可以得到关于躯干参数的位姿变换矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi (\cos \kappa s - 1) + 1 & \sin \phi \cos \phi (\cos \kappa s - 1) & -\cos \phi \sin \kappa s \\ \sin \phi \cos \phi (\cos \kappa s - 1) & \cos^2 \phi (1 - \cos \kappa s) + \cos \kappa s & -\sin \phi \sin \kappa s \\ \cos \phi \sin \kappa s & \sin \phi \sin \kappa s & \cos \kappa s \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$o = \begin{bmatrix} \cos \phi (\cos \kappa s - 1) \\ \frac{\kappa}{\sin \phi (\cos \kappa s - 1)} \\ \frac{\kappa}{\sin \kappa s} \\ \frac{\sin \kappa s}{\kappa} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

驱动空间与机器人躯干参数的映射 f_2 是通过几何计算得到的, 假设电缆在机器人的均匀弯曲部分中从一个电缆导轨直线行驶到下一个电缆导轨, 该模型将伸展和弯曲方面的形状与致动器输入相关。同样, 该模型通过基于恒定曲率的假设确定躯干长度, 三根电缆在主干周围等距放置, 以 120° 的角度分开, 给定三个已知的电缆长度, 在设计的一个截面中, 从干线中心到电缆位置的恒定距离, 以及该干线截面中的分段数量, 计算得出的干线长度、曲率和曲率方向

$$s = \frac{nd(l_1 + l_2 + l_3)}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_1 l_2 - l_2 l_3 - l_1 l_3}} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_1 l_2 - l_2 l_3 - l_1 l_3}}{3nd} \right) \quad (10)$$

$$\kappa = 2 \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_1 l_2 - l_2 l_3 - l_1 l_3}}{d(l_1 + l_2 + l_3)} \quad (11)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3} l_3 + l_2 - 2l_1}{3 \frac{l_2 - l_3}{l_2 - l_3}} \right) \quad (12)$$

将公式（8）（9）（10）代入公式（7.3）即可得到对应于驱动空间的齐次变换矩阵

3.1.3 工作空间

机器人的工作空间就是指机器人末端操纵器所能到达的空间点的集合^[8]，已知机器人工作空间，对于逆向运动学十分有利，可以判断在该种情况下是否有机器人的逆向解，通过机器人的工作空间，我们也可以大体上了解机器人工作的范围，灵活性程度等。

通过使用上述正向运动学方程，在 Matlab 环境中对该齐次变换矩阵进行了多次模拟测试，可以在给定驱动长度的情况下，计算出工作空间。工作空间表示末端可以到达的末端位置和方向。图 5 图 6 图 7 从三个角度展示了单节连续体机器人的工作空间，绿色点为每一节中三段的末端点，蓝色线为躯干。

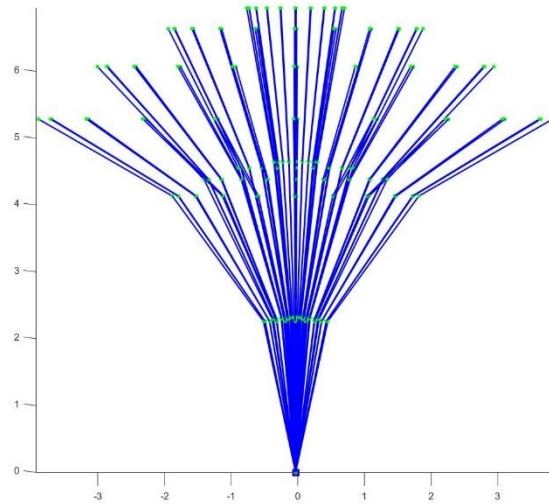


图 5 单节连续体工作空间视图 1

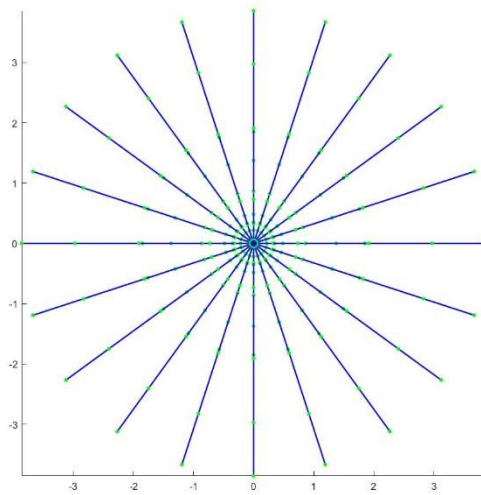


图 6 单节连续体工作空间视图 2

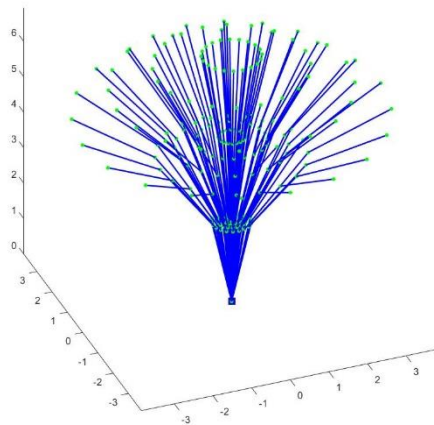


图 7 单节连续体工作空间视图 3

3.2 逆向运动学

运动学方法包括在任何控制器需要直接运动学知识的明确假设下，考虑逆运动学或逆微分运动学的任何控制器。本节开始研究单节连续与机器人的逆向运动学，逆向运动学就是在已知目标位置的情况下，计算对应的输入，这里的输入一般都是根据驱动的模式来选择，如果是传统电机驱动的旋转关节，那么这里的输入就是电机旋转的角度，逆运动学的应用是控制机器人最广泛使用的方法，被认为是标准机器人的直接方法。由于连续体机器人的高度冗余设计，逆运动学并不

是特别有效。事实上，冗余机械手的运动学通常不是双射的，逆运动学存在无限解。尽管如此，最近大量的研究都集中在逆运动学上。另一方面，由于允许多任务控制，微分运动学对冗余机械手特别有效。

3.2.1 逆向运动学方法

对于机器人的逆向运动学通常有两大方法，第1种是解析法，对于解析法需要满足 Pieper 准则，如果可以满足两个充分条件中的一个，那么就可以得到封闭解，三个相邻关节轴相交于点，三个相邻关节轴相互平行，由于解析法的优点就是运算速度特别快，所以为了使用这个方法，在设计机器人的时候会尽量满足这个准则，解析法就是通过几何或者代数法，将机器人的逆向公式完全求得，它的运算速度会非常快，但是由于根据特定的几何得到，所以他的通用性会比较差，一个重大的缺点是对于冗余的机器人，这种解析法不可以应用，是因为冗余对于一个逆向位置可以求得很多个驱动量，所以对于解析法使用公式无法表述的。另一种方法就是数值法，它的优点就是通用性很高，但求解速度比较慢，此外它可以适用于冗余的机器人，大部分的机器人都采用数值法求解，它的核心是设定一个优化目标函数，类似于解一个最优化问题，它需要非常重要的一个矩阵为雅可比矩阵，当然这种方法也有限制，在机器人的运动过程中，也就是从最开始的配置到最终的配置，这过程中不可以经过奇异点，或者在非常接近奇异点的时候，也会导致计算可能的出错，前面提到对于这个最优化问题，它会采用迭代的思想，所以一个非常重要的前提是给定的目标位置和姿态是属于机器人的工作空间的，如果违反了原则，机器人会花费大量的时间一直迭代，但最终却无法求得解，出现机器人奇异性问题与雅可比矩阵的性质有关系，所以提出了利用广义逆矩阵来解决这个问题，类似于通过一种最小偏差，使得约束方程的残差最小，对于出现在起点附近抖动的问题，提出引入阻尼因子的奇异鲁棒逆矩阵。在这种情况下，方程本身是否可解同样需要考虑。在机械臂冗余的时候，或者说雅可比矩阵不是方阵的时候，现在的广义雅可比就是伪逆矩阵，这个逆解目标可以使的关节速度的二次型泛函最小，当然这个方法是有一些问题的，这个雅可比矩阵是随着关节的位置变化而不断变化，所以一旦关节变化大，或者换一种方式来讲迭代的时候取得步长或长，这样算出来的雅可比矩阵的伪逆矩阵就不再准确，必须使得步长

变小，这样带来的代价就是对计算资源非常的消耗，并且对于雅可比矩阵求伪逆矩阵本身这个运算就非常的消耗算力，当然我们也会针对特定的雅可比矩阵进行分解，根据特点来对应求解的伪逆矩阵，对于算力的消耗是一个小的问题，更大的问题在于机器人奇异位姿的时候，或者接近奇异位姿的情况下，雅可比矩阵变得病态。

在本次研究的连续体机器人对象中，对应的输入量就是线缆的长度，然而如果直接根据方程求得输入线缆长度的解，对于计算量的要求极大，随着串联数量的增多，所需要计算的维度将会迅速增加，所以在这个领域中常用的解法为，根据运动学的微分关系式，也就是速度运动学，来解决逆向运动学问题，而在整个求解逆向运动学的过程中，最重要的就是雅可比矩阵的求解，第 1 部分是雅可比矩阵，第 2 部分为结合雅可比矩阵逆运动学控制方法。

3.2.2 雅可比矩阵求解

正如前面所提到的，本次的驱动是由线缆驱动，进而带动连续体形状参数的改变，进一步影响拟合的关节角度，所以雅可比矩阵分为三个雅可比矩阵的乘积， \underline{f}_{D-H} 为末端操作器的速度与连续体机器人的关节角度的雅可比矩阵， \underline{f}_1 为连续体机器人的关节角度关于机器人躯干参数的雅可比矩阵， \underline{f}_2 为机器人躯干参数关于输入的驱动线缆长度的雅可比矩阵。

雅可比矩阵可以表示为

$$J = \begin{bmatrix} J_{v,1} & \cdots & J_{v,k} & \cdots & J_{v,n} \\ J_{w,1} & \cdots & J_{w,k} & \cdots & J_{w,n} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中 J_{v_i} 为如下公式，分别对应旋转关节和移动关节

$$J_{v_i} = \begin{cases} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{cases} \quad (14)$$

其中 J_{ω_i} 为如下公式，分别对应旋转关节和移动关节

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1} \\ 0 \end{cases} \quad (15)$$

根据公式，可以求得末端操作器的速度与连续体机器人的关节角度的雅可比矩阵 \underline{f}_{D-H} 为

$$\mathbf{J}_{D-H} = \begin{bmatrix} -s_1 c_2 d_3 & -c_1 s_2 d_4 & c_1 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 d_3 & -s_2 & 0 & 0 \\ c_1 c_2 d_3 & -s_1 s_2 d_3 & s_1 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & s_1 & -c_1 s_{24} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -c_{24} \\ 0 & -c_1 & 0 & -c_1 & -s_1 s_{24} \end{bmatrix} \quad (16)$$

连续体机器人的关节角度关于机器人躯干参数的雅可比矩阵 \mathbf{J}_{f_1}

$$\mathbf{J}_{f_1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin \phi \sin \kappa s}{g} & -\frac{s \cos \phi}{g} & -\frac{\kappa \cos \phi}{g} \\ \frac{2 \cos \phi \sin \frac{\kappa s}{2}}{h} & \frac{s \sin \phi \cos \frac{\kappa s}{2}}{h} & \frac{\kappa \sin \phi \cos \frac{\kappa s}{2}}{h} \\ 0 & \frac{\kappa s \cos \frac{\kappa s}{2} - 2 \sin \frac{\kappa s}{2}}{\kappa^2} & \cos \frac{\kappa s}{2} \\ \frac{2 \cos \phi \sin \frac{\kappa s}{2}}{h} & \frac{s \sin \phi \cos \frac{\kappa s}{2}}{h} & \frac{\kappa \sin \phi \cos \frac{\kappa s}{2}}{h} \\ \frac{\sin \phi \sin \kappa s}{g} & -\frac{\kappa \cos \phi}{g} & -\frac{\kappa \cos \phi}{g} \end{bmatrix} \quad (17)$$

公式里的符号比较多，这里采取简略的写法

$$g = \cos^2 \phi \cos \kappa s - \cos \kappa s - \cos^2 \phi - 1 \quad (18)$$

$$h = \sqrt{2 \cos^2 \phi + 2 + 2 \cos \kappa s - 2 \cos \phi \cos \kappa s} \quad (19)$$

同样 \mathbf{J}_{f_2} 可以以同样的方式得到。

得到三个雅可比矩阵之后，通过上一节的公式变化为全部关于躯干长度的驱动变量，然后将这三个雅可比矩阵相乘，即可得到我们需要的最终雅可比矩阵。

3.2.3 迭代方法

逆向运动学就是在知道末端操纵器在笛卡尔坐标下的位置和姿态，来计算相对应的输入^[8]，一般情况下为驱动空间，由于连续体机器人超冗余的特点，如果直接进行求解，会出现冗余解的可能，并且为了减少计算量，使用一种伪逆的公式来求解逆向运动学。利用雅可比矩阵，可以得到输入的驱动量与机器人末端速度的关系

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{q}(t_k) \mathbf{v}(t_k) \Delta t \quad (20)$$

其中， t_k 表示的是执行的时刻， \mathbf{q} 表示的是机器人的输入也就是驱动的长度， \mathbf{v} 就是末端执行器的速度向量，这个公式会一直执行，直到实际的末端操作器的

位置与姿态与希望的末端执行器的位置和姿态相同即会停止，此时即可得到理想的驱动长度，流程图如图 8。

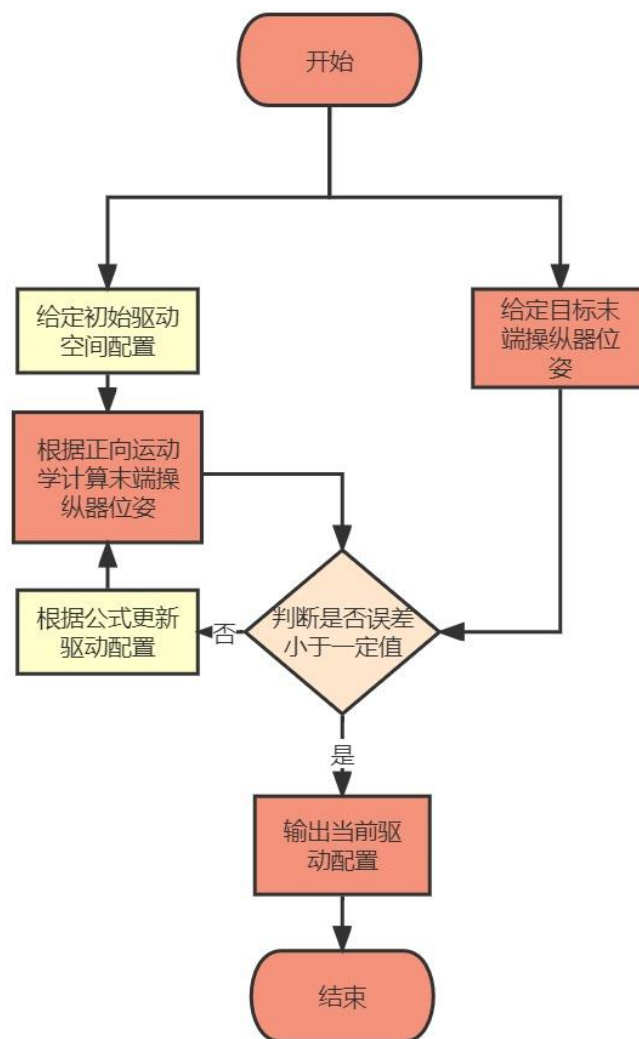


图 8 逆向运动学流程图

第四章 多节连续体机器人运动学

4.1 正向运动学

连续体机器人其中很大的一个优势就在于它的灵活性以及顺应性，而它的灵活性可以通过增加自由度，使他能够绕开障碍物的同时，达到更大的工作体积，或者说在达到同一个工作点的同时，以不同的角度到达。而这样的优势实现的途径就是将单节的连续体机器人进行串联，单节连续体机器人的自由度为 2，只要串联一个就可以将自由度增加 2，这些内容将连续的机器人串联起来，以获得更大的自由度和工作空间。

4.1.1 DH 参数

对多节连续的机器进行运动学建模，与单节连续的机器人大致流程相同，是在单节连续体机器人运动学建模的基础上，将每节连续体机器人的位置变换矩阵相乘，得到最终多级连续点击前的末端执行器位置及姿态，本节得到三节连续体机器人的位置变换矩阵。

同样首先产生 DH 参数表，如表 2，根据这个表格产生位姿变换矩阵，

表 2 DH 参数表

关节	a	α	d	θ_5
-	0	$\pi/2$	0	0
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	0	$\theta_2 + \pi/2$
3	0	$-\pi/2$	d_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4 + \pi/2$
5	0	0	0	θ_5
6	0	$\pi/2$	0	θ_6
7	0	$\pi/2$	0	$\theta_7 + \pi/2$

8	0	$-\pi/2$	d_8	0
9	0	$-\pi/2$	0	$\theta_9 + \pi/2$
10	0	0	0	θ_{10}
11	0	$\pi/2$	0	θ_{11}
12	0	$\pi/2$	0	θ_{12} $+ \pi/2$
13	0	$-\pi/2$	d_{13}	0
14	0	$-\pi/2$	0	θ_{14} $+ \pi/2$
15	0	0	0	θ_{15}
-	0	$-\pi/2$	0	0

根据这个表格产生了位姿变换矩阵，由于长度过长，这里不再进行展示。进行变量替换，将位姿变换矩阵里面的角度换成驱动的长度，在 MATLAB 环境中，同样利用该位姿变换矩阵进行测试，图 9 中绿色点为每一节中三段的末端点，红色线为第一节躯干线，绿色线为第二节躯干线，蓝色线为第三节躯干。

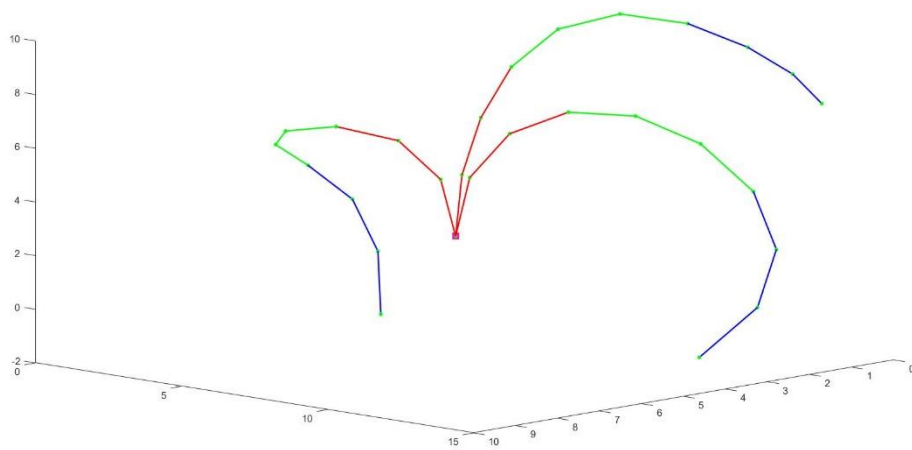


图 9 多节连续体正向运动学测试图

从图中可以看到，连续体机器人的不同驱动部分可以产生不同方向弯曲，这

种优势可以产生弯曲的形状来绕开障碍物，不过这得益于优秀的控制算法。

4.1.2 工作空间

通过串联单节连续体机器人，增加机器人的自由度，可以极大的扩展运动空间，同样在 MATLAB 环境中进行测试，得到机器人的工作空间。如图 10 图 11 图 12 所展示。从图中可以看到，机器人工作空间巨大，可以体现出连续体机器人的优越性所在，如果增加串联的数量，将会使得可到达的工作空间进一步增加。

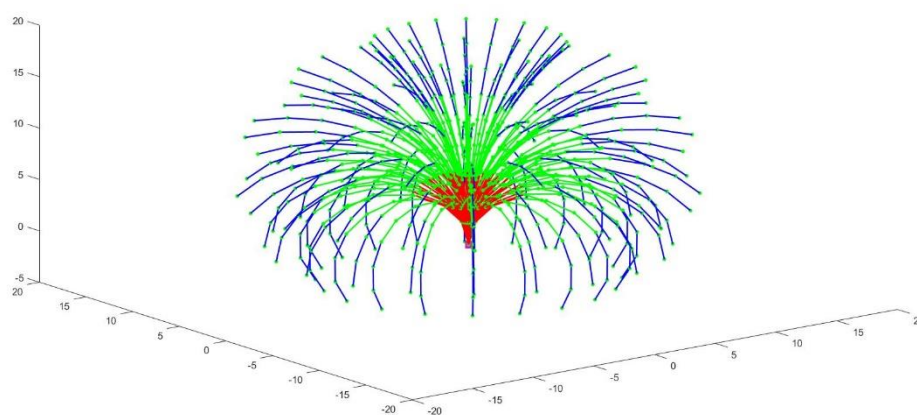


图 10 多节连续体机器人工作空间视图 1

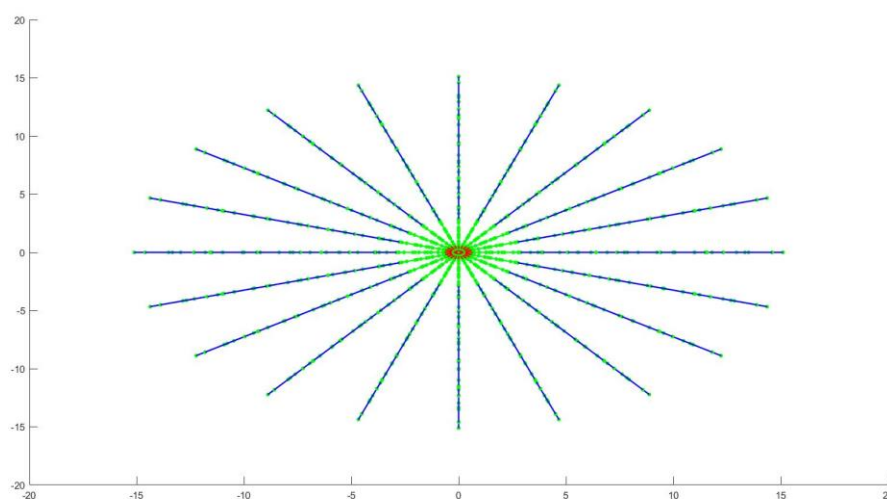


图 11 多节连续体机器人工作空间视图 2

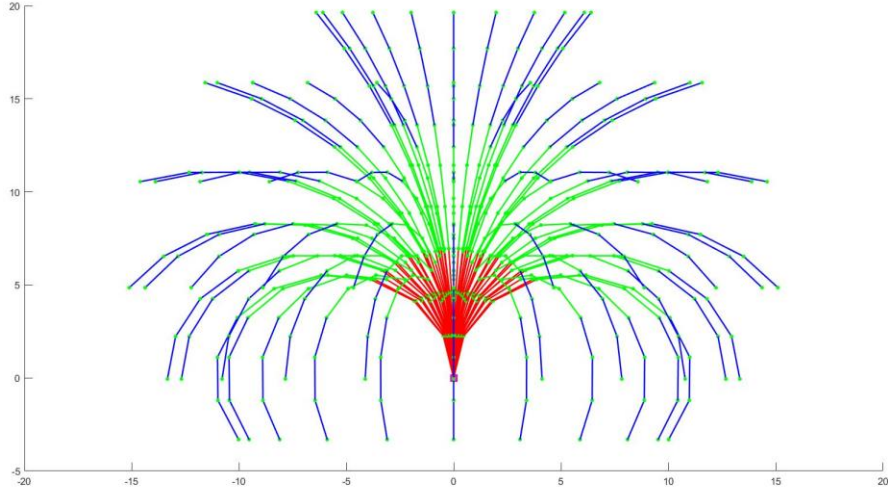


图 12 多节连续体机器人工作空间视图 3

4.2 逆向运动学

串联连续体机器人的逆向运动学尤为重要，拥有好的逆向运动学求解方法将会使得连续的机器人的性能大大提升，在同样的硬件条件下，发挥出更好的表现与性能。多节连续体机器人的逆向运动学同样根据对应的 DH 参数表求解，DH 参数表已在上一节给出，可以根据同样的方法求出雅可比矩阵。

4.2.1 雅可比矩阵

在单节连续体机器人中，雅可比矩阵 \mathbf{J}_{D-H} 为 6×5 的矩阵， \mathbf{J}_{f_1} 为 5×3 的矩阵， \mathbf{J}_{f_2} 为 3×3 的矩阵，所以最终的雅可比矩阵为 6×3 的矩阵，接下来分析多节连续体机器人，雅可比矩阵 \mathbf{J}_{D-H} 为 6×15 的矩阵， \mathbf{J}_{f_1} 为 15×9 的矩阵， \mathbf{J}_{f_2} 为 9×9 的矩阵，所以最终的雅可比矩阵为 6×9 的矩阵，这里的 \mathbf{J}_{f_1} 与单节连续体机器人类似，为

$$\mathbf{J}_{f_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{f_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{f_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{f_{13}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

里面的 $\mathbf{J}_{f_{11}}$ 为关于 s_1, k_1, ϕ_1 的雅可比矩阵， $\mathbf{J}_{f_{12}}$ 为关于 s_2, k_2, ϕ_2 的雅可比矩阵。

\mathbf{J}_{f_2} 与单节连续体机器人类似，为

$$J_{f_2} = \begin{bmatrix} J_{f_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{f_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{f_{23}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

里面的 $J_{f_{21}}$ 为关于 l_{11} , l_{12} , l_{13} 的雅可比矩阵, $J_{f_{22}}$ 为关于 l_{21} , l_{22} , l_{23} 的雅可比矩阵。

4.2.2 逆向运动单点测试

在求得多节连续体机器人雅可比矩阵之后,可以在给定目标操纵器的位置和姿态的情况下,通过前面提到的公式,求得连续体机器人的驱动长度,使得到达目标位置。在这个过程中末端操纵器会逐渐接近目标,在达到一定的误差范围内然后停止,输入测试数据位姿变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0.0122 & -0.4256 & 4.9974 \\ -0.0919 & 0.9816 & -0.1672 & 4.6168 \\ 0.4158 & 0.1904 & 0.8893 & -19.5508 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

得到如下图 13 的测试,图中粉色方框为理想的目标位置,绿色点为每一节中三段的末端点,红色线为第一节躯干线,绿色线为第二节躯干线,蓝色线为第三节躯干。可以看到,末端操纵器最终到达了目标位置。

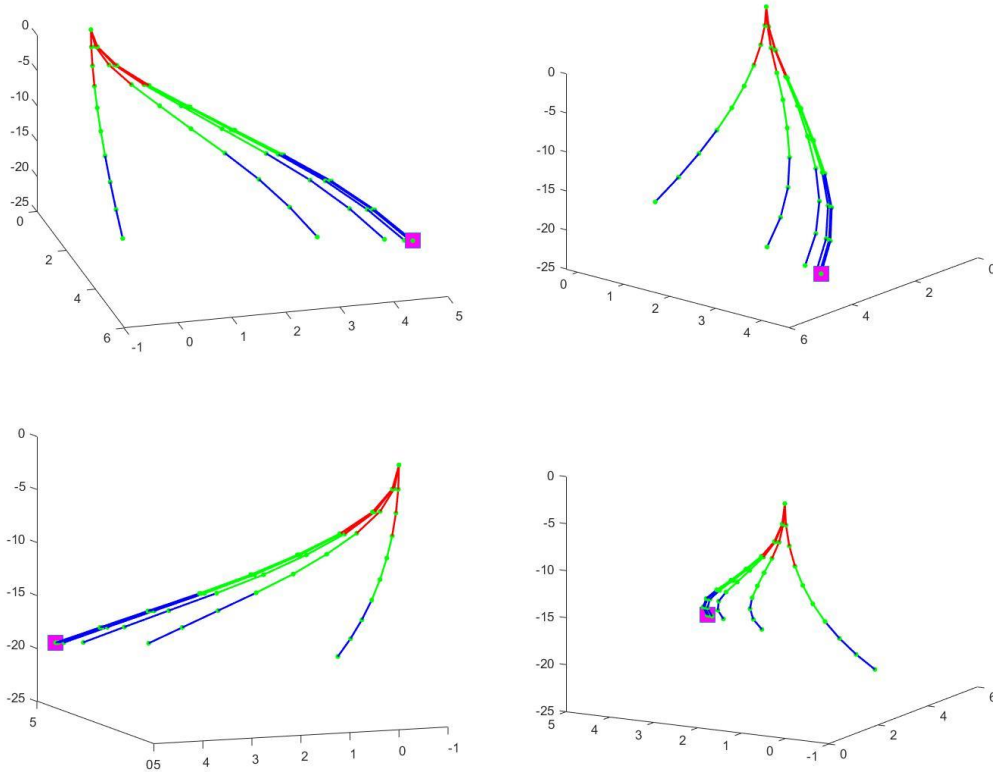


图 13 连续体机器人逆向测试图

4.2.3 连续多目标点测试

在某些工作情况下，末端操纵器需要沿着一条固定的轨迹进行移动，此时我们就需要在固定轨迹上，每隔一定距离，取一个离散的点，将这些点不断的输入给末端操作器，就可以实现末端操作器，沿着一定的轨迹进行移动，这里我们连续的给末端操作器 6 个点，就可以观察到它的移动，同样在 Matlab 环境中进行模拟，结果如下图 14 和图 15 所示。图 14 为等比例，可以正常观察到连续体机器人的运动。图 15 放大一部分比例，可以更细节的观察。

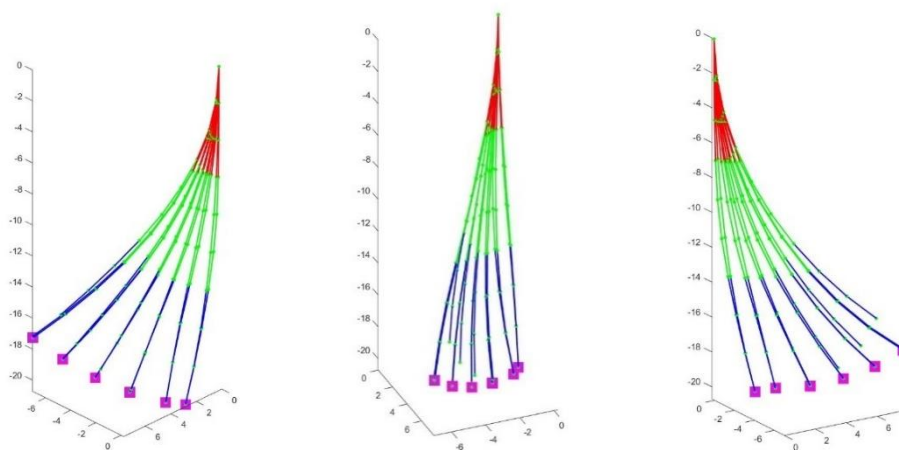


图 14 连续体机器人连续多点逆向运动

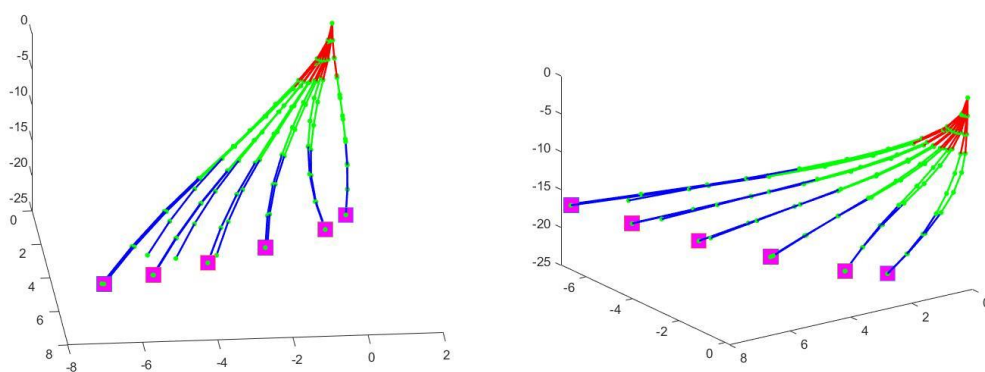


图 15 连续体机器人连续多点逆向运动图

4.2.3 同点不同方向测试

连续体机器人非常大的优势就在于其灵活性，灵活性的体现就在于不仅可以

到达某一点，还能以不同的方向到达这一点，这一点在手术操作中极其重要，能够最直接的体现出机器人的灵活性与否，比如可以对某一个组织病点进行不同方向的观察，在 MATLAB 环境中，给定测试目标点为 $(3, 0, -14)$ ，以两个不同方向接近目标点，可以得到下图 16 测试结果。

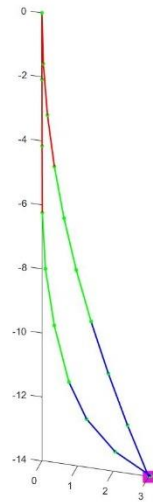


图 16 连续体机器人同点两方向逆向运动图

给定目标点为 $(3, 0, -15)$ ，以四个不同方向接近，可以得到下图 17 测试结果。

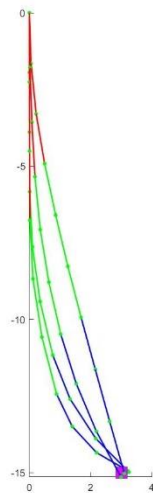


图 17 连续体机器人同点四方向逆向运动图

参考文献：

- [1] 林灯亮. 基于柔性关节连续体机器人的控制方法及其应用研究[D].华南理工大学,2021.DOI:10.27151/d.cnki.ghnlu.2021.000331.
- [2] 王田苗, 陶永, 陈阳. 服务机器人技术研究现状与发展趋势 [J]. 中国科学: 信息科学, 2012, 42(9):1049–1066.
- [3] 孙汉旭, 王凤翔. 加拿大, 美国空间机器人研究情况 [J]. 航天技术与民品, 1999, 4(1): 33–35.
- [4] 方正, 杨华, 胡益民. 嵌入式智能型机器人平台研究 [J]. 机器人, 2006, 28(1): 54–58.
- [5] 王国彪, 陈殿生, 陈科位. 仿生机器人研究现状与发展趋势 [J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 27–44.
- [6] Umetani Y. Biomechanical study of active cord mechanism with tactile sensors[A]. In: 6th International Symposium on Industrial Robots[C]. Tokyo, Japan: Elsevier, 1976: CI–1.
- [7] Walker I D. Continuous backbone continuum robot manipulators[J]. International Scholarly Research Notices, 2013, 13(4): 1–19.
- [8] McMahan W, Jones B A, Walker I D. Design and implementation of a multi-section continuum robot: Air-octor[A]. In: 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems[C]. Ed-monton, AB, Canada: IEEE, 2005: 2578–2585.
- [9] Simaan N. Snake-like units using flexible backbones and actuation redundancy for enhanced miniaturization[A]. In: Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. Barcelona, Spain: IEEE, 2005: 3012–3017.
- [10] 黄群慧, 贺俊. 中国制造业的核心能力, 功能定位与发展战略——兼评《中国制造2025》[J]. 中国工业经济, 2015, 6(5): 17.
- [11] 骆敏舟, 方健, 赵江海. 工业机器人的技术发展及其应用 [J]. 机械制造与自动化, 2015, 44(1): 1–4.
- [12] 李晓刚, 刘晋浩. 码垛机器人的研究与应用现状, 问题及对策 [J]. 包装工程, 2011, 32(3): 96–102.
- [13] 计时鸣, 黄希欢. 工业机器人技术的发展与应用综述 [J]. 机电工程, 2015, 32(1): 1–

13.

[14] Ding H, Schipper M, Matthias B. Collaborative behavior design of industrial robots for multiple human-robot collaboration[A]. In: International Symposium on Robotics[C]. Seoul, Korea (South): IEEE,2013: 1–6.

[15] Xu K, Simaan N. Analytic formulation for kinematics, statics, and shape restoration of multibackbonecontinuum robots via elliptic integrals[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2010, 2(1): 1–13.

[16] 胡海燕, 王鹏飞, 孙立宁. 线驱动连续型机器人的运动学分析与仿真 [J]. 机械工程学报, 2010,46(19): 1–8.

[17] 李强, 何斌, 谢红. 连续型机器人的动力学建模与仿真 [J]. 机械设计与研究, 2012, 28(2): 18–22.

[18] Ivanescu M, Bizdoaca N, Pana D. Dynamic control for a tentacle manipulator with SMA actuators[A].In: 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. Taipei, Taiwan: IEEE, 2003:2079–2084.

[19] Ivanescu M, Stoian V. A variable structure controller for a tentacle manipulator[A]. In: Proceedingsof 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. Nagoya, Japan: IEEE, 1995:3155–3160.

[20] Webster III R J, Jones B A. Design and kinematic modeling of constant curvature continuum robots: Areview[J]. The International Journal of Robotics Research, 2010, 29(13): 1661–1683.

[21] Cobos-Guzman S, Palmer D, Axinte D. Kinematic model to control the end-effector of a continuumrobot for multi-axis processing[J]. Robotica, 2017, 35(1): 224.

[22] 王丰, 冬雷, 周晓奇. 蛇形机械臂的设计及控制策略 [J]. 机器人, 2017, 39(3): 272–281.

[23] Jamali A, Khan R, Rahman M M. A new geometrical approach to solve inverse kinematics of hyperredundant robots with variable link length[A]. In: 2011 4th International Conference on Mechatronics(ICOM)[C]. Kuala Lumpur, Malaysia: IEEE, 2011: 1–5.

[24] Wolovich W A, Elliott H. A computational technique for inverse kinematics[A]. In: The 23rd IEEEConference on Decision and Control[C]. San Diego, CA, USA: IEEE, 1984: 1359–

1363.

[25] Chirikjian G S, Burdick J W. An obstacle avoidance algorithm for hyper-redundant manipulators[A].In: IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. Cincinnati, OH, USA: IEEE, 1990:625–631.

[26] Lyons L A, Webster R J, Alterovitz R. Motion planning for active cannulas[A]. In: 2009 IEEE/RSJInternational Conference on Intelligent Robots and Systems[C]. St. Louis, MO, USA: IEEE, 2009: 801–806.