

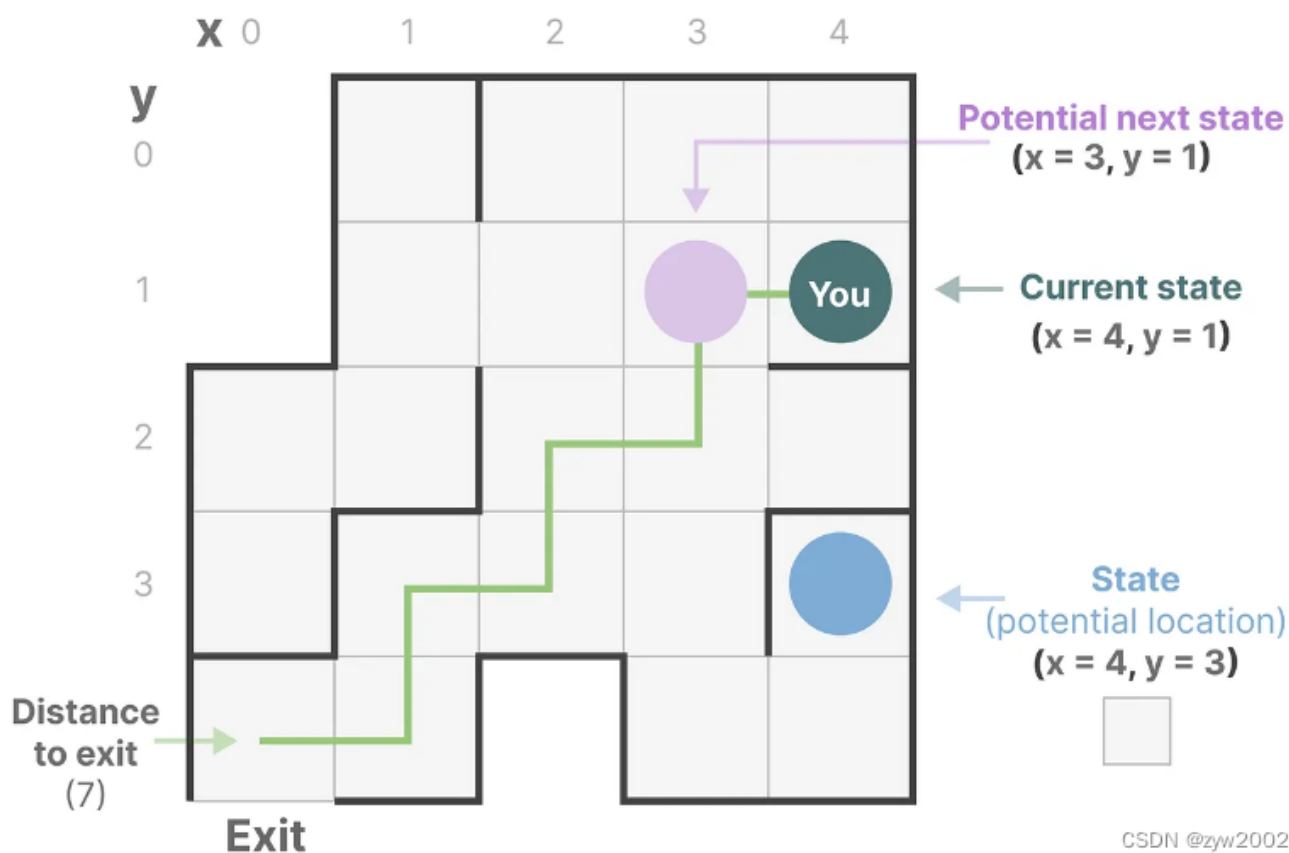
为了给Mamba的介绍做铺垫。过年期间没办法静下心学知识点，只能刷题。今天查漏一个点——状态空间模型（SSM）。

Day6: The State Space Model (SSM)-上

术语状态空间模型具有非常广泛的含义，它简单地表示任何具有潜在状态的循环过程的概念。

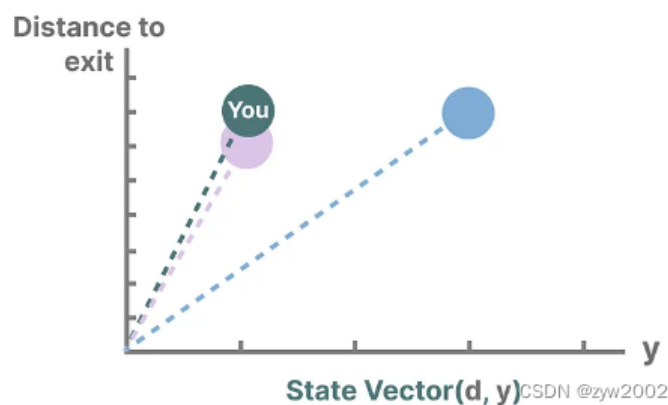
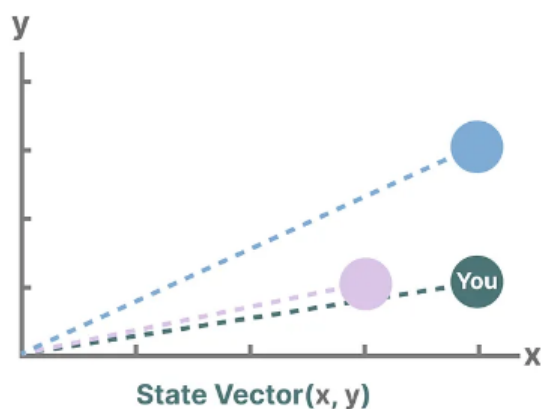
1. 什么是状态空间

假如我们在走迷宫，那么状态空间（state space）就是我们在地图中所有可能的状态（states），包含{ 我们正在哪里？下一步可以往哪个方向走走？下一步我们可能在哪里？ }



CSDN @zyw2002

描述状态的变量，在我们的例子中是X和Y坐标，以及到出口的距离，可以表示为“状态向量”。



例如，当前的状态向量如下：

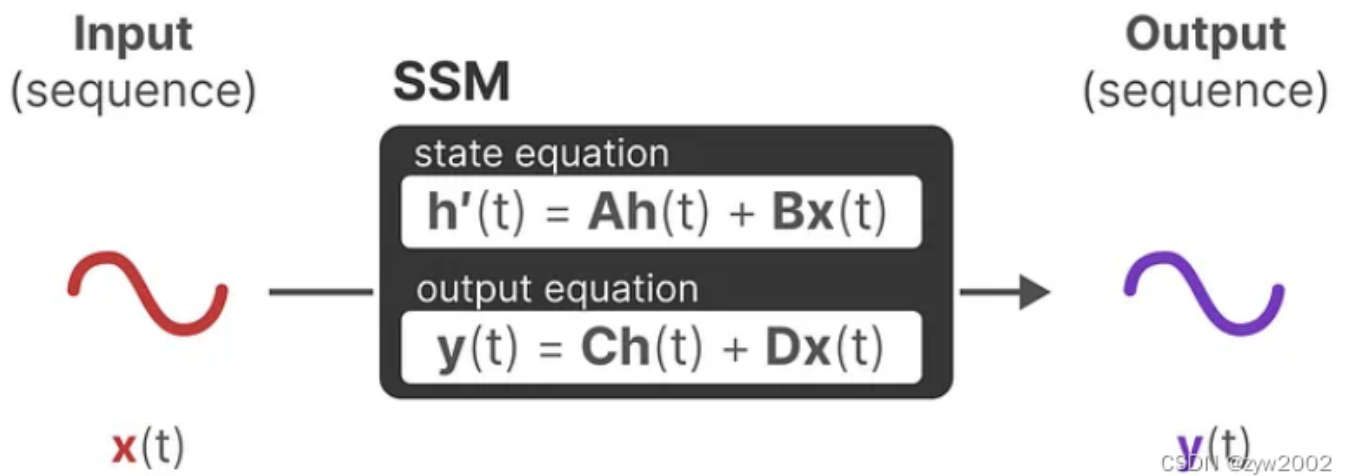
State Vector(You)

x	4
y	1
Distance to exit	7

2. 定义

状态空间包含完整描述系统的最小变量数，这些变量称为状态向量。状态空间模型(State Space Model, SSM)是用于描述这些状态向量的模型，并根据额外的输入预测它们的下一个状态。

SSM作为一种描述动态系统行为的数学模型，它使用一组一阶微分方程（连续时间系统）或差分方程（离散时间系统）来表示系统内部状态的演化，这组方程被称为状态方程；同时用另一组方程来描述系统状态和输出之间的关系，这组方程被称为观测方程（也称为输出方程）。



在时刻 t , SSM为:

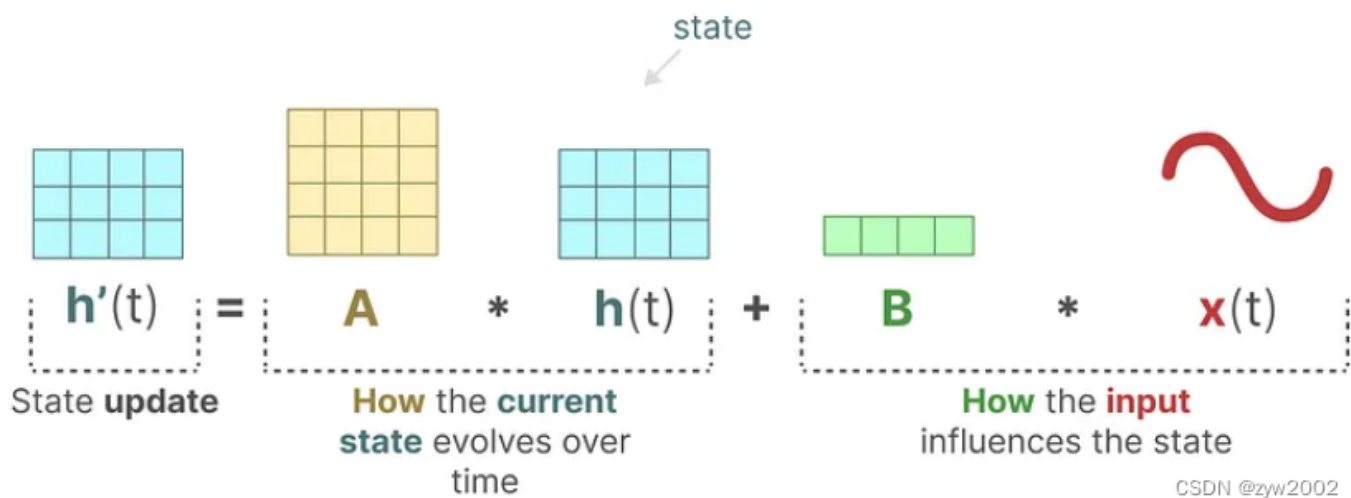
- 映射输入序列 $x(t)$ ——(例如, 在迷宫中向左和向下移动)
- 到隐藏状态表示 $h(t)$ ——(一个中间隐藏态, 例如, 到出口的距离和坐标 (x, y))
- 并推导出预测的输出序列 $y(t)$ ——(例如, 再次向左移动以更快地到达出口)

3. 连续形式的SSM

(1) 状态方程

$$h'(t) = Ah(t) + Bx(t) + w(t)$$

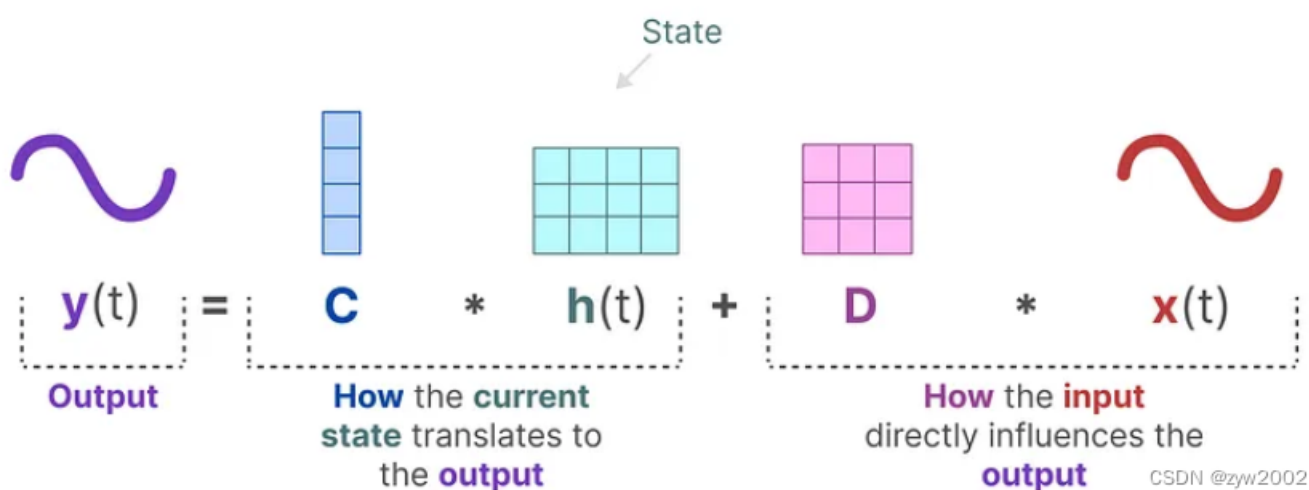
- $h(x)$ 是系统状态变量, 包含所有必要的变量来描述系统在任意时刻的状况, 是一个 n 维向量。
- $h'(x)$ 是 $h(x)$ 关于时间的微分, 表示系统状态的变化率。
- A 是系统矩阵, 描述了系统状态之间的关系, 以及它们如何随时间自然演化 (无控制输入时) , 是一个 $n \times n$ 矩阵。
- B 是控制输入向量, 表示外部输入或控制信号的影响, 是一个 m 维向量, 并且 $m \leq n$ 。
- $x(t)$ 是输入矩阵, 描述了控制输入如何影响系统状态, 是一个 $n \times m$ 矩阵。
- $w(t)$ 是过程噪声, 它代表系统内部的不确定性, 一般假设为高斯噪声



(2) 观测方程

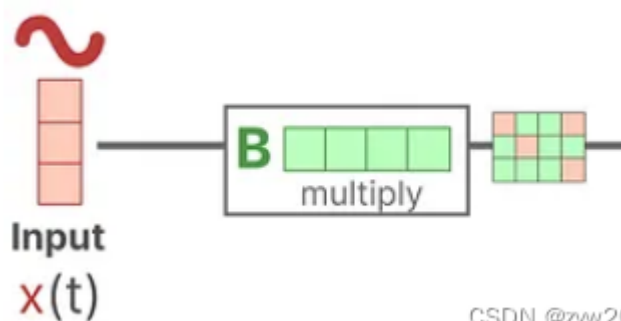
$$y(t) = Ch(t) + Dx(t) + e(t)$$

- $y(t)$ 是输出向量或者观测向量，包含所有的测量或观测到的变量，是一个 p 维向量，并且 $p \leq n$ 矩阵。
- C 是输出矩阵，描述了系统状态如何影响输出，是一个 $p \times n$ 矩阵。
- D 是直达传递矩阵（在很多实际系统中，这个矩阵通常是零或者不显著），表示控制输入直接对输出的影响，是一个 $n \times m$ 矩阵。
- $e(t)$ 是测量噪声，它代表了测量过程中的不确定性或误差，一般假设为高斯噪声。



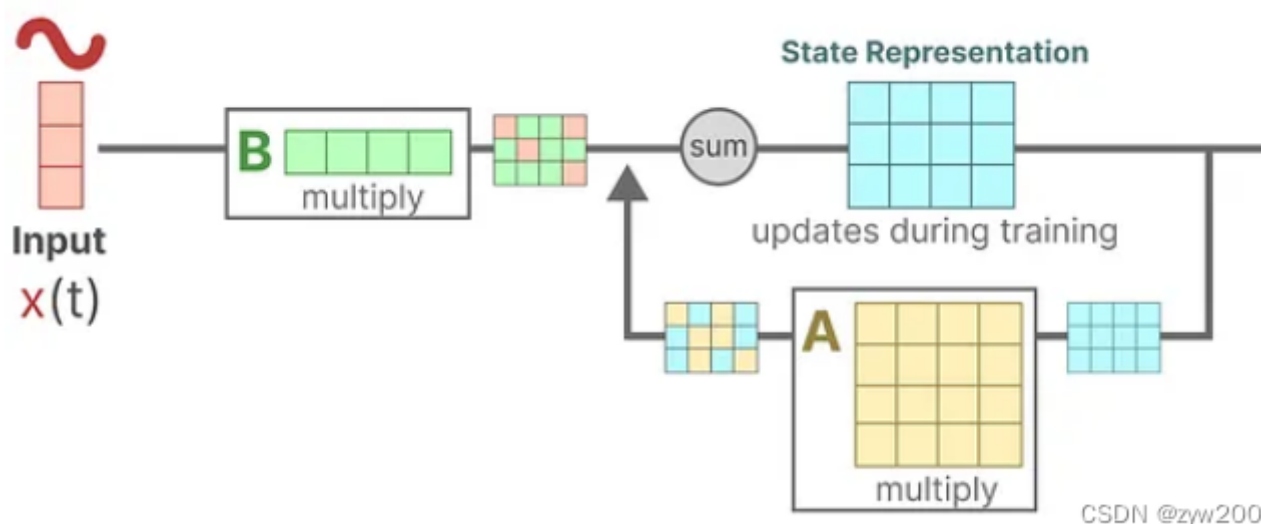
(3) 逐步推导

step1. 假设我们有一些输入信号 $x(t)$ ，这个信号首先乘以矩阵B，矩阵B描述了输入如何影响系统。



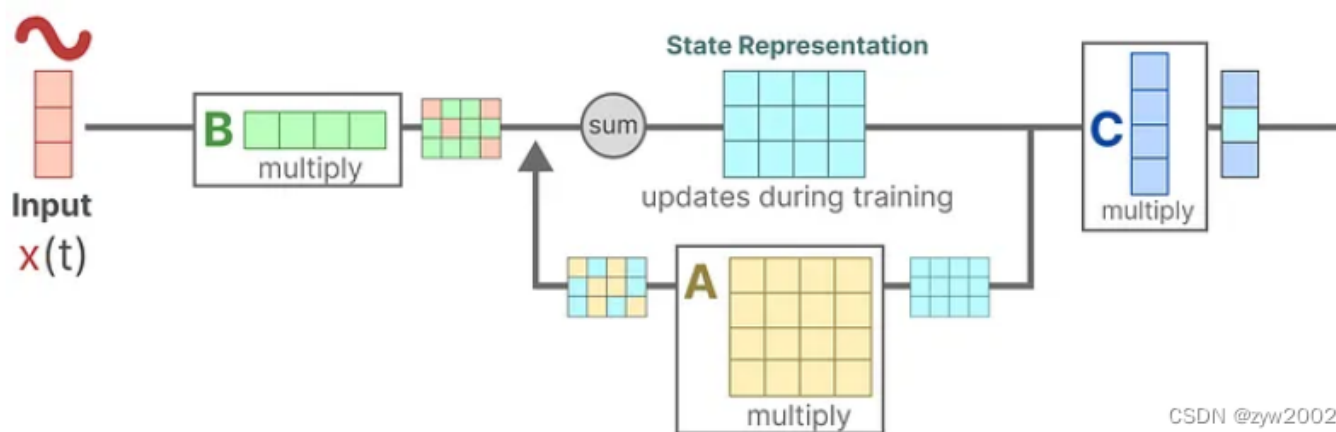
CSDN @zyw2002

step2.矩阵A和当前状态相乘。矩阵A描述了内部状态之间是如何连接的。



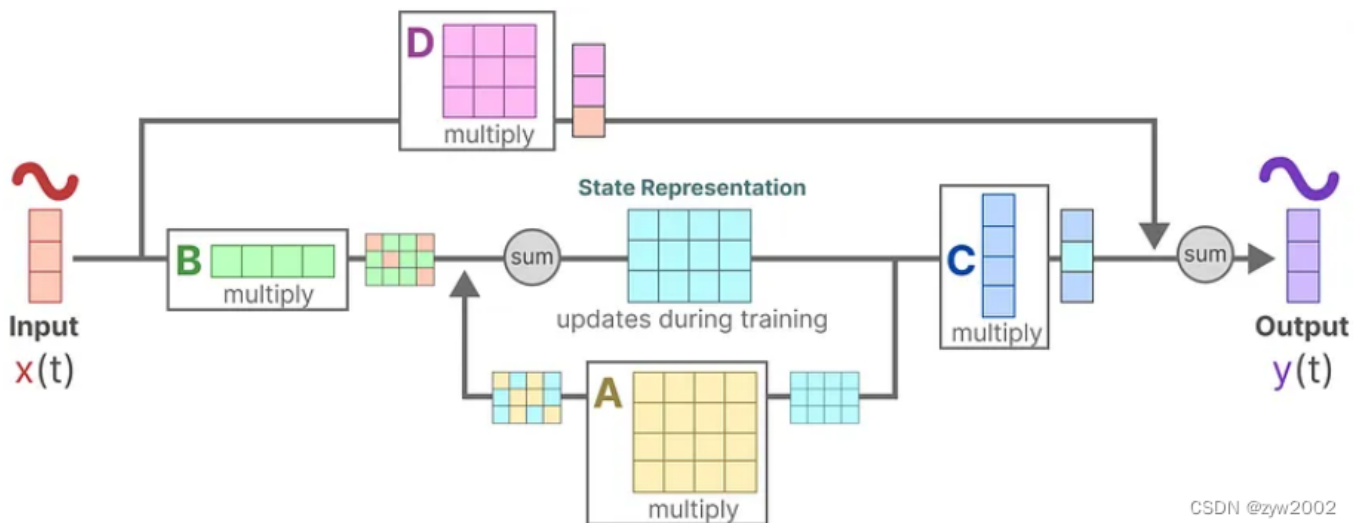
CSDN @zyw2002

step3.矩阵C和新的状态相乘。矩阵C描述了状态是如何转化到输出的。



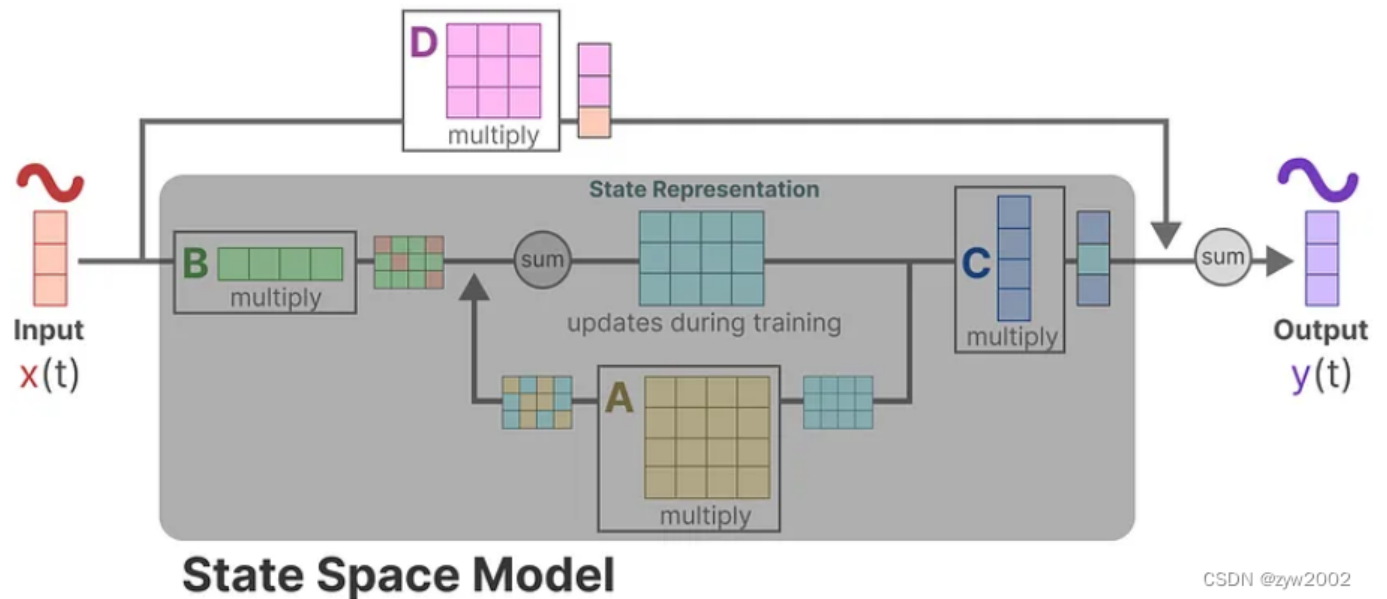
CSDN @zyw2002

step4.最后，我们可以利用矩阵D提供一个从输入到输出的直接信号。这通常也称为跳跃连接 (skip-connection)。



CSDN @zyw2002

SSM通常被认为是不包含跳跃连接的部分。在很多实际系统中，这个 **D 矩阵** 通常是零或者不显著，因此SSM可视化为：



CSDN @zyw2002

因此，A、B、C是SSM的核心。由于预期输入是连续的，所以SSM的主要表示是**连续时间表示** (continuous-time representation) 。

随着演变，SSM也开始通过一些数学方法，利用到处理离散数据中。