學號：T08902109　系級：　電機三　姓名：贾成铕

1. (1%) 請使用不同的 Autoencoder model，以及不同的降維方式(降到不同維度)，討論其 reconstruction loss & public / private accuracy。（因此模型需要兩種，降維方法也需要兩種，但 clustrering 不用兩種。）

第一種降維方式我採用和助教手把手類似辦法，降到 16*8*8

結果：reconstruction loss：0.0038

Public accuracy ：0.74185

Private accuracy ：0.74000

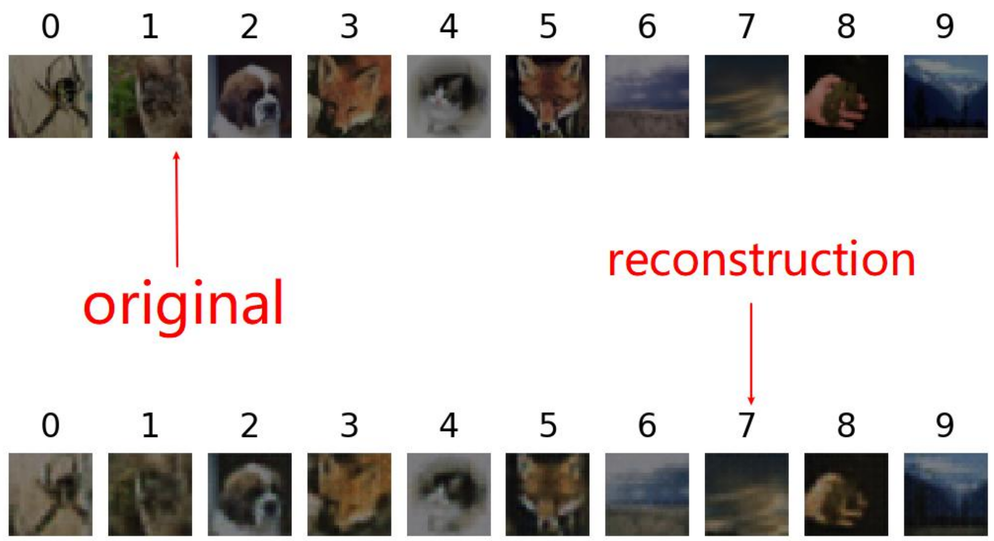
第二種降維方式我採用相同的結構，但使用 VAE.

結果：total loss：0.0124 （reconstruction loss + KL loss）

Public accuracy ：0.82407

Private accuracy ：0.82650

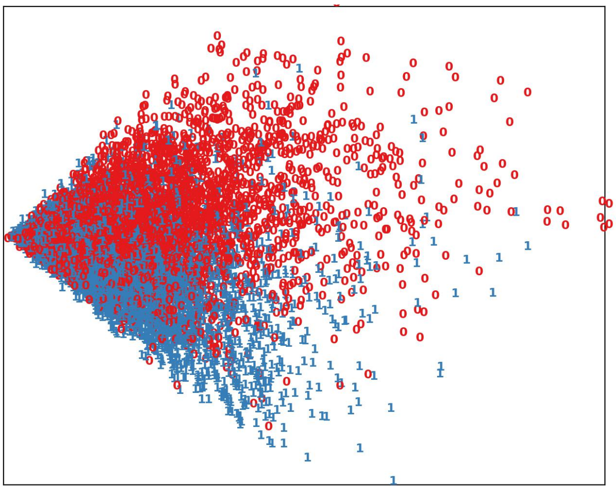
2. (1%) 從 dataset 選出 2 張圖，並貼上原圖以及經過 autoencoder 後 reconstruct 的圖片。



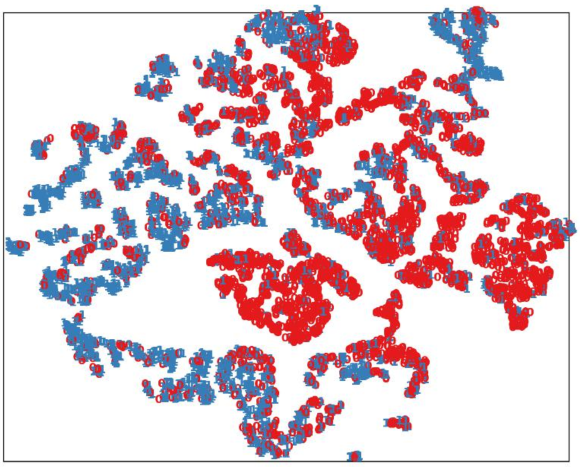
上圖為選出的前十組圖片，可以看出 reconstruction 的結果基本還比較好，部分像素點有些模糊，整體還比價完整。

3. (1%) 在之後我們會給你 dataset 的 label。請在二維平面上視覺化 label 的分佈。

取前兩維的結果：



做 TSNE:



可以看出，只取 PCA 的前兩維時，結果會混在一起，但做了 TSNE 後，結果會分的比較開。

4. (3%)Refer to math problem

1.(a) Cov_mat :

$$\text{cov} = \frac{1}{m-1} (X - \bar{X})^T (X - \bar{x}) = \begin{pmatrix} 13.38 & 0.555 & 3.644 \\ 0.555 & 13.555 & 3.222 \\ 3.644 & 3.222 & 9.067 \end{pmatrix}$$

eigen value: 16.997 12.923 6.08

eigen vector:

A: principal axes

$$\begin{pmatrix} -0.6165 & -0.589 & -0.5225 \\ 0.678 & -0.734 & 0.027 \\ 0.399 & 0.338 & -0.85 \end{pmatrix}$$

10x3

(b).

(1, 2, 3) → (7.19, 1.37, -2.25)

(4, 8, 5) → (0.76, -0.94, -0.73)

(3, 12, 9) → (-3.07, -4.45, -3.19)

(1, 8, 5) → (2.61, -2.98, -1.93)

(5, 14, 2) → (-1.82, -4.75, 4.25)

(7, 4, 1) → (3.35, 3.92, 2.53)

(9, 8, 9) → (-4.41, 2.56, -2.14)

(3, 8, 1) → (3.47, -1.73, 2.28)

(11, 5, 6) → (-2.31, 1.03, 0.20)

(10, 11, 7) → (-5.75, 0.98, 0.98)

(c).

A:
2D:

$$\begin{pmatrix} -0.6165, & -0.589 & -0.5225 \\ 0.678 & -0.734 & 0.027 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\underline{10\times 2}}{X_{2D}} \cdot \underset{\underline{2\times 3}}{A} = \underset{10\times 3}{X_{3D}} \quad \text{(reconstruction)}$$

error: $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \|X_i - x_{30i}\|_2 = 11.026$

2. (a) $A \in R^{m \times n}$

$(AA^T)^T = AA^T$, $(A^TA)^T = A^TA$ symmetric

$\forall x \in R^m$

$$x^T A A^T x = (A^T x)^T A^T x \geq 0$$

thus: AA^T is positive semi-definite

$\forall x \in R^n$

$$x^T (A^T A) x = (Ax)^T Ax \geq 0$$

thus: AA^T is positive semi-definite

assume: $\lambda \neq 0$ is an eigenvalue of A^TA

$\Rightarrow A^TAx = \lambda x$

for $x \neq 0$ $\quad A \cdot A^TAx = A\lambda x$

$\Rightarrow AA^T \cdot (Ax) = \lambda (Ax)$

thus $\lambda \neq 0$ is also an eigenvalue of AA^T

as same, we can prove that:

if λ is an eigenvalue of AA^T, is also an eigenvalue of A^TA

(b). ?

(c) $L = \mathrm{Trace}(\Phi^T \Sigma \Phi) + \lambda(\Phi^T\Phi - I_k)$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} = \frac{\partial\, \mathrm{Trace}(\Phi^T \Sigma \Phi)}{d\Phi} + 2\lambda\Phi$$

$$\frac{d\, \mathrm{Trace}(\Phi^T \Sigma \Phi)}{\partial \Phi} = \Phi^T\Sigma + \Phi^T\Sigma^T$$
$$= 2\Phi^T\Sigma$$

thus $\quad \Phi^T\Sigma + \lambda\Phi^T = 0 \quad$ ①

$$\frac{dL}{\partial\lambda} = \Phi^T\Phi - I_m = 0$$

$I_k\Sigma + I\Phi^2 =$

thus $\quad \Phi^T\Phi = I_m \quad$ ②

① and ② $\rightarrow$

$$\Phi =$$

3. sorry, no idea!