

# 2024A-板凳龙问题解法

Yin

2025 年 8 月 17 日

## 摘要

本项目解决了 2024 全国大学生数模 A 题-板凳龙问题。

代码方面通过 python+JupyterNotebook 实现，源代码在 src 目录下，model.py 对应模型类，solution.ipynb 记录了对应问题的解决过程。

各个问题的原始输出保存在 data/question 中，格式化后的结果在 data/result 中。

目录

1	题目转述	3
2	问题一	3
2.1	位置分析 . . . . .	3
2.1.1	求解后一个连接点的位置 . . . . .	3
2.1.2	计算龙头位置与时间的关系 . . . . .	5
2.1.3	求解位置信息 . . . . .	5
2.2	速度分析 . . . . .	6
3	问题二	7
3.1	碰撞分析 . . . . .	7
3.2	二维坐标系转换矩阵推导 . . . . .	8
4	问题三	10
5	问题四	10
5.1	掉头轨迹长度 . . . . .	11
5.2	掉头轨迹分析 . . . . .	11
5.3	速度分析 . . . . .	14
6	问题五	15

## 1 题目转述

假设所有板凳为刚性长方形，长方形相交时，即发生碰撞。将连接处抽象为一个点，用直线表示每个板凳，长  $341-55=286\text{cm}$ 。每个连接点沿着给定路径依次移动。由于有碰撞，龙头处极径不会过小，因此不考虑连接点发生回退的情况，所有连接点保持前进。

## 2 问题一

运动轨迹为等距螺线，方程如下：

$$\rho = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta$$

其中  $\rho$  为半径， $\theta$  为极角， $d$  为螺距。

### 2.1 位置分析

#### 2.1.1 求解后一个连接点的位置

递推各连接点的位置时，仅根据各节板凳长度求解连接点位置，必然会导致多解，由于连接点位置不发生突变，一直取最小的可行解即可。在  $t$  时刻，可得如下方程：

$$length_i^2 = \rho_i^2 + \rho_{i+1}^2 - 2\rho_i\rho_{i+1}\cos(\theta_i - \theta_{i+1})$$

$$\text{代入得: } length_i^2 = \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 [\theta_i^2 + \theta_{i+1}^2 - 2\theta_i\theta_{i+1}\cos(\theta_i - \theta_{i+1})]$$

约束条件如下（其中  $\theta_{i+1}(t-1)$  表示  $t$  时刻连接点  $i+1$  的位置）：

$$\theta_i(t) < \theta_{i+1}(t) < \theta_{i+1}(t-1)$$

同时，通过速度矢量分析当极径足够时，连接点必然同向运动

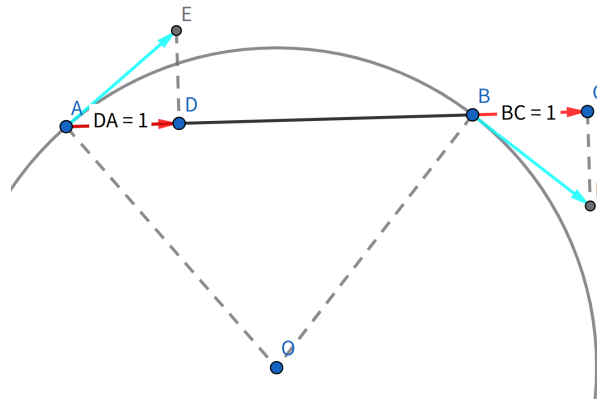


图 1: 沿杆速度相同

补充：可能出现回退的情况：  
如下图所示，极径过小时，龙头没有足够的空间，意味着外围龙身需要往复调整。但实际情况下不会出现。

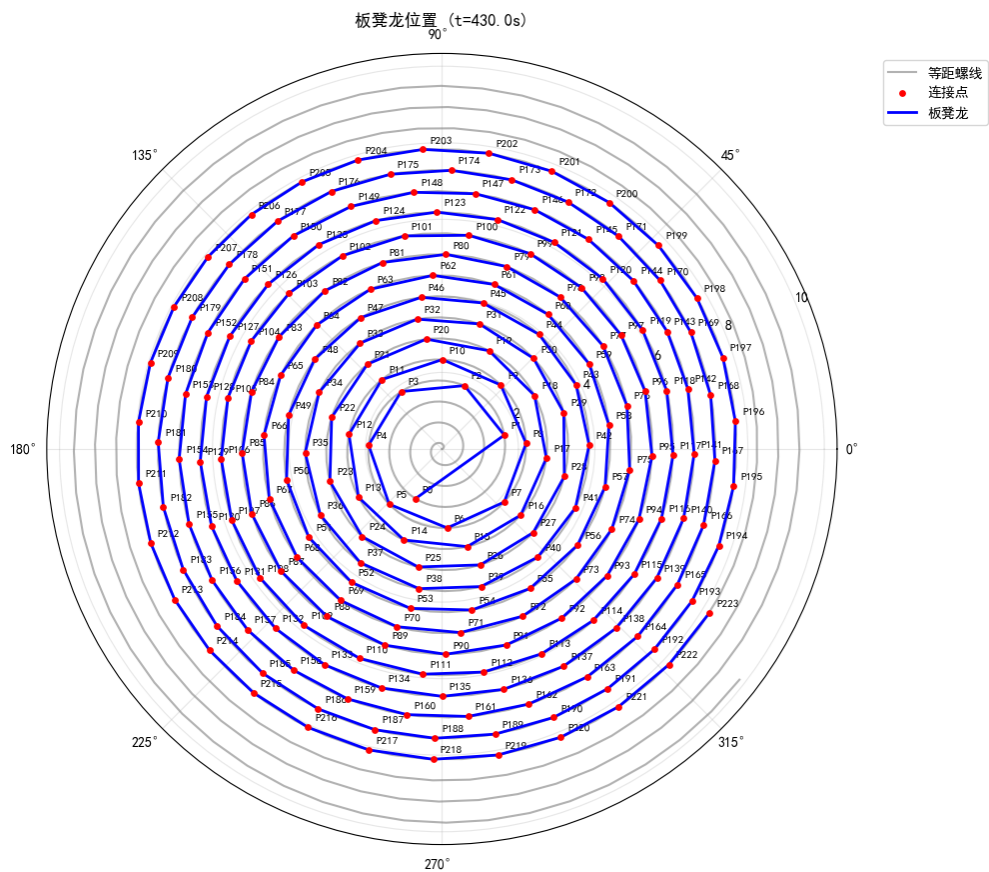


图 2: 430s 时

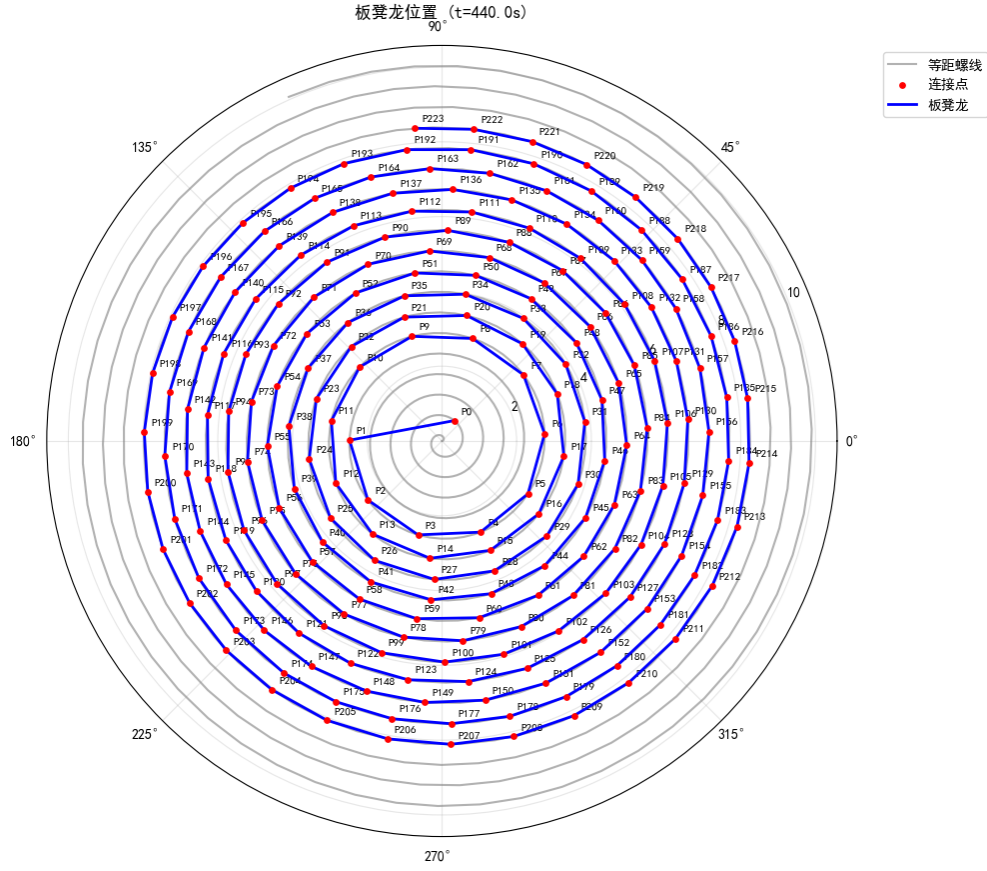


图 3: 440s 时

### 2.1.2 计算龙头位置与时间的关系

$$\begin{aligned}
 v &= \omega \cdot \rho \\
 v &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \\
 v \cdot dt &= \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \cdot d\theta \\
 v \cdot t &= \frac{d}{4\pi} \cdot (\theta(0)^2 - \theta(t)^2) \\
 \theta(t) &= \sqrt{\theta(0)^2 - \frac{4\pi vt}{d}}
 \end{aligned}$$

### 2.1.3 求解位置信息

现在，可以先用固定步长 ( $\Delta\theta = 0.01\text{rad}$ )，找到最小解的范围，再利用二分法 (迭代 100 次)，求出相对精确的数值解。

处理坐标时，统一用极角来记录，最后再转化为直角坐标输出。

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \cos \theta \\ y = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \sin \theta \end{cases}$$

表 1: 问题一位置数据

	0 s	60s	120s	180s	240s	300s
龙头 x (m)	8.800000	5.796934	-4.090654	-2.953259	2.578971	4.431365
龙头 y (m)	0.000000	-5.773329	-6.300643	6.099638	-5.363954	2.298233
第 1 节龙身 x (m)	8.379861	7.487858	-1.394359	-5.256205	4.834518	2.515464
第 1 节龙身 y (m)	2.776997	-3.374076	-7.416292	4.337191	-3.544423	4.369432
第 51 节龙身 x (m)	-9.511762	-8.621870	-5.106224	2.862016	6.058291	-6.298072
第 51 节龙身 y (m)	1.386797	2.744112	6.725579	7.260934	-3.706036	0.501906
第 101 节龙身 x (m)	3.461139	5.606052	5.189796	2.062019	-4.967295	-6.059701
第 101 节龙身 y (m)	-9.746032	-8.057317	-7.674495	-8.435107	-6.340202	4.198316
第 151 节龙身 x (m)	10.736546	7.224601	3.619651	1.742430	3.214865	7.077237
第 151 节龙身 y (m)	2.482866	7.648643	9.327383	9.309647	8.304618	4.332544
第 201 节龙身 x (m)	4.821876	-6.130680	-10.301354	-9.360644	-7.046773	-7.560852
第 201 节龙身 y (m)	10.605443	9.359060	2.897161	-4.079507	-6.653046	-5.112382
龙尾 (后) x (m)	-5.592021	6.266011	10.949357	7.838839	3.855852	2.866552
龙尾 (后) y (m)	-10.526626	-9.598975	1.145606	7.006684	9.229822	9.015817

## 2.2 速度分析

首先是等距螺线上，连接点的径速度与切向速度（弧度无量纲）：

$$\begin{cases} v_t = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \omega \\ v_\rho = \frac{d}{2\pi} \cdot \omega \end{cases}$$

计算沿杆方向分速度时，涉及到以下三个向量：

$$\begin{cases} \text{切向单位向量: } \vec{e}_t = (\sin \theta, -\cos \theta) \\ \text{径向单位向量: } \vec{e}_\rho = (-\cos \theta, -\sin \theta) \\ \text{沿杆方向向量: } \\ \vec{length} = (\theta_i \cos \theta_i - \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1}, \theta_i \sin \theta_i - \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1}) \end{cases}$$

于是可以给出 沿杆方向速度分量  $\cdot |\vec{length}|$  的值：

$$(v_\rho \cdot \vec{e}_\rho + v_t \cdot \vec{e}_t) \cdot \vec{length}$$

沿杆方向速度分量相同，可得：

$$\omega_{i+1} = \omega_i \cdot \frac{\theta_{i+1} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_i \theta_{i+1} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_i}{-\theta_i \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_i \theta_{i+1} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_{i+1}}$$

$$v_{i+1} = v_i \cdot \sqrt{\frac{\theta_{i+1}^2 + 1}{\theta_i^2 + 1}} \cdot \frac{\theta_{i+1} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_i \theta_{i+1} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_i}{-\theta_i \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_i \theta_{i+1} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_{i+1}}$$

表 2: 问题一速度数据

	0 s	60s	120s	180s	240s	300s
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999973	0.999958	0.999942	0.999913	0.999853	0.999721
第 51 节龙身 (m/s)	0.999742	0.999661	0.999541	0.999325	0.998928	0.998072
第 101 节龙身 (m/s)	0.999571	0.999449	0.999267	0.998963	0.998424	0.997313
第 151 节龙身 (m/s)	0.999444	0.999297	0.999081	0.998726	0.998103	0.996866
第 201 节龙身 (m/s)	0.999347	0.999177	0.998937	0.998545	0.997874	0.996580
龙尾 (后) (m/s)	0.999309	0.999135	0.998877	0.998484	0.997804	0.996490

### 3 问题二

第二问加入了碰撞因素，需要确定不发生碰撞的盘入时间上限。

#### 3.1 碰撞分析

我们认为，碰撞只发生在不相连的板凳之间。

选择分离轴定理进行矩形碰撞检测。

定理简述：

如果存在且只要存在一条轴线，使得两个凸面物体在该轴上的投影没有重叠，那么这两个凸面物体就没有重叠。

如果 2 个 box 不碰撞，那么必然存在一条分割线，将两个 box 分开。与这条分割线垂直的方向，就是分离轴的方向。如果存在分割线，必然有很多分割线，必然有一条分割线与两个 box 中的某条边平行。这意味着，与分割线垂直的分离轴中，必然存在一条与两个 Box 的另一条边平行，所以检测两个 2D box 的碰撞，仅仅需要将 2 个 box 的 4 个方向（8 条边，4 个方向）作为分离轴投影即可。

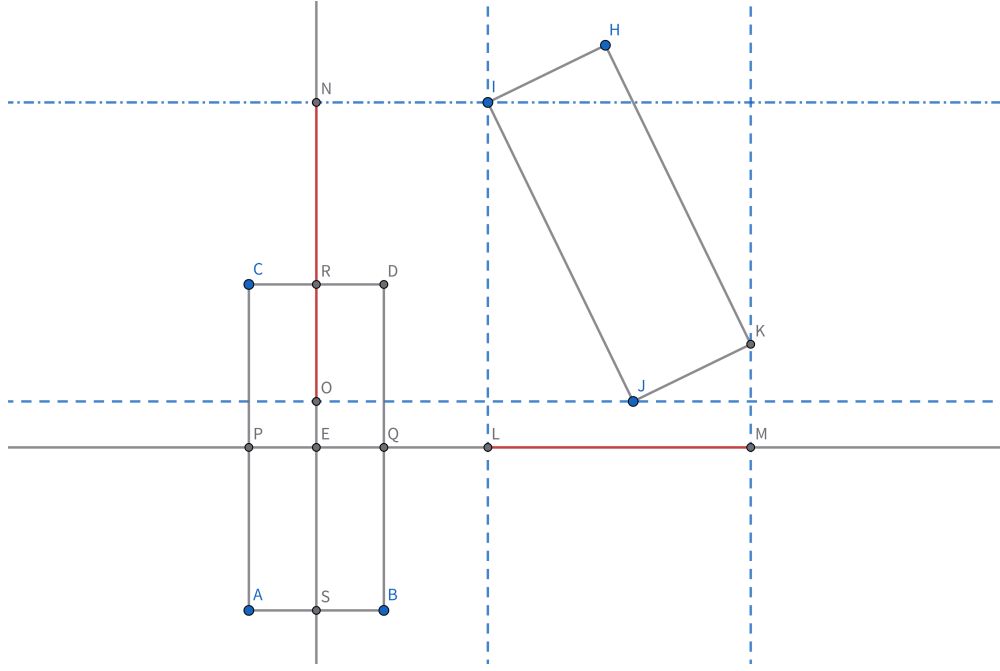


图 4: 分离轴定理

基于其中一个待分析的矩形，创建直角坐标系。接着，将另一个矩形投影到坐标轴上，比较坐标轴上的投影重合情况。

纵轴投影无重合： $\min(y_N, y_O) \geq \max(y_R, y_S)$  or  $\min(y_R, y_S) \geq \max(y_N, y_O)$

横轴投影无重合： $\min(x_L, x_M) \geq \max(x_P, x_Q)$  or  $\min(x_P, x_Q) \geq \max(x_L, x_M)$

当横纵轴上任意一处无重合，则长方形无碰撞。否则，交换两个长方形，继续判断投影重合情况。

沿杆方向向量： $\vec{length} = (\theta_i \cos \theta_i - \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1}, \theta_i \sin \theta_i - \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1})$

从矩形 1 坐标系到矩形 2 坐标系，涉及坐标变换。

### 3.2 二维坐标系转换矩阵推导

设有两个二维坐标系  $A$  与  $B$ ，它们相对于同一参考坐标系  $W$  的基向量和原点分别为：

$$R_{WA} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{t}_{WA} \in \mathbb{R}^2$$

$$R_{WB} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x & \mathbf{b}_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{t}_{WB} \in \mathbb{R}^2$$

其中  $R_{WA}$ 、 $R_{WB}$  的列向量分别是  $A$ 、 $B$  坐标系的单位基向量在  $W$  坐标系中的表示； $\mathbf{t}_{WA}$ 、 $\mathbf{t}_{WB}$  是各自原点在  $W$  坐标系中的坐标。



### 点的表示关系

对同一个点  $\mathbf{x}$ ，在  $W$  系中由  $A$  系表示为：

$$\mathbf{x}_W = R_{WA} \mathbf{x}_A + \mathbf{t}_{WA} \quad (1)$$

在  $W$  系中由  $B$  系表示为：

$$\mathbf{x}_W = R_{WB} \mathbf{x}_B + \mathbf{t}_{WB} \quad (2)$$

### 消去 $\mathbf{x}_W$

由式 (1) 与 (2) 相等得：

$$R_{WB} \mathbf{x}_B + \mathbf{t}_{WB} = R_{WA} \mathbf{x}_A + \mathbf{t}_{WA}$$

$$R_{WB} \mathbf{x}_B = R_{WA} \mathbf{x}_A + \mathbf{t}_{WA} - \mathbf{t}_{WB}$$

$$\mathbf{x}_B = R_{WB}^{-1} (R_{WA} \mathbf{x}_A + \mathbf{t}_{WA} - \mathbf{t}_{WB})$$

### 旋转和平移部分

因此，从  $A$  到  $B$  的线性部分与平移部分为：

$$\boxed{R_{BA} = R_{WB}^{-1} R_{WA}}, \quad \boxed{\mathbf{t}_{BA} = R_{WB}^{-1} (\mathbf{t}_{WA} - \mathbf{t}_{WB})}$$

若  $R_{WB}$  为正交矩阵（纯旋转），则  $R_{WB}^{-1} = R_{WB}^\top$ 。

### 齐次坐标形式

将旋转与平移合并为齐次矩阵：

$$T_{BA} = \begin{bmatrix} R_{BA} & \mathbf{t}_{BA} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{WB}^{-1} R_{WA} & R_{WB}^{-1} (\mathbf{t}_{WA} - \mathbf{t}_{WB}) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $T_{BA}$  作用于齐次坐标  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ 1 \end{bmatrix}$ ，可得到  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

### 具体实现

所以先确定好待分析的两个矩形，将其中一个矩形的四角坐标变换到另一个矩形对应的直角坐标系中，接着利用分离轴定理即可判断是否碰撞。在本项目中，我们新定义了 model2，它继承了 model1，新增碰撞相关的检测函数。

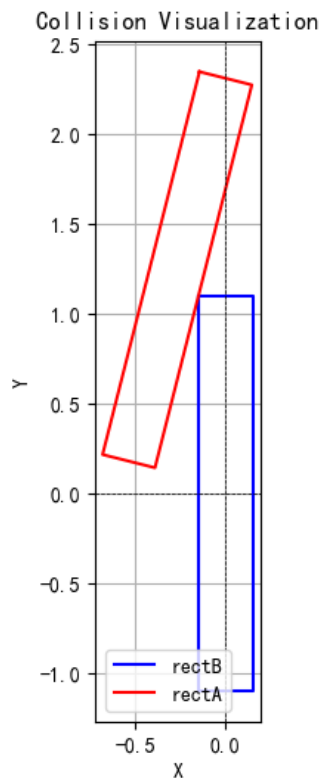


图 5: 碰撞示意图

## 4 问题三

模型基本与第二问相同，在判断能否到达时只需要从掉头空间外围一圈开始盘入即可，因为内圈不碰撞，外圈也不会碰撞。

利用固定步长（先设为  $0.1rad$  进行粗略估计，再改为  $0.01rad$  进行精确测试）检测运动过程中有无碰撞。利用二分法确定结果区间。根据文件 solution3.ipynb，最小螺距约为  $0.4243m$ 。

## 5 问题四

由于盘入点和盘出点中心对称，在该位置上的切线斜率也相同，即切线平行。那么：

$$\angle ADE = \angle BED$$

由三角形相似性，AB 与 DE 交点 C 满足： $\frac{AC}{CB} = \frac{R_A}{R_B}$ ，恰好为切点

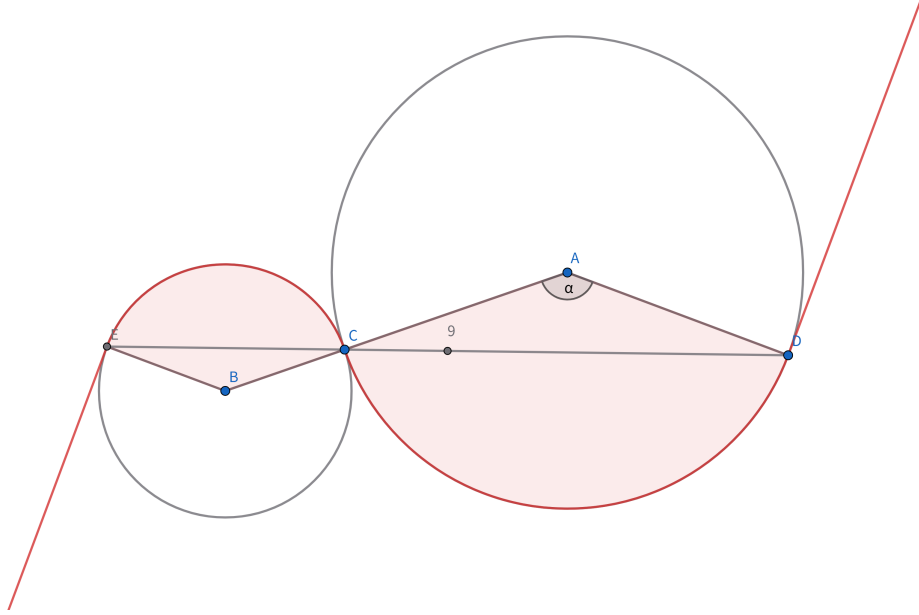


图 6: 掉头曲线示意图

### 5.1 掉头轨迹长度

接着计算掉头曲线长度：

$$\alpha \in (0, \pi]$$

$$\widehat{CD} + \widehat{CE} = (R_A + R_B) \cdot \alpha$$

$$\because R = (R_A + R_B) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore R_A + R_B \text{ 此时为定值}$$

$$\therefore \widehat{CD} + \widehat{CE} = \frac{R \cdot \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ 掉头轨迹长度不变}$$

### 5.2 掉头轨迹分析

首先确定圆心坐标：

盘入时切点处极角为  $\alpha_1 = \frac{2\pi R}{d}$ ,

连接点速度方向为  $(-\cos \theta + \theta \sin \theta, -\sin \theta - \theta \cos \theta)$

切点处的切向与法向单位向量：

$$\begin{cases} \vec{e}_{t1} = \left( \frac{-\cos \alpha_1 + \alpha_1 \sin \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}}, \frac{-\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} \right) \\ \vec{e}_{\rho 1} = \left( \frac{-\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}}, \frac{\cos \alpha_1 - \alpha_1 \sin \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} \right) \end{cases}$$

接着, 计算圆弧半径, 记  $k = \frac{R_A}{R_B}$ :

$$R_A = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{R}{\cos \angle ADC} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{R}{|\vec{e}_\rho \cdot (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)|}$$

由此可确定圆心 A 坐标:  $(R \cos \alpha_1, R \sin \alpha_1) + R_A \cdot \vec{e}_{\rho 1}$

同时令在圆 A 上运动的点的圆心角为  $\theta_1$

由于以盘入时刻作为 0 时刻, 需要重新计算龙头位置与时间的关系:

$t \leq 0$  时, 龙头在盘入螺线上,

$$v \cdot t = \frac{d}{4\pi} \cdot (\alpha_1^2 - \theta_0(t)^2)$$

$$\theta_0(t) = \sqrt{\alpha_1^2 - \frac{4\pi vt}{d}}$$

$t > 0$  时, 有以下几个区间

圆弧 A:  $(0, R_A \cdot \angle DAC]$

$$\theta_1 = \text{upperbound} - \frac{vt}{R_A}$$

圆弧 B:  $(R_A \cdot \angle DAC, (R_A + R_B) \cdot \angle DAC]$

$$\theta_2 = \text{upperbound} - \frac{vt - R_A \cdot \angle DAC}{R_B}$$

$$= \text{upperbound} + k \angle DAC - \frac{vt}{R_B}$$

盘出螺线:  $((R_A + R_B) \cdot \angle DAC, +\infty)$

$$v \cdot t - (R_A + R_B) \cdot \angle DAC = \frac{d}{4\pi} \cdot (\theta_3(t)^2 - \alpha^2)$$

$$\theta_3(t) = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4\pi}{d} \cdot [v \cdot t - (R_A + R_B) \cdot \angle DAC]}$$

掉头空间直径为 9m, 超过龙身龙头长度, 后一连接点可能出现在当前连接点经过的任一曲线段上。

在程序中, 可以更加简单的进行实现。首先, 将坐标格式改为  $(\theta, i)$ , 其中  $\theta$  为当前曲线上的极角,  $i$  为曲线编号, 盘入螺线为 0, 圆弧 A 为 1, 圆弧 B 为 2, 圆弧 C 为 3。接着, 根据曲线编号, 采用不同的方式, 可计算得到实际的笛卡尔坐标。

计算下一个连接点时, 先在各段曲线上, 利用固定步长和二分法求取较精确的数值解, 选择曲线上最接近当前连接点的解。对于在曲线  $i$  上的点, 只需要考虑曲线编号小于等于  $i$  的解即可。

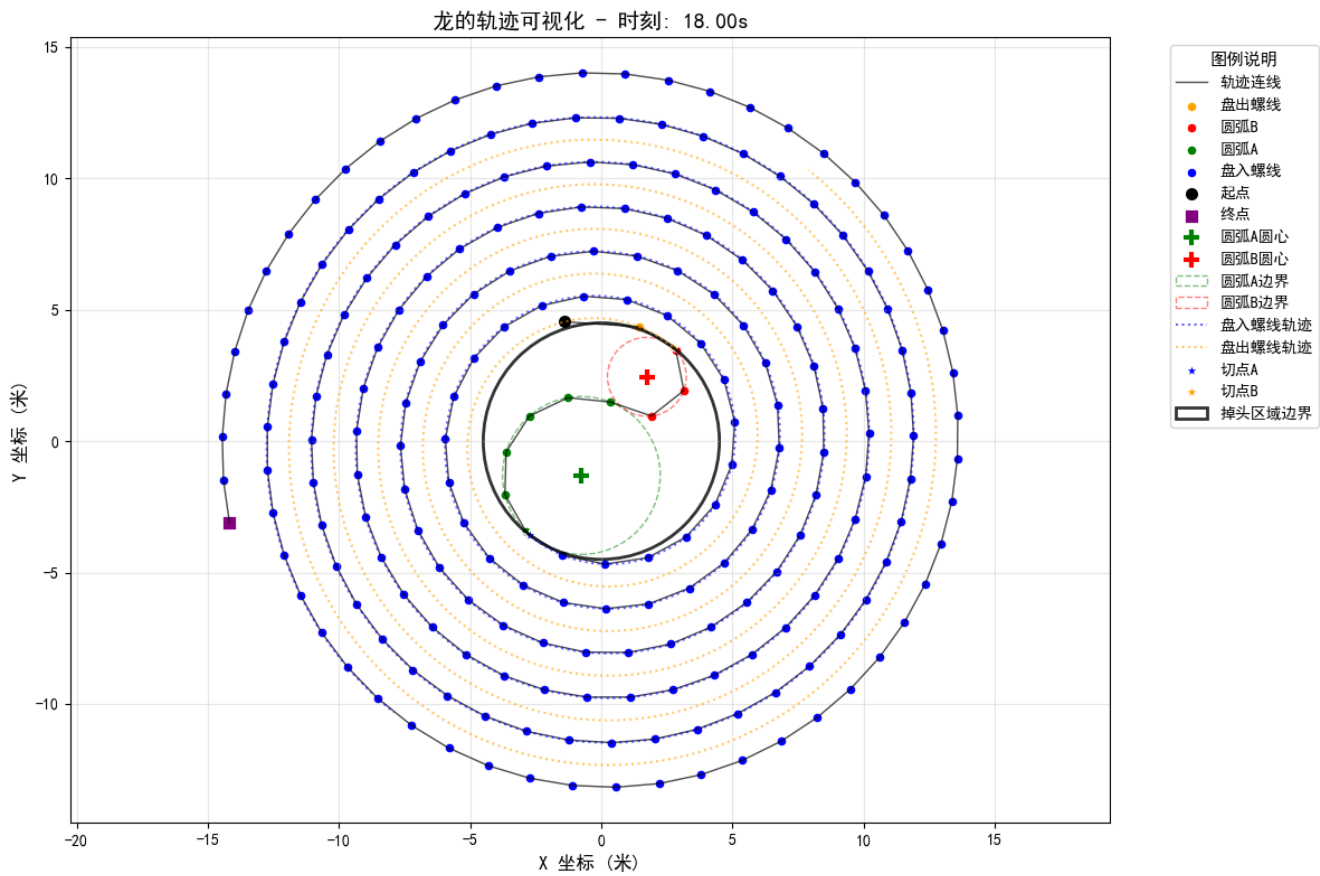


图 7: 18s 时板凳龙完整轨迹

表 3: 板凳龙在  $-100\text{s}$  至  $100\text{s}$  内的坐标数据

	-100s	-50s	0s	50s	100s
龙头 x (m)	7.742211	6.594408	-2.711856	1.288237	-3.232696
龙头 y (m)	3.797480	1.954514	-3.591078	6.186757	7.519411
第 1 节龙身 x (m)	6.149255	5.331731	-0.063534	3.827541	-0.427775
第 1 节龙身 y (m)	6.172789	4.520688	-4.670888	4.870879	8.077996
第 51 节龙身 x (m)	-10.632450	-3.577408	2.459962	-1.895265	2.024951
第 51 节龙身 y (m)	2.747065	-8.986620	-7.778145	-5.999999	4.074805
第 101 节龙身 x (m)	-11.891375	10.155884	3.008493	-7.450572	-7.166720
第 101 节龙身 y (m)	-4.884444	-5.923537	10.108539	5.364931	2.413250
第 151 节龙身 x (m)	-14.340382	12.991894	-7.002789	-4.817688	9.317459
第 151 节龙身 y (m)	-2.068195	-3.755728	10.337482	-10.283928	-3.880492
第 201 节龙身 x (m)	-12.012052	10.564154	-6.872842	0.100812	8.777053
第 201 节龙身 y (m)	10.502019	-10.768158	12.382609	-13.176684	8.337122
龙尾 (后) x (m)	-0.923465	0.132594	-1.933627	6.070380	-11.162918
龙尾 (后) y (m)	-16.534136	15.722159	-14.713128	12.507471	-6.448729

### 5.3 速度分析

对问题一中的模型进行推广，

$$v_{i+1} = \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{l}}{e_{i+1} \cdot \vec{l}} \cdot v_i$$

各曲线段上速度方向的单位向量如下：

曲线 0:  $(\frac{-\cos \theta + \theta \sin \theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}}, \frac{-\sin \theta - \theta \cos \theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}})$

曲线 1 或曲线 3:  $(\sin \theta, -\cos \theta)$

曲线 2:  $(-\sin \theta, \cos \theta)$

表 4: 板凳龙在  $-100\text{s}$  至  $100\text{s}$  内的速度数据

	-100s	-50s	0s	50s	100s
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999904	0.999762	0.998687	0.980274	0.988327
第 51 节龙身 (m/s)	0.999347	0.998643	0.995134	0.680461	0.555931
第 101 节龙身 (m/s)	0.999092	0.998249	0.994448	0.679415	0.594944
第 151 节龙身 (m/s)	0.998945	0.998049	0.994156	0.679096	0.594421
第 201 节龙身 (m/s)	0.998850	0.997927	0.993994	0.678942	0.594219
龙尾 (后) (m/s)	0.998818	0.997887	0.993944	0.678897	0.594164

## 6 问题五

找出龙头以  $1m/s$  运动的过程中，连接点速度的最大值  $v_0$ 。 $v_h$  最大值  $= \frac{2}{v_0}$

从问题 4 的结果分析，连接点速度最大值在 14 16s 之间出现，约为  $1.362277247m/s$ 。

以 0.01 的精度进一步查找，最终确定  $v_0 \approx 1.503365819$

所以  $v_h$  最大值  $= \frac{2}{v_0} \approx 1.330348 m/s$