2024A-板凳龙问题解法

Yin

2025 年 8 月 16 日

摘要

本项目重新实现了全国数模 2024A-板凳龙

1 题目转述

假设所有板凳为刚性长方形，长方形相交时，即发生碰撞。将连接处抽象为一个点，用直线表示每个板凳，长 341-55=286cm。每个连接点沿着给定路径依次移动。

2 问题一

运动轨迹为等距螺线，方程如下：

$$\rho = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta$$

其中 ρ 为半径，θ 为极角，d 为螺距。

2.1 位置分析

递推各连接点的位置时，仅根据各节板凳长度求解连接点位置，必然会导致多解，这里取最小的可行解。在 t 时刻，可得如下方程：

$$length_i^2 = \rho_i^2 + \rho_{i+1}^2 - 2\rho_i\rho_{i+1}\cos(\theta_i - \theta_{i+1})$$

$$\text{代入得：} length_i^2 = \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 \left[\theta_i^2 + \theta_{i+1}^2 - 2\theta_i\theta_{i+1}\cos(\theta_i - \theta_{i+1})\right]$$

约束条件如下（其中 $\theta_{i+1}(t-1)$ 表示 t 时刻连接点的位置）:

$$\theta_i(t) < \theta_{i+1}(t) < \theta_{i+1}(t-1)$$

同时，通过速度矢量分析当极径足够时，连接点必然同向运动

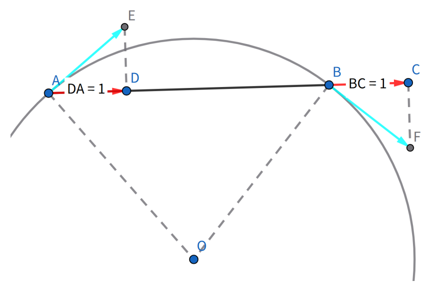

图 1: 沿杆速度相同

补充：什么时候可能出现回退？如何说明本题讨论的情景下，取最小可行解是合理的？

如下图所示，极径过小时，龙头极径变化较快，意味着外围龙身需要往复调整。

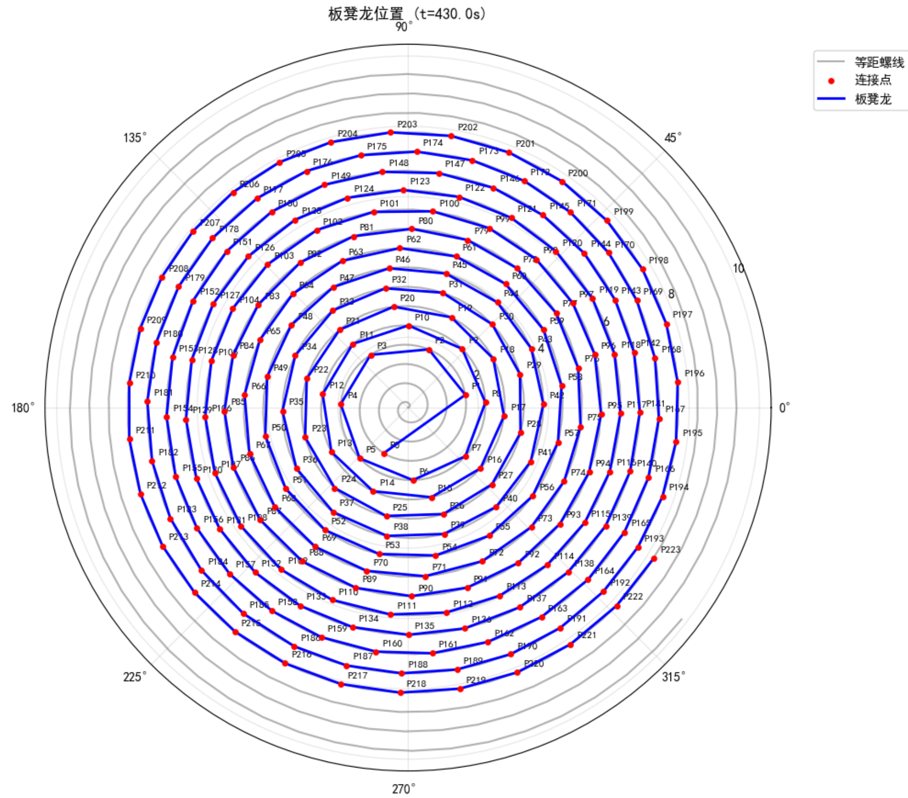

图 2: 430s 时

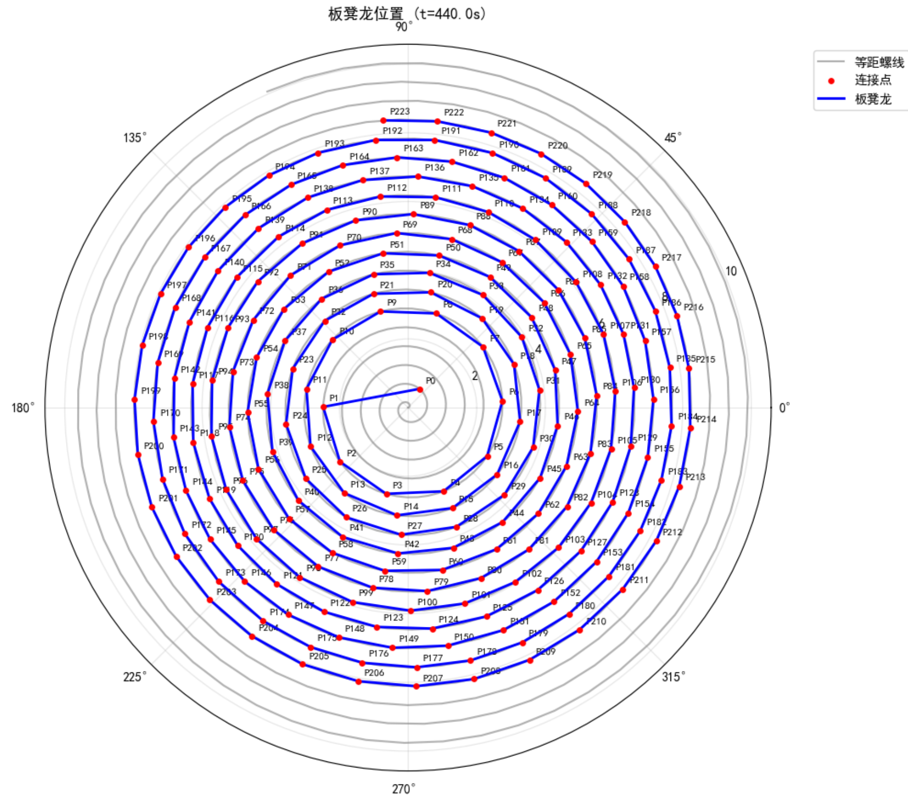

图 3: 440s 时

计算龙头位置与时间的关系：

$$
\begin{aligned}
v &= \omega \cdot \rho \\
v &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \\
v \cdot \mathrm{d}t &= \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \cdot \mathrm{d}\theta \\
v \cdot t &= \frac{d}{4\pi} \cdot \left(\theta(0)^2 - \theta(t)^2\right) \\
\theta(t) &= \sqrt{\theta(0)^2 - \frac{4\pi v t}{d}}
\end{aligned}
$$

现在，可以先用固定步长找到最小解的大致范围，再利用二分法，求出相对精确的数值解。

处理坐标时，统一用极角来记录，最后再转化为直角坐标输出。

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \cos\theta \\ y = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta \sin\theta \end{cases}$$

2.2 速度分析

首先是等距螺线上，连接点的径速度与切向速度（弧度无量纲）：

$$\begin{cases} v_t = \frac{d}{2\pi} \cdot \theta\omega \\ v_\rho = \frac{d}{2\pi} \cdot \omega \end{cases}$$

计算沿杆方向分速度时，涉及到以下三个向量：

$$\begin{cases} \text{切向单位向量：} \vec{e_t} = (\sin\theta, -\cos\theta) \\ \text{径向单位向量：} \vec{e_\rho} = (-\cos\theta, -\sin\theta) \\ \text{沿杆方向向量：} \\ \vec{length} = (\theta_i \cos\theta_i - \theta_{i+1}\cos\theta_{i+1}, \theta_i \sin\theta_i - \theta_{i+1}\sin\theta_{i+1}) \end{cases}$$

于是可以给出 沿杆方向速度分量 $\cdot\, |\vec{length}|$ 的值：

$$(v_\rho \cdot \vec{e_\rho} + v_t \cdot \vec{e_t}) \cdot \vec{length}$$

沿杆方向速度分量相同，可得：

$$\omega_{i+1} = \omega_i \cdot \frac{\theta_{i+1}\cos(\theta_{i+1}-\theta_i) + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i) - \theta_i}{-\theta_i\cos(\theta_{i+1}-\theta_i) + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i) + \theta_{i+1}}$$

$$v_{i+1} = v_i \cdot \sqrt{\frac{\theta_{i+1}^2+1}{\theta_i^2+1}} \cdot \frac{\theta_{i+1}\cos(\theta_{i+1}-\theta_i) + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i) - \theta_i}{-\theta_i\cos(\theta_{i+1}-\theta_i) + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i) + \theta_{i+1}}$$

3 问题二

第二问加入了碰撞因素，需要确定不发生碰撞的盘入时间上限。

3.1 碰撞分析

我们认为，碰撞只发生在不相连的板凳之间。

什么情况下，两个长方形相交，即发生碰撞？选择分离轴定理进行矩形碰撞检测。

定理简述:

如果存在且只要存在一条轴线，使得两个凸面物体在该轴上的投影没有重叠，那么这两个凸面物体就没有重叠。

如果 2 个 box 不碰撞，那么必然存在一条分割线，将两个 box 分开. 与这条分割线垂直的方向，就是分离轴的方向. 如果存在分割线，必然有很多分割线，必然有一条分割线与两个 box 中的某条边平行. 这意味着，与分割线垂直的分离轴中，必然存在一条与两个 Box 的另一条边平行, 所以检测两个 2D box 的碰撞，仅仅需要将 2 个 box 的 4 个方向（8 条边，4 个方向）作为分离轴投影即可.

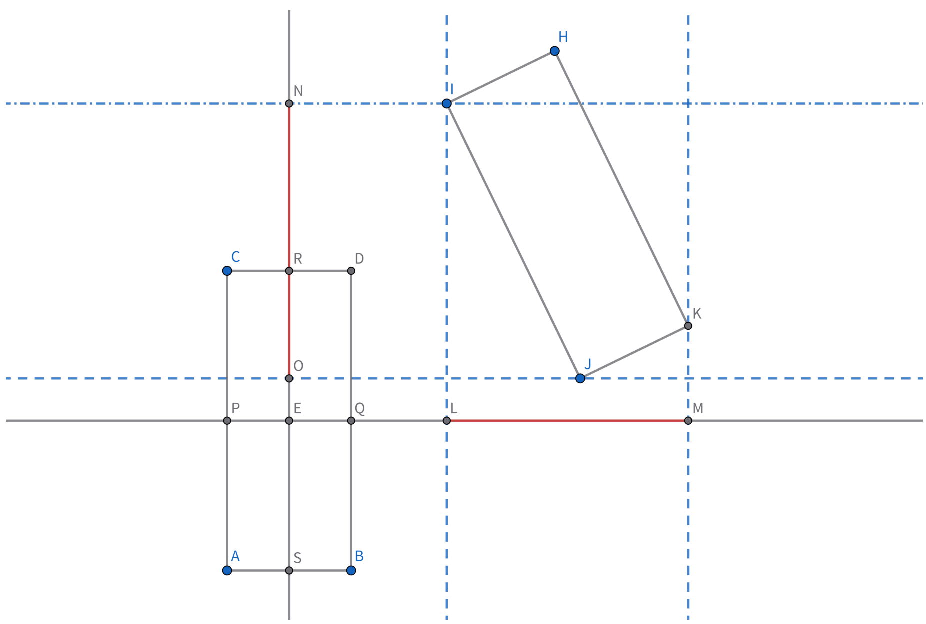

图 4: 分离轴定理

基于其中一个一个长方形，创建直角坐标系。接着，将另一个长方形投影到坐标轴上，比较横轴纵轴上的重合情况。

纵轴无重合: $\min(y_N, y_O) \geq \max(y_R, y_S)$ *or* $\min(y_R, y_S) \geq \max(y_N, y_O)$

横轴无重合: $\min(x_L, x_M) \geq \max(x_P, x_Q)$ *or* $\min(x_P, x_Q) \geq \max(x_L, x_M)$

当横纵轴上任意一处无重合，则长方形无碰撞。否则，交换两个长方形，继续判断是否重合。

沿杆方向向量：$\vec{length} = (\theta_i \cos\theta_i - \theta_{i+1}\cos\theta_{i+1}, \theta_i \sin\theta_i - \theta_{i+1}\sin\theta_{i+1})$

从长方形 1 到长方形 2，涉及坐标变换。

二维坐标系转换矩阵推导

设有两个二维坐标系 A 与 B，它们相对于同一参考坐标系 W 的基向量和原点分别为：

$$R_{WA} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \boldsymbol{t}_{WA} \in \mathbb{R}^2$$

$$R_{WB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_x & \boldsymbol{b}_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \boldsymbol{t}_{WB} \in \mathbb{R}^2$$

其中 R_{WA}、R_{WB} 的列向量分别是 A、B 坐标系的单位基向量在 W 坐标系中的表示；$\boldsymbol{t}_{WA}$、$\boldsymbol{t}_{WB}$ 是各自原点在 W 坐标系中的坐标。

点的表示关系

对同一个点 $\boldsymbol{x}$，在 W 系中由 A 系表示为：

$$\boldsymbol{x}_W = R_{WA}\,\boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{t}_{WA} \tag{1}$$

在 W 系中由 B 系表示为：

$$\boldsymbol{x}_W = R_{WB}\,\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{t}_{WB} \tag{2}$$

消去 $\boldsymbol{x}_W$

由式 (1) 与 (2) 相等得：

$$R_{WB}\,\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{t}_{WB} = R_{WA}\,\boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{t}_{WA}$$

$$R_{WB}\,\boldsymbol{x}_B = R_{WA}\,\boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{t}_{WA} - \boldsymbol{t}_{WB}$$

$$\boldsymbol{x}_B = R_{WB}^{-1}\big(R_{WA}\,\boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{t}_{WA} - \boldsymbol{t}_{WB}\big)$$

旋转和平移部分

因此，从 A 到 B 的线性部分与平移部分为：

$$\boxed{R_{BA} = R_{WB}^{-1}R_{WA}}, \qquad \boxed{\boldsymbol{t}_{BA} = R_{WB}^{-1}(\boldsymbol{t}_{WA} - \boldsymbol{t}_{WB})}$$

若 R_{WB} 为正交矩阵（纯旋转），则 $R_{WB}^{-1} = R_{WB}^{\top}$。

齐次坐标形式

将旋转与平移合并为齐次矩阵:

$$T_{BA} = \begin{bmatrix} R_{BA} & \boldsymbol{t}_{BA} & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{WB}^{-1}R_{WA} & R_{WB}^{-1}(\boldsymbol{t}_{WA} - \boldsymbol{t}_{WB}) & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 T_{BA} 作用于齐次坐标 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_A \\ 1 \end{bmatrix}$, 可得到 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ 1 \end{bmatrix}$。

具体实现

所以先确定好待分析的两个矩形, 将其中一个矩形的四角坐标变换到另一个矩形对应的直角坐标系中, 接着利用分离轴定理即可判断是否碰撞。在本项目中, 我们新定义了 model2, 它继承了 model1, 新增碰撞相关的检测函数。

4 问题三

5 问题四

由于盘入点和盘出点中心对称, 在该位置上的切线斜率也相同, 即切线平行。那么:

$\angle ADE = \angle BED$

由三角形相似性, AB 与 DE 交点 C 满足: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{R_A}{R_B}$, 恰好为切点

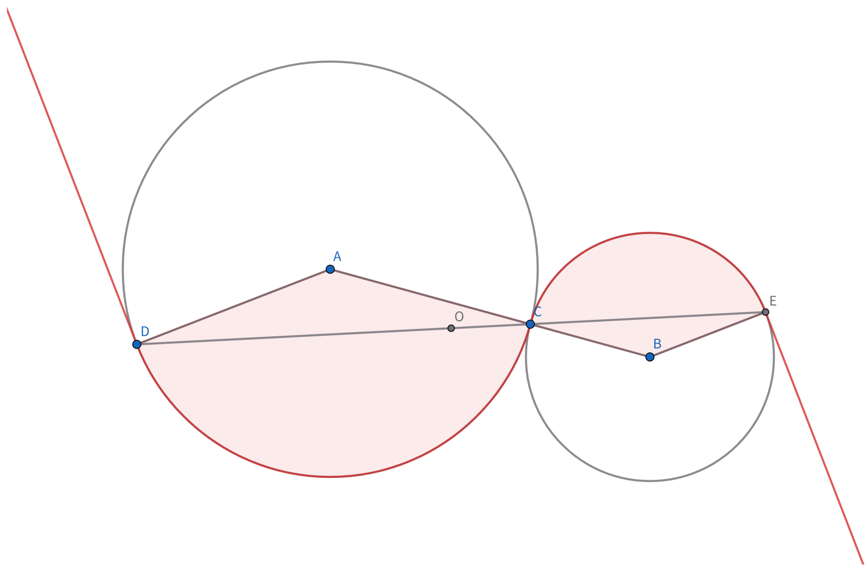

图 5: 掉头曲线示意图

5.1 掉头曲线长度

接着计算掉头曲线长度:

$$
\begin{aligned}
&\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \\
&\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CE} = (R_A + R_B) \cdot \alpha \\
&\because R = (R_A + R_B) \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \\
&\therefore R_A + R_B \text{ 此时为定值，因此曲线长度不变} \\
&\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CE} = \frac{R \cdot \alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

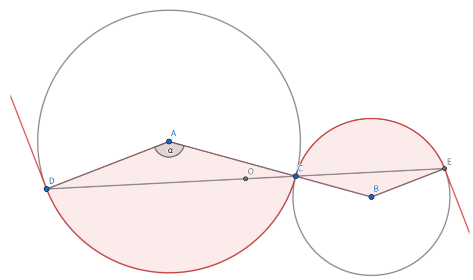

图 6: 掉头曲线长度

5.2 掉头轨迹分析

首先确定圆心坐标:
盘入时切点处极角为 $\alpha_1 = \frac{2\pi R}{d}$,
连接点速度方向为 $(-\cos\theta + \theta\sin\theta, -\sin\theta - \theta\cos\theta)$

切点处的切向与法向单位向量:

$$\begin{cases} \vec{e_{t1}} = (\frac{-\cos\alpha_1+\alpha_1\sin\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+1}}, \frac{-\sin\alpha_1-\alpha_1\cos\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+1}}) \\ \vec{e_{\rho1}} = (\frac{-\sin\alpha_1-\alpha_1\cos\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+1}}, \frac{\cos\alpha_1-\alpha_1\sin\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+1}}) \end{cases}$$

接着，计算圆弧半径:

$$R_A = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{R}{|\sin\frac{\alpha}{2}|} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{R}{|\cos\angle ADC|}$$

由此可确定圆心 A 坐标: $(R\cos\alpha_1, R\sin\alpha_1) + R_A \cdot \vec{e_{\rho1}}$
同时令在圆 A 上运动的点的圆心角为 $\theta1$
由于以盘入时刻作为 0 时刻，需要重新计算龙头位置与时间的关系:
$t \leq 0$ 时，龙头在盘入螺线上,

$$v \cdot t = \frac{d}{4\pi} \cdot \left(\alpha_1^2 - \theta_0(t)^2\right)$$

$$\theta_0(t) = \sqrt{\alpha_1^2 - \frac{4\pi vt}{d}}$$

$t > 0$ 时，有以下几个区间

$$
\begin{aligned}
\text{圆弧 A：}\quad & (0, R_A \cdot \angle DAC] \\
\theta_1 = \quad & upperbound - \frac{vt}{R_A} \\
\text{圆弧 B：}\quad & (R_A \cdot \angle DAC, (R_A + R_B) \cdot \angle DAC] \\
\theta_2 = \quad & upperbound - \frac{vt - R_A \cdot \angle DAC}{R_B} \\
= \quad & upperbound + k\angle DAC - \frac{vt}{R_B} \\
\text{盘出螺线：}\quad & ((R_A + R_B) \cdot \angle DAC, +\infty) \\
& v \cdot t - (R_A + R_B) \cdot \angle DAC = \frac{d}{4\pi} \cdot \left(\theta_3(t)^2 - \alpha^2\right) \\
& \theta_3(t) = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4\pi}{d} \cdot [v \cdot t - (R_A + R_B) \cdot \angle DAC]}
\end{aligned}
$$

掉头空间直径为 9m，超过龙身龙头长度，粗略估计有如下几种情况（圆弧半径过小时，可能出现一端在第二段圆弧，一端在盘入螺线上，或者一端在盘出螺线，一端在第一段圆弧上）：

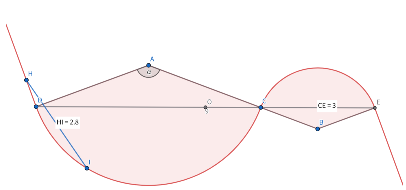

图 7: Case 1

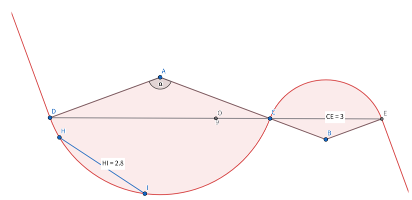

图 8: Case 2

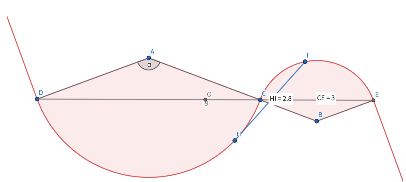

图 9: Case 3

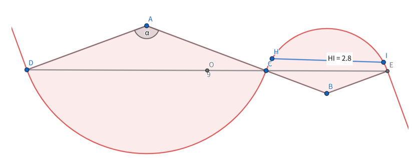

图 10: Case 4

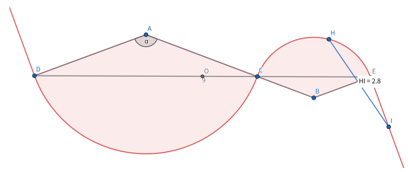

图 11: Case 5

下面分情况讨论板凳龙的运动过程:

Case1