机器人中的状态估计课后习题答案

完成人：高明

联系方式：

> 知乎：高明
> 微信：gaoming0901

2.5.1

假设u,v是相同维度向量, 请证明下面等式： $u^T v = tr(vu^T)$

solution:

$u = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$v = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$

$u^T v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$uv^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & x_2 y_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}$$

$tr(uv^T) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = u^T v$

2.5.2

如果有两个相互独立的随机变量x,y,它们的联合分布为$p(x, y)$,请证明它们概率的香浓信息等于各自独立香浓信息的和:

$H(x, y) = H(x) + H(y)$

solution:

$H(x,y)$
$= -E_{(x,y)}(ln(f(x,y)))$
$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)ln(f(x,y))dxdy$

因为x,y独立

$H(x,y)$
$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y)[ln(f(x)) + ln(f(y))]dxdy$

$= -[\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)ln(f(x))dx] * \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy - [\int_{-\infty}^{\infty} f(y)ln(f(y))dy] * \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$= -\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)ln(f(x))dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)ln(f(y))dy$

$= H(x) + H(y)$

2.5.3

对于高斯分布的随机变量，x~N(μ,Σ),请证明下面的等式：

$\mu = E[xx^T] = \Sigma + \mu\mu^T$

solution:

Σ
$= E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$= E(xx^T - x\mu^T - \mu x^T + \mu\mu^T)$

$= E(xx^T) - E(x)\mu^T - \mu E(x^T) + \mu\mu^T$

因为$E(x) = \mu$

$\Sigma = E(xx^T) - \mu\mu^T$

因此

$E(xx^T) = \Sigma + \mu\mu^T$

2.5.4

对于高斯分布的随机变量，x~N(μ,Σ),请证明下面的等式：

$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$

solution:

$E(x)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu))dx$

做变换:
$y = x - \mu$

可得:
$x = y + \mu$

$E(x)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y+\mu}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}y^T \Sigma^{-1} y)dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}y^T \Sigma^{-1} y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}y^T \Sigma^{-1} y)dy$

上式第一项由于奇函数在关于0对称空间积分为0

上式第二项扣除μ满足概率归一化条件

$E(x) = \mu$

2.5.5

对于高斯分布的随机变量，x~$N(\mu, \Sigma)$,证明下式:

$\Sigma = E[(x-\mu)(x-\mu)^T] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)(x-\mu)^T p(x)dx$

solution:

$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)(x-\mu)^T}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu))dx$

做代换$y = x - \mu$

$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yy^T}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))dy .... < 0 >$$

下面参考文献【1】中公式(108)如下式：

$$\frac{\partial}{\partial X}(X^TBX) = BX + B^TX$$

上式中X是矩阵，向量算特殊矩阵，直接带入，向量表达式如下：

$$\frac{d}{dx}(x^TBx) = Bx + B^Tx .... < 1 >$$

由于协方差矩阵是对称矩阵，根据等式$< 1 >$：

$$\frac{d}{dx}(x^T\Sigma^{-1}x) = \Sigma^{-1} * x + \Sigma^{-T} * x = 2 * \Sigma^{-1} * x ..... < 2 >$$

对于<2>式变换：

$$\frac{d}{dx}(-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x) = (-\frac{1}{2})(\Sigma^{-1} * x + \Sigma^{-T} * x) = \Sigma^{-1} * x$$

$$= x^T\Sigma^{-1} .... < 3 >$$

将<3>式带入<0>式：

$$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y*\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))d(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y*\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} d(exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))$$

分步积分法：

$$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$$

$$= \frac{y*\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} * exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))dy$$

$$= 0 + \Sigma$$

$$= \Sigma$$

参考文献：

1.Matrix Cookbook---Kaare Brandt Petersen