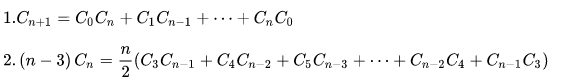
**卡特兰数**

卡特兰数属于组合数学中常见的计数问题的数列，递推表达式为



原理：设h(n)为catalan数的第n项，且h(0)=1, h(1)=1，则满足

h(n) = h(0)\*h(n-1) + h(1)\*h(n-2) +…+ h(n-1)\*h(0)，

根据上式可得到其余递推形式：

h(n) = h(n-1)\*(4\*n-2) / (n+1)

h(n+1) = h(n) \* (4\*n+2) / (n+2)

递推关系的解为:

h(n) = C(2n,n)/(n+1)

另一种解为h(n)=C(2n,n)-C(2n,n-1)

**主要应用：**

括号化：矩阵连乘，不改变顺序，只用括号表示成对的乘积，有多少种括号化方式。

分析：设h(n)表示n个矩阵连乘的括号化方式，则两个矩阵是否加括号与其余括号独立，则假设第k个对加括号，则前面有h(k-1)种，后面又h(n-k)种，求和即为卡特兰数公式。

出栈次序：一个栈的进栈序列为1,2,3…n，有多少种不同的出栈序列。

分析：假设k为最后一个出栈，可知k取不同值时独立。且k入栈之前，小于k的值必须出栈，有h(k-1)种情况，大于k也在k出栈之前出栈，有h(n-k)种情况，使用乘法原则求出卡特兰数公式。

买票找零：有2n个人排成一行进入剧场。入场费5元。其中只有n个人有一张5元钞票，另外n人只有10元钞票，剧院无其它钞票，问有多少种方法使得只要有10元的人买票，售票处就有5元的钞票找零(将持5元者到达视作将5元入栈，持10元者到达视作使栈中某5元出栈)

分析：统计某一个序列中在任意位置均满足5的个数大于等于10的个数的情况。假设5对应二进制的1，10对应0，那就是要求序列中出现1的个数大于等于0的个数，总情况为C(2n,n)，至于不合法的情况，在2n个位置放n+1个0和n-1个1，由于0的个数多2且2n为偶数，所以在某一个奇数位上出现0的累计数一定超过1的累计数，这样就会存在一种不符合要求的情况，并且只要将这个位置后面的0和1反转，就会有n个0和n个1组成的2n位数，符合最初n个1和n个0的要求。即不符合要求的情况为2n中选出n+1位放0，故为C(2n,n+1)，合法情况为C(2n,n)-C(2n,n+1)。

凸多边形三角形划分：在一个[凸多边形](https://baike.baidu.com/item/%E5%87%B8%E5%A4%9A%E8%BE%B9%E5%BD%A2)中，通过若干条互不相交的对角线，把这个多边形划分成了若干个三角形

分析：一条边将凸多边形（假设n条边）划分为k边形和n-k+1边形，再根据乘法原理进行乘积求和可知f(n)=f(2)\*f(n-2+1)+…+f(n-1)\*f(2)，即f(n)=h(n-2)

类似问题：1）一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走2n个街区去上班。如果她从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的道路。2）在[圆上](https://baike.baidu.com/item/%E5%9C%86%E4%B8%8A" \t "_blank)选择2n个点,将这些点成对连接起来使得所得到的n条线段不相交的方法数。

给定节点组成二叉搜索树：给定n个节点有多少种BST。

分析：以任意节点为根设为k，则左子树个数为f(k-1)，因为有k-1个节点，右子树个数为f(n-k)。

给定n对括号，求括号正确配对的字符串数

实现模板：

res = [0 for \_ in range(n + 1)]

res[0] = 1

for i in range(1, n + 1):

for left in range(i // 2):

res[i] += res[left] \* res[i - left - 1]

res[i] \*= 2

if (i + 1) % 2 == 0:

res[i] += res[i // 2] \* res[i // 2]

return res[n]