

第三章上机作业实习报告

吴家行 2020213991

第三章上机作业实习报告

P92第3题

理论分析

计算程序

计算结果分析

P92第3题

理论分析

该题主要考察Jacobi迭代法和SOR迭代法。

对于方程组 $Ax = b$,记 $A = D - L - U$,其中 D 是 A 的对角部分, $-L$ 是 A 的严格下三角部分, $-U$ 是 A 的严格上三角部分。

Jacobi迭代法是令

$$\begin{aligned} B_J &= D^{-1}(L + U) \\ f_J &= D^{-1}b \end{aligned}$$

然后构造迭代法:

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J, k = 0, 1, 2, \dots$$

SOR迭代法是令

$$\begin{aligned} L_w &= (D - wL)^{-1}[(1 - w)D + wU] \\ f_w &= w(D - wL)^{-1}b \end{aligned}$$

其中 w 是松弛因子, 然后构造迭代法:

$$x^{(k+1)} = L_w x^{(k)} + f_w, k = 0, 1, 2, \dots$$

收敛速度可以用渐进收敛率 $R(B)$ 表示, $R(B) = -\ln \rho(B)$ 。

计算程序

该题主程序存放在 `code/main.m` 文件中, `JacobiIteration.m` 是Jacobi迭代法的函数文件, `SORIteration.m` 是SOR迭代法的函数文件。

计算结果分析

当 $n=10$ 时,

Jacobi迭代次数: 38
收敛速度: 0.1587
 $w=1.0$, SOR迭代次数: 21
收敛速度: 0.8050
 $w=1.2$, SOR迭代次数: 15
收敛速度: 1.3127
 $w=1.4$, SOR迭代次数: 20
收敛速度: 0.8036
 $w=1.6$, SOR迭代次数: 30
收敛速度: 0.4555
 $w=1.8$, SOR迭代次数: 61
收敛速度: 0.2001

当 $n=20$ 时,

Jacobi迭代次数: 60
收敛速度: 0.1201
 $w=1.0$, SOR迭代次数: 23
收敛速度: 0.7713
 $w=1.2$, SOR迭代次数: 18
收敛速度: 1.2660
 $w=1.4$, SOR迭代次数: 24
收敛速度: 0.7874
 $w=1.6$, SOR迭代次数: 35
收敛速度: 0.4478
 $w=1.8$, SOR迭代次数: 67
收敛速度: 0.1969

当 $n=40$ 时,

Jacobi迭代次数: 70
收敛速度: 0.1092
 $w=1.0$, SOR迭代次数: 23
收敛速度: 0.7629
 $w=1.2$, SOR迭代次数: 18
收敛速度: 1.2517
 $w=1.4$, SOR迭代次数: 27
收敛速度: 0.7825
 $w=1.6$, SOR迭代次数: 45
收敛速度: 0.4454
 $w=1.8$, SOR迭代次数: 76
收敛速度: 0.1959

由计算结果可知,

对于不同的 n 取值, 随着 n 增加, SOR迭代和Jacobi迭代的收敛速度都会有所下降。

对于相同的 n 取值, SOR迭代法在大多情况下迭代次数都比Jacobi要少, 收敛速度较快。而且, w 不同, SOR迭代的收敛速度也不同, 在 w 取 $[1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8]$ 中不同数值时, $w = 1.2$ 的迭代次数最少, 收敛速度最快。