

第三章上机作业实习报告

吴家行 2020213991

第三章上机作业实习报告

P92第3题

理论分析

计算程序

计算结果分析

P92第3题

理论分析

该题主要考察Jacobi迭代法和SOR迭代法。

对于方程组 $Ax = b$, 记 $A = D - L - U$, 其中 D 是 A 的对角部分, $-L$ 是 A 的严格下三角部分, $-U$ 是 A 的严格上三角部分。

Jacobi迭代法是令

$$B_J = D^{-1}(L + U) \\ f_J = D^{-1}b$$

然后构造迭代法:

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J, k = 0, 1, 2, \dots$$

SOR迭代法是令

$$L_w = (D - wL)^{-1}[(1 - w)D + wU] \\ f_w = w(D - wL)^{-1}b$$

其中 w 是松弛因子, 然后构造迭代法:

$$x^{(k+1)} = L_w x^{(k)} + f_w, k = 0, 1, 2, \dots$$

收敛速度可以用渐进收敛率 $R(B)$ 表示, $R(B) = -\ln \rho(B)$ 。

计算程序

该题主程序存放在 `code/main.m` 文件中, `JacobiIteration.m` 是Jacobi迭代法的函数文件, `SORIteration.m` 是SOR迭代法的函数文件。

计算结果分析

当 $n=10$ 时,

```
1 | Jacobi迭代次数: 38
2 | 收敛速度: 0.1587
3 | w=1.0, SOR迭代次数: 21
4 | 收敛速度: 0.8050
5 | w=1.2, SOR迭代次数: 15
6 | 收敛速度: 1.3127
7 | w=1.4, SOR迭代次数: 20
8 | 收敛速度: 0.8036
9 | w=1.6, SOR迭代次数: 30
10 | 收敛速度: 0.4555
11 | w=1.8, SOR迭代次数: 61
12 | 收敛速度: 0.2001
```

当 $n=20$ 时,

```
1 | Jacobi迭代次数: 60
2 | 收敛速度: 0.1201
3 | w=1.0, SOR迭代次数: 23
4 | 收敛速度: 0.7713
5 | w=1.2, SOR迭代次数: 18
6 | 收敛速度: 1.2660
7 | w=1.4, SOR迭代次数: 24
8 | 收敛速度: 0.7874
9 | w=1.6, SOR迭代次数: 35
10 | 收敛速度: 0.4478
11 | w=1.8, SOR迭代次数: 67
12 | 收敛速度: 0.1969
```

当 $n=40$ 时,

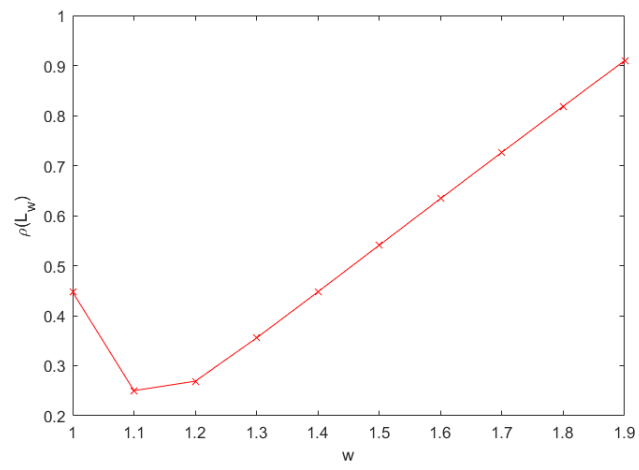
```
1 | Jacobi迭代次数: 70
2 | 收敛速度: 0.1092
3 | w=1.0, SOR迭代次数: 23
4 | 收敛速度: 0.7629
5 | w=1.2, SOR迭代次数: 18
6 | 收敛速度: 1.2517
7 | w=1.4, SOR迭代次数: 27
8 | 收敛速度: 0.7825
9 | w=1.6, SOR迭代次数: 45
10 | 收敛速度: 0.4454
11 | w=1.8, SOR迭代次数: 76
12 | 收敛速度: 0.1959
```

由计算结果可知,

对于不同的 n 取值, 随着 n 增加, SOR迭代和Jacobi迭代的收敛速度都会有所下降。

对于相同的 n 取值, SOR迭代法在大多情况下迭代次数都比Jacobi要少, 收敛速度较快。而且, w 不同, SOR迭代的收敛速度也不同, 在 w 取 $[1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8]$ 中不同数值时, $w = 1.2$ 的迭代次数最少, 收敛速度最快。

为了探究SOR迭代矩阵谱半径 $\rho(L_w)$ 和松弛因子 w 的关系, 本实验取 $n = 10$ 时, $1 < w < 2$ 对应的迭代矩阵谱半径, 如下图所示,



可见，松弛因子 w 为1.1附近时，SOR的迭代矩阵谱半径最小，这也就意味着收敛速度最快。