工程硕士数学笔记

推荐mooc上东北大学的《数值分析》课程 [链接]

1.绪论

1.1 误差

如果x是某个实数的精确值，x_A是他的一个近似值，则$x-x_A$是x_A的**绝对误差**，简称**误差。**

若x不为0，则$\frac{x-x_A}{x}$是x_A的**相对误差**，但是由于精确值x往往未知，因此$\frac{x-x_A}{x_A}$也被当作是x_A的**相对误差。**

若$|x-x_A|\leq\varepsilon_A$，则ε_A是x_A的**绝对误差界**，简称**误差界**，若$x\neq 0$，则$\frac{\varepsilon_A}{x}$是x_A的**相对误差界**

1.2 有效数字

设x_A是x的一个近似值，可以写成：

$$x_A=\pm 10^k\times 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中a_i是0，1，2，...,9中的一个数字，且$a_1\neq 0$,k是整数，如果：

$$|x-x_A|\leq 0.5\times 10^{k-n},$$

则x_A是x的具有n位有效数字的近似值。

1.3 数值计算的原则

数值方法的稳定性：

一种算法，如果初始数据微小的改变会引起最后结果的微小改变也是微小的，就说这个算法是数值稳定的，否则就是数值不稳定的。

2 解线性方程组的直接解法

2.1 顺序Gauss消去法

线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

给定线性方程组$Ax=b$，记 $A^{(1)}=A, b^{(1)}=b, a_{ij}^{(1)}=a_{ij}, b_i^{(1)}=b_i$，则线性方程组对应的增广矩阵为：

$$(A^{(1)},b^{(1)})=\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

$det(\mathbf{A})\neq 0$时（也称$\mathbf{A}$非奇异）,方程组（2.1.1）才有唯一解。

如此消元下去，最后得到矩阵是：

$$(A^{(n)},b^{(n)})=\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right]$$

顺序Gauss消去法中，$a_{kk}^{(k)}(k=1,2,...,n)$被称为主元素，那么顺序Gauss消元法能顺利进行的条件是：

$$\begin{aligned} &\text{主元素都不为}0 \\ &\Leftrightarrow \text{矩阵}A\text{的各阶顺序主子式都不为}0 \\ &\Leftrightarrow \text{顺序}Gauss\text{消元法能顺利进行} \end{aligned}$$

这样，就可以在真正计算前判断是否可以用顺序Gauss消去法进行计算，而不是中途才发现。

2.2 列主元Gauss消去法

当一个特别小的数作为除数时，误差会被放大，为了避免顺序Gauss消去法出现这种情况，出现了列主元Gauss消去法，提高数值稳定性。

给定线性方程组$Ax=b$，记 $A^{(1)}=A,b^{(1)}=b$， 列主元Gauss消去法过程如下：

（待写）

只要$\|\mathbf{A}\|\neq 0$，列主元Gauss消去法就可顺利进行

2.3 矩阵三角分解法