第6&7章上机作业

吴家行 2020213991

P190 第二题

1 理论分析与算法

该题主要考察了Lagrange插值多项式以及三次样条插值的相关知识。

- Lagrange插值多项式

n次Lagrange插值多项式表达如下：

$L_n(x) = \sum f(x_i)l_i(x), i = 0,\ 1, \ldots, n$

其中，$f(x_i)$是插值节点对应的函数值，$l_i(x) \in \Phi_n$为插值基函数.

- 三次样条插值

本题的三次样条插值要求的是自然边界条件，因此，$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$。

即$M_0 = M_n = 0$

首先计算h

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

然后计算λ,μ,d

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}$$
$$\lambda_j = 1 - \mu_j$$
$$d_j = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

最后利用三对角矩阵构造方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & \ldots & \ldots & & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \ldots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \ldots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

解出$M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$,带入$S(x)$的表达式

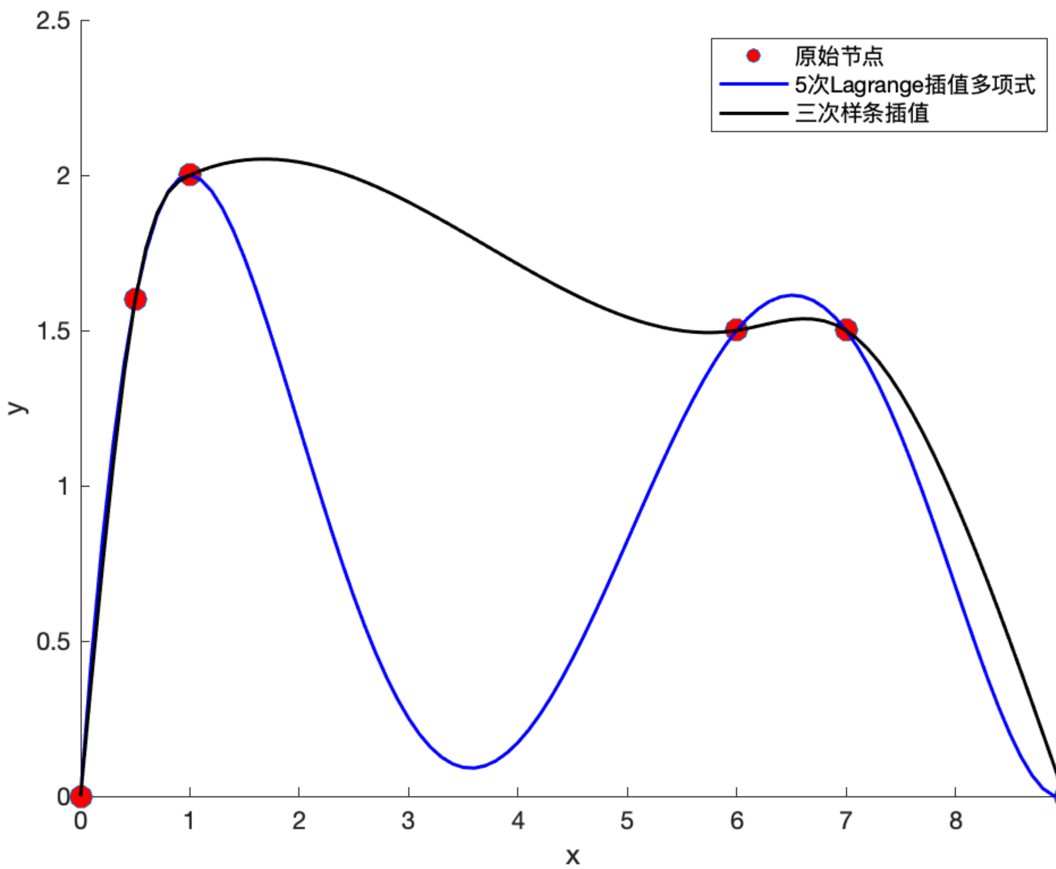
$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(f_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(f_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j},x\in[x_j,x_{j+1}]$$

2 程序代码

该题的代码在`code/main_1.m`中，其中`third_order_mean_difference.m`是计算三阶均差的函数文件。

3 运行结果分析

画出的图像如下：



可见，三次样条插值拟合的曲线更平缓，更符合拟合效果；而5次Lagrange插值多项式由于次数较高，n充分大时，$R_n(x)$不一定充分小，从[3,4]和[6,7]的区间曲线可以看出，5次Lagrange插值多项式出现了Runge现象。

P224 第二题

1 理论分析与算法

该题主要考察了最小二乘法曲线拟合的相关知识。

对于多项式拟合，

若取$\Phi = span\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$,令

$$(x^k, x^l) = \sum \rho(x_j) x_j^k x_j^l$$
$$(x^l, f) = \sum \rho(x_j) x_j^l f(x_j)$$

法方程可以写为

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,x) & \ldots & (1,x^n) \\ (x,1) & (x,x) & \ldots & (x,x^n) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ (x^n,1) & (x^n,x) & \ldots & (x^n,x^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,f) \\ (x,f) \\ \ldots \\ (x^n,f) \end{bmatrix}$$

拟合的曲线为

$$s^*(x) = \sum a_i^* \phi_i(x)$$

对于指数拟合，

$$s(x) = be^{ax}$$

为了方便计算，我们将其线性化，左右两边取对数

$$lns(x) = lnb + ax$$

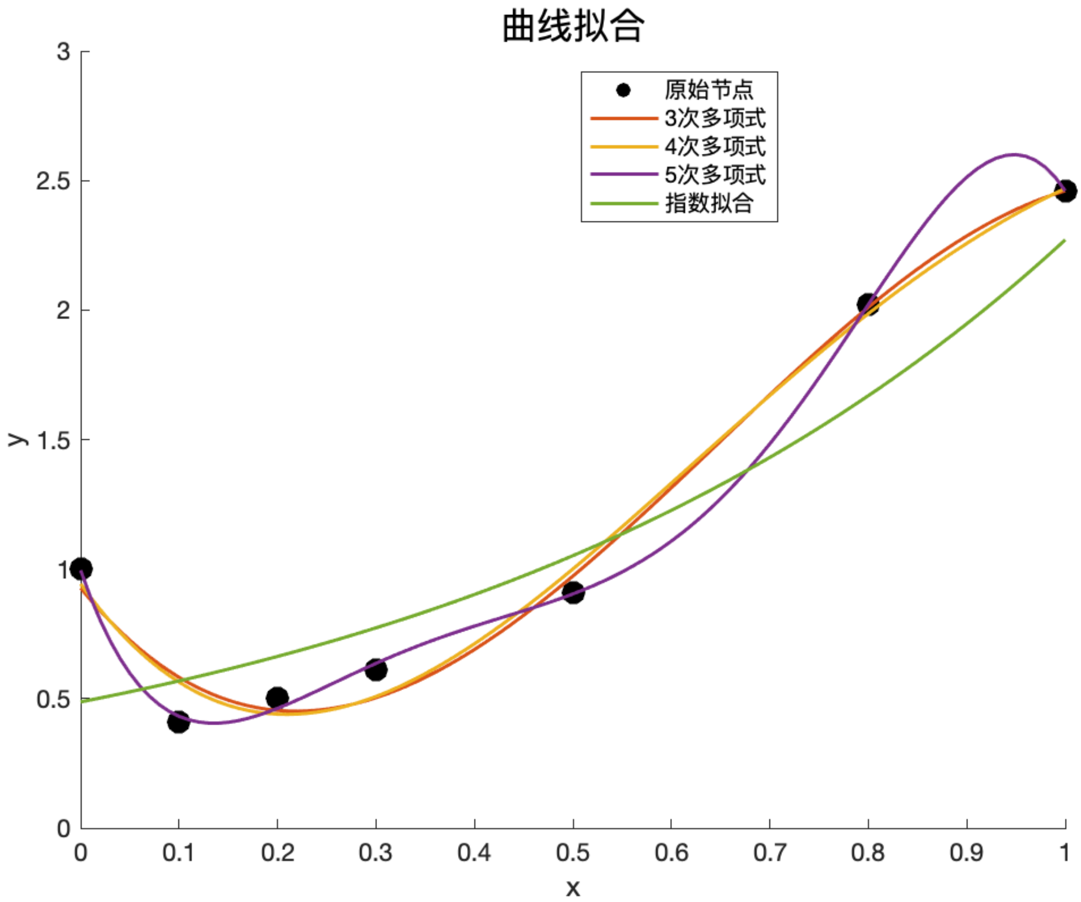
相当于拟合n=1的多项式，最后进行转化即可。

2 程序代码

该题的代码在`code/main_2.m`中，其中`inner_product.m`是计算内积的函数文件。

3 运行结果分析

分别用最小二乘法进行指数拟合、3次多项式拟合、4次多项式拟合、5次多项式拟合，画出的图像如下：



可见指数拟合效果最差，这是因为指数拟合的是个递增曲线，和原始数据点的走势不太相近，而3次多项式和4次多项式都比较接近原始数据点，5次多项式拟合效果最好。