第四章书面作业

吴家行 2020213991

P115. 4(2)

解：令 $f(x)=3x^2-e^x$

则 $f(0)=-1<0$

$f(-1)=3-\frac{1}{e}\approx 2.63>0$，因此方程在 $(-1,0)$ 内有根

$f(1)=3-e\approx 0.28>0$，因此方程在 $(0,1)$ 内有根

$f(2)=3\times 2^2-e^2\approx 4.61>0$，$f(3)=3\times 3^2-e^3\approx 6.91$.

$f(4)=3\times 4^2-e^4\approx -6.598<0$，因此方程在 $(3,4)$ 内有根 ∴一共3个根

最小根在 $(-1,0)$ 内，对于其余的根，

① $3x^2-e^x=0$，$x=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$，$\varphi(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

$\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{e^x}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^x}{3}}$，显然 $\varphi'(x)$ 单调递增

对于 $x\in(0,1)$，$\varphi'(x)<\varphi'(1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{3}}\approx 0.476<1$，$\varphi'(x)>\varphi'(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}>0$

∴$|\varphi'(x)|<1$，∴$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内局部收敛

对于 $x\in(3,4)$，$\varphi'(x)>\varphi'(3)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^3}{3}}\approx 1.294$

∴$|\varphi'(x)|>1$，∴$\varphi(x)$ 在 $(3,4)$ 内局部不收敛

② $3x^2-e^x=0$，$x=\ln(3x^2)$，$\varphi(x)=\ln(3x^2)$

$\varphi'(x)=\frac{1}{3x^2}\cdot 6x=\frac{2}{x}$，显然 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

对于 $x\in(0,1)$，$\varphi'(x)>\varphi'(1)=2$

∴$|\varphi'(x)|>1$，$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内局部不收敛.

对于 $x\in(3,4)$，$\varphi'(x)<\varphi'(3)=\frac{2}{3}<1$

$\varphi'(x)>\varphi'(4)=\frac{1}{2}$

∴$|\varphi'(x)|<1$，$\varphi(x)$ 在 $(3,4)$ 内局部收敛.

∴综上：对于 $\varphi(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$，在 $(0,1)$ 局部收敛，$(3,4)$ 内局部不收敛.

对于 $\varphi(x)=\ln(3x^2)$，在 $(0,1)$ 局部不收敛，$(3,4)$ 内局部收敛.

P115 4(3)

解：对于$(-1,0)$内的根，$x<0$，$\therefore \varphi(x)=-\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

若$\varphi(x)=-\sqrt{\frac{e^x}{3}}$，$\varphi'(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^x}{3}}$，

$\varphi'(-1)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3e}}\approx-0.175$

$\varphi'(0)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\approx-0.289$　$\therefore |\varphi'(x)|<1$

$\therefore \varphi(x)$在$(-1,0)$内局部收敛

$\therefore$不同邻域用的$\varphi(x)$如下：

$x\in(-1,0)$，$\varphi(x)=-\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

$x\in(0,1)$，$\varphi(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

$x\in(3,4)$，$\varphi(x)=\ln(3x^2)$

① $x\in(-1,0)$，$\varphi(x)=-\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

取$x_0=-0.5$

$x_1=-0.450$　$x_4=-0.459$

$x_2=-0.461$　$x_5=-0.459$　$\therefore x_1=-0.459$

$x_3=-0.458$

② $x\in(0,1)$，$\varphi(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

取$x_0=0.5$

$x_1=0.741$　$x_4=0.895$　$x_7=0.909$

$x_2=0.836$　$x_5=0.903$　$x_8=0.909$　$\therefore x_2=0.909$

$x_3=0.877$　$x_6=0.907$

③ $x\in(3,4)$，$\varphi(x)=\ln(3x^2)$

取$x_0=3.5$

$x_1=3.604$　$x_4=3.713$　$x_7=3.730$　$x_{10}=3.733$

$x_2=3.663$　$x_5=3.722$　$x_8=3.731$　$x_{11}=3.733$

$x_3=3.695$　$x_6=3.727$　$x_9=3.732$

$\therefore x_3=3.733$

$\therefore$综上：$x_1=-0.459$

$x_2=0.909$

$x_3=3.733$

P115 8(2)

解：$f(x)=3x^2-e^x$

$f'(x)=6x-e^x$

$\therefore x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{3x_n^2-e^{x_n}}{6x_n-e^{x_n}}$

① 在区间[-1,0]内：

x_0取-0.5

则 $x_1=-0.4602$

$x_2=-0.4590$

$x_3=-0.4590$

$\therefore$ 在[-1,0]上的根为-0.4590

② 在区间[0,1]内：

x_0取0.5

则 $x_1=1.1651$　　$x_5=0.9100$

$x_2=0.9362$

$x_3=0.9104$

$x_4=0.9100$

$\therefore$ 在[0,1]内上的根为0.9100

P116 11(1)(2)

解：$f(x)=x^3-3x+2$

$=x(x^2-4)+(x+2)$

$=x(x+2)(x-2)+(x+2)=(x+2)(x^2-2x+1)=(x+2)(x-1)^2$，$x^*=1$是二重根

(1) Newton法：$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$\therefore x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-3x_n+2}{3x_n^2-3}$

取$x_0=1.2$

$x_1=1.1030$

$x_2=1.0524$

$x_3=1.0264$

(2) $x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{f'(x_k)}$，$f(x)=x^3-3x+3$

取$x_0=1.2$

$x_1=1.0061$

$x_2=1.0000$

$x_3=1.0000$

虽然(2)比(1)收敛速度更快，因为(2)至少二阶收敛，而(1)只是线性收敛