

第五章上机作业实习报告

吴家行 2020213991

P150 2

理论分析

该题主要考察幂迭代法、Aitken加速的幂迭代法以及逆幂迭代法。

- 幂迭代法：

$$\begin{aligned}z^{(k)} &= Av^{(k-1)} \\ m^{(k)} &= \max(z^{(k)}) \\ v^{(k)} &= \frac{z^{(k)}}{m_k}\end{aligned}$$

其中max代表无穷范数最大的对应的值，可正可负。

- Aitken加速的幂迭代法：

$$\lambda^{(k)} = \frac{m_k m_{k+2} - m_{k+1}^2}{m_{k+2} - 2m_{k+1} + m_k}$$

- 逆幂迭代法：

$$\begin{aligned}(A - qI)z^{(k)} &= v^{(k-1)} \\ m^{(k)} &= \max(z^{(k)}) \\ v^{(k)} &= \frac{z^{(k)}}{m_k}\end{aligned}$$

不同的q可以收敛到不同的特征值。

计算程序

主程序位于 `code/main.m` 文件中。

计算结果分析

对于 (1)

如果不加速，用普通的幂迭代法求矩阵A的主特征值和对应的特征向量，迭代结果如下：

```
幂法：
## k=1
m=11.000000
## k=2
```

```

m=10.454545
## k=3
m=10.217391
## k=4
m=10.106383
## k=5
m=10.052632
## k=6
m=10.026178
## k=7
m=10.013055
## k=8
m=10.006519
## k=9
m=10.003257
## k=10
m=10.001628
## k=11
m=10.000814
## k=12
m=10.000407
## k=13
m=10.000203
## k=14
m=10.000102
## k=15
m=10.000051
## k=16
m=10.000025
## k=17
m=10.000013
## k=18
m=10.000006
## k=19
m=10.000003
## k=20
m=10.000002
## k=21
m=10.000001

ans =

      1.0000      1.0000      0.5000      0.5000

```

可见，普通幂法共迭代21次，主特征值为10.000001，对应的特征向量为 $[1.0000, 1.0000, 0.5000, 0.5000]^T$ 。

而经过Aitken加速的幂迭代法迭代过程如下：

```

Aitken 加速后:
## k=1
## k=2
## k=3
lambda=10.034965
## k=4
lambda=10.008696
## k=5
lambda=10.002171
## k=6
lambda=10.000543
## k=7
lambda=10.000136
## k=8
lambda=10.000034
## k=9
lambda=10.000008
## k=10
lambda=10.000002
## k=11
lambda=10.000001
## k=12
lambda=10.000000

ans =

      1.0000      1.0000      0.5001      0.5001

```

可见，Aitken加速后的幂法只需要迭代12次，收敛速度更快，主特征值为10.000000，对应的特征向量为 $[1.0000, 1.0000, 0.5001, 0.5001]^T$ 。

对于 (2)

q值分别取0.9, 1.5, 6, 11，逆幂迭代法输出结果如下：

```

逆幂迭代法:
# q=0.900000
收敛
k=17
m^-1+q= 1.000000

ans =

      -1.0000      1.0000      -0.0000      -0.0000

# q=1.500000
收敛
k=29
m^-1+q= 2.000000

```

```

ans =

    1.0000    -1.0000   -0.4386    0.4386

# q=6.000000
收敛
k=13
m-1+q= 5.000000

ans =

   -0.5000   -0.5000    1.0000    1.0000

# q=11.000000
收敛
k=9
m-1+q= 10.000000

ans =

    1.0000    1.0000    0.5000    0.5000

```

可见，不同的 q 值对应的结果 $m^{-1} + q$ 分别收敛到了1, 2, 5, 10，也就是矩阵 A 的特征值。对应的特征向量分别为 $[-1.0000, 1.0000, -0.0000, -0.0000]^T$, $[1.0000, -1.0000, -0.4386, 0.4386]^T$, $[-0.5000, -0.5000, 1.0000, 1.0000]^T$, $[1.0000, 1.0000, 0.5000, 0.5000]^T$ 。