



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

## RELAZIONE DI LABORATORIO: SPETTROMETRO A PRISMA

Lorenzo Liuzzo, Jiahao Miao, Riccardo Salto

Novembre 30, 2022

## Contents

1. Abstract . . . . .	1
2. Calibrazione dell'apparato . . . . .	1
3. Misura dell'angolo $\alpha$ del prisma . . . . .	1
4. Misura dell'indice di rifrazione del prisma . . . . .	2
5. Analisi dei dati . . . . .	4

# 1 Abstract

Al fine di determinare l'indice di rifrazione  $n$  di un prisma e di verificare la relazione di Cauchy

$$n^2 = A \cdot \frac{1}{\lambda^2} + B \quad (1)$$

$$n = A \cdot \frac{1}{\lambda^2} + B \quad (2)$$

(dove i parametri di Cauchy  $A$  e  $B$  assumono significato fisico distinto tra le due equazioni), è stato utilizzato uno spettrometro per sfruttare gli effetti di riflessione e rifrazione del prisma stesso, note le lunghezze d'onda  $\lambda$  dello spettro del mercurio (precedentemente calcolate con uno spettrometro a reticolo), per quei particolari valori di  $\lambda$ . Nella tabella 1, per ogni riga dello spettro sono riportate il colore, la lunghezza d'onda  $\lambda$ , l'indice di rifrazione  $n$  corrispondente alla lunghezza d'onda con il relativo errore  $\sigma_n$ .

Sono in oltre state verificate le relazioni lineari 1 e 2 con una probabilità associata al  $\chi^2$  pari a:

$$\chi_1 = 30\% \quad \chi_2 = 34\%$$

colore	$\lambda[\text{nm}]$	$n$	$\sigma_n$
Giallo est.	578,1	1,7846	0,0008
Giallo int.	575,2	1,785	0,001
Verde	545,6	1,7915	0,0007
Verde acqua est.	496,9	1,8046	0,0007
blu	434,8	1,8248	0,0007
Viola est.	406,8	1,8405	0,0007
Viola int.	404,0	1,8417	0,0007

Table 1: indici di rifrazione per lunghezze d'onda dello spettro del mercurio

## 2 Calibrazione dell'apparato

Innanzitutto si è proceduto con la messa a fuoco del cannocchiale rispetto a un obbiettivo sufficientemente lontano affinché fosse valida l'approssimazione di onda piana. A questo punto è stato messo a fuoco il collimatore rispetto alla precedente regolazione del cannocchiale, in modo che fosse verificata l'approssimazione di campo lontano. La piattaforma che regge il prisma è stata poi messa in bolla.

## 3 Misura dell'angolo $\alpha$ del prisma

Per ottenere questa misura è stato sfruttato il fenomeno della riflessione. Tutte le misurazioni delle posizioni angolari sono state effettuate su nonio con risoluzione di  $1'$  e successivamente convertite in radianti.

Tenendo fisso il cannocchiale è stata fatta ruotare la piattaforma affinché l'immagine della fenditura riflessa fosse centrata con il crocifilo. Una volta misurata sul nonio la posizione angolare  $\theta_1$ , la piattaforma è stata ruotata affinché il crocifilo centrasse l'immagine reale, ed è stata annotata la posizione angolare  $\theta_2$ .

È stata utilizzata la risoluzione dello strumento come incertezza associata alla singola misura  $\sigma = 0.02^\circ$  (pari a  $3 \cdot 10^{-4}$  rad). A questo punto è stata calcolata la differenza  $\Delta\theta$  tra i due angoli, alla quale è stata associata come incertezza  $\sigma_{\Delta\theta}$  la somma in quadratura delle singole incertezze sulle misure angolari, pari a:

$$\sigma_{\Delta\theta} = 0.02^\circ$$

È stato possibile ricavare l'angolo  $\alpha$  dalla relazione geometrica:

$$\alpha = 180^\circ - \Delta\theta$$

La misura è stata ripetuta 8 volte e in tabella 2 sono riportate le misure degli angoli misurati  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e la loro differenza  $\Delta\theta$ . È dunque stata fatta una media dei  $\Delta\theta$  ottenendo come valore:

$$\Delta\theta = 240,03^\circ$$

a cui è stata associata come incertezza la deviazione standard della media del set di misure:

$$\sigma_{\Delta\theta} = 0,03^\circ$$

Infine, è stato possibile valutare l'angolo  $\alpha$ , ottenendo un valore pari a:

$$\alpha = (60,03 \pm 0,03)^\circ = (1,0477 \pm 0,0006) \text{ rad}$$

$\theta_1[^\circ]$	$\theta_2[^\circ]$	$\Delta\theta[^\circ]$
66,58	306,73	240,15
66,40	306,52	240,12
39,82	279,78	239,97
37,20	277,20	240,00
34,83	274,75	239,92
35,60	275,73	240,13
35,70	275,65	239,95
47,80	287,78	239,98

Table 2: valori degli angoli misurati  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e della loro differenza  $\Delta\theta$

## 4 Misura dell'indice di rifrazione del prisma

Per prima cosa è stato misurato l'angolo di zero  $\theta_0$ . La misura è stata ripetuta 10 volte e con una media è stato ottenuto come valore:

$$\theta_0 = (178,67 \pm 0,02)^\circ = (3,1184 \pm 0,0003) \text{ rad}$$

Dove come errore associato è stata utilizzata la risoluzione al posto della deviazione standard della media delle 10 misure perché la deviazione standard risulta inferiore alla risoluzione dello strumento di misura. Le misure di  $\theta_0$  sono riportate in tabella 3.

178,667°	178,683°	178,700°	178,650°	178,633°
178,667°	178,683°	178,667°	178,700°	178,650°

Table 3: misure dell'angolo di zero  $\theta_0$

A questo punto è stato misurato per ogni colore l'angolo di deviazione minima. Osservando una particolare riga dello spettro, è stata fatta ruotare la piattaforma contenete il prisma seguendo la riga col cannocchiale fino a che questa non invertiva il senso dello spostamento. È stata quindi segnata la posizione angolare  $\theta(\lambda)$  corrispondente al punto in cui avveniva l'inversione. La misura è stata ripetuta 5 volte per ogni lunghezza d'onda.

In tabella 4 sono riportate per ogni colore dello spettro i valori raccolti in questa fase espressi in gradi.

giallo est. [°]	gialli int. [°]	verde acqua [°]	verde [°]	blu [°]	viola est. [°]	viola int. [°]
112,13	112,05	111,42	109,70	106,93	104,67	104,48
112,37	112,63	111,47	109,58	106,82	104,63	104,52
112,40	112,62	111,33	109,62	106,97	104,77	104,60
112,25	112,00	111,37	109,80	107,02	104,65	104,42
112,20	112,02	111,40	109,70	106,83	104,62	104,43

Table 4: misure relative degli angoli di deviazione minima  $\theta(\lambda)$  per ogni colore dello spettro del mercurio

Dai dati raccolti, per ogni lunghezza d'onda, è stato ottenuto un valore medio  $\theta(\lambda)_m$  la cui incertezza  $\sigma_{\theta(\lambda)_m}$  è stata stimata attraverso la deviazione standard della media delle misure. L'angolo di deviazione minima  $\delta$  è stato trovato sottraendo alla posizione relativa la posizione di zero  $\theta_0$ . L'incertezza su  $\delta_m(\lambda)$ ,  $\sigma_{\delta_m(\lambda)}$ , è stata ottenuta sommando in quadratura i singoli errori dei due addendi. Tramite la relazione:

$$n(\lambda) = \frac{\sin(\frac{\delta_m(\lambda)+\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \quad (3)$$

è stato ricavato l'indice di rifrazione del prisma per ogni lunghezza d'onda, con errore associato  $\sigma_n$  pari alla somma in quadratura dei due errori  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 = \sigma_\delta \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha+\delta}{2})}{2 \sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\sigma_2 = \sigma_\alpha \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha+\delta}{2}) \sin(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha+\delta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})}{2 \sin^2(\frac{\alpha}{2})}$$

Formula che può essere ulteriormente semplificata raccogliendo l'espressione di  $n(\lambda)$  (vedi 3):

$$\sigma_{n(\lambda)} = \frac{n(\lambda)}{2} \cdot \sqrt{[\cot(\frac{\alpha+\delta}{2})\sigma_{delta}]^2 + [(\cot(\frac{\alpha+\delta}{2}) - \cot(\frac{\alpha}{2}))\sigma_\alpha]^2}$$

In tabella 5 sono riportate per ogni colore le misure dell'angolo di deviazione minima e dell'indice di rifrazione, con le loro incertezze.

colore	$\delta$ rad	$\sigma_{\delta}$ rad	$n$	$\sigma_n$
Giallo est.	1,159	0,001	1,7846	0,0008
Giallo int.	1,159	0,003	1,785	0,001
Verde	1,1741	0,0005	1,7915	0,0007
Verde acqua est.	1,2041	0,0007	1,8046	0,0007
blu	1,2524	0,0008	1,8248	0,0007
Viola est.	1,2916	0,0005	1,8405	0,0007
Viola int.	1,2947	0,0007	1,8417	0,0007

Table 5: valori dell'angolo di deviazione minima e dell'indice di rifrazione per ogni colore dello spettro del mercurio

## 5 Analisi dei dati

A questo punto è stato possibile verificare la validità delle relazioni di Cauchy, eq. 1 e 2. Sono quindi state fatte due regressioni lineari con i valori delle lunghezze d'onda tabulate in modo da ottenere i coefficienti angolari  $a_1$  e  $a_2$  delle rette e poter trasferire l'incertezza relativa alle lunghezze d'onda misurate con lo spettrometro a reticolo sull'asse y. Sono dunque state effettuate di nuovo le due regressioni lineari pesate, utilizzando come lunghezze d'onda quelle precedentemente misurate e sono stati trovati i seguenti coefficienti:

$$a_1 = (6,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-14} \text{ m}^2 \quad b_1 = (2,990 \pm 0,004)$$

$$a_2 = (1,81 \pm 0,02) \cdot 10^{-14} \text{ m}^2 \quad b_2 = (1,731 \pm 0,001)$$

Per entrambe le regressioni è stato effettuato un test di  $\chi^2$ , che ha dato un livello di confidenza per le relazioni di Cauchy, rispettivamente, del 30% e del 34%. I grafici delle regressioni sono riportati nelle figure 1 e 2.

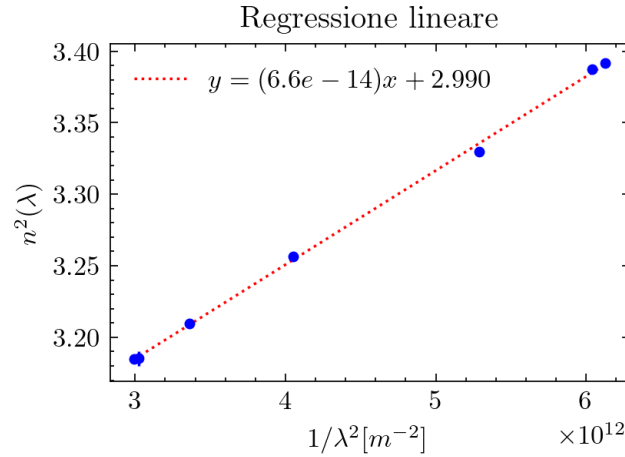


Figure 1: Relazione di Cauchy 1

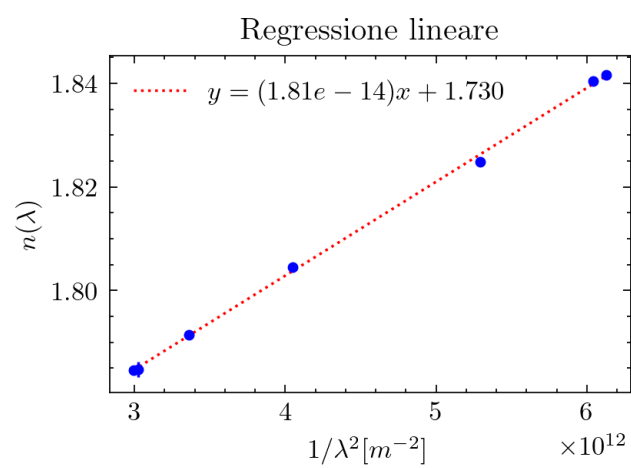


Figure 2: Relazione di Cauchy 2