



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

RELAZIONE DI LABORATORIO: MISURA DELLA CARICA ELEMENTARE

Lorenzo Liuzzo, Jiahao Miao, Riccardo Salto

Novembre 23, 2022

Contents

1. Abstract	1
2. Metodi	1
2.1 Calibrazione apparato	1
2.2 Misure	2
3. Analisi Dati	4
4. Considerazioni finali	7

1 Abstract

Ponendosi come obiettivo la misura della carica elementare è stato riprodotto l'esperimento di Millikan. Si è osservato il moto rettilineo di gocce d'olio nell'aria in assenza e in presenza di campo elettrico uniforme. Misurando la velocità di sedimentazione delle gocce d'olio in assenza di campo elettrico è stato possibile risalire approssimativamente alle loro dimensioni. Conoscendo le dimensioni di una goccia, la sua velocità di regime e il valore del campo elettrico a cui è soggetto si è calcolato la carica posseduta dalla goccia. Con una misura indiretta è stato trovato il valore di:

$$e_{best} = (1.605 \pm 0.013) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

2 Metodi

2.1 Calibrazione apparato

Per prima cosa sono stati smontati e puliti con alcol i singoli componenti dell'apparato. E' poi stato misurato con un palmer (risoluzione 0.01 mm) lo spessore del distanziometro in più punti, ottenendo con una media il valore $d = 7.67 \text{ mm}$. L'apparato è poi stato rimontato. Con un ago è stato messo a fuoco il cannocchiale. L'apparato è poi stato collegato al generatore di differenza di potenziale, tarato su $(300 \pm 1) \text{ Volt}$. In seguito, è stato collegato il resistometro: conoscendo la resistenza R e interpolando linearmente con i valori dalla tabella fornita, è stata misurata indirettamente la temperatura assoluta T all'interno dell'apparato sperimentale. Dalla temperatura è stato possibile ricavare il valore del coefficiente di viscosità η per ogni set di misure attraverso la seguente relazione:

$$\eta = (1,8 + 0,004765 * (T - 15))/100000$$

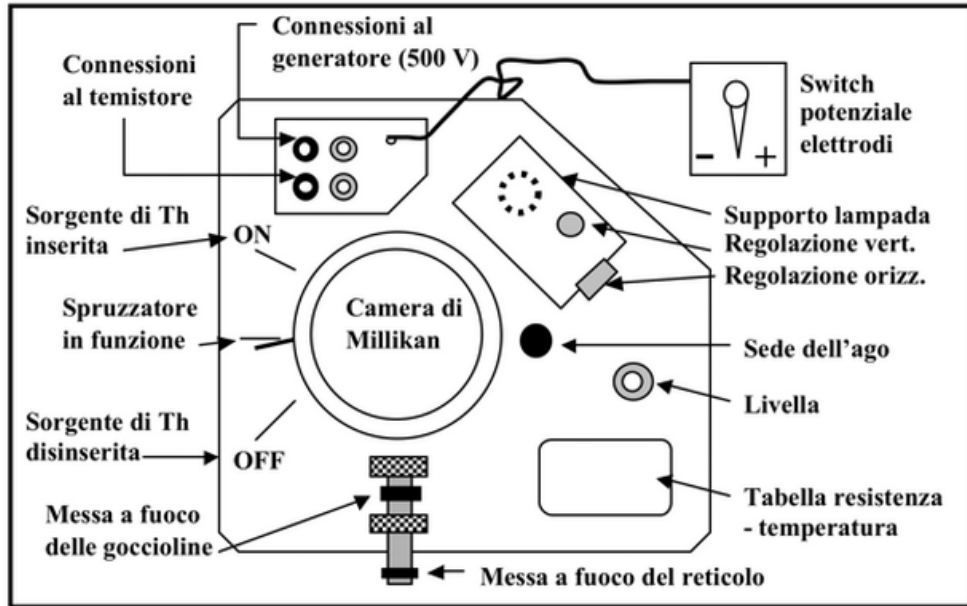


Figure 1: Camera di Millikan

Le misure sono state effettuate ogni volta che si iniziava un nuovo set (ovvero per ogni goccia). In tabella 1 sono riportati i dati relativi a η raccolti durante il corso dell'intera sessione di laboratorio:

orario	R [M Ω]	T [°C]	η [Ns/m]
15:13	2,214	21,30	1,8300E-05
16:01	2,180	21,83	1,8325E-05
16:15	2,175	21,91	1,8329E-05
16:22	2,172	21,95	1,8331E-05
16:30	2,170	21,98	1,8331E-05
17:20	2,168	22,02	1,8333E-05
17:30	2,160	22,15	1,8334E-05
17:40	2,155	22,24	1,8345E-05
17:45	2,155	22,24	1,8345E-05
18:10	2,145	22,41	1,8353E-05

Table 1: Valori di resistenza e η nel corso della durata dell'esperimento

Tutti i tempi sono stati misurati con il cronometro di un telefono con risoluzione 0.01s, di molto più preciso di quanto permettesse la procedura. Si è deciso di arrotondare i tempi alla prima cifra decimale.

2.2 Misure

E' stata misurata la velocità teoricamente uniforme di alcune goccioline d'olio elettricamente cariche, inizialmente in un regime di sola attrazione gravitazionale e in seguito in presenza di un campo elettrico, di intensità nota, diretto lungo la verticale prima in un verso (concorde all'accelerazione di gravità) e poi nell'altro.

Le gocce sono state lasciate cadere nella camera con presa d'aria aperta per favorirne la caduta, dopodiché si è chiusa la camera ed è stato attivato il generatore di differenza di potenziale in direzione opposta a quella della gravità in modo da avere una prima scrematura dalle gocce non cariche. Dopo qualche minuto di attesa è stata ottenuta la condizione cercata e sono iniziate le misure.

Si è deciso di procedere selezionando una goccia, verificare se fosse effettivamente carica immergendola nel campo elettrico, osservarla prima in assenza di campo e solo infine di effettuare le misure con campo elettrico perché spesso si sono osservati moti convettivi non trascurabili che invalidavano la misura. Si è così preso il tempo di caduta sotto effetto della sola gravità per 0.5mm, prendendo i tempi ogni 0.1mm e mediandoli. E' stato infatti osservato che i tempi erano più che variabili (per la presenza delle altre gocce cariche e dei pur limitati moti convettivi) e che osservare la caduta di 2.5mm richiedeva più tempo di quello disponibile e aumentava l'influenza dei moti convettivi sulla caduta. Per le misure in regime di campo elettrico, poichè le gocce cariche si muovevano ad una velocità molto più elevata, sono stati presi i tempi di attraversamento ogni 0.5mm, 5 volte per ogni configurazione di campo (verso l'alto e verso il basso). Sono state quindi trovate per ogni goccia 5 misure di tempi in assenza di campo, 5 con campo rivolto verso il basso e 5 verso l'alto. Spesso si è considerato più opportuno non prendere i tempi continuativamente ma dividendo il moto, così da poter eliminare quei tratti a bassa visibilità o in cui erano concentrate molte gocce che deviavano la traiettoria.

In tabella ?? sono riportati per ogni goccia osservata i tempi di caduta in assenza t , e in presenza t_c di campo concorde con la forza di gravità; i tempi di salita t_s in presenza di campo opposto alla forza peso; le velocità medie nelle tre configurazioni, rispettivamente v , v_c , v_s la carica presente su ogni goccia mentre saliva Q_s e scendeva Q_c ; il raggio della goccia r ; la distanza tra gli elettrodi d ;

la differenza di densità ρ ; la distanza Δz percorsa dalle gocce per ogni tempo preso in presenza di campo (per la caduta libera $\Delta z = 0.1\text{mm}$)

Table 2: Dati di misura bruti e di prima elaborazione

$d \text{ (elettrodi)} = 7,7 \cdot 10^{-3}$			$\rho_o - \rho_a = 858.7 \text{ kg/m}^3$			$\Delta z = 0.5 \cdot 10^{-3}$		
$\Delta V = 0 \text{ V}$			$\Delta V = +300 \text{ V}$			$\Delta V = -300 \text{ V}$		
t(s)	$v_0(\text{m/s})$	r(m)	t(s)	$v_1(\text{m/s})$	Q (C)	t(s)	$v_2(\text{m/s})$	Q (C)
12,6	7,9E-06	2,4E-07	3,7	1,35E-04	1,2E-19	1,9	2,63E-04	2,6E-19
24,6	4,1E-06	1,6E-07	3,9	1,28E-04	2,3E-19	1,6	3,13E-04	5,9E-19
20,5	4,9E-06	1,8E-07	2,3	2,17E-04	3,3E-19	1,9	2,63E-04	4,2E-19
10,2	9,8E-06	2,7E-07	1,8	2,78E-04	2,1E-19	2,0	2,50E-04	2,0E-19
16,8	6,0E-06	2,0E-07	1,9	2,63E-04	3,3E-19	1,8	2,78E-04	3,6E-19
8,2	1,2E-05	3,1E-07	2,1	2,38E-04	4,9E-19	1,8	2,78E-04	6,2E-19
14,5	6,9E-06	2,2E-07	1,4	3,57E-04	5,0E-19	1,5	3,33E-04	4,9E-19
16,8	6,0E-06	2,0E-07	1,6	3,13E-04	4,0E-19	1,9	2,63E-04	3,5E-19
10,4	9,6E-06	2,7E-07	1,7	2,94E-04	5,2E-19	1,9	2,63E-04	5,0E-19
17,6	5,7E-06	2,0E-07	1,9	2,63E-04	3,2E-19	1,5	3,33E-04	4,2E-19
11,4	8,8E-06	2,6E-07	2,1	2,38E-04	7,2E-19	2,3	2,17E-04	7,1E-19
5,0	2,0E-05	4,0E-07	2,3	2,17E-04	2,7E-19	2,3	2,17E-04	3,3E-19
6,3	1,6E-05	3,6E-07	2,2	2,27E-04	3,7E-19	2,3	2,17E-04	4,1E-19
5,8	1,7E-05	3,7E-07	2,2	2,27E-04	3,4E-19	1,9	2,63E-04	4,5E-19
11,2	8,9E-06	2,6E-07	2	2,50E-04	7,5E-19	2,7	1,85E-04	6,0E-19
9,1	1,1E-05	2,9E-07	5,5	9,09E-05	1,7E-19	7,2	6,94E-05	1,7E-19
6,5	1,5E-05	3,5E-07	5,4	9,26E-05	1,2E-19	7,5	6,67E-05	1,2E-19
4,9	2,0E-05	4,1E-07	6	8,33E-05	7,1E-20	7,7	6,49E-05	9,6E-20
11,3	8,8E-06	2,6E-07	6	8,33E-05	1,9E-19	7,9	6,33E-05	1,9E-19
12,5	8,0E-06	2,4E-07	5,6	8,93E-05	2,3E-19	8,6	5,81E-05	1,9E-19
13,9	7,2E-06	2,3E-07	5,7	8,77E-05	2,7E-19	7	7,14E-05	2,6E-19
11,4	8,8E-06	2,6E-07	6	8,33E-05	2,1E-19	7,3	6,85E-05	2,1E-19
6,8	1,5E-05	3,4E-07	5,6	8,93E-05	1,2E-19	7,8	6,41E-05	1,3E-19
5,6	1,8E-05	3,8E-07	5,8	8,62E-05	9,3E-20	7,2	6,94E-05	1,2E-19
5,3	1,9E-05	3,9E-07	6,8	7,35E-05	7,0E-20	7,2	6,94E-05	1,1E-19
23,7	4,2E-06	1,7E-07	4,1	1,22E-04	1,5E-19	4,2	1,19E-04	1,6E-19
14,2	7,0E-06	2,3E-07	3,9	1,28E-04	9,3E-20	4,2	1,19E-04	1,8E-19
20,4	4,9E-06	1,8E-07	3,7	1,35E-04	1,4E-19	4,4	1,14E-04	1,3E-19
12,6	7,9E-06	2,4E-07	3,9	1,28E-04	8,2E-20	4,1	1,22E-04	2,1E-19
31,5	3,2E-06	1,4E-07	3,8	1,32E-04	2,2E-19	4,2	1,19E-04	9,6E-20
8,2	1,2E-05	3,1E-07	1,4	3,57E-04	3,4E-19	1,9	2,63E-04	2,7E-19
15,6	6,4E-06	2,1E-07	1,6	3,13E-04	5,8E-19	1,5	3,33E-04	6,4E-19
18,5	5,4E-06	1,9E-07	1,6	3,13E-04	6,8E-19	1,7	2,94E-04	6,7E-19
11,1	9,0E-06	2,6E-07	1,7	2,94E-04	3,8E-19	1,5	3,33E-04	4,6E-19
11,5	8,7E-06	2,5E-07	1,5	3,33E-04	4,5E-19	1,2	4,17E-04	5,9E-19
10,3	9,7E-06	2,7E-07	2,8	1,79E-04	1,3E-19	2,4	2,08E-04	1,7E-19
24,9	4,0E-06	1,6E-07	2,5	2,00E-04	3,7E-19	2,4	2,08E-04	4,0E-19

Table 2 continua dalla pagina precedente

t(s)	v_0 (m/s)	r(m)	t(s)	v_1 (m/s)	Q (C)	t(s)	v_2 (m/s)	Q (C)
21,8	4,6E-06	1,8E-07	2,3	2,17E-04	3,5E-19	2,7	1,85E-04	3,1E-19
15,5	6,5E-06	2,1E-07	2,2	2,27E-04	2,6E-19	2,6	1,92E-04	2,3E-19
12,2	8,2E-06	2,5E-07	2,6	1,92E-04	1,7E-19	2,6	1,92E-04	1,9E-19
2,3	4,3E-05	6,1E-07	2,0	2,50E-04	1,2E-18	9,1	5,49E-05	5,5E-19
1,3	7,7E-05	8,3E-07	3,0	1,67E-04	2,9E-19	6,4	7,81E-05	4,9E-19
2,9	3,4E-05	5,4E-07	2,8	1,79E-04	1,0E-18	7,5	6,67E-05	7,2E-19
2,0	5,0E-05	6,6E-07	2,9	1,72E-04	6,0E-19	7,3	6,85E-05	5,8E-19
1,9	5,3E-05	6,8E-07	3,0	1,67E-04	5,3E-19	7,3	6,85E-05	5,6E-19
8,3	1,2E-05	3,1E-07	1,7	2,94E-04	4,4E-19	1,7	2,94E-04	4,8E-19
9,9	1,0E-05	2,8E-07	1,6	3,13E-04	5,7E-19	1,8	2,78E-04	5,4E-19
12,8	7,8E-06	2,4E-07	1,6	3,13E-04	7,4E-19	1,7	2,94E-04	7,3E-19
11,2	8,9E-06	2,6E-07	1,6	3,13E-04	6,4E-19	1,6	3,13E-04	6,8E-19
7,6	1,3E-05	3,2E-07	1,7	2,94E-04	4,0E-19	1,5	3,33E-04	5,0E-19

3 Analisi Dati

Da ogni set di misure, ovvero per ogni goccia, la prima elaborazione ha riguardato le 5 misure in assenza di campo. Sono stati utilizzati due approcci differenti: dai tempi ottenuti è stato calcolato un tempo medio e da questo un raggio per le cinque misure; per ogni tempo è stato calcolato un raggio e dai 5 raggi si è trovato un raggio medio da usare per le seguenti valutazioni. Questo secondo approccio è parso più opportuno in quanto minimizzante gli errori e poiché le risultanti misure erano più coerenti. La relazione utilizzata in questo caso è:

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{b}{2p}\right)^2 + \frac{9\eta v_r}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})}} - \frac{b}{2p} \quad (1)$$

Dove b è una costante di correzione per il coefficiente di viscosità, p è la pressione(atmosferica standard), ρ_{olio} e ρ_{aria} sono le densità dell'olio e dell'aria e v_r è la velocità di sedimentazione delle goccioline.

Per quanto riguarda le misurazioni fatte in presenza di campo è stato osservato che le gocce acquistavano e perdevano carica nel corso della discesa (o della salita ovviamente). Utilizzando il raggio trovato dalla formula 1, per ogni tempo misurato in presenza di campo è stata trovata una carica associata dalla relazione:

$$q = -\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{olio} - \rho_{aria})\frac{g}{E}\left(1 - \frac{V_E}{v_r}\right) \quad \text{per goccia che scende} \quad (2)$$

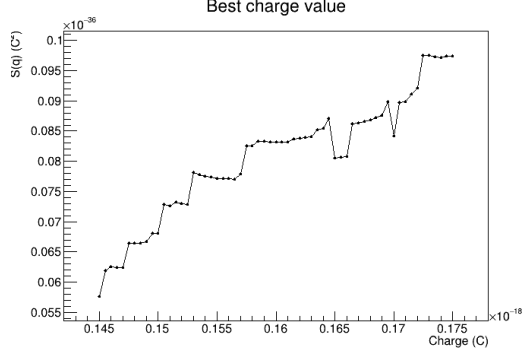
$$q = -\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{olio} - \rho_{aria})\frac{g}{E}\left(1 + \frac{|V_E|}{v_r}\right) \quad \text{per goccia che sale} \quad (3)$$

Dove g è la costante di accelerazione gravitazione ed E il campo elettrico generato dalle armature del condensatore.

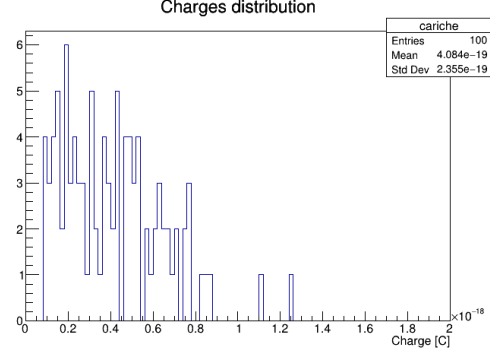
Avendo a disposizione 10 misure di carica per ogni goccia e osservato 10 gocce, sono stati inizialmente considerati 100 valori. Questi sono stati inseriti nella funzione

$$S(q) = \sum \left(\frac{Q_i}{k(q)} - q\right)^2 \quad k(q) = \left\lfloor \frac{Q_i}{q} + 0.5 \right\rfloor \quad (4)$$

che è stata implementata con un algoritmo che ne restituiva il grafico. La variabile libera q è stata fatta variare intorno ai valori più piccoli ottenuti nel corso delle misure, supponendo che queste potessero essere candidati cariche elementati.



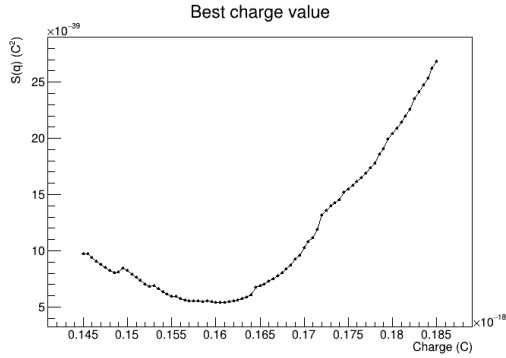
(a) $S(q)$ con tutto il set di dati



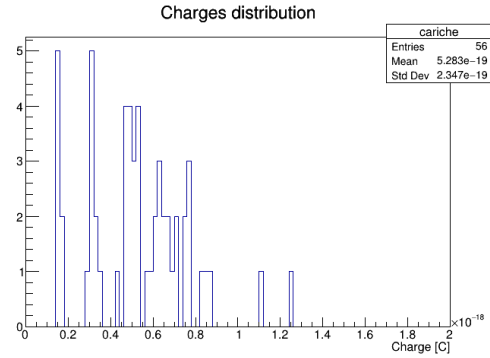
(b) Istogramma

La funzione presentava diversi punti di discontinuità che rendevano pressoché impossibile la visualizzazione di un minimo.

L'algoritmo è stato quindi modificato in modo da scartare per ogni punto di discontinuità le misure che davano mantissa di $K(q=q \text{ di discontinuità}) = 0.5$ e valori vicini.



(c) $S(q)$ con il set di dati ripulito



(d) Istogramma

In questo modo il grafico è risultato compatibile con la ricerca del minimo, che è stato valutato dall'algoritmo stesso (che utilizza le librerie di ROOT):

$$q_{min} = 1.605 \quad C$$

Intorno a questo valore, $K(q)$ è costante al primo ordine e può essere utilizzato per calcolare la carica elementare:

$$q_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{k_i(q_{min})}$$

La miglior valutazione dell'errore è la deviazione standard:

$$\sigma_{q_e} = \sqrt{\frac{S(q_{min})}{N(N-1)}}$$

e il valore finale ottenuto è:

$$e_{best} = (1.605 \pm 0.013) \cdot 10^{-19} \quad \text{C}$$

Si è deciso di tenere due cifre significative per l'incertezza poichè $5 \cdot 10^{-22}$ rappresenta all'incirca $\sim 38,5\%$ di $13 \cdot 10^{-22}$, il che vuol dire che non è una quantità trascurabile.

4 Considerazioni finali

La valutazione degli errori sistematici risulta essere particolarmente complessa data la variegata natura che questi possono avere tuttavia delle osservazioni possono essere fatte con parziale certezza. Innanzitutto è da subito parso evidente che il moto delle gocce non fosse rettilineo uniforme quando non immerse nel campo elettrico. In questo caso la principale fonte di perturbazione sono stati i moti convettivi che, seppur limitati, non sono stati del tutto eliminati. Spesso le misure sono state interrotte perché la goccia si muoveva verso l'alto o in direzione diagonale. In ogni caso i tempi di percorrenza della stessa goccia di 0.1mm sono stati di molto diversi. Si ritiene che buona parte delle fonti di errore si siano presentate in questa fase. Il risultato è stato una distribuzione quasi continua di dati, che solo dopo una grossa scrematura sono risultati analizzabili. Un fenomeno che si è pensato potesse influire nella misura è l'attrazione o la repulsione reciproca delle gocce cariche, della quale si è provato a stimare l'ordine di grandezza, considerando gocce sferiche con raggio 10^{-6} , carica $10 \cdot q$, a distanza 10^{-4} :

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{100q^2}{r^2} \approx 2.3 \cdot 10^{-18} \quad N$$

Gli effetti sono quindi stati considerati trascurabili rispetto alla forza peso agente sulla stessa goccia d'olio di densità $\rho_{olio} = 860 \frac{kg}{m^3}$:

$$F_g = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_{olio} g \approx 10^{-14} \quad N$$

, in quanto servirebbero almeno un centinaio di gocce per avere un effetto significativo. Il fatto che le gocce sembrassero perdere e acquistare carica, cosa che può essere spiegato tramite molteplici fenomeni, è sicuramente stato fonte di errore. Si è provato a limitarne gli effetti considerando ogni separata ogni misura, se però nell'arco di tempo della singola misura (1 – 3s c.ca) ci sono stati cambiamenti questo può aver influito nel rendere continua quella che sarebbe dovuta essere una distribuzione discreta.

Una volta isolato il valore finale, è stato fatto un grafico degli scarti quadratici con tutte le misure, è verificabile ad occhio la larghezza delle parabole centrate sui multipli di q_f . E' interessante però vedere come sono distribuite le quantità discrete di carica elementare tra le misure.

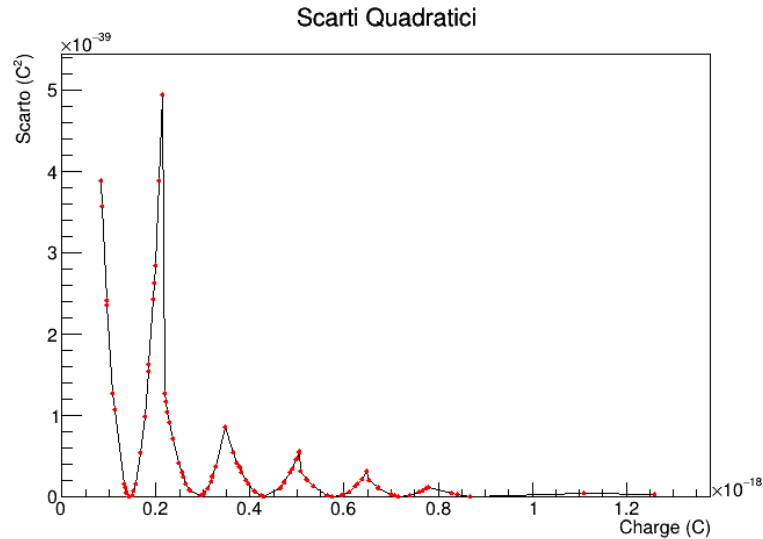


Figure 2: Scarti quadratici medi