



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

RELAZIONE DI LABORATORIO: SPETTROMETRO A RETICOLO

Lorenzo Liuzzo, Jiahao Miao, Riccardo Salto

Novembre 23, 2022

Contents

1. Abstract	1
2. Calibrazione dell'apparato	2
3. Valutazione delle grandezze caratteristiche dell'apparato	2
4. Misura delle lunghezze d'onda dello spettro del mercurio	3
5. Potere dispersivo del reticolo calcolato a partire dai dati raccolti sulle lunghezze d'onda	4
6. Appendice	4

1 Abstract

È stato utilizzato uno spettrometro a reticolo per misurare le lunghezze d'onda di alcune righe dello spettro di emissione di una lampada ai vapori di mercurio sfruttando il fenomeno fisico della diffrazione. Nell'arco dell'esperimento sono stati inoltre valutati il potere dispersivo D e il potere risolutivo del reticolo R per ogni ordine k .

Nella tabella 1 sono riportate le lunghezze d'onda λ con l'errore associato σ_λ , mentre in figura 1 è possibile osservare l'intera distribuzione dello spettro del mercurio. Riportiamo nella tabella 2 anche i valori delle grandezze caratteristiche dell'apparato calcolati con la lampada al sodio.

colore	λ [nm]	σ_λ [nm]
Viola int.	404,0	0,4
Viola est.	406,8	0,4
blu	434,8	0,4
Verde acqua int.	490,9	0,5
Verde acqua est.	496,9	0,5
Verde	545,6	0,5
Giallo int.	575,2	0,6
Giallo est.	578,1	0,6
Rosso int.	616	1
Rosso est.	618	1

Table 1: Lunghezze d'onda dello spettro del mercurio

Parametro	Valore
L	$(25 \pm 1) \text{ mm}$
d	$(3,369 \pm 0,002) \mu\text{m}$
N	$(7,5 \pm 0,1) \cdot 10^3$
D	$(5,454 \pm 0,005) \cdot 10^5 \text{ rad/m}$

Table 2: Parametri strumento

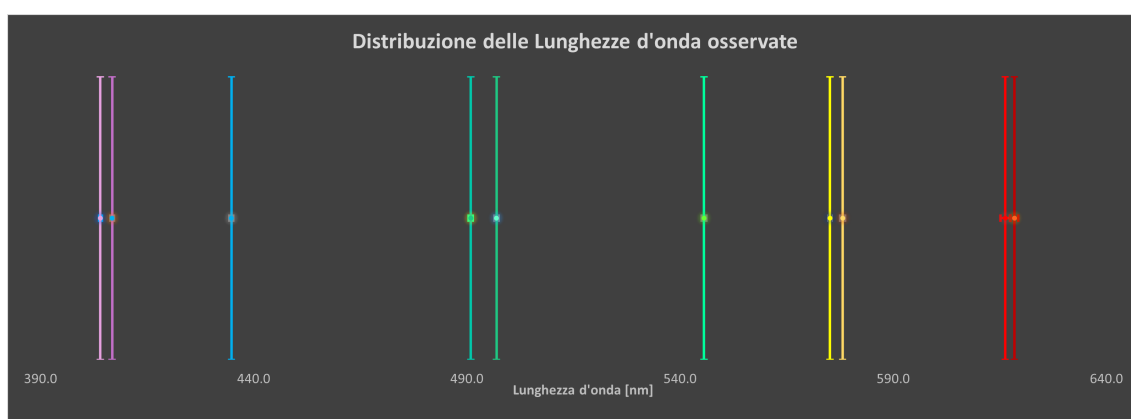


Figure 1: Distribuzione delle righe della lampada ai vapori di mercurio osservata in laboratorio

2 Calibrazione dell'apparato

Innanzitutto si è proceduto con la messa a fuoco del cannocchiale rispetto a un obbiettivo sufficientemente lontano affinché fosse valida l'approssimazione di onda piana. A questo punto è stato messo a fuoco il collimatore rispetto alla precedente regolazione del cannocchiale in modo che fosse verificata l'approssimazione di campo lontano. La piattaforma che regge il reticolo è stata poi messa in bolla. Con una lampada ai vapori di sodio è stato ortogonalizzato il reticolo rispetto all'onda piana, dopo aver regolato l'apertura della fenditura in modo da osservare righe sufficientemente sottili e luminose (larghe all'incirca 0.5 mm). L'ortogonalizzazione è stata effettuata attraverso la misura delle posizioni angolari relative allo zero del medesimo ordine di interferenza di una riga del doppietto del sodio a sinistra e a destra dell'ordine centrale. È stato poi calcolato l'angolo di correzione β , tramite la relazione:

$$\beta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cdot \frac{\cos(\theta_{av})}{1 - \cos \theta_{av}}$$

dove θ_1 e θ_2 sono le posizioni angolari delle righe del sodio, θ_{av} è invece la media delle due.

A questo punto, il reticolo è stato ruotato dell'angolo β ed è stata ripetuta la misura. La procedura è stata eseguita due volte prima di ottenere una precisione di $4'$, inferiore alla precisione minima richiesta di $5'$.

3 Valutazione delle grandezze caratteristiche dell'apparato

Si è proceduto con la determinazione dei parametri caratteristici del reticolo e delle lunghezze d'onda associate allo spettro del mercurio.

Innanzitutto è stata misurata la lunghezza L del reticolo con un righello di risoluzione 1 mm:

$$L = (25 \pm 1) \text{ mm}$$

Tutte le misurazioni delle posizioni angolari dei massimi di interferenza sono invece state effettuate su un nonio con risoluzione di $1'$ e successivamente convertite in radianti. Come incertezza associata alla singola misura è stata utilizzata la risoluzione dello strumento $\sigma = 0.02^\circ = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. Dunque è stata stimata la posizione angolare dell'ordine centrale θ_0 osservandola sul nonio. La misura è stata ripetuta 6 volte e con una media è stato ricavato il valore migliore. Come incertezza è stata scelta comunque la risoluzione dello strumento, poiché maggiore della deviazione standard:

$$\theta_0 = (56,07 \pm 0.02)^\circ = (0.9786 \pm 0.0003) \text{ rad}$$

In seguito, note le lunghezze d'onda del doppietto del sodio, $\lambda_{Na_1} = 589.0 \text{ nm}$ e $\lambda_{Na_2} = 589.6 \text{ nm}$, sono state misurate le posizioni angolari dei massimi di interferenza per i primi 5 ordini riferiti a λ_{Na_1} . Per ogni ordine k , l'angolo θ_k è stato valutato come differenza tra il valore letto sul nonio e θ_0 . L'errore associato σ_{θ_k} è stato valutato come somma in quadratura di due differenti errori σ_s e σ_o ; il primo è a sua volta la somma in quadratura delle due incertezze associate alla singola misura angolare σ_θ , il secondo legato all'errore di ortogonalizzazione e ricavato dalla formula:

$$\sigma_o = \beta \cdot \frac{1 - \cos(\theta_k)}{\cos(\theta_k)}$$

Dopo aver convertito in radianti le grandezze appena descritte ne è stato calcolato il seno con il suo errore associato $\sigma_{\sin(\theta_k)}$, ricavato dalla formula di propagazione:

$$\sigma_{\sin(\theta_k)} = \sigma_{\theta_k} \cdot |\cos(\theta_k)|$$

In tabella 4 sono riportati i valori misurati per le posizioni angolari e i valori di $\sin(\theta_k)$.

A questo punto, per ogni ordine k è stato ricavato il passo del reticolo d e la sua incertezza σ_d dalle formule:

$$d = \frac{\lambda_1 \cdot k}{\sin(\theta_k)} \quad \sigma_d = \frac{d \cdot \sigma_{\theta_k}}{|\tan(\theta_k)|}$$

e da questo il numero di fenditure N e la sua incertezza σ_N :

$$N = \frac{L}{d} \quad \sigma_N = N \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

dove σ_L è l'incertezza associata alla lunghezza L del reticolo.

In tabella 5 sono riportati i valori di d e N per i 5 ordini.

È stato poi valutato il potere dispersivo D e l'incertezza σ_D :

$$D = \frac{k}{d \cdot \cos(\theta_k)} \quad \sigma_D = D \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + (\sigma_{\theta_k} \cdot \tan(\theta_k))^2}$$

Infine è stato calcolato il potere risolvante R e il suo errore σ_R dalle relazioni:

$$R = k \cdot N \quad \sigma_R = \sigma_N \cdot k$$

In tabella 6 sono riportati per ogni ordine k il potere dispersivo e risolutivo associati e con relativa incertezza.

4 Misura delle lunghezze d'onda dello spettro del mercurio

Una volta cambiata la lampada al sodio con una ai vapori di mercurio, si è proceduto con la misura indiretta delle lunghezze d'onda del suo spettro. Le misure sono state ripetute allo stesso modo per ogni colore. Sono stati osservati i seguenti colori: viola interno, viola esterno, indaco, verde acqua interno, verde acqua esterno, verde, giallo interno, giallo esterno, rosso interno (è stato osservato solo il primo ordine destro e sinistro), rosso esterno (è stato osservato solamente l'ordine 1 e 2 destro). Partendo dal primo ordine (destro o sinistro indifferentemente) è stata misurata col nonio la posizione angolare della banda del colore prescelto fino al terzo ordine. La misura è poi stata ripetuta dall'altra parte. Per le misure angolari si è proceduto come già fatto per la lampada al sodio, per cui i valori degli angoli θ_k sono stati convertiti in radianti, ne è stato calcolato il seno, e gli errori sono stati propagati come sopra. Le lunghezze d'onda λ_k dei singoli colori sono state ricavate dalla relazione:

$$\lambda_k = \frac{d \sin(\theta_k)}{k}$$

L'errore associato σ_{λ_k} è stato invece valutato con la seguente formula di propagazione:

$$\sigma_{\lambda_k} = \lambda_k \sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\theta_k}}{\tan(\theta_k)}\right)^2}$$

nella quale tutte le quantità sono state precedentemente definite. In Appendice 6 sono riportate le tabelle con i valori di k , θ_k , $\sin(\theta_k)$, λ_k con relativi errori per ogni colore osservato. I risultati finali delle lunghezze d'onda λ per ogni colore sono stati ottenuti con una media pesata dei λ_k , dove all'errore è stato sommato in quadratura l'errore di ortogonalizzazione σ_{λ_o} ricavato dalla formula:

$$\sigma_{\lambda_o} = \lambda \frac{\sigma_d}{d}$$

5 Potere dispersivo del reticolo calcolato a partire dai dati raccolti sulle lunghezze d'onda

È stato infine calcolato il potere dispersivo del reticolo per i primi tre ordini k a partire dai dati raccolti sulle lunghezze d'onda. La procedura è stata ripetuta per ogni ordine considerato. Sono state quindi considerate le tre coppie di viola, gialli e verdi acqua. Per ogni doppietto è stata valutata la distanza angolare $\Delta\theta$ tra le posizioni angolari dei massimi dello stesso ordine dei due colori vicini (riportate in Appendice 6) e la differenza tra le loro lunghezze d'onda $\Delta\lambda$ (riportate in tabella 1). Gli errori sulle grandezze di $\Delta\theta$ e $\Delta\lambda$ sono stati stimati con una somma in quadratura dei singoli errori sulle posizioni angolari e sulla stima delle lunghezze d'onda. A questo punto è stato valutato il potere dispersivo D secondo la formula:

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

L'errore associato σ_D è stato invece valutato come:

$$\sigma_D = D \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta\theta}}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta\lambda}}{\Delta\lambda}\right)^2}$$

In tabella 17, tabella 18, tabella 19 sono riportati per tutti e tre gli ordini i valori $\Delta\theta$, con relativa incertezza $\sigma_{\Delta\theta}$; $\Delta\lambda$, con errore $\sigma_{\Delta\lambda}$, il valore associato del potere dispersivo D con incertezza σ_D .

Infine per ogni ordine k è stata fatta una media pesata tra i valori del potere dispersivo ottenendo i tre valori per i primi tre ordini, rispettivamente D_1 , D_2 , D_3 :

$$D_1 = (3,2 \pm 0,6) \cdot 10^5 \frac{rad}{m} \quad D_2 = (6,2 \pm 0,8) \cdot 10^5 \frac{rad}{m} \quad D_3 = (9 \pm 1) \cdot 10^5 \frac{rad}{m}$$

Queste sono state confrontate con quelle ottenute nella prima parte dell'esperimento. In tabella 3 sono riportati i confronti con la percentuale di compatibilità.

k	$D_{k\lambda}$ [rad/ m]	$\sigma_{D_{k\lambda}}$ [rad/m]	$D_{k,d}$ [rad/m]	$\sigma_{D_{k,d}}$ [rad/m]	compatibilità
1	3,2E+05	6E+04	3,012E+05	7E+02	59%
2	6,2E+05	8E+04	6,363E+05	8E+02	56%
3	9E+05	1E+05	1,017E+06	1E+03	83%

Table 3: Compatibilità delle misure del potere di dispersione del reticolo

6 Appendice

θ_k °	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	k
10,06	0,17	0,02	1
20,54	0,35	0,03	2
30,93	0,51	0,04	3
45,28	0,71	0,07	4
63,68	0,9	0,1	5

Table 4: Posizioni angolari λ_1 rispetto agli ordini k

k	d [m]	σ_d [m]	N	σ_N
1	3,372E-06	8E-09	7E+03	3E+02
2	3,357E-06	4E-09	7E+03	3E+02
3	3,438E-06	4E-09	7E+03	3E+02
4	3,316E-06	5E-09	8E+03	3E+02
5	3,286E-06	8E-09	8E+03	3E+02

Table 5: Passo del reticolo d e numero di fenditure N

k	D [rad/m]	σ_D [rad/m]	R	σ_R
1	3,012E+05	7E+02	7,4E+03	3E+02
2	6,363E+05	8E+02	1,49E+04	6E+02
3	1,017E+06	1E+03	2,2E+04	1E+03
4	1,714E+06	4E+03	3,0E+04	1E+03
5	3,43E+06	2E+04	3,8E+04	2E+03

Table 6: Potere dispersivo e risolutivo del reticolo per ogni ordine

k	θ_k [°]	σ_{θ_k} [°]	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	6,89	0,02	0,12	0,02	4,04E-07	1E-09
2	13,89	0,02	0,24	0,02	4,044E-07	8E-10
3	21,14	0,03	0,36	0,03	4,050E-07	6E-10
1	-6,92	0,02	0,12	0,02	4,06E-07	1E-09
2	-13,84	0,02	0,24	0,02	4,029E-07	8E-10
3	-21,04	0,03	0,36	0,03	4,031E-07	6E-10

Table 7: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del viola interno

k	θ_k [°]	σ_{θ_k} [°]	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	6,94	0,02	0,12	0,02	4,07E-07	1E-09
2	13,99	0,02	0,24	0,02	4,073E-07	8E-10
3	21,34	0,03	0,36	0,03	4,087E-07	6E-10
1	-6,99	0,02	0,12	0,02	4,10E-07	1E-09
2	-13,92	0,02	0,24	0,02	4,052E-07	8E-10
3	-21,14	0,03	0,36	0,03	4,049E-07	6E-10

Table 8: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del viola esterno

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	7,41	0,02	0,13	0,02	4,34E-07	1E-09
2	15,03	0,02	0,26	0,02	4,367E-07	8E-10
3	22,94	0,03	0,39	0,03	4,377E-07	6E-10
1	-7,42	0,02	0,13	0,02	4,35E-07	1E-09
2	-14,89	0,02	0,26	0,02	4,328E-07	8E-10
3	-22,62	0,03	0,38	0,03	4,319E-07	6E-10

Table 9: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del blu

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	8,38	0,02	0,15	0,02	4,91E-07	1E-09
2	17,06	0,03	0,29	0,02	4,941E-07	8E-10
3	26,11	0,03	0,44	0,03	4,942E-07	7E-10
1	-8,39	0,02	0,15	0,02	4,91E-07	1E-09
2	-16,89	0,03	0,29	0,02	4,893E-07	8E-10
3	-25,67	0,03	0,43	0,03	4,864E-07	7E-10

Table 10: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del verde acqua interno

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	8,51	0,02	0,15	0,02	4,99E-07	1E-09
2	17,23	0,03	0,30	0,02	4,988E-07	8E-10
3	26,43	0,03	0,45	0,03	4,997E-07	7E-10
1	-8,47	0,02	0,15	0,02	4,96E-07	1E-09
2	-17,17	0,03	0,30	0,02	4,973E-07	8E-10
3	-26,01	0,03	0,44	0,03	4,923E-07	7E-10

Table 11: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del verde acqua esterno

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	9,34	0,02	0,16	0,02	5,47E-07	1E-09
2	18,99	0,03	0,33	0,03	5,482E-07	8E-10
3	29,39	0,04	0,49	0,03	5,511E-07	8E-10
1	-9,32	0,02	0,16	0,02	5,46E-07	1E-09
2	-18,82	0,03	0,32	0,03	5,434E-07	8E-10
3	-28,72	0,04	0,48	0,03	5,396E-07	8E-10

Table 12: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del verde

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	9,86	0,02	0,17	0,02	5,77E-07	1E-09
2	20,09	0,03	0,34	0,03	5,787E-07	9E-10
3	31,23	0,04	0,52	0,04	5,821E-07	8E-10
1	-9,77	0,02	0,17	0,02	5,72E-07	1E-09
2	-19,82	0,03	0,34	0,03	5,711E-07	9E-10
3	-30,49	0,04	0,51	0,04	5,697E-07	8E-10

Table 13: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del giallo interno

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	9,91	0,02	0,17	0,02	5,80E-07	1E-09
2	20,24	0,03	0,35	0,03	5,828E-07	9E-10
3	31,38	0,04	0,52	0,04	5,846E-07	8E-10
1	-9,82	0,02	0,17	0,02	5,75E-07	1E-09
2	-19,92	0,03	0,34	0,03	5,739E-07	9E-10
3	-30,64	0,04	0,51	0,04	5,722E-07	8E-10

Table 14: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del giallo esterno

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
1	10,68	0,02	0,19	0,02	6,24E-07	1E-09
1	-10,41	0,02	0,18	0,02	6,08E-07	1E-09

Table 15: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del rosso interno

k	$\theta_k [^\circ]$	$\sigma_{\theta_k} [^\circ]$	$\sin(\theta_k)$	$\sigma_{\sin(\theta_k)}$	λ_k [m]	σ_{λ_k} [m]
2	-21,51	0,03	0,37	0,03	6,174E-07	9E-10
1	-10,62	0,02	0,18	0,02	6,21E-07	1E-09

Table 16: Dati raccolti per la lunghezza d'onda del rosso esterno

$\Delta\theta$ rad	$\sigma_{\Delta\theta}$ rad	$\Delta\lambda$ [m]	$\sigma_{\Delta\lambda}$ [m]	D [rad/ m]	σ_D [rad/ m]
0,001	0,001	2,8E-09	6E-10	3E+05	2E+05
0,001	0,001	2,8E-09	6E-10	4E+05	2E+05
0,002	0,001	6,0E-09	7E-10	4E+05	1E+05
0,001	0,001	6,0E-09	7E-10	2E+05	1E+05
0,001	0,001	3,0E-09	8E-10	3E+05	2E+05
0,001	0,001	3,0E-09	8E-10	3E+05	2E+05

Table 17: Misure legate al potere risolutivo per il primo ordine

$\Delta\theta$ [rad]	$\sigma_{\Delta\theta}$ [rad]	$\Delta\lambda$ [m]	$\sigma_{\Delta\lambda}$ [m]	D [rad/ m]	σ_D [rad/ m]
0,002	0,001	2,8E-09	6E-10	6E+05	3E+05
0,001	0,001	2,8E-09	6E-10	5E+05	2E+05
0,003	0,001	6,0E-09	7E-10	5E+05	1E+05
0,005	0,001	6,0E-09	7E-10	8E+05	1E+05
0,003	0,001	3,0E-09	8E-10	9E+05	3E+05
0,002	0,001	3,0E-09	8E-10	6E+05	3E+05

Table 18: Misure legate al potere risolutivo per il secondo ordine

$\Delta\theta$ [rad]	$\sigma_{\Delta\theta}$ [rad]	$\Delta\lambda$ [m]	$\sigma_{\Delta\lambda}$ [m]	D [rad/ m]	σ_D [rad/ m]
0,003	0,001	2,8E-09	6E-10	1E+06	4E+05
0,002	0,001	2,8E-09	6E-10	6E+05	3E+05
0,006	0,001	6,0E-09	7E-10	9E+05	2E+05
0,006	0,001	6,0E-09	7E-10	1E+06	2E+05
0,003	0,001	3,0E-09	8E-10	9E+05	4E+05
0,003	0,001	3,0E-09	8E-10	9E+05	4E+05

Table 19: Misure legate al potere risolutivo per il terzo ordine