Projet MADMC 2025–2026

Génération de l'ensemble des points non dominés au sens de Lorenz pour le problème de sac à dos multi-objectifs

1. Introduction

On s'intéresse dans ce projet à la génération de l'ensemble des points non dominés au sens de Lorenz du problème de sac à dos multi-objectifs (objectifs à **maximiser**) :

Données :

- n objets,
- une valeur W (capacité du sac à dos),
- chaque objet i a un poids w_i,
- chaque objet i est valué par un vecteur v^i à p dimensions $(v_1^i, \ldots, v_p^i)$.

Solutions réalisables : tout sous-ensemble d'objets, caractérisé par un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ($x_i = 1$ si l'objet i est sélectionné, 0 sinon), tel que $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$. L'évaluation d'une solution x est donnée par $(\sum_{i=1}^n v_1^i x_i, \ldots, \sum_{i=1}^n v_p^i x_i)$, qui peut être représentée par un point dans l'espace des objectifs.

But : déterminer l'ensemble des points non dominés au sens de Lorenz.

La dominance de Lorenz entre deux points se teste à partir de leurs vecteurs de Lorenz, qui sont définis de la manière suivante :

Définition 1 (vecteur de Lorenz) *Le vecteur de Lorenz d'un point $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur $L(y) \in \mathbb{R}^p$ défini par $L(y) = (y_{(1)}, y_{(1)} + y_{(2)}, \ldots, y_{(1)} + y_{(2)} + \ldots + y_{(p)})$, où $(y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(p)})$ représente les composantes de y triées en ordre croissant (cas de la maximisation des objectifs), i.e., $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \cdots \leq y_{(p)}$.*

La relation de dominance de Lorenz s'établit ensuite grâce à la dominance de Pareto entre vecteurs de Lorenz :

Définition 2 (dominance de Lorenz) *On dit qu'un point $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p$* Lorenz-domine *un point $v = (v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ si $L(u)$ Pareto-domine $L(v)$.*

Les points non-dominés au sens de Lorenz sont un sous-ensemble des points non-dominés au sens de Pareto.

Le projet consiste à développer deux procédures de résolution du problème, une méthode indirecte et une méthode directe, et à comparer leur efficacité.

2. Une première procédure de résolution (méthode indirecte)

Dans cette partie, vous allez mettre en œuvre une procédure en deux phases pour déterminer l'ensemble des points Lorenz non dominés : (1) déterminer l'ensemble des points Pareto non dominés, (2) filtrer cet ensemble de points afin de ne garder que les points Lorenz non dominés.

Pour déterminer l'ensemble des points Pareto non dominés, vous utiliserez une procédure de programmation dynamique. L'approche utilisée sera basée sur une généralisation au problème de sac à dos multi-objectifs de l'approche vue en cours pour le problème de sélection multi-objectifs (pour plus de détails, voir [2], page 20, où chaque cellule (i, j) de la table de programmation dynamique contiendra l'image des sous-ensembles non dominés de poids i dans $\{1, \ldots, j\}$ pour $i \in \{0, \ldots, W\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$).

Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, pourquoi l'approche de programmation dynamique ne peut pas être directement utilisée pour la génération de l'ensemble des points Lorenz non dominés.

3. Une deuxième procédure de résolution (méthode directe)

La deuxième procédure de résolution est une procédure où l'on cherche directement à générer l'ensemble des points Lorenz non dominés.

Un premier point Lorenz non dominé peut être obtenu en optimisant une fonction d'agrégation OWA avec des poids strictement positifs et strictement décroissants. L'opérateur OWA étant non linéaire, une linéarisation de la fonction objectif du problème de sac à dos multi-objectifs est nécessaire. Comme vous le verrez au cours, le programme linéaire ci-dessous permet de déterminer une solution optimale au sens d'un OWA, défini par $\omega_1 y_{(1)} + \ldots \omega_p y_{(p)}$, où $y_{(1)} \leq \ldots \leq y_{(p)}$ sont les composantes d'un point y triées en ordre croissant et $\omega_1 > \ldots > \omega_p > 0$ les poids de l'OWA (un tel jeu de poids pour l'OWA priviligie les vecteurs de performances équilibrés) [1].

$$P_1 \left\{ \begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (k r_k - \sum_{i=1}^{p} b_i^k) & \\ s.t. & & \\ & r_k - b_i^k \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_k^j x_j & i, k = 1, \ldots, p \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W & \\ & b_i^k \geq 0 & i, k = 1, \ldots, p \\ & r_k \in \mathbb{R} & k = 1, \ldots, p \end{array} \right.$$

où $\lambda = (\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \ldots, \omega_{p-1} - \omega_p, \omega_p)$.

On peut ensuite générer d'autres points Lorenz non dominés, en résolvant le même modèle, mais en stipulant que le nouveau point généré doit améliorer sur au moins une des composantes du vecteur de Lorenz chaque vecteur des points non dominés au sens de Lorenz trouvés préalablement. Cette approche a été notamment utilisée dans le cadre de la dominance de Pareto (voir le papier [3]).

Le modèle à résoudre pour cela est le suivant :

1. Attention, on a bien $\omega_i \neq w_i$, w_i correspondant au poids d'un objet i.

$$
P_L \begin{cases}
\max & \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (k r_k - \sum_{i=1}^{p} b_i^k) & \\
s.t. & & \\
& r_k - b_i^k \leq \sum_{j=1}^{n} v_k^j x_j & i,k = 1,\dots,p \\
& k r_k - \sum_{i=1}^{p} b_i^k \geq (L_k^s + 1) z_k^s & k = 1,\dots,p \\
& & s = 1,\dots,l \\
& \sum_{k=1}^{p} z_k^s \geq 1 & s = 1,\dots,l \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W & \\
& b_i^k \geq 0 & i,k = 1,\dots,p \\
& z_k^s \in \{0,1\} & k = 1,\dots,p \\
& & s = 1,\dots,l \\
& r_k \in \mathbb{R} & k = 1,\dots,p
\end{cases}
$$

Dans ce modèle, on note $L^1, \dots, L^s, \dots, L^l$ les vecteurs de Lorenz associés aux points Lorenz non-dominés générés jusqu'à présent (L_k^s représente donc la $k$ème composante de L^s). Les variables binaires $z_1^s, \dots, z_p^s$ permettent d'imposer que le nouveau point généré soit meilleur que chaque point trouvé précédemment pour au moins une composante du vecteur de Lorenz. Il y a deux issues possibles à la résolution de ce modèle :

— soit il retourne un nouveau point Lorenz non dominé,

— soit le modèle est infaisable, ce qui indique que tous les vecteurs de Lorenz non dominés ont été générés.

Notez que cette méthode garantit l'obtention de tous les *vecteurs* de Lorenz non dominés (dans l'espace de Lorenz), mais pas de tous les *points* Lorenz non dominés (dans l'espace des objectifs), contrairement à la première procédure de résolution. En effet, on pourrait avoir deux points différents qui possèdent le même vecteur de Lorenz. Par exemple les points (12,13,10) et (12,10,13) ont le même le vecteur de Lorenz, égal à (10,22,35). Avec cette méthode, seul un des deux points (12,13,10) ou (12,10,13) sera retourné.

Bonus : Expliquer quelle adaptation est nécessaire à la méthode afin de garantir l'obtention de tous les points Lorenz non dominés. Vous pouvez pour cela vous baser sur le rapport [1], Section 3.2.

4. Données et comparaison des deux méthodes

Vous trouverez dans la section Projet du site Moodle un fichier de données nommé "2KP200-TA-0.dat". Ce fichier contient les données d'une instance à 200 objets, où chaque objet est évalué selon 6 objectifs. Pour tester vos méthodes, vous pourrez utiliser des sous-ensembles de ces données, par exemple prendre uniquement les 20 premiers objets et les 3 trois premiers objectifs de façon à avoir un problème à $n=20$ objets et $p=3$ critères. La capacité W du sac à dos sera toujours prise égale à $\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{2} \rfloor$.

Pour chaque instance utilisée, vous comparerez expérimentalement la première et la seconde procédure de résolution en terme de temps de calcul. Vous indiquerez également le nombre de points Pareto non dominés (obtenu grâce à la première méthode) et le nombre de points Lorenz non dominés (qui peut être légèrement différent entre les deux méthodes si vous n'avez pas utilisé l'adaptation de la seconde méthode proposée en bonus). Pour la seconde méthode, vous étudierez également l'influence du choix du jeu de poids ω de l'OWA sur les temps de calcul de la méthode (n'importe quel jeu de poids ω de taille p strictement décroissant et avec des composantes strictement positives peut être utilisé, mais peut-être qu'il existe un jeu de poids particulier permettant de réduire les temps de calcul).

5. Organisation et dates

Le travail est à effectuer en binôme. Le choix du langage de programmation est libre. Toutes les possibilités de visualisation sont les bienvenues (n'hésitez pas à représenter les points obtenus pour les instances à deux objectifs).

Les projets doivent être soumis le **dimanche 25 janvier 2026** au plus tard à partir du lien de soumission du site Moodle. Votre livraison sera constituée d'une archive `zip` qui comportera les sources du programme, un fichier README détaillant comment compiler et exécuter le programme, et un rapport (un fichier au format `pdf`) comportant une description synthétique des procédures implantées et des résultats des différents tests numériques menés. Le plan du rapport suivra le plan du sujet.

Une **soutenance** avec transparents est prévue lors de la séance du **27 janvier**.

Références

[1] Mohammed Bederina, Djamal Chaabane, and Thibaut Lust. Optimizing a linear function over the lorenz-efficient set of multi-objective combinatorial optimization problems. Technical report, 2025.

[2] Kathrin Klamroth and Margaret M. Wiecek. Dynamic programming approaches to the multiple criteria knapsack problem. *Naval Research Logistics*, 47 :57–76, 2000.

[3] John Sylva and Alejandro Crema. A method for finding the set of non-dominated vectors for multiple objective integer linear programs. *European Journal of Operational Research*, 158(1) :46–55, 2004.