

实验四：单自由度系统模型参数的测试

1. 实验目的

- 1、学习建立单自由度系统模型；
- 2、学会用共振法测定单自由度系统模型的固有频率 f_0 、刚度 k ；
- 3、学习简支梁等效质量的计算与测试。

2. 实验仪器及安装示意图

实验仪器：INV1601B 型振动教学实验仪、INV1601T 型振动教学实验台、加速度传感器、接触式激振器、配重块。软件：INV1601 型 DASP 软件。

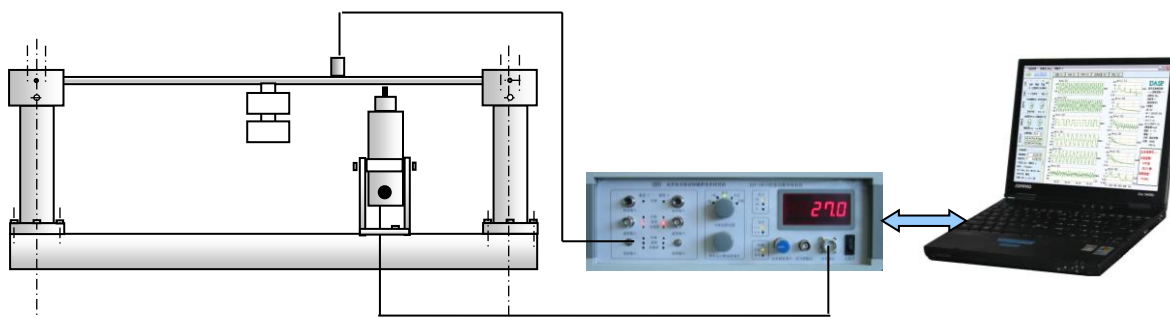


图 1 仪器连接图

3. 实验原理

单自由度线性系统是最简单的振动系统，又是最基本的振动系统，这种系统在振动分析中的重要性，一方面在于很多实际问题都可简化为单自由度线性系统来处理，从而可直接利用对这种系统的研究成果来解决问题；另一方面在于单自由度系统具有一般振动系统的一些基本特性，实际上，它是多自由度系统、连续系统、甚至非线性系统进行振动分析的基础。

任何一个实际的振动系统都是无限复杂的，为了能对之进行分析，一定要加以简化，并在简化的基础上建立合适的力学模型。在简化的模型中，振动体的位置或形状只需要用一个独立的坐标来描述的系统称为单自由度系统。

振动系统的力学模型是由三种理想化元件组成的，它们是：质量块、阻尼器和弹簧。

1、通过静变形法测量单自由度系统的固有频率

INV1601T 型实验台上的简支梁是一无限多自由度的梁，梁中部的电机及配重看作质量块，使系统简化为单自由度系

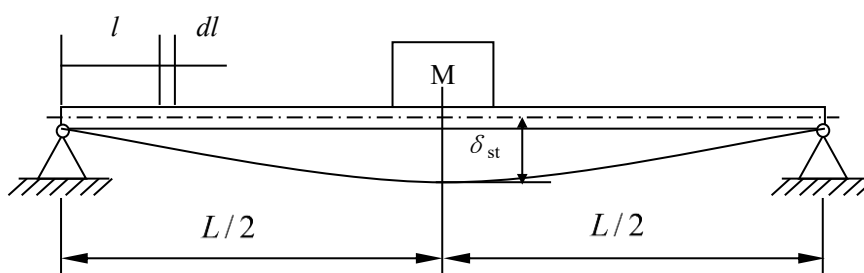


图 2 单自由度系统模型

统。梁相当于一根弹簧，则系统可简化为一个单自由度无阻尼系统，力学模型如图所示：

在质量块的重力 mg 作用下，弹簧受到拉伸或压缩，其静变形 δ_{st} 与重力 mg 间的关系为

$$k\delta_{st} = mg \quad \text{则 } k = \frac{mg}{\delta_{st}}$$

根据固有频率的定义， $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，将上式代入则有 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$

由材料力学知梁中点的静变形为 $\delta_{st} = mgL^3 / 48EJ$

则系统的固有频率为 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EJ}{mL^3}}$

简支梁中点处的刚度为 $k = \frac{48EJ}{L^3}$

2、简支梁等效质量的计算

对于中部附有集中质量块 m' 的简支梁系统，若梁的均布质量为 m_0 ，线密度为 $\rho = m_0 / L$ ，假定梁在自由振动时的动挠度曲线与简支梁中间有集中载荷 mg 作用下的静挠度曲线一样。由材料力学在距离端点为 l 处的梁截面的静挠度曲线为：

$$x_l = \delta_{st} \frac{3L^2l - 4l^3}{L^3}$$

式中， δ_{st} 为梁中点的静挠度，其值为 $\delta_{st} = mgL^3 / 48EJ$

动挠度曲线方程可以认为与上式相似：

$$x_l(t) = x(t) \frac{3L^2l - 4l^3}{L^3}$$

其中， $x(t)$ 为 midpoint 处的振动位移，振动为简谐振动即有：

$$x_{\max} = X, \quad \dot{x}_{\max} = X\omega_n$$

对于距端点 l 处长度为 dl 的微段梁，质量为 ρdl ，由曲线方程可知其速度为

$\dot{x}_l(t) = \dot{x}(t) \frac{3L^2l - 4l^3}{L^3}$ ，所以整段梁的动能为：

$$2 \int \frac{1}{2} \rho \dot{x}_l^2 dl = \frac{\rho \dot{x}^2}{L^6} \int_0^{L/2} (3L^2l - 4l^3)^2 dl = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} \rho L \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} m_0 \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

均布质量梁的质量 m_0 折合到梁中部的等效集中质量 $m = \frac{17}{35} m_0 \approx \frac{1}{2} m_0$

根据所测得频率，可计算出等效刚度 $k = 4\pi^2 f^2 m$

4. 实验步骤

- 1、参考示意图连接好仪器和传感器（安装注意事项可以参考前面实验）。
- 2、开机进入 INV1601 型 DASP 软件的主界面，选择单通道按钮。进入单通道示波状态进行波形和频谱同时示波。
- 3、调节 INV1601B 型实验仪的频率和功率放大器旋钮，使梁产生共振，用加速度传感器测量简支梁的振动。
- 4、在采样参数设置菜单下设置采样频率为 2000Hz，程控倍数 1 倍。
- 5、选择“虚拟仪器库”中的“高精度频率计”，并读取频率值。
- 6、更换配重块数量，分别测量没有配重块、加一块配重（1kg）、加两块配重（2 kg）时的频率。

5. 实验结果和分析

1、锤击法测量

配重情况	不加配重	加一块配重（1kg）
测试的频率（Hz）	$f_0=44.5$	$f_1=31.5$

2、简支梁等效质量 m （梁的均布质量折合到梁的中部的质量）和等效刚度 k 的计算

$$\begin{cases} f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m+1}} \end{cases} \text{把测得的数据代入方程联立:}$$

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m}}$$

$$\left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{m}$$

$$m = \frac{1}{\left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\left(\frac{44.5}{31.5}\right)^2 - 1} = 1.004 \text{ kg}$$

$$k = (2\pi f_0 \sqrt{m})^2 = (2\pi \times 44.5 \times \sqrt{1.004})^2 = 78490 \text{ N/m}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = 1.004 \\ k = 78490 \end{cases} \begin{matrix} kg \\ N/m \end{matrix}$$

3、理论计算值与测试值

	梁固有频率 f_0 （Hz）	梁的等刚度 k （N/m）
理论计算值	41.5	68390
实测值	44.5	78490

理论值计算:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EJ}{mL^3}} = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{48 \times 2.1 \times 10^{11} \times \frac{1}{12} \times 0.05 \times 0.008^3}{1.004 \times 0.68^3}} = 41.5 \text{ Hz}$$

$$K = \frac{48EJ}{L^3} = \frac{48 \times 2.1 \times 10^{11} \times \frac{1}{12} \times 0.05 \times 0.008^3}{0.68^3} = 68390 \text{ N/m}$$

实验测得梁固有频率与理论计算值存在较大偏差，

$$Error = \frac{44.5 - 41.5}{41.5} \times 100\% = 7.23\%$$

分析原因可能是在实验进行时存在周围环境的干扰（邻桌的振动实验），进而导致所测固有频率与理论计算存在误差。

对刚度的计算： $k = 4\pi^2 f^2 m$ ，由于固有频率与理论值偏差较大，进行平方后，所得偏差进一步扩大，所以所得实验刚度值与理论值具有较大偏差。

$$Error = \frac{78490 - 68390}{68390} \times 100\% = 14.77\%$$