

实验13 梁的正应力综合实验

姓名： 学号： 同组人：

1. 实验目的

- 1) 熟悉电阻应变测量技术的基本原理和方法；
- 2) 测量纯弯曲梁、T型梁和工字梁截面上的应变，分析应变分布规律；
- 3) 验证梁纯弯曲理论；

2. 实验装置

- 1) 材料力学多功能实验台；
- 2) 接有应变片的实验件（纯弯曲梁、T型梁和工字梁）；
- 3) 静态应变测试仪；
- 4) 游标卡尺和钢尺。

3. 实验原理与方法

1) 纯弯曲梁正应力实验

纯弯曲实验件材料为 45#钢调质处理，弹性模量 $E=210\text{GPa}$ ，屈服强度 355MPa 。其横截面为矩形，梁的侧面沿与轴线平行的不同高度上粘贴单向应变片，如图所示。通过材料力学多功能试验装置等量逐级加载，载荷大小由数字载荷显示仪显示。

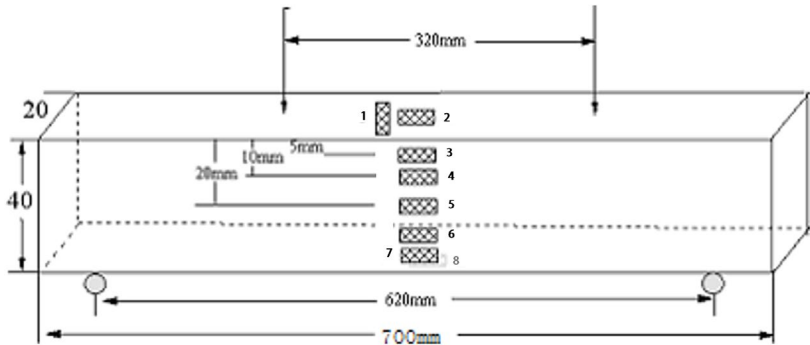


图1 纯弯曲梁正应力实验件示意图
(实际值见下表)

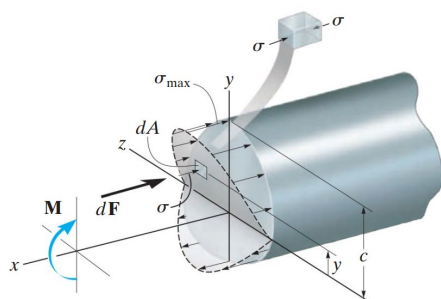
表1 应变片位置及截面尺寸

应变片至中性层距离 (mm)		梁的尺寸和有关参数	
$Y_1、Y_2$	20	宽度 b	20mm
Y_3	15	高度 h	40mm
Y_4	10	跨度 L	600mm
Y_5	0	载荷距离 a	192mm
Y_6	-10	弹性模量 E	210GPa
Y_7	-15	惯性矩 I_z	$1.0667 \times 10^{-7}m^2$
Y_8	-20		

在载荷 P 的作用下梁发生弯曲变形，截面上所承受的弯矩均为：

$$M = \frac{1}{2}aP$$

横截面上的正应力理论推导：



Bending stress variation
图2 (From Pearson)

$$\begin{aligned} M &= \int_A y dF = \int_A y \sigma dA = \int_A y \left(\frac{y}{c} \sigma_{\max} \right) dA \\ M &= \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma_{\max}}{c} I_z \\ \frac{\sigma_{\max}}{c} &= \frac{-\sigma}{y} \\ \sigma &= -\frac{My}{I_z} \end{aligned}$$

将梁上的各应变片以 1 / 4 桥路接入应变仪的通道中，公用一个温度补偿片。当梁在载荷 P 的作用下梁发生弯曲变形时，工作片的电阻随着梁的变形而发生变化，通过电阻应变仪可以分别测量出各对应位置的应变。根据胡克定律可计算出相应的应力值。

$$\sigma_e = E \cdot \varepsilon_e$$

实验最大加载设定为 **4000N**，以试验件屈服强度为限定条件，计算该情况下的安全系数（5分）：

理论值：

$$F.S = \frac{\sigma_{fail}}{\sigma_{allow}} = \frac{\sigma_{fail}}{\frac{My}{I_z}} = \frac{\sigma_{fail}}{\frac{1}{2}Pay} = \frac{355 \times 10^6}{\frac{1}{2} \times 4000 \times 0.192 \times 0.02} = 4.93$$

实验值：

取8号测点在4000N下的应变值 (332×10^{-6})

$$F.S = \frac{\sigma_{fail}}{\sigma_{allow}} = \frac{\sigma_{fail}}{E\varepsilon} = \frac{355 \times 10^6}{210 \times 10^9 \times 332 \times 10^{-6}} = 5.09$$

2) T型梁四点弯曲实验

T型梁四点弯曲实验件材料为 45#钢调质处理，弹性模量 $E=210\text{GPa}$ ，屈服强度 355MPa 。其横截面为T型，梁的侧面沿与轴线平行的不同高度上粘贴单向应变片，如图所示。通过材料力学多功能试验装置等量逐级加载，载荷大小由数字载荷显示仪显示。

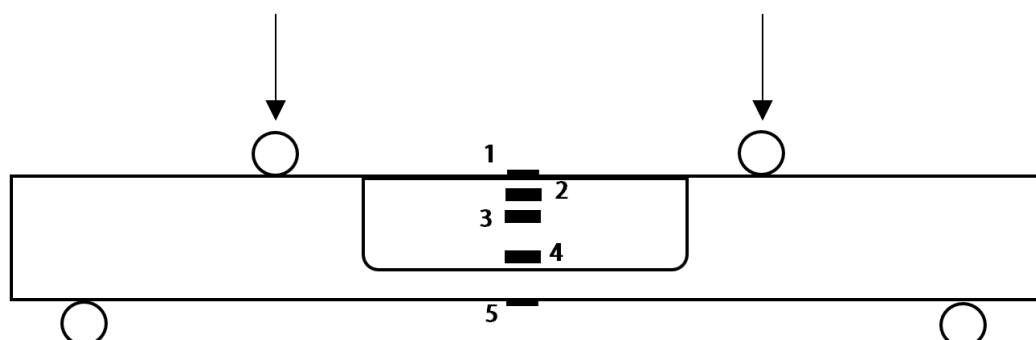


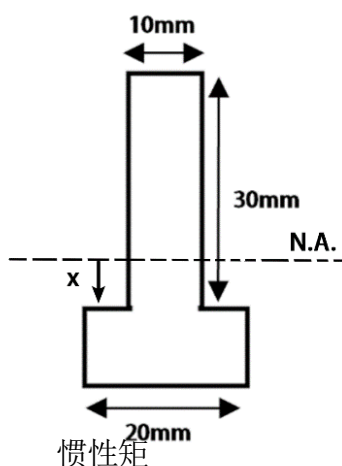
图3 T型梁四点弯曲实验件示意图

表2 T型梁实验应变片位置及截面尺寸

应变片至底面距离 (mm)		梁的尺寸和有关参数	
Y_1	40	宽度 b	20mm
Y_2	33	高度 h	40mm
Y_3	27	跨度 L	600mm
Y_4	17	载荷距离 a	180mm
Y_5	0	弹性模量 E	210GPa
		T型处宽度	10mm
		T型处高度	30mm

在载荷 P 的作用下梁发生弯曲变形，截面上所承受的弯矩均为：

$$M = \frac{1}{2}aP$$



中性面理论位置计算：

$$x + 10 = \frac{10 \times 30 \times 25 + 20 \times 10 \times 5}{10 \times 30 + 20 \times 10}$$

$$\Rightarrow x = 7\text{mm}$$

$$I_z = \left[\frac{1}{12} \times 10 \times (30 - 7)^3 + 10 \times (30 - 7) \times \left(\frac{30 - 7}{2} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} \times 10 \times 7^3 + 10 \times 7 \times \left(\frac{7}{2} \right)^2 \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12} \times 20 \times 10^3 + 20 \times 10 \times \left(7 + \frac{10}{2} \right)^2 \right] = 72167\text{mm}^4 = 7.2167 \times 10^{-8}\text{m}^2$$

3) 工字梁四点弯曲实验

工字梁四点弯曲实验件材料为 45#钢调质处理，弹性模量 $E=210\text{GPa}$ ，屈服强度 355MPa 。其横截面为工型，梁的侧面沿与轴线平行的不同高度上粘贴单向应变片，如图所示。通过材料力学多功能试验装置等量逐级加载，载荷大小由数字载荷显示仪显示。

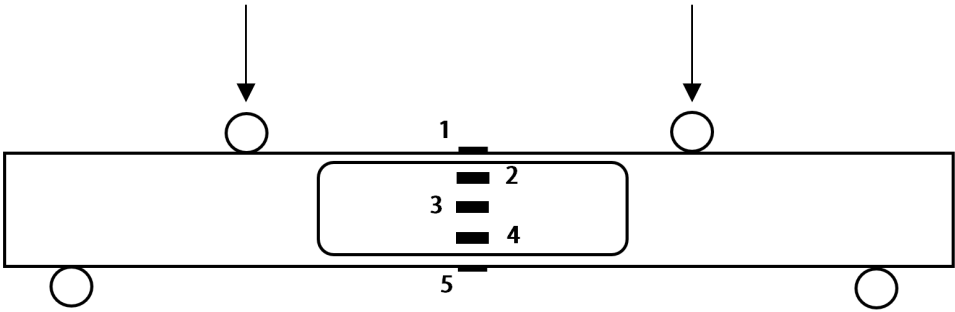


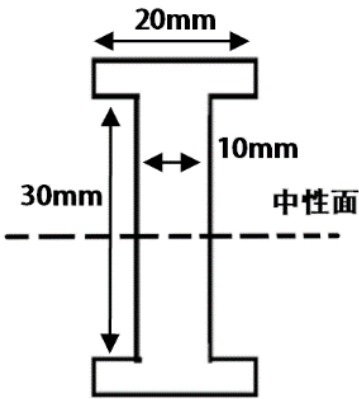
图4 工字梁四点弯曲实验件示意图

表3 工字梁实验应变片位置及截面尺寸

应变片至中性面距离（mm）		梁的尺寸和有关参数	
Y_1	20	宽度 b	20mm
Y_2	7	高度 h	40mm
Y_3	0	跨度 L	600mm
Y_4	7	载荷距离 a	180mm
Y_5	20	弹性模量 E	210GPa
		工型中部宽度	10mm
		工型中部高度	30mm

在载荷 P 的作用下梁发生弯曲变形，截面上所承受的弯矩均为：

$$M = \frac{1}{2}aP$$



惯性矩

$$I_z = \frac{1}{12} \times 10 \times 30^3 + 2 \times \left(\frac{1}{12} \times 20 \times 5^3 + 20 \times 5 \times 17.5^2 \right) = 84167\text{mm}^4 = 8.4167 \times 10^{-8}\text{m}^4$$

4. 实验步骤

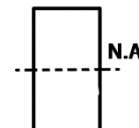
- 1) 测量梁的截面尺寸、应变片位置参数及其它有关尺寸，见表1、2、3。预热应变仪和载荷显示仪，计算中性轴位置及截面的惯性矩 I_z ，计算结果如下：

① 纯弯曲梁实验

中性轴位置如右图所示，轴对称位置

惯性矩：

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \times 0.02 \times 0.04^3 = 1.0667 \times 10^{-7} m^2$$

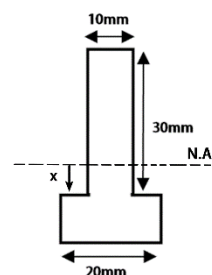


② T型梁四点弯曲实验

中性轴位置如右图所示，其中 $x = 7mm$

惯性矩：

$$I_z = 7.2167 \times 10^{-8} m^2 \quad (\text{计算过程见上页})$$



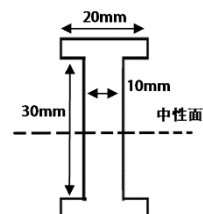
应变片至中性面距离 (mm)	
Y ₁	23
Y ₂	16
Y ₃	10
Y ₄	0
Y ₅	17

③ 工字梁四点弯曲实验

中性轴位置如右图所示，轴对称位置

惯性矩：

$$I_z = 8.4167 \times 10^{-8} m^4 \quad (\text{计算过程见上页})$$



- 2) 检查各种仪器是否连接好，按顺序将各个应变片按 1/4 桥接法接入应变仪的所选通道上，然后将应变仪的所选通道电桥调平衡。
- 3) 数值清零后，摇动多功能试验装置的加载机构。
 对于纯弯曲梁实验，从500N开始，采用等量逐级加载（可取 $\Delta P = 500N$ ），最大加载 4000N；
 对于T型和工字梁，从250N开始，采用等量逐级加载（可取 $\Delta P = 250N$ ），最大加载 2000N；
 每加一级载荷，分别读出各相应电阻应变片的应变值。加载应保持缓慢、均匀、平稳。

4) 记录实验数据记录，见下表。

表4 纯弯曲梁应变测量记录表

$\varepsilon_e(\mu)$ \ P(N)	504	998	1512	2006	2507	3017	3498	4001
1-1	11	25	36	49	60	72	83	95
2-2	-32	-70	-111	-151	-193	-235	-273	-314
3-3	-26	-56	-86	-116	-147	-177	-205	-236
4-4	-25	-47	-68	-89	-110	-130	-151	-172
5-5	0	0	1	1	1	2	2	3
6-6	21	43	64	84	105	126	147	167
7-7	32	65	97	127	159	191	222	253
8-8	41	84	126	167	208	250	291	332

表5 T型梁应变测量记录表

应变 \ 载荷(N)	-251	-501	-750	-1002	-1253	-1500	-1750	-2003
1	-36	-69	-102	-136	-170	-204	-235	-273
2	-25	-49	-72	-96	-120	-144	-168	-193
3	-17	-31	-47	-62	-77	-93	-108	-125
4	0	0	-1	-1	-2	-3	-5	-6
5	23	48	73	96	123	147	172	198

表6 工字梁应变测量记录表

应变 \ 载荷	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000
1	-26	-54	-83	-110	-139	-163	-193	-220
2	-10	-21	-31	-43	-53	-62	-72	-81
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	9	19	28	37	49	58	69	78
5	23	51	76	106	132	163	185	217

5) 整理仪器，结束实验。

5. 实验数据处理（数据处理图表整理、实验数据选取、参数计算等）

1) 纯弯曲梁正应力实验

根据 $t_{ij} = \frac{M_i y_j}{E I_z} = \frac{a}{2 E I_z} P_i y_j$ ，计算实验测量的不同工况下的理论值（见下表）

表7 纯弯曲梁实验工况下应变理论值

应变 \ 载荷(N)	504	998	1512	2006	2507	3017	3498	4001
2-2	43	86	130	172	215	259	300	343
3-3	32	64	97	129	161	194	225	257
4-4	22	43	65	86	107	129	150	171
5-5	0	0	0	0	0	0	0	0

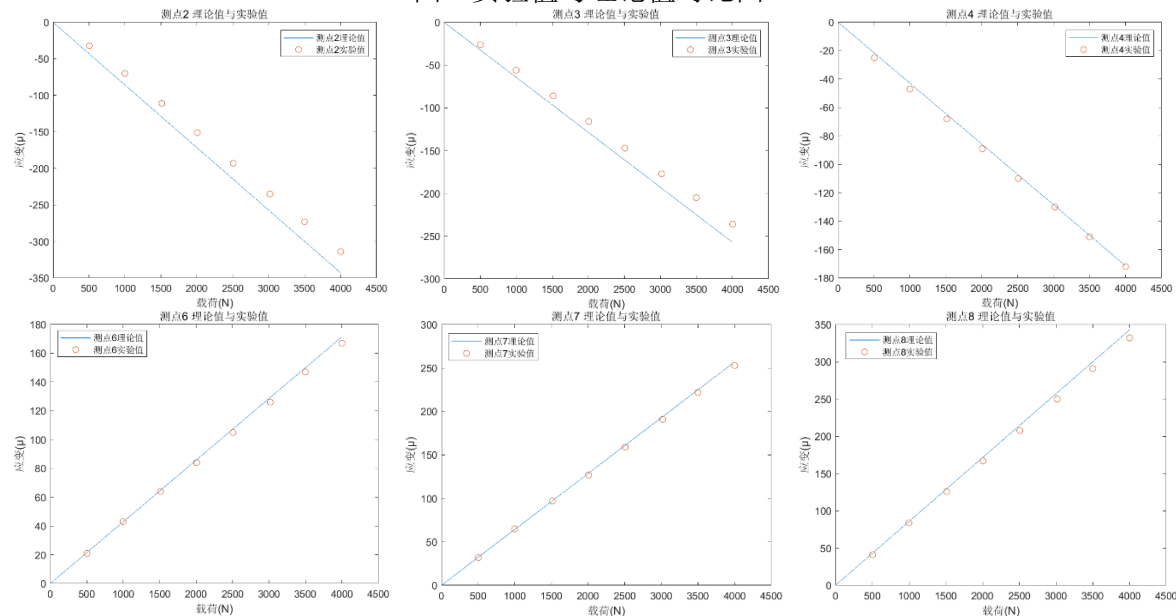
（由于测点1和测点2位置y相同，测点6、7、8与测点2、3、4的位置成对称关系，故只计算2、3、4、5的理论数值，上述值为绝对值。）

表8 实验值与理论值偏差表

$\varepsilon_e(\mu)$ \ P(N)	504	998	1512	2006	2507	3017	3498	4001
2-2	26%	18%	14%	12%	10%	9%	9%	8%
3-3	20%	13%	12%	10%	9%	9%	9%	8%
4-4	16%	10%	5%	4%	2%	1%	1%	0%
5-5								
6-6	3%	-1%	1%	2%	2%	3%	2%	3%
7-7	1%	-1%	0%	2%	1%	2%	1%	2%
8-8	5%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%

平均偏差为4.29%，最大偏差为25.93%（测点2在500N载荷下测量值）

图5 实验值与理论值对比图



实验值与理论值基本吻合，值得注意的是，梁上部分测点（测点2、3）实验值整体偏差比下部分大，后续处理异常数据时需优先考虑剔除。

为验证纯弯曲梁理论模型，使用经典误差分析方法进一步处理实验数据，如下图所示。

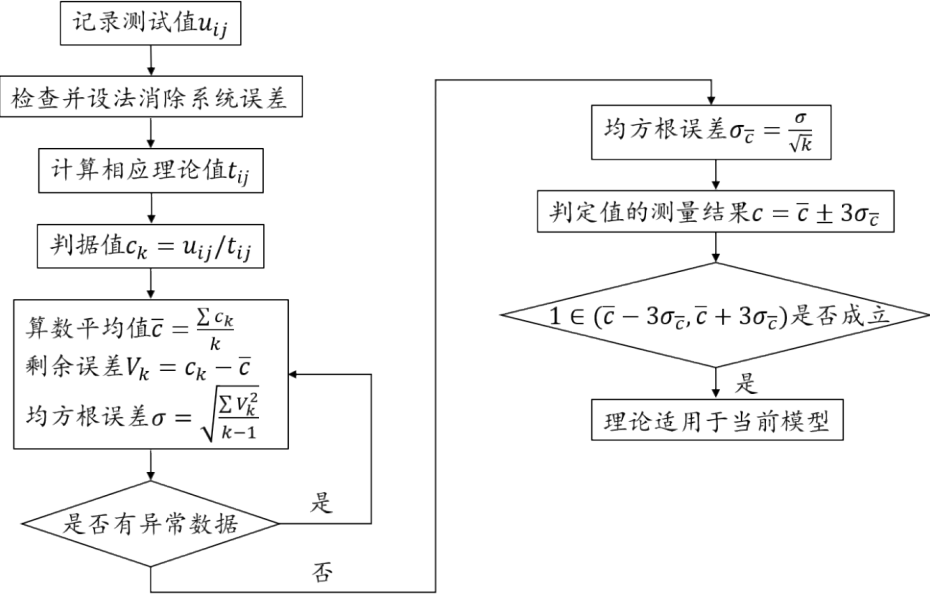


图6 验证性实验经典误差分析方法数据处理流程图

- 1) 检查是否有系统误差，设法消除。其中，梁中性轴处（ $y=0$ ）应变理论值为 0，而由于零漂等系统误差，测量值一般是很小数值，应剔除该列数据；
处理过程中已剔除梁中性轴处测量值。
- 2) 计算测量值 u_{ij} 对应的理论值 t_{ij} 和判据值 c_k ，以及算数平均值 \bar{c} ，剩余误差 V_k 和均方根误差 σ 等；

$$t_{ij} = \frac{M_i y_j}{EI_z} = \frac{a}{2EI_z} P_i y_j, \quad c_k = \frac{t_{ij}}{u_{ij}}$$

表9 理论值计算

载荷(N)	504	998	1512	2006	2507	3017	3498	4001
应变								
2-2	43	86	130	172	215	259	300	343
3-3	32	64	97	129	161	194	225	257
4-4	22	43	65	86	107	129	150	171
5-5	0	0	0	0	0	0	0	0

表10 判据值

判据值	504N	998N	1512N	2006N	2507N	3017N	3498N	4001N
2-2	0.7407	0.8183	0.8565	0.8782	0.8982	0.9087	0.9105	0.9156
3-3	0.8025	0.8729	0.8848	0.8995	0.9121	0.9126	0.9116	0.9175
4-4	1.1574	1.0989	1.0494	1.0352	1.0238	1.0054	1.0072	1.0031
5-5								
6-6	0.9722	1.0053	0.9877	0.9771	0.9773	0.9745	0.9806	0.9739
7-7	0.9877	1.0131	0.9979	0.9848	0.9866	0.9848	0.9872	0.9836
8-8	0.9491	0.9820	0.9722	0.9713	0.9680	0.9667	0.9706	0.9681

- 3) 使用 3S 准则发现异常数据，剔除后重复上一步，直到不存在可疑数据；

$$\bar{c} = 0.9882 \quad \sigma = 0.02182$$

所有数据 $\in (0.9882 - 3 \times 0.02182, 0.9882 + 3 \times 0.02182) = (1.05366, 0.92274)$

- 4) 计算均方根误差 $\sigma_{\bar{c}}$, 得到 c 的测量结果；

$$\sigma_{\bar{c}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = 0.003984, \quad c = \bar{c} \pm 3\sigma_{\bar{c}} = 0.9882 \pm 3 \times 0.003984$$

- 5) 是否满足 $1 \in (\bar{c} - 3\sigma_{\bar{c}}, \bar{c} + 3\sigma_{\bar{c}})$, 从而说明“纯弯曲梁理论”能否适用于实验模型；

$$\bar{c} + 3\sigma_{\bar{c}} = 0.9882 + 3 \times 0.003984 = 1.000152$$

$$\bar{c} - 3\sigma_{\bar{c}} = 0.9882 - 3 \times 0.003984 = 0.976248$$

$\therefore 1 \in (\bar{c} - 3\sigma_{\bar{c}}, \bar{c} + 3\sigma_{\bar{c}})$ “纯弯曲梁理论”能适用于实验模型

2) T型梁四点弯曲实验

根据 $\varepsilon_{ij} = \frac{M_i y_j}{EI_z} = \frac{a}{2EI_z} P_i y_j$ ，计算实验测量的不同工况下的理论值（见下表）

表11 T型梁实验工况下应变理论值

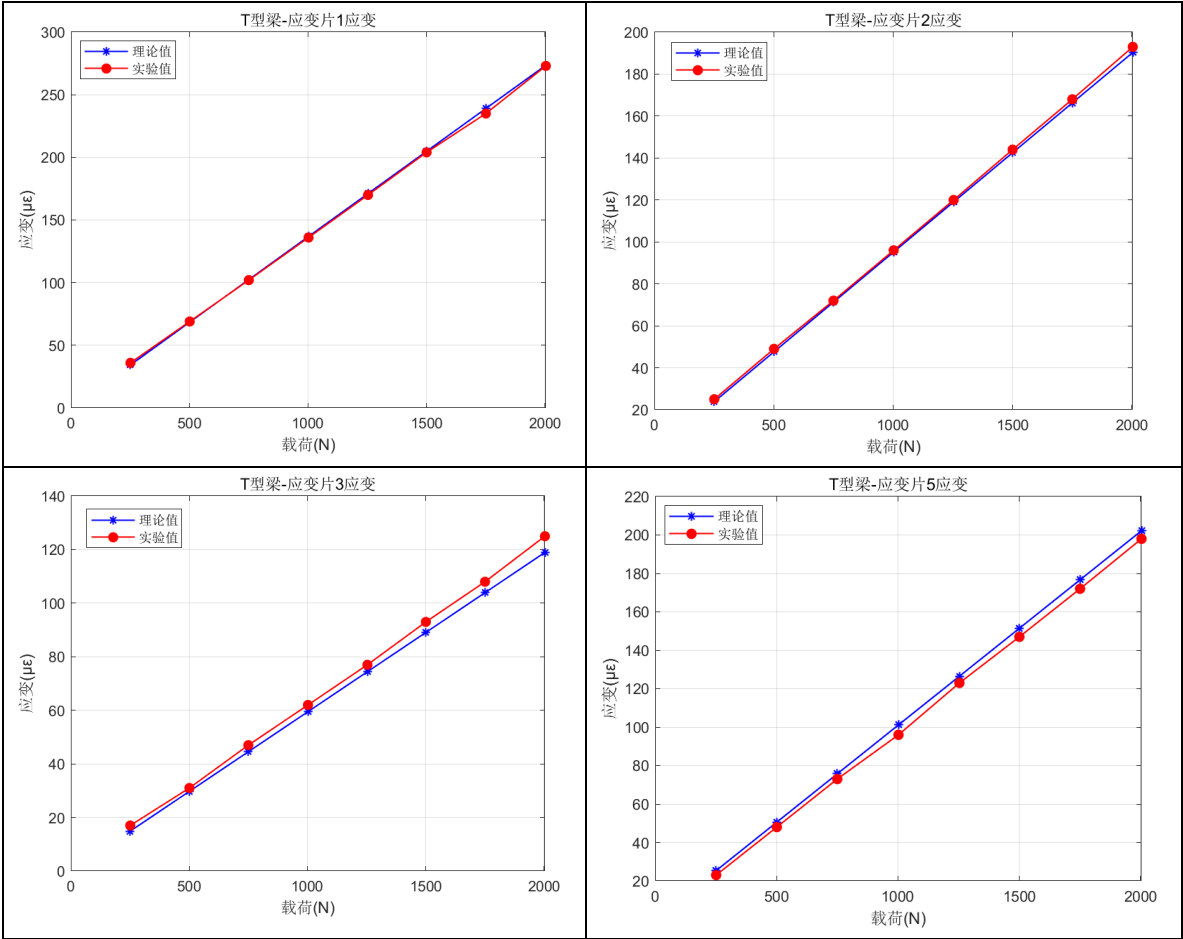
应变 \ 载荷(N)	-251	-501	-750	-1002	-1253	-1500	-1750	-2003
1	34	68	102	137	171	205	239	274
2	24	48	71	95	119	143	166	190
3	15	30	45	60	74	89	104	119
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	25	51	76	101	126	151	177	202

实际实验中，应变片4所测数据依次为0、0、-1、-1、-2、-3、-5、-6，与其他测点的数值相比，可以说明其处于中性面上。下表处理理论值与实验值偏差时，不考虑应变片4的误差，否则会出现误差值大于100%的情况。

表12 实验值与理论值偏差表

应变 \ 载荷(N)	-251	-501	-750	-1002	-1253	-1500	-1750	-2003
1	4.8%	0.8%	0.4%	0.6%	0.7%	0.4%	1.7%	0.2%
2	4.6%	2.8%	1.0%	0.8%	0.8%	1.0%	1.0%	1.4%
3	12.3%	4.0%	5.2%	4.0%	3.4%	4.2%	3.8%	4.8%
4								
5	10.2%	5.4%	3.7%	5.4%	2.8%	3.0%	2.7%	2.1%

图7 实验值与理论值对比图



3) 工字梁四点弯曲实验

根据 $\varepsilon_{ij} = \frac{M_i y_j}{E I_z} = \frac{a}{2 E I_z} P_i y_j$ ，计算实验测量的不同工况下的理论值（见下表）

表13 工字梁实验工况下应变理论值

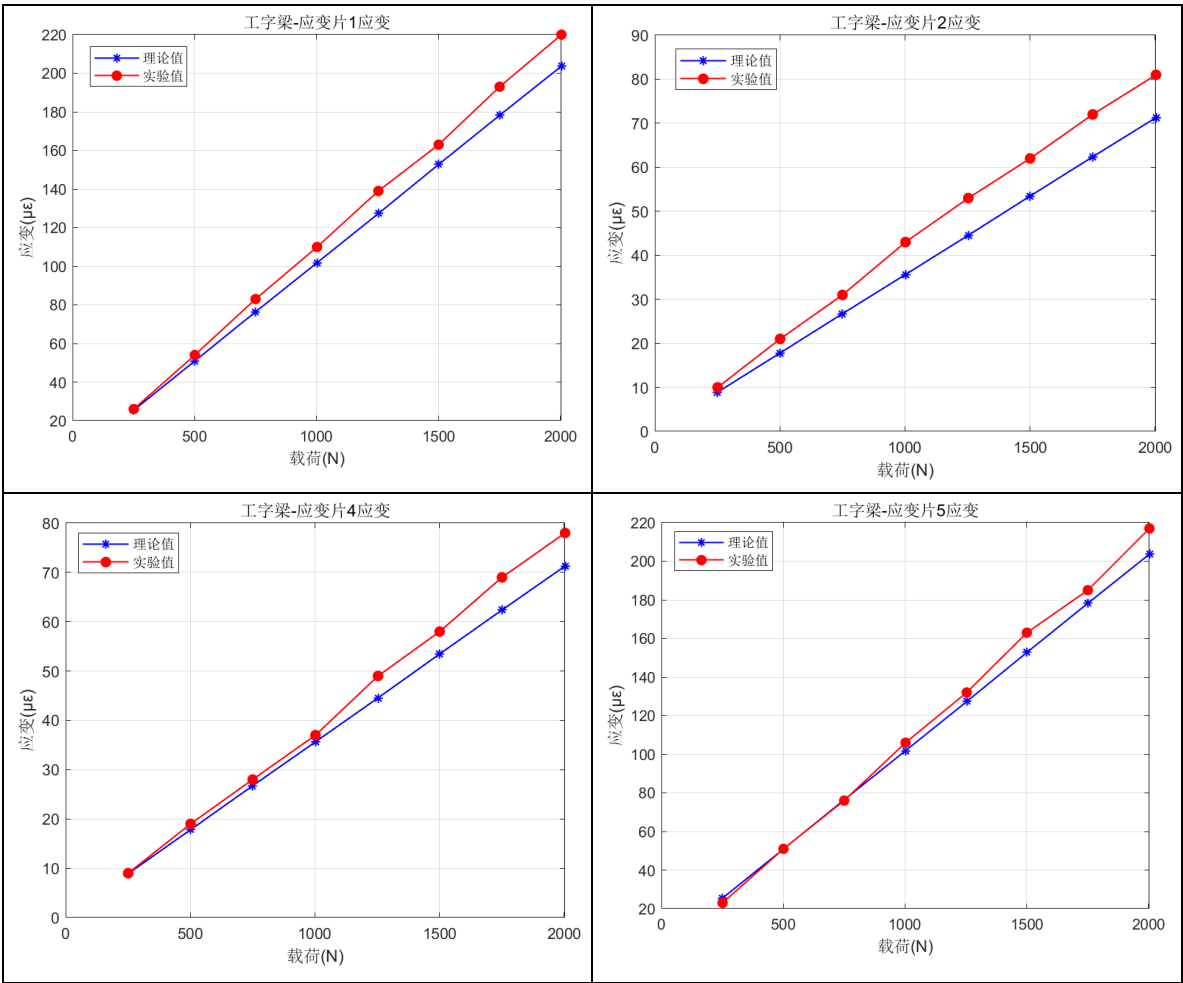
应变 \ 载荷(N)	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000
1	25	51	76	102	127	153	178	204
2	9	18	27	36	45	53	62	71
3	0	0	0	0	0	0	0	0

（由于工字梁为对称结构，中性面处y=0，应变为0，故只需计算1，2的理论数值，上述值为绝对值。）

表14 实验值与理论值偏差表

应变 \ 载荷(N)	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000
1	2%	6%	8%	7%	8%	6%	8%	7%
2	11%	15%	14%	17%	16%	14%	13%	12%
3								
4	1%	6%	5%	4%	9%	8%	10%	9%
5	11%	0.2%	-0.5%	4%	4%	6%	4%	6%

图8 实验值与理论值对比图



6. 误差分析

1) 纯弯曲梁正应力实验

由表8 实验值与理论值偏差表来看, 实验值与理论值偏差较大的部分是测点2和测点3所得数据, 且载荷越低该偏差越大, 该误差来源可能是: 测点2和测点3的应变片质量出现问题, 较低载荷下的应变测量不准确;

理论计算带入的数值都十分精确, 而实际实验只能将读数尽可能精确, 比如: 理论计算时选取的 y 值为20mm、15mm和10mm, 但实际实验中应变片本身是有大小的, 无法精确测量到固定 y 值位置上固定一点的应变, 这就导致该实验中实验值与理论值普遍存在1~3%的偏差, 但该误差 $<5\%$, 这是可以接受的。

2) T型梁四点弯曲实验

由表12 实验值与理论值偏差表来看, 实验值与理论值偏差较大的部分是测点3和测点5在251N载荷下所得数据, 分别为12.3%和10.2%, 该误差来源可能是: 较低载荷下的应变测量不准确;

理论计算带入的数值精确到1mm, 而实际实验只能将读数尽可能精确, 比如: 理论计算时选取的 y 值为23mm、16mm和10mm, 但实际实验中应变片本身是有大小的, 无法精确测量到固定 y 值位置上固定一点的应变, 这就导致该实验中实验值与理论值普遍存在1~4%的偏差, 但该误差 $<5\%$, 这是可以接受的

3) 工字梁四点弯曲实验

由表14 实验值与理论值偏差表来看, 实验值与理论值偏差较大的部分是测点2所得数据, 为10%以上, 其余部分的偏差小于10%, 误差来源可能是: 实验测量应变片位置 y 时, 由于应变片处于凹槽内难以使用游标卡尺测量, 故采用钢尺进行对位测量读数(如下图), 测量结果不够准确;

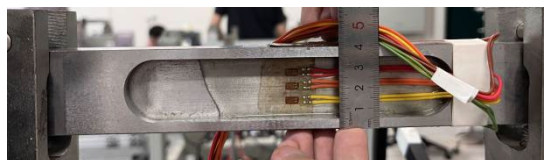


图9 工字梁应变片位置测量方法

7. 实验结论

- ① 使用电阻应变测量技术测量纯弯曲梁矩形截面上8个测点的应变值, 中性面处应变为0, 向两端应变随距离线性增加, 纯弯曲梁理论适用于实验模型。
- ② 使用电阻应变测量技术测量T型梁截面上5个测点的应变值, 中性面处应变为0, 向两端应变随距离线性增加。将理论值与实验值对比, 误差在5%以内, 实验结果可以接受。
- ③ 使用电阻应变测量技术测量工字梁截面上5个测点的应变值, 应变基本成对称分布, 中性面处($y=17\text{mm}$)应变为0, 向两端应变随距离线性增加。将理论值与实验值对比, 由于测量应变片位置不够准确, 实验误差在10%左右。
- ④ 根据 $\varepsilon_{ij} = \frac{M_i y_j}{EI_z} = \frac{a}{2EI_z} P_i y_j$, 三种梁的区别在于 I_z 不同, 相同位置相同载荷下, 相同“矩形”截面的三种梁, $I_{z\text{矩形}} > I_{z\text{工字}} > I_{z\text{T型}}$, 对应的, $\varepsilon_{\text{矩形}} < \varepsilon_{\text{工字}} < \varepsilon_{\text{T型}}$, 在能够满足应变条件时, 使用T型梁和工字梁能够节省材料。