

实验二十二：多自由度系统固有频率测试

1. 实验目的

- 1、学习建立多自由度模型；
- 2、学习多自由度参数和振动型的计算与测试。

2. 实验仪器及安装示意图

实验仪器：INV1601C 型振动教学实验仪、INV1601T 型振动教学实验台、非接触式激振器、电涡流传感器、三自由度钢丝质量系统、配重块。软件：INV1601 型 DASP 软件。

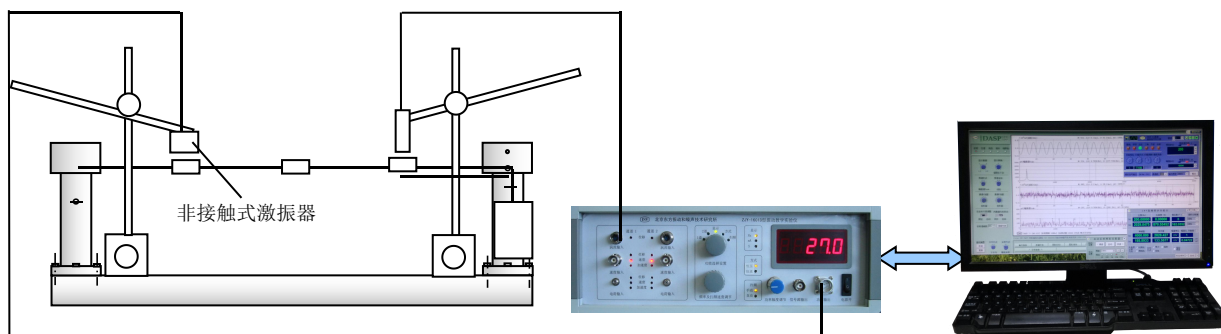


图 1 仪器连接示意图

3. 实验原理

通过两自由度模态的实验，大家对什么是自由度和模态已有一个比较清楚的认识，当系统的自由度是多个时，是否还存在上述的同步运动解？如果存在又如何求解。回答是肯定的。同样由特征行列所确定的方程确定了固有频率，只不过其固有频率不是两个，而是多个，模态向量相应的为多维向量。每一固有频率对应的模态向量 $\{u\}$ 由下式确定：

$$([K] - \omega^2[M])\{u\} = 0$$

其中 $[K]$ 、 $[M]$ 分别为系统的刚度矩阵、质量矩阵

下面以本次实验中的三自由度系统为例说明其求解过程。

如图所示的三自由度无阻尼系统，集中质量块 $m_A = m_B = m_C = m$ ，弦长度为 L ，弦上拉力为 T 。其运动的微分方程为：

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{0\}$$

其中

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 8T/L & -4T/L & 0 \\ -4T/L & 8T/L & -4T/L \\ 0 & -4T/L & 8T/L \end{bmatrix}$$

其对应的特征行列式方程为：

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0$$

将行列式展开为:

$$(8T/L - \omega^2 m) \begin{vmatrix} 8T/L - \omega^2 m & -4T/L \\ -4T/L & 8T/L - \omega^2 m \end{vmatrix} + 4T/L \begin{vmatrix} -4T/L & -4T/L \\ 0 & 8T/L - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$(8T/L - \omega^2 m)[(8T/L - \omega^2 m)^2 - (4T/L)^2] + (4T/L)(-4T/L)(8T/L - \omega^2 m) = 0$$

解得:

$$\omega_1^2 = \frac{8T}{mL} - \frac{4\sqrt{2}T}{mL}, \quad \omega_2^2 = 8T/mL, \quad \omega_3^2 = \frac{8T}{mL} + \frac{4\sqrt{2}T}{mL}$$

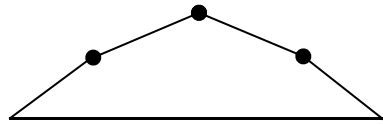
$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1.5307}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}}$$

$$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{3.69552}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}}$$

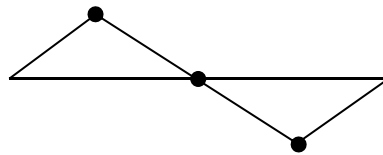
当 $\omega_1^2 = \frac{8T}{mL} - \frac{4\sqrt{2}T}{mL}$ 时, 解得其模态振型为:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix},$$



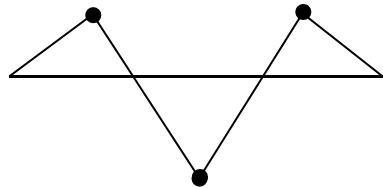
当 $\omega_2^2 = 8T/mL$ 时, 解得其模态振型为:

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



当 $\omega_3^2 = \frac{8T}{mL} + \frac{4\sqrt{2}T}{mL}$ 时, 解得其模态振型为:

$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix},$$



4. 实验步骤

1、仪器安装

为了不对系统增加附加质量，采用了非接触式的电涡流传感器。电涡流传感器探头部分距离 测试表面约 2mm 左右。钢丝的配重为 2.5kg。非接触式激振器的输入线接到功放输出端。参考示意图连接好仪器和传感器。

三个小质量块（6g）分别固定在支承钢丝的 1/4 处、1/2 处和 3/4 处，非接触式激振器和电涡流传感器分别对着一个质量块，拧紧固定螺钉。

- 2、 开机进入 INV1601 型 DASP 软件的主界面，按“单通道”进行波形和频谱同时示波。
- 3、 在“采样参数”设置中推荐设置：采样频率为 500Hz，程控 1 倍、采样点数 2K、工程单位 μm 。
- 4、 打开“幅值计”按钮，调节 INV1601C 型实验仪前面板的频率调节旋钮，当质量块第一次振动幅度最大时，在左窗口中读取频率值并记录。
- 5、 继续调节，当质量块第二次振动幅度最大时，在左窗口中读取频率值并记录。
- 6、 继续调节，当质量块第三次振动幅度最大时，在左窗口中读取频率值并记录。

5. 实验结果和分析

实验次数		频率(Hz)			配重拉力 (m(kg)x9.81)	质量块质量 (g)	支承钢丝长度 (m)
		一阶	二阶	三阶			
1	理论	11.9	22.1	28.8	9.81	6	0.68
	实验	11.9	22.3	29.0			
2	理论	16.9	31.2	40.8	19.62		
	实验	16.8	31.4	42.8			

配重为1kg时, 理论值计算：

$$f_1 = \frac{1.5307}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}} = \frac{1.5307}{2\pi} \times \sqrt{\frac{9.81}{0.006 \times 0.68}} = 11.9458 \approx 11.9Hz$$

$$f_2 = \frac{2\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\pi} \times \sqrt{\frac{9.81}{0.006 \times 0.68}} = 22.0734 \approx 22.1Hz$$

$$f_3 = \frac{3.69552}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}} = \frac{3.69552}{2\pi} \times \sqrt{\frac{9.81}{0.006 \times 0.68}} = 28.8403 \approx 28.8Hz$$

配重为2kg时, 理论值计算：

$$f_1 = \frac{1.5307}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}} = \frac{1.5307}{2\pi} \times \sqrt{\frac{2 \times 9.81}{0.006 \times 0.68}} = 16.8939 \approx 16.9Hz$$

$$f_2 = \frac{2\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\pi} \times \sqrt{\frac{2 \times 9.81}{0.006 \times 0.68}} = 31.2165 \approx 31.2Hz$$

$$f_3 = \frac{3.69552}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{mL}} = \frac{3.69552}{2\pi} \times \sqrt{\frac{2 \times 9.81}{0.006 \times 0.68}} = 40.7864 \approx 40.8Hz$$