实验六：单自由度系统的受迫振动实验

1. 实验目的

1、学会测量单自由度系统强迫振动的幅频特性曲线；

2、学会根据幅频特性曲线确定系统的固有频率和阻尼比。

2. 实验仪器及安装示意图

实验仪器：INV1601B 型振动教学实验仪、INV1601T 型振动教学实验台、速度传感器、接触式激振器、配重块。软件：INV1601 型 DASP 软件。

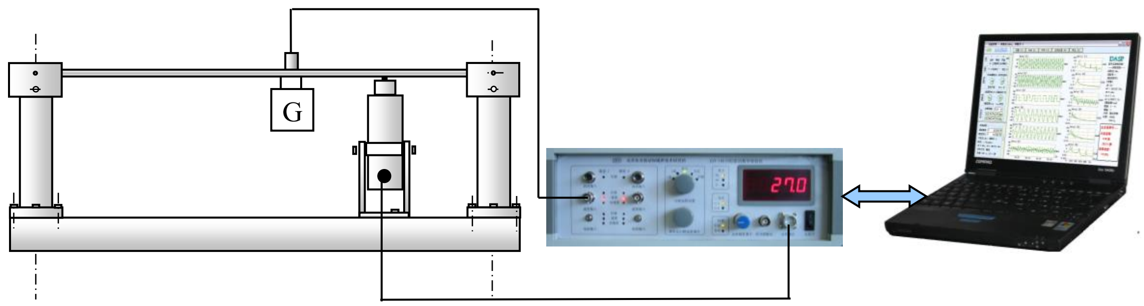


图 1　实验仪器的组成及连接示意图

3. 实验原理

简谐力作用下的阻尼振动系统，其运动方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+Kx=F_0\sin\omega_e t$$

方程式的解由通解及特解（x_1+x_2）这二部分组成：

$$x_1=e^{-\varepsilon t}(C_1\cos\omega_D t+C_2\sin\omega_D t)$$

式中　$\omega_D=\omega\sqrt{1-D^2}$

C_1、C_2 常数由初始条件决定

$$x_2=A_1\sin\omega_e t+A_2\cos\omega_e t$$

其中

$$A_1=\frac{q(\omega^2-\omega_e^2)}{(\omega^2-\omega_e^2)^2+4\varepsilon^2\omega_e^2}$$

$$A_2=\frac{2q\omega_e\varepsilon}{(\omega^2-\omega_e^2)^2+4\varepsilon^2\omega_e^2}\qquad q=\frac{F_0}{m}$$

x_1 代表阻尼自由振动项，x_2 代表阻尼强迫振动项。

有阻尼的强迫振动，当经过一定时间后，只剩下强迫振动部分，有阻尼强迫振动的振幅特性：

$$A=\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+4u^2D^2}}x_{st}=\beta x_{st}$$

动力放大系数 $\beta=\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+4u^2D^2}}=\frac{A}{x_{st}}$

当干扰力确定后，由力产生的静态位移 x_{st} 就可随之确定，而强迫振动的动态位移与频率比 u 和阻尼比 D 有关，这种关系即表现为幅频特性。动态振幅 A 和静态位移 x_{st} 之比值 β 称为动力系数，它由频率比 u 和阻尼比 D 所决定。把 β、u、和 D 的关系绘成曲线，称为频率响应曲线，见图 2。

从图 2 可以看出

（1）当 $\frac{\omega_e}{\omega}$ 很小时，即干扰频率比自振频率小很多时，动力系数在任何阻尼系数时均近于 1。

（2）当 $\frac{\omega_e}{\omega}$ 很大时，即干扰频率比自振频率高很多时，动力系数则很小（<1）。

（3）当 $\frac{\omega_e}{\omega}$ 近于 1 时，动力系数迅速增加，这时阻尼的影响比较明显，在共振点时动力系数 $\beta=\frac{1}{2D}$

（4）当 $\frac{\omega_e}{\omega}=\sqrt{1-D^2}$ 时，即干扰频率和有阻尼自振频率相同时 $\beta=\frac{1}{2D\sqrt{1-\frac{3D^2}{4}}}$

（5）动力系数的极大值，除了 $D=0$ 时在 $u=1$ 处 β 最大以外，当有阻尼存在时，在 $D\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$u=\sqrt{1-2D^2}$ 处，动力系数 β 为最大。

速度和加速度的响应关系式：

$$\frac{x}{x_{st}}=\frac{x}{F_0/K}=\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)+4u^2D^2}}\sin(\omega_e t-\varphi)=\beta\sin(\omega_e t-\varphi)$$

将上式对时间微分可得无量纲速度形式

$$\frac{\dot{x}}{F_0/\sqrt{Km}}=u\beta\cos(\omega_e t-\varphi)=\beta_v\cos(\omega_e t-\varphi)$$

式中 $$\beta_v=u\beta=\frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2+4u^2D^2}}$$

无量纲的加速度响应，将上式对时间 t 再微分一次，

$$\frac{\ddot{x}}{F_0/m}=-\beta u^2\sin(\omega_e t-\varphi)$$
$$=-\beta_a\sin(\omega_e t-\varphi)$$

振动幅度最大的频率叫共振频率ω_D、f_D，有阻尼时共振频率为

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-D^2}$$

$$或\ f_D = f\sqrt{1-D^2}$$

ω、f ——固有频率；D——阻尼比。

由于阻尼比较小，所以一般认为：$\omega_D = \omega$

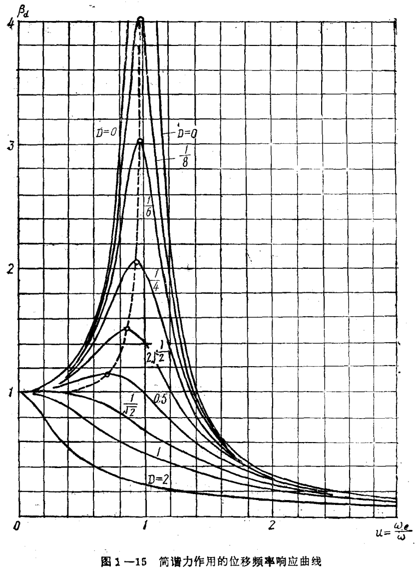


图 2 简谐力作用的位移频率响应曲线

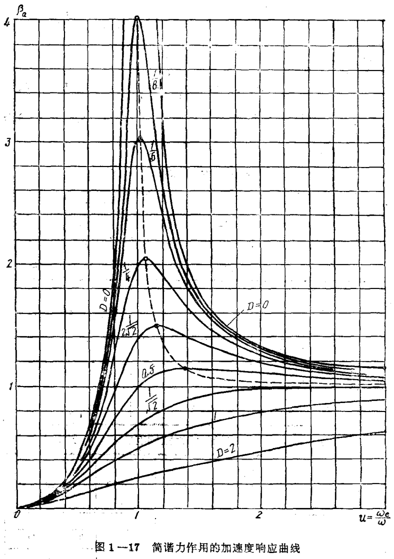


图 3 简谐力作用的加速度响应曲线

根据幅频特性曲线：

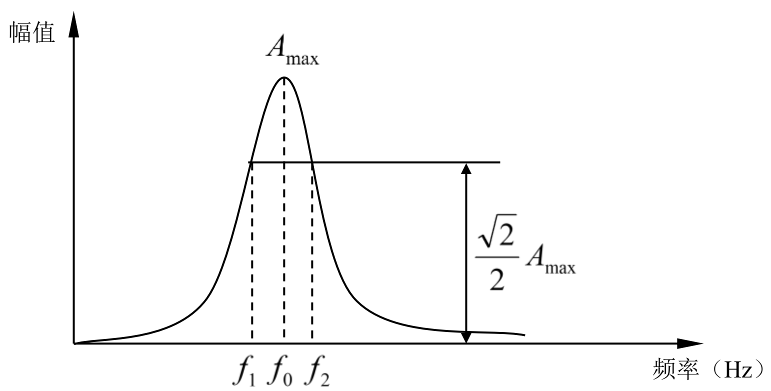


图 4 半功率法求阻尼

在$D<1$时，共振处的动力放大系数$|\beta_{\max}| = \dfrac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \approx \dfrac{1}{2D} = Q$，峰值两边，$\beta = \dfrac{Q}{\sqrt{2}}$处的频率$f_1$、$f_2$称为半功率点，$f_1$与$f_2$之间的频率范围称为系统的半功率带宽。

代入动力放大系数计算公式$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{f_{1,2}}{f_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\dfrac{f_{1,2}}{f_0}\right)^2 D^2}} = \dfrac{Q}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2D\sqrt{2}}$

当 D 很小时解得：$\left(\frac{f_{1,2}}{f_0}\right)^2 \approx 1\,\mu\,2D$　　　即：$f_2^2 - f_1^2 \approx 4Df_0^2$

$$D = \frac{f_2 - f_1}{2f_0}$$

4. 实验步骤

1、仪器安装

参考仪器安装示意图安装好仪器。质量块可到 2.5kg，上下都可以放，由于速度传感器不能倒置，只能把质量块放在梁的下面，传感器安装在简支梁的中部。

2、开机进入 INV1601 型 DASP 软件的主界面，选择单通道按钮。进入单通道示波状态进行波形和频谱同时示波。

3、把 INV1601B 型实验仪的频率按钮用手动搜索一下梁当前的共振频率。然后把频率调到零，逐渐增大频率到 50Hz。每增加一次（约 2—5Hz，在共振峰附近尽量增加测试点数）。

4、在表格中记录频率值和幅值。

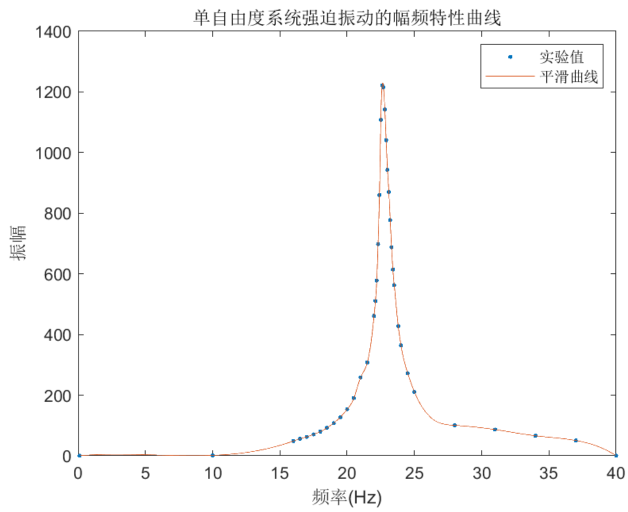
5. 实验结果和分析

1、实验数据

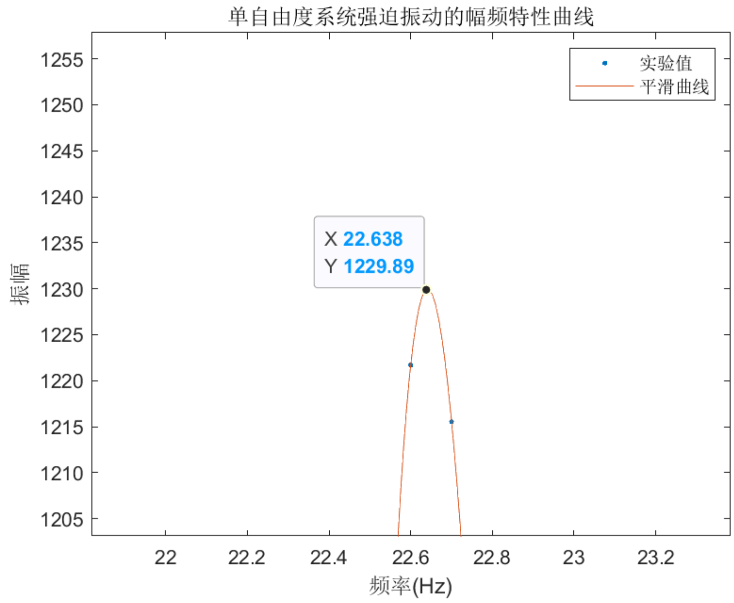
频率(Hz)	22.7	22.0	21.5	21.0	20.5	20.0	19.5	19.0	18.5	18.0
振幅	1215.55	461.6	308.3	258.5	190.7	154.0	127.8	107.9	92.2	79.9
频率(Hz)	17.5	17.0	16.5	16.0	10.0	0.1	22.1	22.2	22.3	22.4
振幅	70.5	62.6	56.5	48.8	1.56	0.306	510.4	577.88	697.9	860.3
频率(Hz)	22.5	22.6	22.7	22.8	22.9	23.0	24.0	23.5	23.3	23.2
振幅	1107.7	1221.7	1179.6	1142.5	1040.6	943.3	364.6	563.0	687.7	777.7
频率(Hz)	23.1	23.4	23.8	24.5	25.0	28.0	31.0	34.0	37.0	40.0
振幅	870.3	614.5	427.3	272.4	210.9	100.6	86.6	66.123	50.632	0.546

实验中振幅存在波动，记录的振幅为波动到最大值时的数据。

2、用表中的实验数据绘制出单自由度系统强迫振动的幅频特性曲线。

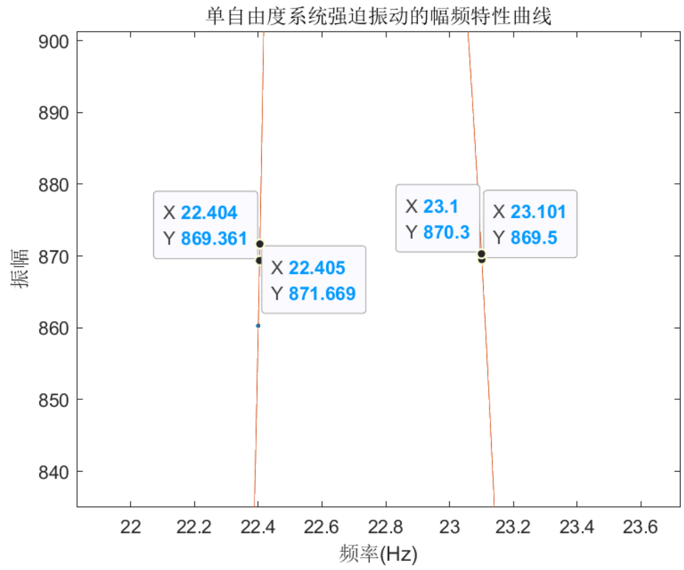


3、根据所绘制的幅频特性曲线，找出系统的共振频率 f_D。



$$A_{max} = 1229.89 \quad f_D = 22.6Hz\text{ (精确到实验值精度)}$$

4、计算 $\frac{\sqrt{2}}{2}A_{\max}$，根据幅频特性曲线确定 f_1 和 f_2， $f_0 = f_D$，根据公式：$D = \frac{f_2 - f_1}{2f_0}$ 计算阻尼比。



$$\frac{\sqrt{2}}{2}A_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1229.89 = 869.66$$

对应于曲线中，精确到和实验值一样的小数位数，$f_1 = 22.4Hz\ \ and\ f_2 = 23.1Hz$

$$D = \frac{f_2 - f_1}{2f_0} = \frac{23.1 - 22.4}{2 \times 22.6} = 0.01549 = 1.549\%$$

实验 5 中 3 次测量所得阻尼平均值为 2.713%，其配重为 3kg+加速度传感器，本次实验配重为 2.5kg+速度传感器，配重较小，所以所得阻尼值会小于前者，是合理的。