

## 实验 11 弯扭组合变形的主应力和内力测试

姓名：邹佳驹

学号：12012127

同组人：刘鸿磊

### 1. 实验目的

- 1) 用电测法测定平面应力状态下主应力的大小和方向，并与理论值进行比较。
- 2) 测定薄壁圆筒在弯扭组合变形作用下的弯矩。
- 3) 进一步掌握电测法

### 2. 实验仪器设备和工具

- 1) 组合实验台中弯扭组合试验装置
- 2) 力&应变综合参数测试仪
- 3) 游标卡尺、钢板尺

### 3. 实验原理和方法

- 1) 测定主应力大小和方向

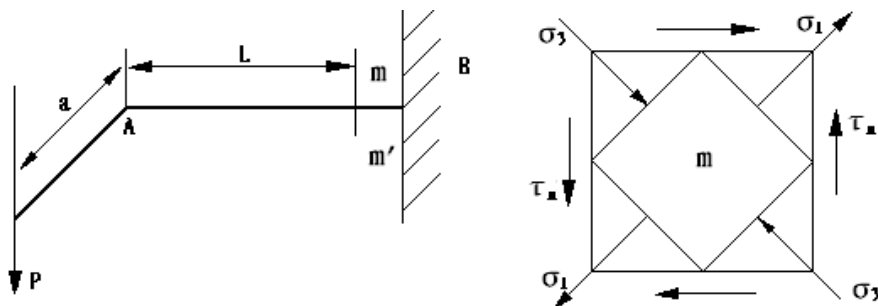
薄壁圆筒受弯扭组合作用，使圆筒发生组合变形，圆筒的  $m$  点处于平面应力状态。在  $m$  点单元体上作用有由弯矩引起的正应力  $\sigma_x$ ，由扭矩引起的剪应力  $\tau_n$ ，主应力是一对拉应力  $\sigma_1$  和一对压应力  $\sigma_3$ ，单元体上的正应力  $\sigma_x$  和剪应力  $\tau_n$  可按式计算

$$\sigma_x = \frac{M}{W_z}, M = PL, W_z = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)$$
$$\tau_n = \frac{M_n}{W_T}, M_n = Pa, W_T = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)$$

由二向应力状态分析可得到主应力及其方向

$$\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} = \sigma_x/2 \pm \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_n^2}$$

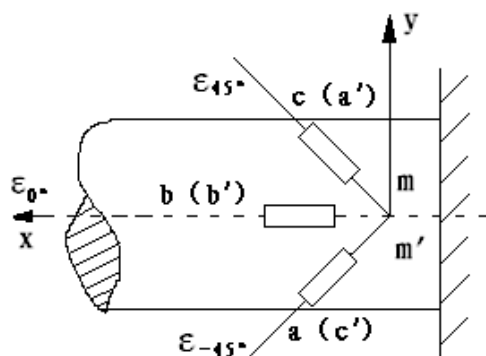
$$\tan 2\alpha = -2\tau_n/\sigma_x$$



本实验装置采用的是 45°直角应变花，在 m、m' 点各贴一组应变花（如图所示），应变花上三个应变片的  $\alpha$  角分别为 -45°、0°、45°，该点主应力和主方向

$$\sigma_1 = \frac{E(\epsilon_{45^\circ} + \epsilon_{-45^\circ})}{2(1-\mu)} \pm \frac{\sqrt{2}E}{2(1+\mu)} \sqrt{(\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_0)^2 + (\epsilon_{-45^\circ} - \epsilon_0)^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = (\epsilon_{45^\circ} + \epsilon_{-45^\circ}) / (2\epsilon_0 - \epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{-45^\circ})$$



#### 4. 实验步骤

- 1) 设计好本实验所需的各类数据表格
- 2) 测量试件尺寸、加力臂长度和测点距力臂的距离，确定试件有关参数。
- 3) 将薄壁圆筒上的应变片按不同测试要求接到仪器上，组成不同的测量桥路。调整好仪器，检查整个测试系统是否处于正常工作状态。
  - a) 主应力大小、方向测定：将 m 点的所有应变片按半桥单臂、公共温度补偿法组成测量线路进行测量。
  - b) 测定弯矩：将 m 和 m' 两点的 b 和 b' 两只应变片按半桥双臂组成测量线路进行测量 ( $\epsilon = \epsilon_d / 2$ )。
  - c) 测定扭矩：使用全桥测量电路，测得切应变。
- 4) 拟定加载方案。先选取适当的初载荷  $P_0$  估算  $P_{\max} \leq 400N$ ，分 4~6 级加载。
- 5) 根据加载方案，调整好实验加载装置。
- 6) 加载。均匀缓慢加载至初载荷  $P_0$ ，记下各点应变的初始读数；然后分级等增量加载，每增加一级载荷，依次记录各点电阻应变片的应变值，直到最终载荷。
- 7) 作完试验后，卸掉载荷，关闭电源，整理好所用仪器设备，清理实验现场，将所用仪器设备复原，实验资料交指导教师检查签字。
- 8) 实验装置中，圆筒的管壁很薄，为避免损坏装置，注意切勿超载，不能用力扳动圆筒的自由端和力臂。

## 5. 实验数据记录与处理

### 1. 试件测量

圆筒的尺寸和有关参数	
计算长度L=235mm	弹性模量 E=71GPa
扇臂长度 a=230mm	泊松比 $\mu=0.33$
外径 D=40mm	
内径 d=34mm	

### 2. 实验数据（100N 逐级加载，最大载荷 400N）

#### a) 测定主应力大小和方向

载荷	P(N)	51	100	200	300	400
应变	45°( $\mu\epsilon$ )	61	124	239	357	476
	0°( $\mu\epsilon$ )	59	119	229	346	463
	-45°( $\mu\epsilon$ )	-22	-43	-82	-124	-166

#### b) 测定弯矩

载荷	P(N)	50	100	200	300	400
应变		-113	-231	-461	-691	-922

#### c) 测定扭矩

载荷	P(N)	50	100	200	300	400
应变		162	325	644	965	1287

### 3. 数据处理

m 点实测值主应力及方向计算：

$$\sigma_1 = \frac{E(\epsilon_{45^\circ} + \epsilon_{-45^\circ})}{2(1-\mu)} \pm \frac{\sqrt{2}E}{2(1+\mu)} \sqrt{(\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{0^\circ})^2 + (\epsilon_{-45^\circ} - \epsilon_{0^\circ})^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = (\epsilon_{45^\circ} + \epsilon_{-45^\circ}) / (2\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{-45^\circ})$$

P(N)	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$\tan 2\alpha$	$\alpha(^{\circ})$
50	5.12	-0.99	0.49	13.05
100	10.41	-1.83	0.52	13.74
200	20.06	-3.43	0.52	13.74
300	30.09	-5.40	0.51	13.51
400	40.17	-7.32	0.50	13.29

m 点实测值弯矩与扭矩计算：

$$\sigma_x = \frac{M}{W_z} = E\varepsilon$$

$$M = \sigma_x W_z = E\varepsilon W_z$$

P(N)	$\mu\varepsilon_{\text{弯应变}} \times 2$	E	$\sigma_x(\text{MPa})$	$W_z$	M(Nm)
50	-113	7.1E+10	-4.01	3.003E-06	-12.05
100	-231	7.1E+10	-8.20	3.003E-06	-24.63
200	-461	7.1E+10	-16.37	3.003E-06	-49.15
300	-691	7.1E+10	-24.53	3.003E-06	-73.67
400	-922	7.1E+10	-32.73	3.003E-06	-98.30

$$\tau_n = \frac{M_n}{W_T} = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$M_n = \tau_n W_T = G\gamma W_T$$

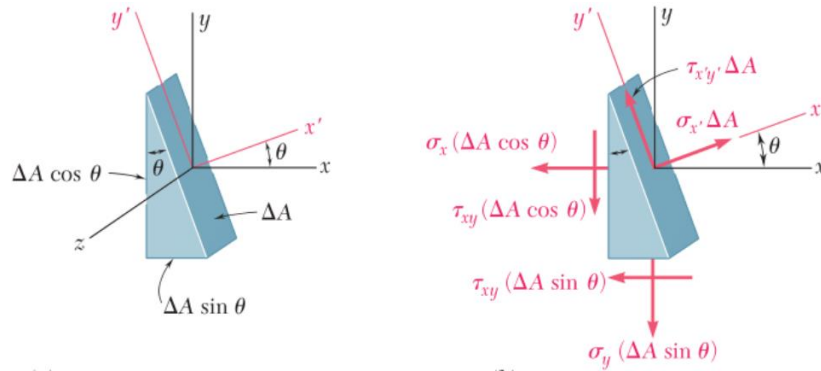
P(N)	$\mu\gamma_{\text{扭应变}} \times 4$	G	$\tau_n(\text{MPa})$	$W_t$	$M_n(\text{Nm})$
50	162	2.669E+10	1.08	6.007E-06	6.49
100	325	2.669E+10	2.17	6.007E-06	13.03
200	644	2.669E+10	4.30	6.007E-06	25.81
300	965	2.669E+10	6.44	6.007E-06	38.68
400	1287	2.669E+10	8.59	6.007E-06	51.59

m 点理论值主应力及方向计算：

$$\sigma_1 = \sigma_x/2 \pm \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_n^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -2\tau_n/\sigma_x$$

公式推导：



(From Mechanics of Materials, 6<sup>th</sup> edition, Ferdinand P. Beer et.al)

力平衡方程：

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sum F_{y'} = 0$$

$$\tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta = 0$$

整理得：

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

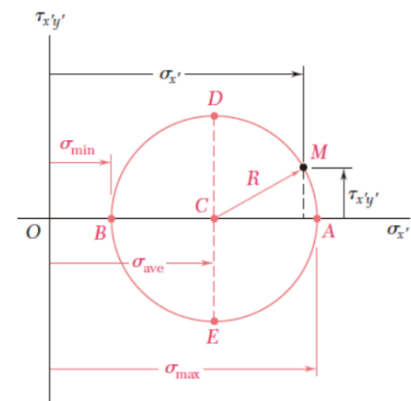
莫尔圆：

$$\left( \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{avg})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

$$R^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



(From Mechanics of Materials, 6<sup>th</sup> edition, Ferdinand P. Beer et.al)

主应力：

$$\sigma_{\max , \min }=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

方向(由剪切应力为 0 得到)：

$$\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$
$$\tau_{x'y'}=0 \quad \tan 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

在本实验中， $\sigma_y=0$ ，所以：

$$\sigma_{1,3}=\frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\left(\tau_n\right)^2}$$
$$\tan 2\alpha_0=\frac{-2\tau_n}{\sigma_x}$$

注：此处 $\alpha_0$ 定义的方向与上述推导过程中的 $\theta_p$ 的方向相反，故前有负号

理论主应力及方向计算：

P(N)	$\sigma_x$ (MPa)	$\tau_n$ (MPa)	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$\text{tg}2\alpha$	$\alpha$
50	3.91	1.91	4.69	-0.78	-0.98	-22.21
100	7.82	3.83	9.39	-1.56	-0.98	-22.21
200	15.65	7.66	18.77	-3.12	-0.98	-22.21
300	23.47	11.49	28.16	-4.69	-0.98	-22.21
400	31.30	15.32	37.55	-6.25	-0.98	-22.21

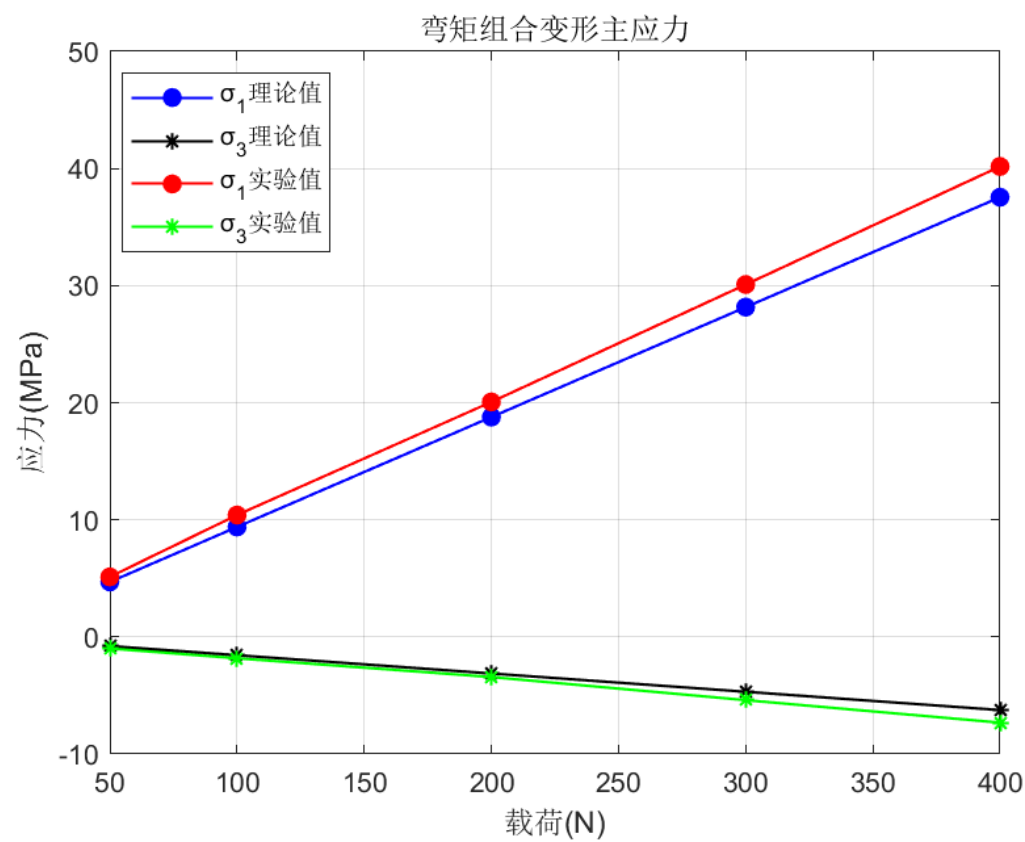
理论弯矩与扭矩计算

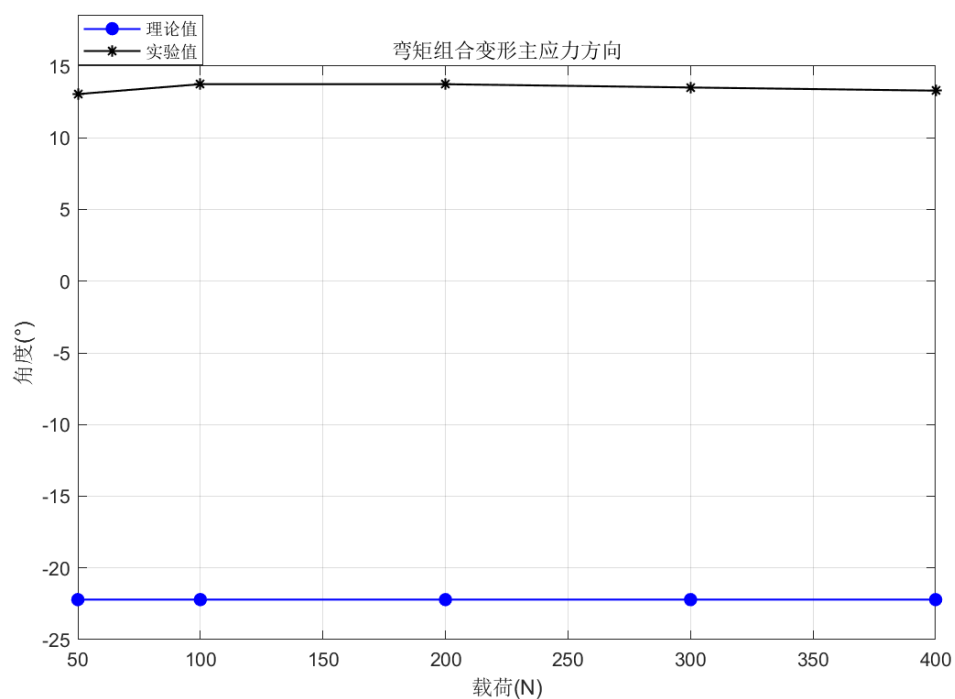
P(N)	L(m)	a(m)	M(Nm)	M_n
50	0.235	0.23	11.75	11.5
100	0.235	0.23	23.5	23
200	0.235	0.23	47	46
300	0.235	0.23	70.5	69
400	0.235	0.23	94	92

理论值与实验值对比：

主应力：

P(N)	理论值		实验值		误差	
	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	Error $\sigma_1$	Error $\sigma_3$
50	4.69	-0.78	5.12	-0.99	8.42%	21.28%
100	9.39	-1.56	10.41	-1.83	9.83%	14.47%
200	18.77	-3.12	20.06	-3.43	6.43%	8.84%
300	28.16	-4.69	30.09	-5.40	6.42%	13.23%
400	37.55	-6.25	40.17	-7.32	6.54%	14.68%



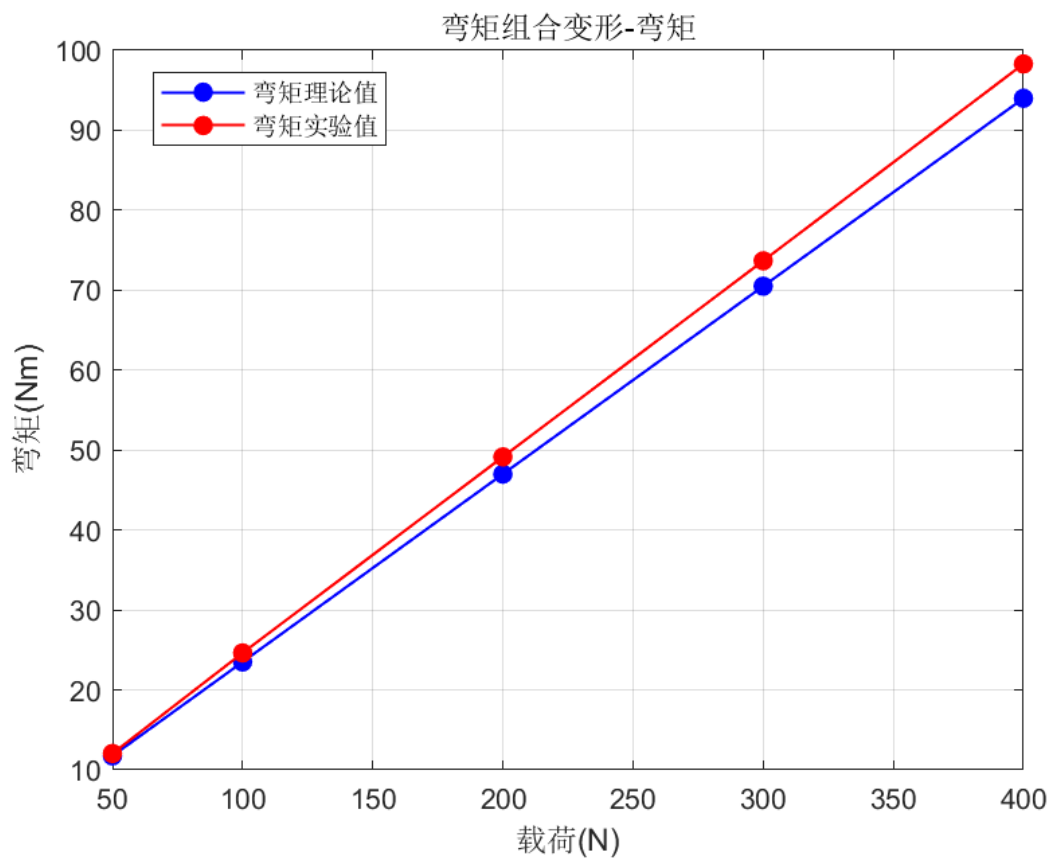


主应力 $\sigma_1$ 的误差随载荷增加而逐渐减小，但主应力 $\sigma_3$ 的误差变化似乎无规律，理论值与实验值的方向相差较大。

弯矩：

弯矩	理论值	实验值	误差
P(N)	M(Nm)	M(Nm)	Error(%)
50	11.75	12.05	2.47%
100	23.50	24.63	4.58%
200	47.00	49.15	4.38%
300	70.50	73.67	4.31%
400	94.00	98.30	4.38%

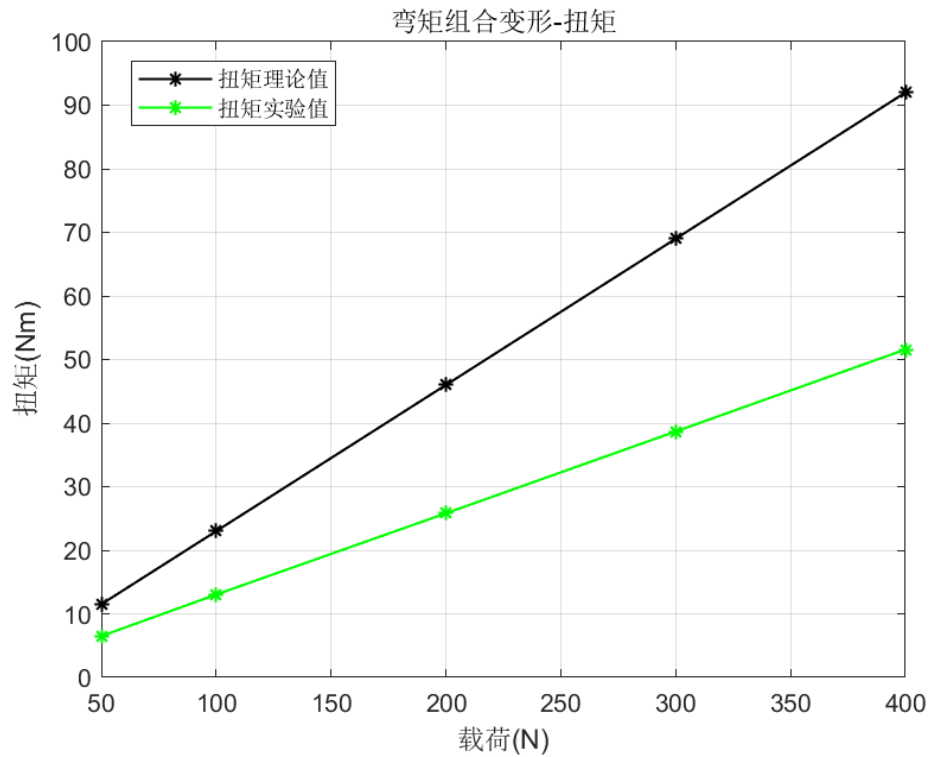




误差均小于 5%，在可接受范围内

扭矩：

扭矩	理论值	实验值	误差
P(N)	M_n	M_n(Nm)	Error(%)
50	11.50	6.49	-77.11%
100	23.00	13.03	-76.56%
200	46.00	25.81	-78.21%
300	69.00	38.68	-78.39%
400	92.00	51.59	-78.35%



扭矩计算偏差太大，分析原因可能在于  $G$  值有误，实验数据未给出  $G$  值，理论计算中的  $G$  值使用  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  进行计算得到，该结果可能与实际材料的  $G$  值相差较大，进而导致扭矩理论值与实验值的巨大误差。