# 高等数学微积分公式大全

## 一、基本导数公式

⑴$(c)'=0$　⑵$x^{\mu}=\mu x^{\mu-1}$　⑶$(\sin x)'=\cos x$

⑷$(\cos x)'=-\sin x$　⑸$(\tan x)'=\sec^2 x$　⑹$(\cot x)'=-\csc^2 x$

⑺$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$　⑻$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

⑼$(e^x)'=e^x$　⑽$(a^x)'=a^x\ln a$　⑾$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

⑿$(\log_a^{\,x})'=\dfrac{1}{x\ln a}$　⒀$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　⒁$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⒂$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　⒃$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$⒄$(x)'=1$⒅$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

## 二、导数的四则运算法则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$　$(uv)'=u'v+uv'$　$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

## 三、高阶导数的运算法则

（1）$\left[u(x)\pm v(x)\right]^{(n)}=u(x)^{(n)}\pm v(x)^{(n)}$　（2）$\left[cu(x)\right]^{(n)}=cu^{(n)}(x)$

（3）$\left[u(ax+b)\right]^{(n)}=a^n u^{(n)}(ax+b)$　（4）$\left[u(x)\cdot v(x)\right]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}c_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$

## 四、基本初等函数的 n 阶导数公式

（1）$(x^n)^{(n)}=n!$　（2）$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\cdot e^{ax+b}$　(3)$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$

(4)$\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$　(5) $\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

(6)$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$　(7) $\left[\ln(ax+b)\right]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{a^n\cdot(n-1)!}{(ax+b)^n}$

## 五、微分公式与微分运算法则

⑴$d(c)=0$　⑵$d\left(x^{\mu}\right)=\mu x^{\mu-1}dx$　⑶$d(\sin x)=\cos xdx$

⑷$d(\cos x)=-\sin xdx$　⑸$d(\tan x)=\sec^2 xdx$　⑹$d(\cot x)=-\csc^2 xdx$

⑺$d(\sec x)=\sec x\cdot\tan xdx$　⑻$d(\csc x)=-\csc x\cdot\cot xdx$

⑼$d(e^x)=e^x dx$　⑽$d(a^x)=a^x\ln adx$　⑾$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$

⑿ $d\left(\log_a{}^x\right)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$　⒀ $d\left(\arcsin x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　⒁ $d\left(\arccos x\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

⒂ $d\left(\arctan x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$　⒃ $d\left(\operatorname{arc}\cot x\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$

六、微分运算法则

(1) $d\left(u\pm v\right)=du\pm dv$　(2) $d\left(cu\right)=cdu$

(3) $d\left(uv\right)=vdu+udv$　(4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

七、基本积分公式

(1) $\int kdx=kx+c$　(2) $\int x^{\mu}dx=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$　(3) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c$

(4) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$　(5) $\int e^x dx=e^x+c$　(6) $\int\cos xdx=\sin x+c$

(7) $\int\sin xdx=-\cos x+c$　(8) $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 xdx=\tan x+c$

(9) $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-\cot x+c$　(10) $\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

(11) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$

八、补充积分公式

$\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+c$　$\int\cot xdx=\ln|\sin x|+c$

$\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+c$　$\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+c$

$\int\dfrac{1}{a^2+x^2}dx=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+c$　$\int\dfrac{1}{x^2-a^2}dx=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+c$

$\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\dfrac{x}{a}+c$　$\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$

九、下列常用凑微分公式

| 积分型 | 换元公式 |
| --- | --- |
| $\int f\left(ax+b\right)dx=\dfrac{1}{a}\int f\left(ax+b\right)d\left(ax+b\right)$ | $u=ax+b$ |
| $\int f\left(x^{\mu}\right)x^{\mu-1}dx=\dfrac{1}{\mu}\int f\left(x^{\mu}\right)d\left(x^{\mu}\right)$ | $u=x^{\mu}$ |
| $\int f\left(\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{x}dx=\int f\left(\ln x\right)d\left(\ln x\right)$ | $u=\ln x$ |

| | |
|---|---|
| $\int f\left(e^x\right)\cdot e^x dx=\int f\left(e^x\right)d\left(e^x\right)$ | $u=e^x$ |
| $\int f\left(a^x\right)\cdot a^x dx=\frac{1}{\ln a}\int f\left(a^x\right)d\left(a^x\right)$ | $u=a^x$ |
| $\int f\left(\sin x\right)\cdot\cos xdx=\int f\left(\sin x\right)d\left(\sin x\right)$ | $u=\sin x$ |
| $\int f\left(\cos x\right)\cdot\sin xdx=-\int f\left(\cos x\right)d\left(\cos x\right)$ | $u=\cos x$ |
| $\int f\left(\tan x\right)\cdot\sec^2 xdx=\int f\left(\tan x\right)d\left(\tan x\right)$ | $u=\tan x$ |
| $\int f\left(\cot x\right)\cdot\csc^2 xdx=\int f\left(\cot x\right)d\left(\cot x\right)$ | $u=\cot x$ |
| $\int f\left(\arctan x\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\int f\left(\arctan x\right)d\left(\arctan x\right)$ | $u=\arctan x$ |
| $\int f\left(\arcsin x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f\left(\arcsin x\right)d\left(\arcsin x\right)$ | $u=\arcsin x$ |

十、分部积分法公式

(1)形如$\int x^n e^{ax}dx$，令$u=x^n$， $dv=e^{ax}dx$

形如$\int x^n\sin xdx$令$u=x^n$， $dv=\sin xdx$

形如$\int x^n\cos xdx$令$u=x^n$， $dv=\cos xdx$

(2)形如$\int x^n\arctan xdx$，令$u=\arctan x$， $dv=x^n dx$

形如$\int x^n\ln xdx$，令$u=\ln x$， $dv=x^n dx$

(3)形如$\int e^{ax}\sin xdx$，$\int e^{ax}\cos xdx$令$u=e^{ax},\sin x,\cos x$均可。

十一、第二换元积分法中的三角换元公式

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$  $x=a\sin t$  (2) $\sqrt{a^2+x^2}$  $x=a\tan t$  (3) $\sqrt{x^2-a^2}$  $x=a\sec t$

**【特殊角的三角函数值】**

（1）$\sin 0=0$ （2）$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ （3）$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ （4）$\sin\frac{\pi}{2}=1$） （5）$\sin\pi=0$

（1）$\cos 0=1$ （2）$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ （3）$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ （4）$\cos\frac{\pi}{2}=0$） （5）$\cos\pi=-1$

（1）$\tan 0=0$ （2）$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ （3）$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ （4）$\tan\frac{\pi}{2}$不存在 （5）$\tan\pi=0$

（1）$\cot 0$不存在 （2）$\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ （3）$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ （4）$\cot\frac{\pi}{2}=0$ （5）$\cot\pi$不存在

## 十二、重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>o)=1$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ （5）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ （6）$\lim\limits_{x\to-\infty}arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arc}\cot x=0$ （8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc}\cot x=\pi$ （9）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

（10）$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=\infty$ （11）$\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{x}=1$

（12）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$ （系数不为 0 的情况）

## 十三、下列常用等价无穷小关系（$x\to 0$）

$\sin x\sim x$ $\tan x\sim x$ $\arcsin x\sim x$ $\arctan x\sim x$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$\ln(1+x)\sim x$ $e^x-1\sim x$ $a^x-1\sim x\ln a$ $(1+x)^{\partial}-1\sim\partial x$

## 十四、三角函数公式

**1.**两角和公式

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cdot\cot B-1}{\cot B+\cot A}$ $\cot(A-B)=\frac{\cot A\cdot\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

**2.**二倍角公式

$\sin 2A=2\sin A\cos A$ $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$

$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

**3.**半角公式

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$ $\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\frac{\sin A}{1-\cos A}$

**4.**和差化积公式

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$　　$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$　　$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$

$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$

**5.**积化和差公式

$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$　　$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$　　$\cos a\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

**6.**万能公式

$\sin a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$　　$\cos a=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$　　$\tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$

**7.**平方关系

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$　　$\sec^2 x-ta\mathrm{n}^2 x=1$　　$\csc^2 x-\cot^2 x=1$

**8.**倒数关系

$\tan x\cdot\cot x=1$　　$\sec x\cdot\cos x=1$　　$cs\mathrm{c}\,x\cdot\sin x=1$

**9.**商数关系

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$　　$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

十五、几种常见的微分方程

**1.**可分离变量的微分方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ ，　$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$

**2.**齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

**3.**一阶线性非齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$　解为：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$$