

实验十三：简支梁振动实验

1. 实验目的

- 1、学习模态分析原理；
- 2、学会模态测试方法；
- 3、学习变时基的原理和应用。

2. 实验仪器及安装示意图

实验仪器：INV1601B 型振动教学实验仪、INV1601T 型振动教学实验台、加速度传感器、MSC-1 力锤。软件：INV1601 型 DASP 软件。

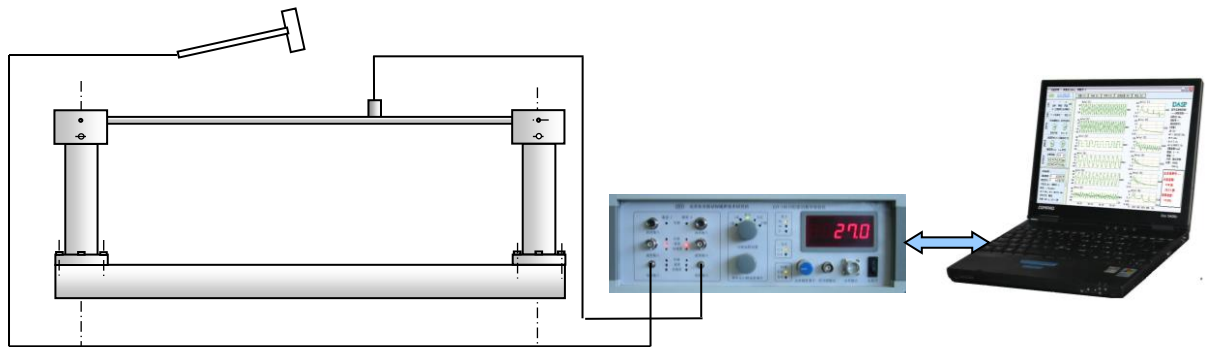


图 1 振动测试实验台的组成及连接示意图

3. 实验原理

3.1 模态分析方法及其应用

模态分析方法是把复杂的实际结构简化成模态模型，来进行系统的参数识别（系统识别），从而大大地简化了系统的数学运算。通过实验测得实际响应来寻求相应的模型或调整预想的模型参数，使其成为实际结构的最佳描述。

主要应用有：

用于振动测量和结构动力学分析。可测得比较精确的固有频率、模态振型、模态阻尼、模态质量和模态刚度。

可用模态实验结果去指导有限元理论模型的修正，使计算模型更趋完善和合理。

用来进行结构动力学修改、灵敏度分析和反问题的计算。

用来进行响应计算和载荷识别。

3.2 模态分析基本原理

工程实际中的振动系统都是连续弹性体，其质量与刚度具有分布的性质，只有掌握无限多个点在每瞬时的运动情况，才能全面描述系统的振动。因此，理论上它们都属于无限多自由度的系统，需要用连续模型才能加以描述。但实际上不可能这样做，通常采用简化的方法，归结为有限个自由度的模型来进行分析，即将系统抽象为由一些集中质块和弹性元件组成的模型。如果简化的系统模型中有 n 个集中质量，一般它便是一个 n 自由度的系统，需要 n 个独立坐标来描述它们的运动，系统的运动方程是 n 个二阶互相耦合（联立）的常微分方程。

模态分析是在承认实际结构可以运用所谓“模态模型”来描述其动态响应的条件下，通过实验数据的处理和分析，寻求其“模态参数”，是一种参数识别的方法。

模态分析的实质，是一种坐标转换。其目的在于把原在物理坐标系统中描述的响应向量，放到所谓“模态坐标系”中来描述。这一坐标系统的每一个基向量恰是振动系统的一个特征向量。也就是说在这个坐标下，振动方程是一组互无耦合的方程，分别描述振动系统的各阶振动形式，每个坐标均可单独求解，得到系统的某阶结构参数。

经离散化处理后，一个结构的动态特性可由 N 阶矩阵微分方程描述：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{f}(t)$ 为 N 维激振力向量； \mathbf{x} 、 $\dot{\mathbf{x}}$ 、 $\ddot{\mathbf{x}}$ 分别为 N 维位移、速度和加速度响应向量； \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 \mathbf{C} 分别为结构的质量、刚度和阻尼矩阵，通常为实对称 N 阶矩阵。

设系统的初始状态为零，对方程式（1）两边进行拉普拉斯变换，可以得到以复数 s 为变量的矩阵代数方程

$$[\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (2)$$

式中的矩阵

$$\mathbf{Z}(s) = [\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K}] \quad (3)$$

反映了系统动态特性，称为系统动态矩阵或广义阻抗矩阵。其逆阵

$$\mathbf{H}(s) = [\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K}]^{-1} \quad (4)$$

称为广义导纳矩阵，也就是传递函数矩阵。由式（2）可知

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{F}(s) \quad (5)$$

在上式中令 $s = j\omega$ ，即可得到系统在频域中输出（响应向量 $\mathbf{X}(\omega)$ ）和输入（激振向量 $\mathbf{F}(\omega)$ ）的关系式

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{F}(\omega) \quad (6)$$

式中 $\mathbf{H}(\omega)$ 为频率响应函数矩阵。 $\mathbf{H}(\omega)$ 矩阵中第 i 行第 j 列的元素

$$\mathbf{H}_{ij}(\omega) = \frac{\mathbf{X}_i(\omega)}{\mathbf{F}_j(\omega)} \quad (7)$$

等于仅在 j 坐标激振（其余坐标激振力为零）时， i 坐标响应与激振力之比。

在（3）式中令 $s = j\omega$ ，可得阻抗矩阵

$$\mathbf{Z}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) + j\omega \mathbf{C} \quad (8)$$

利用实对称矩阵的加权正交性，有

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & m_r & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & k_r & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

其中矩阵 $\Phi = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_N]$ 称为振型矩阵，假设阻尼矩阵 \mathbf{C} 也满足振型正交性关系

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & c_r & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

代入（8）式得到

$$\mathbf{Z}(\omega) = \Phi^{-T} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & z_r & \\ & & 0 \end{bmatrix} \Phi^{-1} \quad (9)$$

式中 $z_r = (k_r - \omega^2 m_r) + j\omega c_r$

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)^{-1} = \Phi \begin{bmatrix} 0 & & \\ & z_r & \\ & & 0 \end{bmatrix} \Phi^T$$

因此

$$\mathbf{H}_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\varphi}_{ri} \boldsymbol{\varphi}_{rj}}{m_r [(\omega_r^2 - \omega^2) + j2\xi_r \omega_r \omega]} \quad (10)$$

$$\text{上式中, } \omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r}, \quad \xi_r = \frac{c_r}{2m_r \omega_r}$$

m_r 、 k_r 分别称为第 r 阶模态质量和模态刚度（又称为广义质量和广义刚度）。 ω_r 、 ξ_r 和 $\boldsymbol{\varphi}_r$ 分别称为第 r 阶模态频率、模态阻尼比和模态振型。

不难发现， N 自由度系统的频率响应，等于 N 个单自由度系统频率响应的线形叠加。为了确定全部模态参数 ω_r 、 ξ_r 和 $\boldsymbol{\varphi}_r$ ($r=1, 2, \dots, N$)，实际上只需测量频率响应矩阵的一列（对应一点激

振，各点测量的 $\mathbf{H}(\omega)$) 或一行 (对应依次各点激振，一点测量的 $\mathbf{H}(\omega)^T$) 就够了。

实验模态分析或模态参数识别的任务就是由一定频段内的实测频率响应函数数据，确定系统的模态参数——模态频率 ω_r 、模态阻尼比 ξ_r 和振型 $\boldsymbol{\phi}_r = (\phi_{r1}, \phi_{r2}, \dots, \phi_{rN})^T$ ， $r=1, 2, \dots, n$ (n 为系统在测试频段内的模态数)。

3.3 模态分析方法和测试过程

1) 激励方法

为进行模态分析，首先要测得激振力及相应的响应信号，进行传递函数分析。传递函数分析实质上就是机械导纳， i 和 j 两点之间的传递函数表示在 j 点作用单位力时，在 i 点所引起的响应。要得到 i 和 j 点之间的传递导纳，只要在 j 点加一个频率为 ω 的正弦的力信号激振，而在 i 点测量其引起的响应，就可得到计算传递函数曲线上的一个点。如果 ω 是连续变化的，分别测得其相应的响应，就可以得到传递函数曲线。

然后建立结构模型，采用适当的方法进行模态拟合，得到各阶模态参数和相应的模态动画，形象地描述出系统的振动型态。

根据模态分析的原理，我们要测得传递函数矩阵中的任一行或任一列，由此可采用不同的测试方法。要得到矩阵中的任一行，要求采用各点轮流激励，一点响应的方法；要得到矩阵中任一列，采用一点激励，多点测量响应的方法。实际应用时，单点响应法，常用锤击法激振，用于结构较为轻小，阻尼不大的情况。对于笨重、大型以及阻尼较大的系统，则常用固定点激振的方法，用激振器激励，以提供足够的能量。

还有一种是多点激振法，当结构因过于巨大和笨重，以至于采用单点激振时不能提供足够的能量，把我们感兴趣的模态激励出来。或者是结构在同一频率时可能有多模态，这样单点激振就不能把它们分离出来，这时就要采用多点激励的方法，采用两个甚至更多的激励来激发结构的振动。

2) 结构安装方式

在测试中使结构系统处于何种状态，是实验准备工作的一个重要方面。

一种是经常采用的自由状态。即使实验对象在任一坐标上都不与地面相连接，自由地悬浮在空中。如放在很软的泡沫塑料上；或用很长的柔索将结构吊起而在水平方向激振，可认为在水平方面处于自由状态。另一种是地面支承状态，结构上有一点或若干选定点与地面固结。

如果我们所关心的实际工况支承条件下的模态，这时，可在实际支承条件下进行实验。但最好还是以自由支承为佳。因为自由状态具有更多的自由度。

3) 变时基方法的应用

在进行瞬态激励信号与响应信号采样时，激励与响应之间，特征时间与特征频率的差异太大，激励是 ms 级的，响应是几百 ms 级到秒级。如果采用等时基传递函数做瞬态激励传函分析时，就存在频率分辨力 (采样频率越低，分辨力越高) 和时域波形精度 (采样频率越高，时域波形精度越高) 这一对无法克服的矛盾。由于脉冲激励信号作用时间较短，为了确保频率分辨力，采样频率不能太

高，从而导致以下几种情况：(1)采到的激励信号偏大；(2)采到的激励信号偏小；(3)激励信号没有采上。计算出来的导纳值重复性差，相位不准。因此在变时基提出之前，大型结构无法用锤击法测出模态，只能使用火箭激励，因为火箭激励时加长了激励时间，且它可以产生方波激励信号。

变时基的原理：用较高的频率对力脉冲进行采样，用较低的频率对响应信号进行采样，两个采样频率的倍数就是变时倍数。采用变时基就可以解决以上问题。

4. 实验步骤

简支梁如下图所示，长（x 向）680mm，宽（y 向）50mm，高（z 向）8mm。欲使用多点敲击、单点响应方法做其 z 方向的振动模态，可按以下步骤进行。

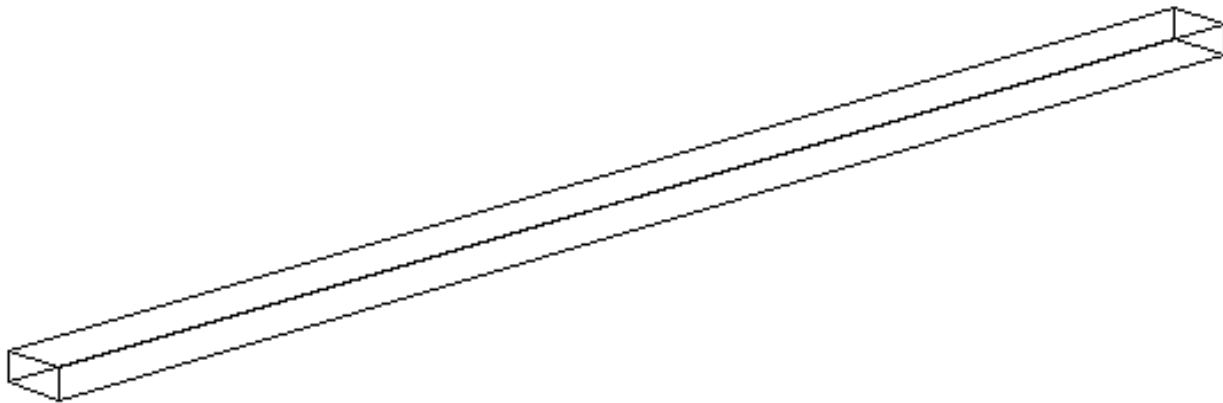


图 2 梁的结构示意图

4.1 测点的确定

简支梁在 y、z 方向尺寸和 x 方向（尺寸）相差较大，可以简化为杆件，所以只需在 x 方向顺序布置若干敲击点即可（本例采用多点移步敲击、单点响应方法），敲击点的数目视要得到的模态的阶数而定，敲击点数目要多于所要求的阶数，得出的高阶模态结果才可信。此例中在 x 方向把梁分成十六等份，即可以布十七个测点。选取拾振点时要尽量避免使拾振点在模态振型的节点上，此处取拾振点在第六个敲击点处（或选取第三点作为拾振点）。

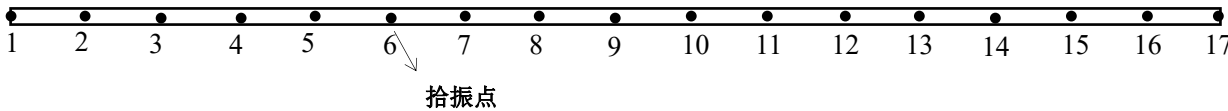


图 3 梁的测点分布示意图

4.2 仪器连接

仪器连接如下图所示，其中力锤上的力传感器接 INV1601B 实验仪第一通道的电荷输入端，压电加速度传感器接 INV1601B 实验仪第二通道的电荷输入端，两个通道的 INV1601B 实验仪的输入选择相应地调到压电加速度一端。

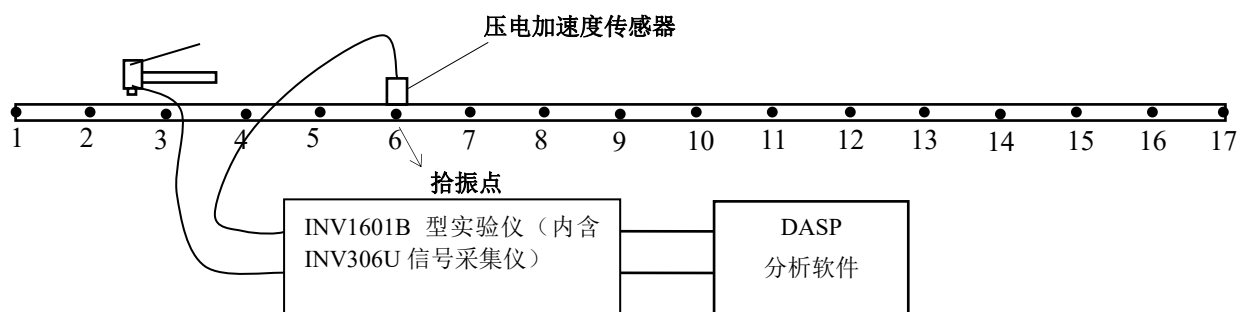


图 4 仪器连接及传感器分布示意图

4.3 结构生成

仪器连接好后，启动 INV1601 型 DASP 软件，选择“模态教学”按钮，进入模态分析教学系统

界面。在左上方的  选择项中选择“结构”，选择并设置结构参数。

选择结构置 1，为简支梁（2 为等截面悬臂梁，3 为等强度变截面悬臂梁，4 为圆板，5—9 是为了满足实验的多样性而扩展的结构）。节点划分：X 向为 16，Y 向和 Z 向均为 1。

设置好参数后，可以在右面窗口中显示出当前简支梁的图型和节点分布情况。根据节点分布情况，然后把梁按图示分布测点。

本例采样文件名为：ZJY；实验号默认为：1；数据路径：C:\DASPOUT。分析结果路径和数据路径相同，可按“更改”按钮来设置不同的文件名和采样数据存储路径。

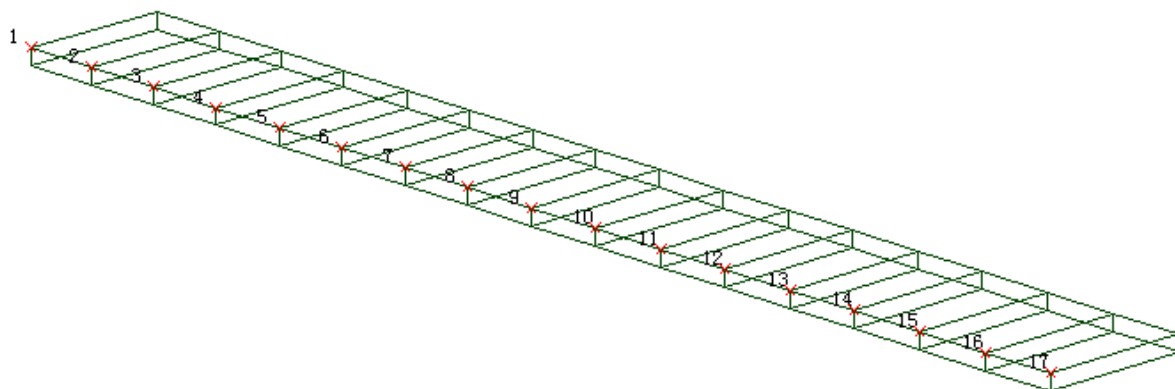
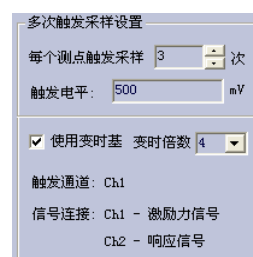


图 5 梁的结点分布示意图

4.4 参数设置与采样

在左上方的“结构 采样 分析 动画”选择项中选择“采样”，进入采样界面。

在测量设置中设置传感器类型、总测点数和原点导纳位置，总测点数根据结构自动读取，不可更改，原点导纳位置为拾振点位置。



在多次触发采样设置中设置每个测点触发采样次数，变时基倍数为 4 等。

用力锤敲击各个测点，观察有无波形，如果有一个或两个通道无波形或波形不正常，就要检查仪器连接是否正确、导线是否接通、传感器、仪器的工作是否正常等等，直至示波波形正确为止。在“采样参数”设置中选定采样频率（例如 12000Hz），采样长度 2k，程控倍数为 1，使用适当的敲击力敲击各测点，调节放大器的放大倍数或 DASP 的程控倍数，直到力的波形和响应的波形即不过载又不是太小。选定采样时自动增加测点号，准备采样。

采样类型设为：变时基；单位类型设为：第一通道的工程单位设为：N（牛顿），第二通道的工程单位设为：m/ss（加速度）。

最后，输入标定值（参考指导书第五页标定值设置）和工程单位。传感器灵敏度为 KCH（PC/U）（PC/U 表示每个工程单位输出多少 PC 的电荷，如是力，而且参数表中工程单位设为牛顿 N，则此处为 PC/N；如是加速度，而且参数表中工程单位设为 m/s²，则此处为 PC/m/s²）；

INV1601B 型实验仪线性输出增益 KE 为：

加速度： $K_E = 10 \text{ (mV/m/s}^2\text{)}$ ；

速度： $K_E = 1 \text{ (mV/m/s)}$ ；

位移： $K_E = 0.5 \text{ (mV/}\mu\text{m)}$ 。

DASP 参数设置表中的标定值 K 为：

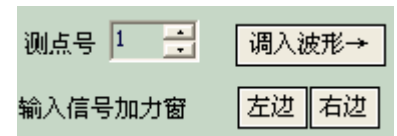
$$K = K_{CH} \times K_E \text{ (mV/U)}$$

参数设置完后，选择自动增加测点号，按左窗下面的开始采样按钮，进入触发变时基采样状态，等待触发，并提示当前采样的点号和触发次数。根据提示从第一点按设定的触发次数测试到最后一个测点。自动记录下每次测试结果。测试过程中尽量避免连击现象，如果有连击现象，按中止采样按钮，改变测点号重新开始采样，将覆盖原来数据。

4.5 分析

①调采样数据

采样完成后左上方的“结构 采样 分析 动画”选择项中选择“分析”，打开分析对话框，对采样数据进行传函分析。首先选择要调入的测点号，按调入波形按钮，右面窗口中显示该测点的波形。以每一通道的力信号加力窗，按鼠标左键在力信号的左边，按左窗口中的左边按钮，按鼠标左键在力信号的右边，按左窗口中的右边按钮，完成对力信号的力窗设置。对响应信号加指数窗，选择系数。当系数为 0 时不加指数窗。如图 6 所示。



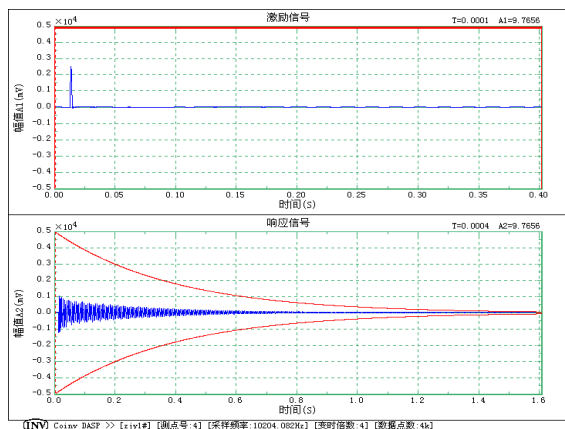


图 6 调入选定测点波形图

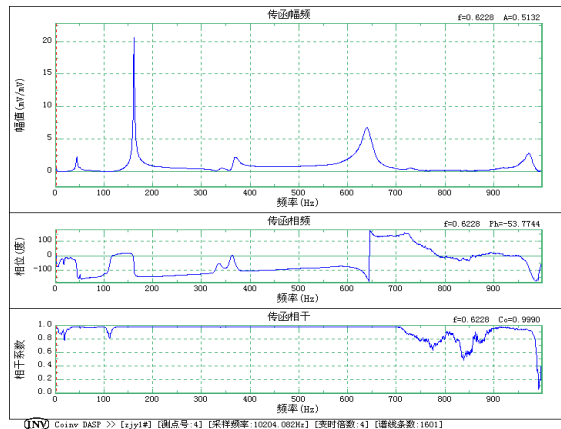


图 7 传递函数分析结果

②传函分析

设置完成后按进行传函计算，完成选定点的传函分析，显示分析结果。如图 7 所示。

按自动计算全部传函按钮，可以分析完全部采样点的传函分析，计算完后提示：所有测点的传函计算完毕！

③模态拟合

该软件的采用集总平均的方法进行模态定阶，按开始模态定阶，显示集总平均后的结果，用鼠标分别点峰值点，收取该阶频率，依次收取各阶峰值，按保存按钮存盘。如果收取有误可按清除按钮清除当前结果。如图 8 所示。

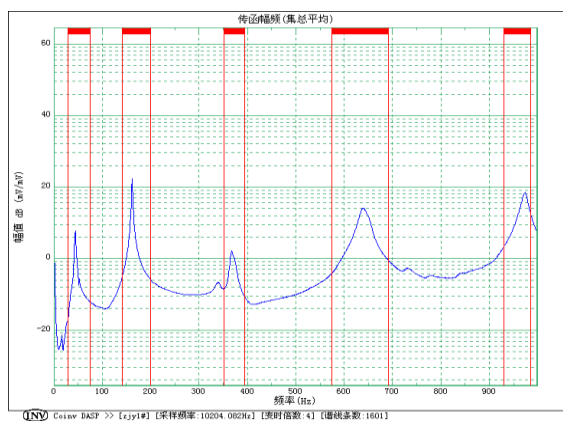


图 8 确定模态阶数

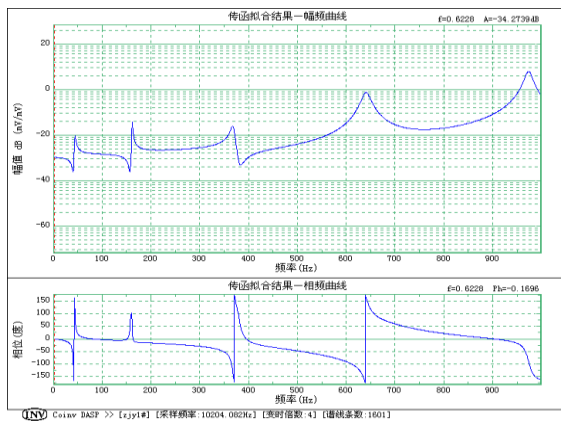


图 9 模态拟合结果

模态拟合采用复模态单自由度拟合方法，按开始模态拟合得到拟合，得到拟合结果。如图 9 所

示。

④振型编辑

质量归一和振型归一两种方式随各自需要任选，本例选择质量归一，完成后显示：模态振型编辑完毕！

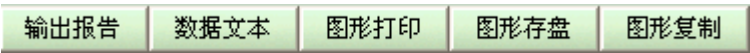
至此，模态分析已经完成，以后可以观察、打印和保存分析结果，也可以观察模态振型的动画显示。

⑤动画显示

在左上方的“结构 采样 分析 动画”选择项中选择“动画”进行结果振型动画显示，根据每个对话框中的相应按钮可以动画进行控制，如更换显示阶数、显示轨迹；在视图选择中选取显示方式：单视图、多模态和三视图；改变显示色彩方式；振幅、速度和大小，以及几何位置。

对于当前动画可输出 AVI 格式的动画文档，可直接用媒体播放器播放。按模态输出为 AVI 文件，弹出保存文件名对话框，模态动画视频压缩对话中的压缩程序选择 Microsoft Video 1.0 方式，确定后即可生成动画文件。在保存的目录下调用文件，显示动画。

模态分析完后，可对所有数据和图形进行存盘和保存，相应的按钮为



另外，由于本软件采样时采用的是默认路径：C:\Daspout，如果要保存到其它路径，可通过“保存”和“调入”按钮来完成采样数据和分析结果的存盘和调用。

该软件在安装过程中已经有一部分样例数据，分别保存在 C:\Program Files\COINV\INV1601\ZjymData 目录中，用户在采样和分析时会覆盖采样数据存盘路径中的数据。

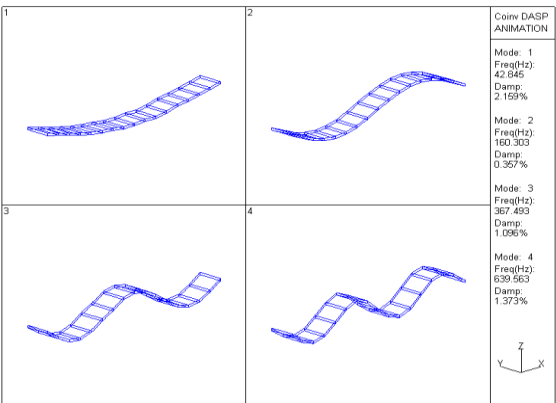


图 10 简支梁的前四阶模态振型图

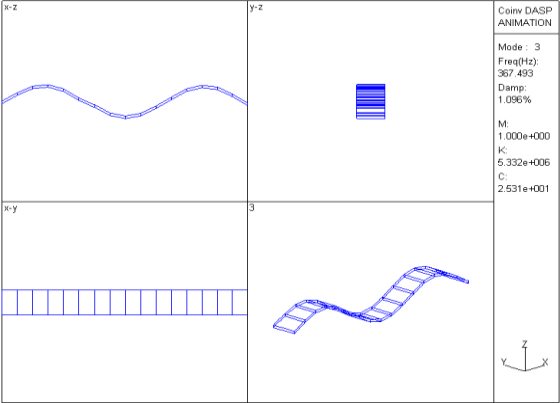


图 11 简支梁的第三阶模态振型图

5. 实验结果和分析

1、记录模态参数

模态参数	第一阶	第二阶	第三阶	第四阶
频率	44.414	164.380	379.255	761.968
质量	1	1	1	1
刚度	7.787×10^4	1.067×10^6	5.678×10^6	2.292×10^7
阻尼	1.302	4.065	-1.204	46.44

2、打印出各阶模态振型投影图。

