1. 基本概念

1.1. 集合

1.2. 群

$$\text{集合} + \text{群乘} \begin{cases} \text{封闭} \\ \text{结合律} \\ \text{存在单位元} \\ \text{有唯一逆元} \end{cases}$$

1.3. 域(field)

$$\text{集合} \quad + \begin{cases} \text{定义加法} & \text{在加法下是阿贝尔群} \\ \text{定义乘法} & \begin{cases} \text{封闭} \\ \text{结合律} \\ \text{存在一个单位元} \\ \text{除某个元素外都有唯一逆元}(0) \\ \text{乘法}\ A\cdot B\text{对}\ A\text{、}B\text{都有分配律} \end{cases} \end{cases}$$

1.4. 线性向量空间

$$\begin{cases} \text{集合}\ A & A\text{是一个域} \\ \text{集合}\ B & B\text{中元素称为向量} \begin{cases} \text{向量加法} & \text{集合}\ B\text{在向量加法下是一个阿贝尔群} \\ \text{标量积} & \begin{cases} \text{封闭性} & a\circ\vec{b}\in B \\ \text{结合律} & a_1\circ\left(a_2\circ\vec{b}_i\right) = (a_1\circ a_2)\circ\vec{b}_i \\ \text{单位元} & 1\circ\vec{b}_i = \vec{b}_i = \vec{b}_i\circ 1 \\ \underline{\text{双线性性}}(\text{分配律}) & \begin{cases} a_1\circ\left(\vec{b}_1+\vec{b}_2\right) & = a\circ\vec{b}_1 + a\circ\vec{b}_2 \\ (a_1+a_2)\circ\vec{b} & = a_1\circ\vec{b} + a_2\circ\vec{b} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

这里双线性性就是"**线性**向量空间"中线性的定义.

1.4.1. 例子

所有$N\times M$矩阵在矩阵加法下构成线性向量空间.

定义在圆上$(0\le\varphi\le 2\pi)$的所有函数构成线性向量空间.

$$f(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m \exp\left(im\varphi\right) \quad , m\in\mathbb{Z} \tag{1}$$

1.5. 代数

$$\text{线性向量空间}\ V + \text{矢量积}\ \square \begin{cases} \text{封闭性} & \vec{v}_1\square\vec{v}_2\in V \\ \text{双线性性} & \begin{cases} (\vec{v}_1+\vec{v}_2)\square\vec{v}_3 = \vec{v}_1\square\vec{v}_3 + \vec{v}_2\square\vec{v}_3 \\ \vec{v}_1\square\left(\vec{v}_2+\vec{v}_3\right) = \vec{v}_1\square\vec{v}_2 + \vec{v}_1\square\vec{v}_3 \end{cases} \end{cases}$$

以上定义的矢量积,还可以加上不同的性质,以构成不同的代数,其中如果矢量积$\vec{A}\square\vec{B}$还满足

$$\vec{A}\square\left(\vec{B}\square\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\square\vec{B}\right)\vec{C} + \vec{B}\square\left(\vec{A}\square\vec{C}\right) \tag{2}$$

那么这样的代数称为Lie代数,这时常常把矢量积$\vec{A}\square\vec{B}$写作$[\vec{A},\vec{B}]$

1.6. 补充: 标量函数的变换算符

对于标量函数, 对宗量(自变量)$x \in \mathbb{C}^n, \quad n \in \mathbb{N}$的变换, 总可以表示成对标量函数的变换, 即

$$\begin{aligned} x &\to \chi = Rx \\ \Psi &\to \Phi = P_R \Psi \end{aligned}$$

上面大写的希腊字母表示函数值, $\psi(x) = \Psi, \quad \psi(y) = \Phi$, P_R 是对标量 Φ (一个数)的变换.

注意 而 $\Psi \in \mathbb{C}$ 是一个标量, 因此就若采用矩阵表示, R是一个$n \times n$矩阵, 作用于$x \in \mathbb{C}^n$, 而P_R是一个算符, 作用于$\psi(x) = \Psi \in \mathbb{C}$

又因为一般有$\Phi = P_R \Psi = P_R \psi(x) \neq \psi(\chi)$, 因而将$\Phi$记为$\Phi = \phi(\chi)$

将上述关系整理为

$$\begin{aligned} x &\to \chi = Rx \\ \psi(x) &\to \phi(\chi) = P_R \psi(\chi) \end{aligned}$$

因此P_R的作用是将函数ϕ变换为一个新的函数ψ.

将上式改写之后可以得到

$$\psi(x) = {P_R}^{-1} \phi(x) = \psi(R^{-1}\chi) \tag{3}$$

因此也可以说P_R的作用是"抵消" R的作用

$$\phi(x) = P_R \psi(x) = \psi(R^{-1}x) \tag{4}$$

标量函数变换算符与群元素一一对应

2. 拓扑空间的相关概念,拓扑群

2.1. 拓扑空间

一个集合X以及它的子集的集合(称为子集族(a family of sets)) $\mathcal{T}$ 构成的对$(X, \mathcal{T})$称为拓扑空间，要求

$$\begin{cases} \emptyset, X \in \mathcal{T} \\ \mathcal{T}\text{中任意多个集合的并集} \in \mathcal{T} \quad \text{(任意并)} \\ \mathcal{T}\text{中有限多个集合的交集} \in \mathcal{T} \quad \text{(有限交)} \end{cases}$$

> 拓扑空间通过定义开集, 定义了集合的"划分方法". 开集指定了X中的一个点(元素)与哪些点是在一个集合(邻域)中的, 也就通过连通性得到了拓扑

2.1.1. Hausdorff空间

若对任意两点x, x', 都可以找到的x, x'的邻域U_x, $U_{x'}$,使得$x \in U_x$, $x' \in U_{x'}$, $U_x \bigcap U_{x'} = \emptyset$, 就称此空间是Hausdorff空间.

> 直观的理解是, 这样的空间中任意两个点都是可以区分的.
>
> 注意并不能理解成这样的空间中,点无限致密. 因为在两个邻域"之间", 并不一定存在点. 举例来说,离散的点集中, 离散拓扑定义的拓扑空间就是Hausdorff空间.

2.1.2. 度规(metric)

度规是一个二元函数$d: X \times X \to \mathbb{R}$, 将两个$X$中的元素映射到实数中, 也就是定义了$X$中任意两点的距离. 要使$d$是一个度规, 还要求$d$满足:

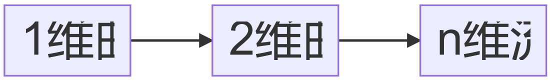
$$\begin{cases} \text{对称性} & d(x,y) = d(y,x) \\ \text{半正定性} & d(x,y) \geq 0 \quad \text{, if and only if } x = y \\ \text{三角形不等式} & d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \end{cases}$$

配备了度规的拓扑空间(Topological space endowed with a metric)天然有一个度规拓扑$(X, \mathcal{T})$, 其中$\mathcal{T}$中的子集为"开球", 这样的空间$(X, \mathcal{T})$称为度规空间.

2.2. 流形

流形的德文为mannigfaltigkeit,英文翻译为manifold, 词义为"多态,多重",中文最初翻译为"多样体",现行翻译来自于文天祥《正气歌》"天地有正气, 杂然赋流形."而原始出处则为《易经》: "大哉乾元, 万物资始, 乃统天. 云行雨施, 品物流形."

流形是对曲线,曲面的概念推广. 另一个说法是: 流形是局部看起来像$\mathbb{R}^n$,但是有更复杂的拓扑结构(定义在拓扑空间上)的数学结构.



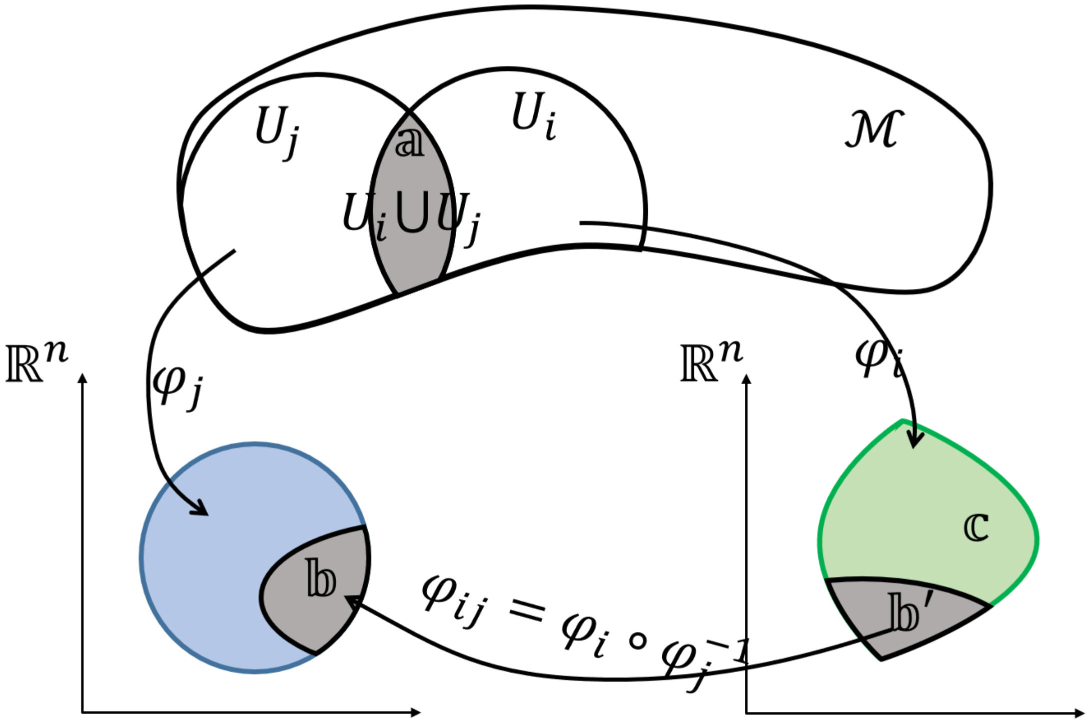
这里要注意的是, 曲线可以存在于高维的空间，但是曲线永远是1维的, 只用一个参数就可以描写.

2.2.1. 流形的坐标

为了研究方便,我们可以将n维流形映射到$\mathbb{R}^n$

若$\mathcal{M}$是一个拓扑空间, U_i是$\mathcal{M}$的一个开覆盖(即$\bigcup U_i = \mathcal{M}$), φ_i是从U_i到$\mathbb{R}^m$的映射, 满足对于任意$U_i \bigcup U_j \neq \emptyset$的$U_i$和$U_j$, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ (这个映射即为$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x) = \varphi_i \left(\varphi_j^{-1}(x) \right)$) 是无穷可微的(光滑). 这样的拓扑空间就称为流形.

简单地说, 给一个拓扑空间配备一个性质足够好(可微分)的坐标映射, 就得到微分流形



(未完)

3. 李群

3.1. 李群定义

李群G的定义:

$$\begin{cases} G\text{是一个群} \\ G\text{是一个微分流形} \\ \text{群的运算也是可微的} \end{cases}$$

这样的群称为李群.

3.2. 局部李群(李群的子群)

定理: 若G是连通拓扑群, e的一个开邻域关于G的群乘为局部李群,则可在G中引入一个唯一的拓扑结构使G全体成为李群, 且其诱导拓扑与原拓扑一致.

4. 李群的李代数

4.1. 李群的切空间

见 [1] [2] [3] . 由李群可以由任意一个在单位元e附近的邻域生成, 自然会想问, 这样的邻域最小可以有多小? 可以是无穷小的切空间吗?

4.1.1. 李群的单参数子群

为了先有一个直观的理解, 先从李群的单参数子群入手. 李群的单参数子群可以理解为李群G所在流形$\mathcal{M}$上的一条单参数曲线.

> 李群的来源是数学家Lie 在研究形如
>
> $$\dot{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
>
> 的微分方程时引入的. 一组初始条件,就对应了一个解,即李群的一个单参数子群

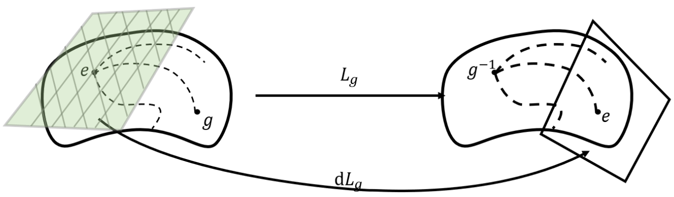
4.1.2. 李群的切丛性质

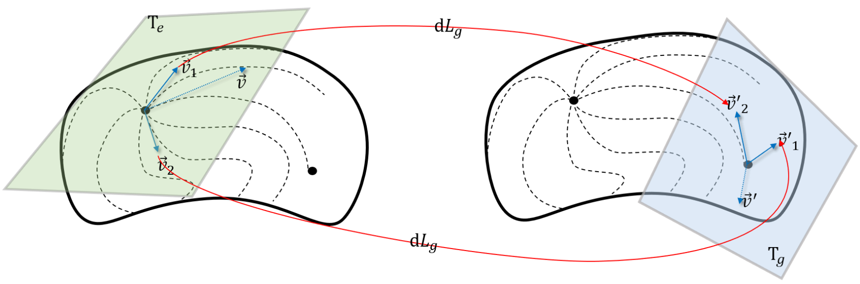
4.1.2.1. 李群的左平移

李群的左平移L_g是一个李群到自身的映射:

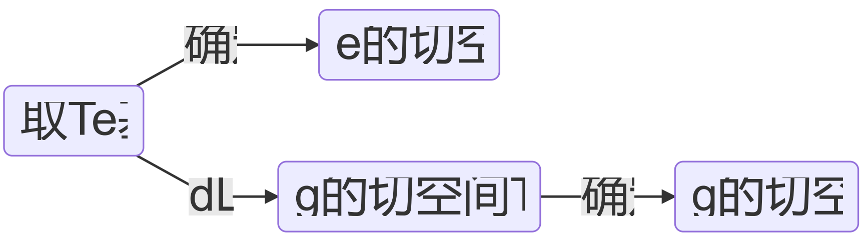
$$L_g : G \to G \qquad x \to g \circ x \tag{5}$$

诱导出一个切空间的微分映射dL_g. 如图所示.





由此可以得到



4.1.3. 指数映射

回顾李群的概念,李群是定义在流形上的,李群的元素之间有李群群乘. 如果我们要研究切空间, 我们自然要问,切空间里面的元素是什么, 有什么运算.

直观的感受告诉我们,一个球可以看做李群, 在某一点p的切空间就是在p点的切平面. 这个平面上面的元素就是过p点的所有切向量(任意大小,方向). 因此这个空间是一个线性矢量空间. 除此之外,我们还可以在这个空间上定义更复杂的"代数", 表示矢量积.

但是对于李群我们不能这样做. 李群的切空间的元素之间的运算关系必须由李群群乘来确定. 这样对群乘"微分",得到的运算就会是李群切空间的运算. 因此,只要确定了切空间内元素与李群中元素的对应关系, 就可以确定切空间内元素的运算了.

这样的映射之一,就是指数映射. 为了不与单位元 e 混淆, 指数映射一律记为$\exp(x)$, 而不是e^x

由$\vec{v}_1 \to g_{\vec{v}_1}(t)$是一一映射, 可以定义$\exp(\vec{v}_1) = g_{\vec{v}_1}(1)$为指数映射.

指数映射的性质和定义在实数上的指数映射基本一致:

$$\exp\left[(s+t)\vec{v}_1\right] = \exp(s\vec{v}_1)\exp(s\vec{v}_1) \tag{6}$$

$$\left[\exp(t\vec{v}_1)\right]^{-1} = \exp(-t\vec{v}_1) \tag{7}$$

自此我们建立了李群中部分元素和李群单位元切空间T_e的一一对应.

4.1.4. 李群切空间到李群的邻域

有了映射,我们得到如下定理:

e处切空间T_e中存在切空间单位元$\vec{e}$的邻域$TU_{\vec{e}}$, 使得$TU_{\vec{e}}$通过指数映射,与e的邻域微分同构.

4.1.5. 指数映射的Taylor展开

4.1.5.1. 第一类坐标系

为了更好地研究指数映射, 在李群(流形)上引入第一类坐标系

$$N_e = \{\exp\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{E}_i | \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{E}_i \in N_{\vec{e}}\} \tag{8}$$

这个坐标系的含义是, 通过切空间的基矢量 $\vec{E}_i$, 展开切空间单位元邻域 $N_{\vec{e}}$得到$N_{\vec{e}}$ 中的坐标x_i , 然后将切空间的任意一个向量$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{E}_i$通过指数映射$\exp\vec{v}$得到李群单位元素邻域的元素$\exp\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{E}_i$.

4.1.5.2. 建立Taylor公式

定理: 存在g的原点邻域$N_{\vec{e}}$.满足若$\vec{x} \in N_{\vec{e}}$, 则 $0 \le t \le 1$都有$t\vec{x} \in N_{\vec{e}}$, 且对G上解析的函数f有:

$$f(g \cdot \exp\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\vec{x}^n f)(g) = \exp(\vec{x}) f(g) \tag{9}$$

取$g = e, f(x) = x$可以看出上式就是指数函数的展开

$$\exp\vec{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\vec{x}^n \tag{10}$$

注意到这里第一次出现了切空间的运算$\vec{x}^n$

> 定理的证明如下(待完善)
>
> $$\begin{aligned}
(\vec{x}f)g &= (\vec{x}f \cdot L_g)(\exp t\vec{x}|_{t=0}) \\
&= \left(d\theta\left(\frac{d}{dt}\right)f \cdot L_g\right)(\exp t\vec{x}|_{t=0}) \\
&= \frac{d}{dt}f\left(g\exp t\vec{x}|_{t=0}\right) \\
&\Rightarrow \\
(\vec{x}f)\left(g\exp u\vec{x}\right) &= \frac{d}{du}f\left(g\exp u\vec{x}|_{t=0}\right) \\
&\Rightarrow \\
(\vec{x}^n f)\left(g\exp u\vec{x}\right) &= \frac{d^n}{du^n}f\left(g\exp u\vec{x}|_{t=0}\right)
\end{aligned}$$

4.1.6. 切空间运算,李代数

见 [4]. 切空间运算是依赖于映射的. 之前通过指数映射我们得到了切空间的运算规律.

应用指数运算和群的封闭性:

$$\begin{aligned}\exp\vec x\cdot\exp\vec y &= \exp\vec z\\ &= (1+\vec x+\frac{1}{2}\vec x^2+\cdots)(1+\vec y+\frac{1}{2}\vec y^2+\cdots)\end{aligned}\tag{11}$$

若上式 (11) 中 $\vec x$, $\vec y$ 对易, 则:

$$\exp\vec x\cdot\exp\vec y = (1+(\vec x+\vec y)+\frac{1}{2!}(\vec x+\vec y)^2+\frac{1}{3!}(\vec x+\vec y)^3+\cdots)$$

若上式 (11) 中 $\vec x$, $\vec y$ 不对易, 则

$$\exp\vec x\cdot\exp\vec y = (1+(\vec x+\vec y)+\frac{1}{2!}(\vec x+\vec y)\cdot(\vec x+\vec y)+\frac{1}{3!}(\vec x+\vec y)\cdot(\vec x+\vec y)\cdot(\vec x+\vec y)+\cdots)$$

为了将$\vec z$表示成$\vec x+\vec y$的形式, 我们计算由于不对易性导致式 (11) 的差:

$$\begin{aligned}(\vec x+\vec y)^n-\underbrace{(\vec x+\vec y)\cdot(\vec x+\vec y)\cdot\cdots\cdot(\vec x+\vec y)}_{n个(\vec x+\vec y)} &= \sum_i\binom{i}{n}\vec x^i\vec y^{n-i}-\sum_i P_n^i(\vec x,\vec y)\\ &= \sum_i\binom{i}{n}\sum_j\left(\vec x^i\vec y^{n-i}-\underbrace{\vec x\cdot\vec y\cdot\vec x\cdot\vec x\cdot\vec y\cdots}_{第\,j种排列}\right)\end{aligned}$$

如果$[\vec x,\vec y]$是一个复数(c-number), 利用BCH公式 [5] , 得到二者之差为:

$$\begin{aligned}&= \left(1+(\vec x+\vec y)+\frac{1}{2}(\vec x^2+2\vec x\cdot\vec y+\vec y^2)+\mathcal{O}(3)\right)\\ &= \left(1+(\vec x+\vec y)+\frac{1}{2}(\vec x^2+\vec y\cdot\vec x+\vec x\cdot\vec y+\vec y^2+(\vec x\cdot\vec y-\vec y\cdot\vec x))+\mathcal{O}(3)\right)\\ &= \left(1+(\vec x+\vec y)+\frac{1}{2}(\vec x^2+\vec y\cdot\vec x+\vec x\cdot\vec y+\vec y^2)+\frac{1}{2}(\vec x\cdot\vec y-\vec y\cdot\vec x)+\mathcal{O}(3)\right)\\ &= \left(1+(\vec x+\vec y)+\frac{1}{2}(\vec x+\vec y)(\vec x+\vec y)+\frac{1}{2}[\vec x,\vec y]+\mathcal{O}(3)\right)\\ &= \exp\left((\vec x+\vec y)+\frac{1}{2}[\vec x,\vec y]\right)\end{aligned}\tag{12}$$

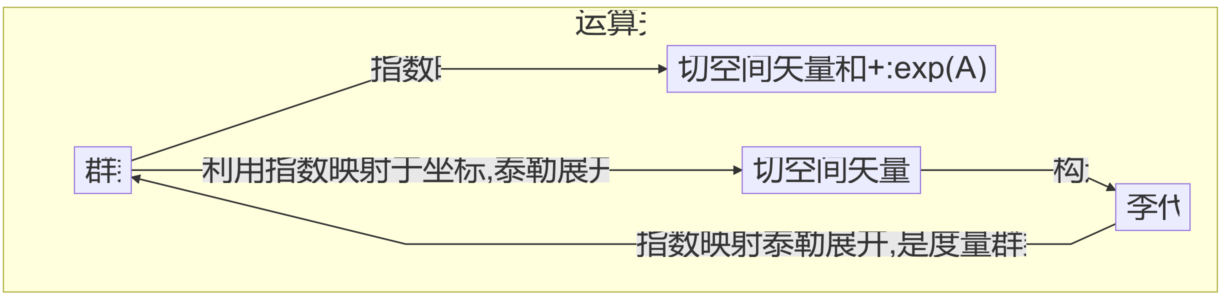
↑ ↑

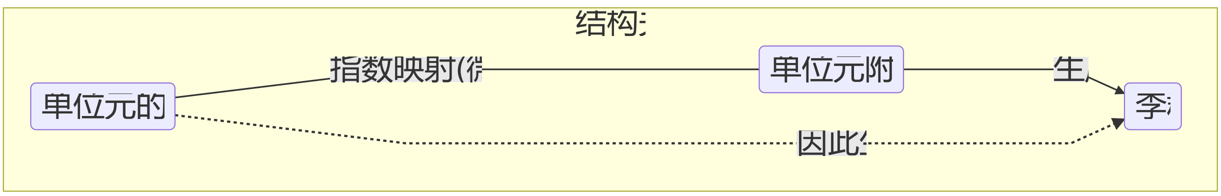
矢 量 和 李 代 数 矢 量 积

因此可以说,李代数是李群结构非对易性的线性化(即"低阶近似"), (是反应不对易性的第一项)

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \exp A\exp B\exp\left(-\frac{1}{2}[A,B]\right) \quad C = A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[[A,B],B]+\frac{1}{12}[[B,A],A]+\cdots[[A,B],B]=[[B,A],A]=0\\ &= \exp C\end{aligned}$$

4.2. 李群的无穷小性质





李群的"无穷小元素"实际上不在李群中. 他们指的实际上是单位元e所在切空间T_e的切向量. 但是可以将切向量映射到在单位元附近的李群元素. 他们的积表现为矢量和.对应逆表现为矢量反向.

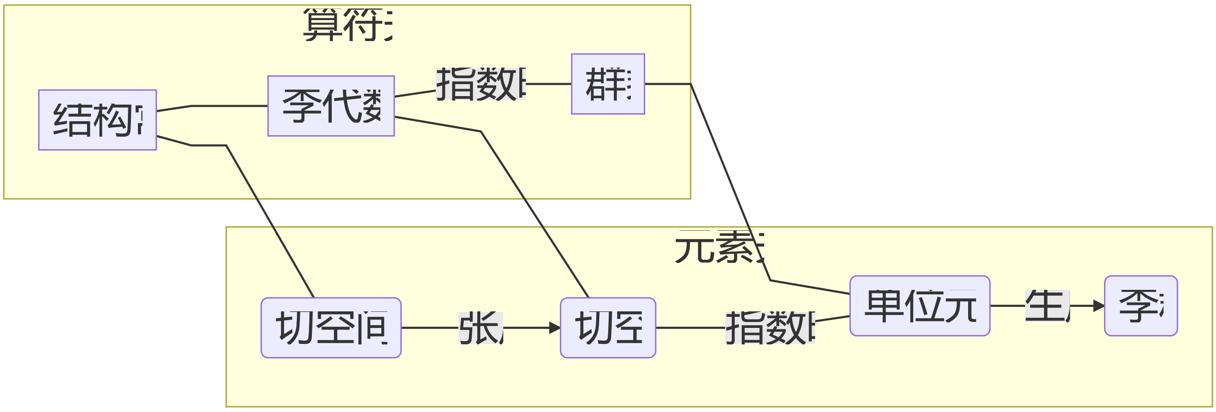
$$(1+\delta)(1+\varepsilon) = 1+\delta+\varepsilon+\delta\varepsilon \approx 1+(\delta+\varepsilon)$$

很显然的是, $(1+\delta)+(1+\varepsilon) \neq 1+(\delta+\varepsilon)$. 用Δ, E表示他们对应的切矢量,即$\Delta = \exp\delta$, $E = \exp\varepsilon$

$$\begin{aligned}\delta\cdot\varepsilon &= \exp\Delta\cdot\exp E\\ &= \left(1+\Delta+\frac{1}{2}\Delta^2+\cdots\right)\left(1+E+\frac{1}{2}E^2+\cdots\right)\\ &= (1+(\Delta+E)+\cdots)\\ &= \exp(\Delta+E)\end{aligned} \tag{13}$$

因此式(13)才是"元素积表现(在一阶近似下)为(对应切矢量的)矢量和"的真正含义.

4.3. 李群的生成元



由以上关系, 只要用切空间的基矢以及结构常数就可以生成整个李群. **切空间的一组基矢就是李代数的生成元**

5. 举例

5.1. 三维转动群

见[6]

5.1.1. 三维转动群的群元素与切向量

三维转动群的变换矩阵构成一个李群.其中选取绕z轴旋转ω角度的矩阵, 构成一个单参数李群:

$$R_z(\omega) = \begin{bmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{14}$$

单位元为

$$R_z(0) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

单位元的切空间内切向量为

$$\begin{aligned}\dot{R}_z(0) = \frac{d}{d\omega}R_z(\omega)\bigg|_{\omega=0} &= \begin{bmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Bigg|_{\omega=0}\\ &= \begin{bmatrix}-\sin\omega & -\cos\omega & 0\\ \cos\omega & -\sin\omega & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Bigg|_{\omega=0}\\ &= \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

同样可以得到其余两个轴的转动关系,总结得到:

$$R_x(\omega)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\omega&-\sin\omega\\0&\sin\omega&\cos\omega\end{bmatrix}\qquad \dot{\vec{R}}_x(0)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$R_y(\omega)=\begin{bmatrix}\cos\omega&0&\sin\omega\\0&1&0\\-\sin\omega&0&\cos\omega\end{bmatrix}\qquad \dot{\vec{R}}_y(0)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$R_z(\omega)=\begin{bmatrix}\cos\omega&-\sin\omega&0\\\sin\omega&\cos\omega&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \dot{\vec{R}}_z(0)=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

以上就是三维转动李群生成元的3×3矩阵表示. 注意到

$$\dot{\vec{R}}_x(0)^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{R}}_x(0)^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{R}}_x(0)^4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{R}}_x(0)^5=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

5.1.2. 三维转动群的指数映射

因此有切矢量的指数映射, 泰勒展开后得到群元素(式(10)的类比):

$$\begin{aligned}
\exp\left(\omega\dot{\vec{R}}_x(0)\right)&=\sum_n\frac{1}{n!}\left(\omega\dot{\vec{R}}_x(0)\right)^n\\
&=I\cdot(1+\frac{1}{2!}\omega^2\left(\dot{\vec{R}}_x(0)\right)^2+\frac{1}{4!}\omega^4\left(\dot{\vec{R}}_x(0)\right)^4+\cdots)+(\omega\dot{\vec{R}}_x(0)+\frac{1}{3!}\omega^3\left(\dot{\vec{R}}_x(0)\right)^3+\frac{1}{5!}\omega^5\left(\dot{\vec{R}}_x(0)\right)^5\cdots)\\
&=I+(-\frac{1}{2!}\omega^2+\frac{1}{4!}\omega^4+\cdots)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(\omega-\frac{1}{3!}\omega^3+\frac{1}{5!}\omega^5\cdots)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(-\frac{1}{2!}\omega^2+\frac{1}{4!}\omega^4+\cdots)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(\omega-\frac{1}{3!}\omega^3+\frac{1}{5!}\omega^5\cdots)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+(1-\frac{1}{2!}\omega^2+\frac{1}{4!}\omega^4+\cdots)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(\omega-\frac{1}{3!}\omega^3+\frac{1}{5!}\omega^5\cdots)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\cos\omega\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\sin\omega\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\omega&-\sin\omega\\0&\sin\omega&\cos\omega\end{bmatrix}\\
&=R_x(\omega)
\end{aligned}\tag{15}$$

5.1.3. 三维转动群的"无穷小元素"的作用: 计算生成元

因此按照之前的说法, 三维转动李群的切空间元素就是三个矩阵(实际上是Pauli矩阵的变形).

无穷小元素按照之前定义, 具有下述性质

$$(1+\delta\mathbf{1})(1+\varepsilon\mathbf{1})=(1+(\delta+\varepsilon)\mathbf{1})\tag{16}$$

而与切空间向量对应的群元素有

$$
\begin{aligned}
\exp(\delta\vec{R}_x)\cdot\exp(\varepsilon\vec{R}_x) &= \left(1+\delta\vec{R}_x+\frac{1}{2!}\delta^2\vec{R}_x^{\ 2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\varepsilon\vec{R}_x+\frac{1}{2!}\varepsilon^2\vec{R}_x^{\ 2}+\cdots\right)\\
&= \left(1+(\delta+\varepsilon)\vec{R}_x+\frac{1}{2!}(\delta^2+2\delta\varepsilon+\varepsilon^2)\vec{R}_x^{\ 2}+\cdots\right)\\
&= \left(1+(\delta+\varepsilon)\vec{R}_x+\frac{1}{2!}(\delta+\varepsilon)^2\vec{R}_x^{\ 2}+\cdots\right)\\
&= \exp((\delta+\varepsilon)\vec{R}_x)
\end{aligned}
$$

可以看出,在最低阶近似下, 切空间向量指数映射满足"无穷小元素"的运算规则:

可以说, 无穷小元素只是一个计算的手段, 可以方便地得到**标量算符**生成元应当满足的关系.

5.1.3.1. 无穷小元素计算举例

例如对转动群

$$
\begin{array}{cc}
\begin{aligned} R &= 1+\varepsilon g \\ P_R &= 1+\omega\varepsilon g \\ &\text{some calculation} \\ f(\omega) &= 0 \end{aligned} &
\begin{aligned} R &= \exp(\varepsilon g) \\ P_R &= \exp(\omega\varepsilon g) \\ &\text{some calculation} \\ f(\omega) &= 0 \end{aligned}
\end{array}
$$

ω就是标量算符的生成元两 者 计 算 结 果 是 一 样 的

5.1.4. 三维转动群的"生成元"

下面研究这个李群的无穷小生成元.

$$
\begin{aligned}
P_{R(\alpha)}\psi(x) &= \psi(R(\alpha)^{-1}x)\\
&= \psi(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\psi(R(\alpha)^{-1}x)}{\partial\alpha^n}\alpha^n\\
&= \psi(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\psi(R(\alpha)^{-1}x)}{\partial\left(R(\alpha)^{-1}x\right)^n}\frac{\partial^n\left(R(\alpha)^{-1}x\right)}{\partial\alpha^n}\alpha^n\\
&= \psi(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\psi(x)}{\partial x^n}\frac{\partial^n\left(R(\alpha)^{-1}x\right)}{\partial\alpha^n}\alpha^n
\end{aligned}
$$

5.2. 物理中的对称性生成元

5.2.1. 平移对称性的生成元

6. 参考文献

1. Mario Micheli. *Basics IX : Lie groups and Lie algebras* . PDF file. April 25, 2018. http://www.dam.brown.edu/people/mariom/AM282-01/HANDOUTS/Basic+EPDiff.pdf ↩
2. Tom Church. *LIE GROUPS AND LIE ALGEBRAS.* PDF file.April 25, 2018. http://math.uchicago.edu/~womp/2007/lie2007.pdf ↩
3. http://idv.sinica.edu.tw/ftliang/diff_geom/*diff_geometry(II)/Lie_theory/2lie_algebra.pdf ↩
4. Heisenberg's QM", P58, Baker-Campbell-Hausdorff Formula ↩
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Baker%E2%80%93Campbell%E2%80%93Hausdorff_formula ↩
6. 物理学中的群论 马中骐. ↩