

---

# 一 测量金属的杨氏模量

## 第一部分：拉伸法测定金属的杨氏模量

### 【实验简介】

杨氏模量是表征固体材料抵抗形变能力的重要物理量，是工程材料重要参数，它反映了材料弹性形变与内应力的关系，它只与材料性质有关，是工程技术中机械构件选材时的重要依据。本实验测量铅丝的纵向弹性模量（也称杨氏模量）。实验中涉及较多长度量的测量，应根据不同测量对象，选择不同的测量仪器。如读数显微镜配以 CCD 成像系统测量铅丝微小的伸长量。

### 【实验目的】

1. 学会用 CCD 杨氏模量测量仪测量长度的微小变化量；
2. 学会测定金属丝杨氏弹性模量的一种方法；
3. 学习用逐差法、作图法和最小二乘法处理数据；
4. 学会计算各物理量的不确定度，并用不确定度正确表达实验结果。

### 【实验仪器与用具】

CCD 杨氏弹性模量测量仪、螺旋测微器、钢卷尺。



图 1 实验仪器示意图

CCD 杨氏弹性模量测量仪主要技术指标如下：

采用分化板+CCD 测量显微镜系统+彩色液晶监视器方案；

立柱：不锈钢双柱高约 85cm；

---

钼丝：长约 60cm，直径 0.18mm，悬挂位置及长度可调节；  
监视器：彩色液晶监视器；  
分化板：刻度范围 4mm，分度值 0.05mm，设有限位槽，可防止来回摆动，采用 LED 照明；  
CCD 测量显微镜系统：放大倍率 60 倍，内含电子刻度线，可二维调节，可卸下用于其他微位移测量场合，采用高级面阵 CCD，信噪比 $\geq 52\text{db}$ ，分辨率 480TVL，视频输出幅度： $1.0V_{P-P}/75\Omega$ ；  
砝码组：10 个砝码，200 克 8 个及 100 克 2 个；  
底座沉稳，可进行水平调节，设有储藏格可贮存砝码组；  
测量相对不确定度： $<5\%$ ；

## 【实验原理】

任何物体在外力作用下都会发生形变，当形变不超过某一限度时，撤走外力之后，形变能随之消失，这种形变称为弹性形变。如果外力较大，当它的作用停止时，所引起的形变并不完全消失，而有剩余形变，称为塑性形变。发生弹性形变时，物体内部产生恢复原状的内应力。弹性模量是反映材料形变与内应力关系的物理量，是工程技术中常用的参数之一。

### 1. 杨氏模量

在形变中，最简单的形变是柱状物体受外力作用时的伸长或缩短形变。设柱状物体的长度为  $L$ ，截面积为  $S$ ，沿长度方向受外力  $F$  作用后伸长（或缩短）量为  $\Delta L$ ，单位横截面积上垂直作用力  $F/S$  称为正应力，物体的相对伸长  $\Delta L/L$  称为线应变。实验结果证明，在弹性范围内，正应力与线应变成正比，即

$$\frac{F}{S} = Y \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

这个规律称为虎克定律。式中比例系数  $Y$  称为杨氏弹性模量。在国际单位制中，它的单位为  $N/m^2$ ，在厘米克秒制中为达因/厘米<sup>2</sup>。它是表征材料抗应变能力的一个固定参量，完全由材料的性质决定，与材料的几何形状无关。

本实验需要测量钼丝的杨氏弹性模量，实验方法是将钼丝悬挂于支架上，上端固定，下端加砝码对钼丝施加力  $F$ ，测出钼丝相应的伸长量  $\Delta L$ ，即可求出  $Y$ 。钼丝长度  $L$  用钢卷尺测量，钼丝的横截面积  $S = \pi d^2/4$ ，直径  $d$  用螺旋测微器测出，力  $F$  由砝码的质量求出。由式（1）可得

$$Y = \frac{4FL}{\pi d^2 \Delta L} \quad (2)$$

### 2. 测量原理

在实际测量中，由于钼丝伸长量  $\Delta L$  的值很小，约  $10^{-1}mm$  数量级。因此这里  $\Delta L$  的测量采用显微镜和 CCD 成像系统进行测量。如图 1 所示，在悬垂的金属丝下端连着十字叉丝板和砝码盘，当盘中加上质量为  $M$  的砝码时，金属丝受力增加了

$$F = Mg \quad (3)$$

十字叉丝随着金属丝的伸长同样下降了 $\Delta L$ ，而叉丝板通过显微镜的物镜成像在最小分度为0.05mm的分划板上，再被目镜放大，所以能够用眼睛通过显微镜对 $\Delta L$ 做直接测量。采用CCD系统代替眼睛更便于观测，并且能够减轻视疲劳：CCD摄像机的镜头将显微镜的光学图像汇聚到CCD（Charge Coupled Device，电荷耦合器件）上，再变成视频电信号，经视频电缆传送到显示器，即可供多人同时观测。

## 【实验内容】

### 1. 仪器调节

支架的调节：仪器外形见图1。除显示器以外，各器件都在同一底座上。底座可以用螺旋底角调平。叉丝组分划板正对CCD摄像头。调节下横梁高度，保证叉丝组放置在下横梁的槽内。

CCD摄像机的调节：将CCD摄像头放入固定座内，将CCD摄像头与分划板放置在同一水平面上，前后调节CCD摄像头观察监视器，直到可以观察到清晰的像，若分划板刻度尺像不在监视器的中心，则微调CCD摄像头位置使像处于中心位置。

### 2. 测量

(1) 在测量铝丝杨氏模量之前，先放2块100g的砝码把铝丝拉直，保证分划板卡在下横梁的槽内，这样可以避免在拉直过程中分划板旋转。注意分划板刻度尺在监视器上位置不要过高，需低于3mm。

(2) 记下待测细丝下的砝码盘未加砝码时屏幕上显示的毫米尺在横线上的读数 $l_0=0$ ，以后在砝码盘上每增加一个 $M=200\text{g}$ 的砝码，记下相应的叉丝读数 $l_i$ （ $i=1, 2, \dots, 8$ ）。然后逐一减掉砝码，再从屏上读取 $l'_1, l'_2, \dots, l'_8$ 。

加减砝码时，动作要轻，防止因增减砝码时使砝码盘产生微小振动而造成读数起伏较大。

(3) 取同一负荷下叉丝读数的平均值 $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_8$ ，用逐差法求出铝丝荷重增减4个砝码时光标的平均偏移量 $\Delta L$ 。

(4) 用钢卷尺测量上、下夹头间的铝丝长度 $L$ 。

(4) 用螺旋测微器测量铝丝直径 $d$ ，由于铝丝直径可能不均匀，按工程要求应在上、中、下各部进行测量。每位置在相互垂直的方向各测一次。

(5) 将前述原理公式分解整理即得：

$$Y = \frac{4MgL}{\pi d^2 \Delta L} \quad (4)$$

式中， $\Delta L$ 与 $M$ 有对应关系，如果 $M$ 是1个砝码的质量， $\Delta L$ 应是荷重增（或减）1个砝码所引起的光标偏移量；如果 $\Delta L$ 是荷重增（或减）4个砝码所引起的光标偏移量， $M$ 就应是4个砝码的质量。（铝丝的杨氏模量 $Y$ 约为 $2.3 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ）。

### 3. 测量钢丝的杨氏模量（选做）

采用与上述同样的步骤测量钢丝的杨氏模量。

## 【实验数据记录表】

1. 测量铝丝的微小伸长量，记录表如下 叉丝初始读数  $l_0 = \underline{\hspace{2cm}} mm$

序号 $i$	砝码质量 m/g	叉丝读数			叉丝偏移量/mm $\Delta L = \bar{l}_{i+4} - \bar{l}_i$
		增荷时 $l_i$	减荷时 $l'_i$	平均值 $\bar{l}_i$	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

2. 测量铝丝直径记录表  $d_0 = \underline{\hspace{2cm}} mm$

测量部位	上 部		中 部		下 部		平均值
测量方向	纵 向	横 向	纵 向	横 向	纵 向	横 向	
d (mm)							

不确定度  $u(d) = \underline{\hspace{2cm}} mm$

测量结果  $d = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) mm$

3. 单次测 L 值:

应为 L 为单次测量值，我们给定一个误差  $\sigma L = 0.2cm$

$$L = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) m ;$$

4. 将所得各量带入 (4) 式，计算出铝丝的杨氏弹性模量，按传递公式计算出不确定度，并将测量结果表示成标准式:

$$\text{不确定度} \quad E_Y = \frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{4\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta L)}{\Delta L}\right)^2}$$

$$\Delta Y = E_Y * Y$$

$$Y = \bar{Y} \pm \Delta Y = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) \times 10^{11} N / m^2.$$

5. 用作图法和最小二乘法处理数据

将 4 式写成如下形式:

$$M = \frac{\pi d^2 Y}{4gL} \Delta L \quad (5)$$

令  $K = \frac{\pi d^2 Y}{4gL}$ ，即 (5) 式转换成  $M = K \Delta L$ ;

在既定的实验条件下， $M$  为一个常数，即产生  $\Delta L$  所对应的砝码质量，以  $\Delta L$  为横坐标， $M$  为

纵坐标，做  $M-\Delta L$  图，该图应为一 条直线，其斜率为  $K$ ，用最小二乘法求得  $K$  后即可得到杨氏模量：

$$Y = \frac{4gL}{\pi d^2 K} \quad (6)$$

### 【注意事项】

1. 使用 CCD 摄像机须知：CCD 器件不可正对太阳、激光或其他强光源。注意保护镜头，防潮、防尘、防污染。非特别需要，请勿随意卸下。
2. 金属丝：**钼丝都必须保持直线形态**。测直径时要特别谨慎，避免由于扭转、拉扯、牵挂导致细丝折弯变形。
3. 读数时一定要等到刻度值稳定之后才能进行。
4. 将砝码放置于砝码盘的时候一定要保证轻拿轻放，防止钼丝突然受力而断裂。

### 【思考题】

1. 杨氏模量测量数据  $N$  若不用逐差法而用作图法，如何处理？
2. 两根材料相同但粗细不同的金属丝，它们的杨氏模量相同吗？为什么？
3. 本实验使用了哪些测量长度的量具？选择它们的依据是什么？它们的仪器误差各是多少？
4. 在 CCD 法测定金属丝杨氏模量实验中，为什么起始时要加一定数量的底码？
5. 加砝码后标示横线在屏幕上可能上下颤动不停，不能够完全稳定时，如何判定正确读数？

### 【参考文献】

- [1] 吕斯骅，段家祗. 新编基础物理实验. 北京：高等教育出版社，2006。

## 第二部分：霍尔位置传感方法测量杨氏模量

### 【实验简介】

固体材料杨氏模量是综合性大学和工科院校物理实验中必做的实验之一。该实验可以学习和掌握基本长度和微小位移量测量的方法和手段，提高学生的实验技能。随着科学技术的发展，微小位移量的测量方法和技术越先进，为了推动教学仪器和教学内容的现代化，我们研制并生产了杨氏模量实验仪。该仪器是在弯曲法测量固体材料杨氏模量的基础上，加装霍尔位置传感器而成的。通过霍尔位置传感器的输出电压与位移量线形关系的定标和微小位移量的测量，有利于联系科研和生产实际，使学生了解和掌握微小位移量的非电量电测新方法。

本仪器对经典实验装置和方法进行了改进，不仅保留了原有实验的教学内容，还增加了对霍尔位置传感器的结构、原理、特性及使用方法的了解；同时对原有的砝码加力系统进行了改进，采用电子称加力机构，提高了系统的分辨率并且克服了砝码加力系统不稳定性问题。

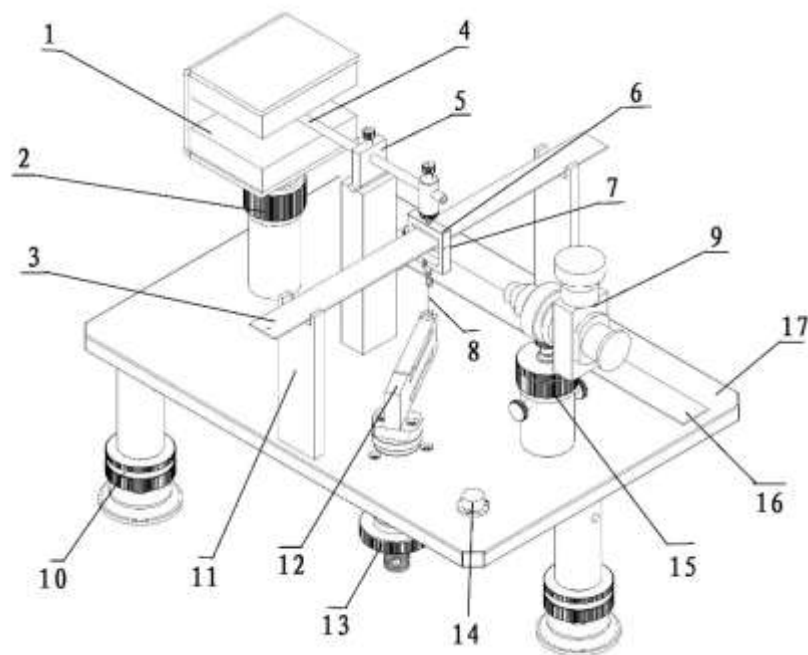
弯曲法测金属杨氏模量实验仪的特点是待测金属薄板只须受较小的力  $F$ ，便可产生较大的形变  $\Delta Z$ ，而且本仪器体积小、重量轻、测量结果准确度高，本仪器杨氏模量实际测量误差小于 3%。

### 【实验目的】

1. 熟悉霍尔位置传感器的特性；
2. 弯曲法测量黄铜的杨氏模量；
3. 测黄铜的杨氏模量的同时，对霍尔位置传感器定标；
4. 用霍尔位置传感器测量可锻铸铁的杨氏模量。

### 【实验仪器与用具】

1、霍尔位置传感器测杨氏模量实验装置一台（底座固定箱、读数显微镜及调节机构、SS495A 型集成霍尔位置传感器、磁体、支架、加力机构以及测试样品等）；见图 1。



1. 磁体(磁铁对) 2. 磁体调节机构 3, 16 试样 4. 铜杠杆(顶端装有 SS495A 型集成霍尔传感器) 5. 杠杆支架 6. 铜刀口 7. 铜刀口上的基线 8. 拉力绳 9. 读数显微镜 10. 水平调节机脚 11. 立柱 12. 电子称传感器 13. 加力调节旋钮 14. 水平泡 15. 读数显微镜上下调节机构 17. 平台

图 1 实验装置说明

2、霍尔位置传感器测杨氏模量测试仪一台。

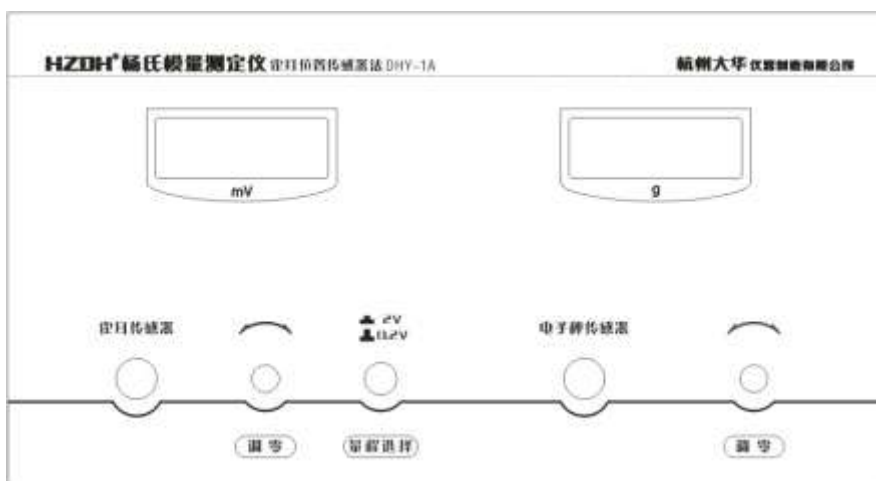


图 2 测试仪面板图

测试仪由霍尔电压测量系统和电子称加力系统构成，霍尔电压测试分为两个量程，带调零功能；电子称加力系统测量范围 0~199.9g。

技术指标如下：

1. 读数显微镜

型号	JC-10 型
目镜放大率	10 倍
目镜测微鼓轮最小分度值	0.01mm
物镜放大率	2 倍
测量范围	0~6mm
鼓轮实际读数最小分辨率	$0.01/2=0.005\text{mm}$

2. 电子称传感器加力系统：0~199.9g 连续可调，三位半数显。

3. 霍尔电压表：量程 1：0~199.9mV，分辨率 0.1mV；

量程 2：0~1.999V，分辨率 1mV。

4. 霍尔位置传感器：灵敏度大于 250mV/mm，线性范围 0~2mm。

## 【实验原理】

1、霍尔元件置于磁感强度为  $B$  的磁场中，在垂直于磁场方向通以电流  $I$ ，则与这二者垂直的方向上将产生霍尔电势差  $U_H$ ：

$$U_H = K \cdot I \cdot B \quad (1)$$

(1) 式中  $K$  为元件的霍尔灵敏度。如果保持霍尔元件的电流  $I$  不变，而使其在一个均匀梯度的磁场中移动时，则输出的霍尔电势差变化量为：

$$\Delta U_H = K \cdot I \cdot \frac{dB}{dZ} \cdot \Delta Z \quad (2)$$

(2) 式中  $\Delta Z$  为位移量，此式说明若  $\frac{dB}{dZ}$  为常数时， $\Delta U_H$  与  $\Delta Z$  成正比。

为实现均匀梯度的磁场，可以如图 3 所示两块相同的磁铁（磁铁截面积及表面感应强度相同）相对位置，即 N 极与 N 极相对，两磁铁之间留

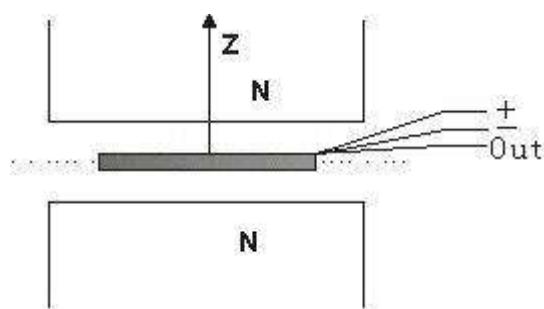


图 3 测量示意图

一等间距间隙，霍尔元件平行于磁铁放在该间隙的中轴上。间隙大小要根据测量范围和测量灵敏度要求而定，间隙越小，磁场梯度就越大，灵敏度就越高。磁铁截面要远大于霍尔元件，以尽可能的减小边缘效应的影响，提高测量精确度。

若磁铁间隙内中心截面处的磁感应强度为零，霍尔元件处于该处时，输出的霍尔电势差应该为零。当霍尔元件偏离中心沿  $Z$  轴发生位移时，由于磁感应强度不再为零，霍尔元件也就产生相应的电势差输出，其大小可以用数字电压表测量。由此可以将霍尔电势差为零时元件所处的位置作为位移参考零点。

霍尔电势差与位移量之间存在一一对应关系，当位移量较小 ( $<2\text{mm}$ )，这一一对应关系具有良好的线性。

2. 在横梁弯曲的情况下，杨氏模量  $E$  可以用下式表示：

$$E = \frac{d^3 \cdot Mg}{4a^3 \cdot b \cdot \Delta Z} \quad (7)$$

其中： $d$  为两刀口之间的距离； $M$  为所加拉力对应的质量； $a$  为梁的厚度； $b$  为梁的宽度； $\Delta Z$  为梁中心由于外力作用而下降的距离； $g$  为重力加速度。

## 【实验内容】

### 1、基本内容：

测量黄铜样品的杨氏模量和霍尔位置传感器的定标。

- (1) 调节使集成霍尔位置传感器探测元件处于磁铁中间的位置。
- (2) 用水平泡观察平台是否处于水平位置，若偏离时调节水平调节机脚。
- (3) 调零霍尔位置传感器测量毫伏电压表。通过磁体调节结构上下移动磁铁，当毫伏表读数很小时，停止调节并固定螺丝，最后调节调零电位器使毫伏表读数为零。
- (4) 调节读数显微镜，使眼睛观察十字线及分划板刻度线和数字清晰。然后移动读数显微镜前后距离，使能清晰看到铜刀口上的基线。转动读数显微镜读数鼓轮使铜刀口上的基线与读数显微镜内十字刻度线吻合，记下初始读数值。
- (5) 在拉力绳不受力的情况下将电子称传感器加力系统进行调零。
- (6) 通过加力调节旋钮逐次增加拉力（每次增加  $10\text{g}$ ），相应从读数显微镜上读出梁的弯曲位移  $\Delta Z_i$  及霍尔数字电压表相应的读数值  $U_i$ （单位  $\text{mV}$ ）。以便计算杨氏模量和对霍尔位置传感器进行定标。
- (7) 测量试样在两刀口间的长度  $d$ 、不同位置横梁宽度  $b$  以及横梁厚度  $a$ 。
- (8) 用逐差法按公式 (3) 进行计算，求得黄铜材料的杨氏模量。并求出霍尔位置传感器的灵敏度  $\Delta U_i / \Delta Z_i$ 。

(9) 把测量结果与公认值进行比较。

### 2、选做内容：

用霍尔位置传感器测量可锻铸铁的杨氏模量。

(1) 通过加力系统逐次增加拉力，相应读出霍尔数字电压表读数值。由霍尔传感器的灵敏度，计算出下的距离  $\Delta Z_i$ 。

(2) 测量不同位置横梁宽度  $b$  和横梁厚度  $a$ ，用逐差法按公式 (3) 计算可锻铸铁的杨氏模



量。

### 【数据处理】

1、逐差法计算黄铜或铸铁的杨氏模量，并计算各物理量的不确定度。

（黄铜材料特性标准数据  $E_0 = 10.55 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ；铸铁材料特性标准数据  $E_0 = 18.15 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ）

2、最小二乘法及画图法对霍尔位置传感器定标。

### 【注意事项】

（1）用千分尺待测样品厚度必须不同位置多点测量取平均值。测量黄铜样品时，因黄铜比钢软，旋紧千分尺时，用力适度，不宜过猛。

（2）用读数显微镜测量铜刀口基线位置时，刀口不能晃动。

### 【思考题】

（1）弯曲法测杨氏模量实验，主要测量误差有哪些？请估算各因素的不确定度。

（2）用霍尔位置传感器法测位移有什么优点？

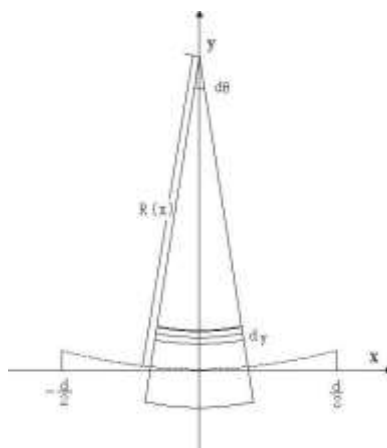
### 【附录 1】式（7）的具体推导

固体、液体及气体在受外力作用时，形状会发生或大或小的改变，这统称为形变。当外力不太大，因而引起的形变也不太大时，撤掉外力，形变就会消失，这种形变称之为弹性形变。弹性形变分为长变、切变和体变三种。

一段固体棒，在其两端沿轴方向施加大小相等、方向相反的外力  $F$ ，其长度  $l$  发生改变  $\Delta l$ ，

以  $S$  表示横截面面积，称  $\frac{F}{S}$  为应力，相对长变  $\frac{\Delta l}{l}$  为应变。在弹性限度内，根据胡克定律有：

$$\frac{F}{S} = Y \cdot \frac{\Delta l}{l}$$



附图 1

如附图 1 所示，虚线表示弯曲梁的中性面，易知其既不拉伸也不压缩，取弯曲梁长为  $dx$  的一小段，设其曲率半径为  $R(x)$ ，所以对应的张角为  $d\theta$ ，再取中性面上部距为  $y$  厚为  $dy$  的一层面为研究对象，那么，梁弯曲后其长变为  $(R(x) - y) \cdot d\theta$ ，所以，变化量为：

$$(R(x) - y) \cdot d\theta - dx$$

又因为

$$d\theta = \frac{dx}{R(x)}$$

所以

$$(R(x) - y) \cdot d\theta - dx = (R(x) - y) \frac{dx}{R(x)} - dx = -\frac{y}{R(x)} dx$$

所以应变为：

$$\varepsilon = -\frac{y}{R(x)} ;$$

根据胡克定律有：

$$\frac{dF}{dS} = -Y \frac{y}{R(x)} ;$$

又因为  $dS = b \cdot dy$ ，

所以

$$dF(x) = -\frac{Y \cdot b \cdot y}{R(x)} dy ;$$

对中性面的转矩为：

$$d\mu(x) = |dF| \cdot y = \frac{Y \cdot b}{R(x)} y^2 \cdot dy$$

积分得：

$$\mu(x) = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{Y \cdot b}{R(x)} y^2 \cdot dy = \frac{Y \cdot b \cdot a^3}{12 \cdot R(x)} ; \quad (\text{附 1})$$

对梁上各点，有：

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} ;$$

因梁的弯曲微小：

$$y'(x) = 0 ;$$

所以有：

$$R(x) = \frac{1}{y''(x)} ; \quad (\text{附 2})$$

梁平衡时，梁在  $x$  处的转矩应与梁右端支撑力  $\frac{Mg}{2}$  对  $x$  处的力矩平衡，

所以有：

$$\mu(x) = \frac{Mg}{2} \left( \frac{d}{2} - x \right) ; \quad (\text{附 3})$$

根据（附 1）、（附 2）、（附 3）式可以得到：

---


$$y''(x) = \frac{6Mg}{Y \cdot b \cdot a^3} \left( \frac{d}{2} - x \right);$$

据所讨论问题的性质有边界条件:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0;$$

解上面的微分方程得到:

$$y(x) = \frac{3Mg}{Y \cdot b \cdot a^3} \left( \frac{d}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right);$$

将  $x = \frac{d}{2}$  代入上式, 得右端点的  $y$  值:

$$y = \frac{Mg \cdot d^3}{4Y \cdot b \cdot a^3};$$

又因为  $y = \Delta Z$ ;

所以, 杨氏模量为:

$$Y = \frac{d^3 \cdot Mg}{4a^3 \cdot b \cdot \Delta Z}$$