

## 演示实验：用单摆测定重力加速度

### 【实验简介】

重力加速度是物理学中的一个重要的物理量，伽利略首先证明了如果忽略空气摩擦的影响，则所有自由下落的物体都将以同一加速度下落，这个加速度就是重力加速度。在实验室里可以用多种办法测量重力加速度，如单摆法、落体法、开特摆等，本实验主要是利用单摆法测定重力加速度。通过对重力加速度的测量，学习使用实验数据的分析方法和误差来源分析及处理方法。

### 【实验目的】

1. 研究单摆振动周期与摆长的关系，测定重力加速度；
2. 学会用作图法处理数据（选做）；
3. 分析误差来源。

### 【实验仪器与用具】

单摆装置、卷尺、游标卡尺、数字毫秒计等

### 【实验原理】

把一个金属小球拴在一根细长的线上，如图所以，如果细线的质量比小球的质量小很多，并且球的直径也比细线的长度小很多，略去空气的阻力和浮力以及线的伸长不计，则此装置可构成单摆。

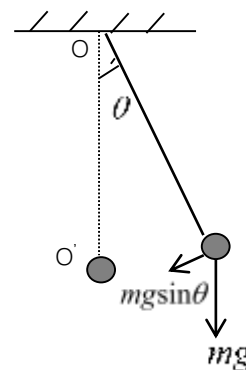
设小球的质量为 $m$ ，其质心到摆的支点 $O$ 的距离为 $l$ （摆长）。作用在小球上的切向力的大小为 $mg \sin \theta$ ，可知它的运动方程为

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (1)$$

当单摆的摆角小于等于 $5^\circ$ 时， $\sin \theta \approx \theta$ ，上式成为常见的简谐振动方程

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \theta \quad (2)$$

从而得到单摆的周期公式



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (3)$$

据此，我们只要通过实验方法测出摆长 $l$ 和周期 $T$ ，就可以通过计算得到当地的重力加速度。值得注意的是，（1） $l$ 是单摆的摆长，是悬点到摆球质心间距，一般为细线长加上小球半径。（2） $T$ 是单摆振动周期。

实验时，测量一个周期的相对误差较大，一般是对相同的量常采用累计测量法，即测量连续摆动 $n$ 个周期的时间 $t$ ，则 $T = \frac{t}{n}$ ，因此，重力加速度实际计算公式为：

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{(t/n)^2} \quad (4)$$

式中 $\pi$ 和 $n$ 不考虑误差，因此公式的误差传递公式为

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} \quad (5)$$

从上式可以看出，在 $\Delta l$ 、 $\Delta t$ 大体一定的情况下，增大 $l$ 和 $t$ 对 $g$ 测量有利。

另外一种测量重力加速度的方法是改变 $l$ 长度测出与之对应的 $T$ ，然后做出 $T^2-l$ 图。如果是一条直线，那么直线的斜率 $k$ 与 $g$ 有关

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \quad (6)$$

从直线中求出

$$k = \frac{T_2^2 - T_1^2}{l_2 - l_1} \quad (7)$$

由此得到

$$g = 4\pi^2 \frac{l_2 - l_1}{T_2^2 - T_1^2} \quad (8)$$

从实验的观点看，用作图法求出 $g$ 比用(1-4)式由单组的 $l$ 和 $T$ 计算 $g$ 更有意义。因(4)式是一个近似公式，实际实验中空气浮力、阻力、悬线质量、摆球的质量分布、摆角以及所用仪器等不可避免地要给实验结果带来系统误差。

## 【实验内容】

### 1. 固定摆长测定重力加速度（摆长 100cm 左右）

- (1)用卷尺测量细线的长度，多次测量获得其平均值。
- (2)用游标卡尺多次测量小球沿摆长方向的直径  $d$ 。

- (3)测量单摆周期，使单摆作小角度摆动，用光电门测量 10 次周期，求平均值。
2. **改变摆长测定重力加速度。**使摆长为 60、70、80、90、110cm 左右，分别测出不同摆长下的 10 次周期，求平均值。
3. **复杂化的单摆周期公式。**实际单摆的周期公式为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{d^2}{20l^2} + \frac{m_0}{12m} \left( 1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right] \quad (9)$$

式中 T 是单摆的周期， $l$ 、 $m_0$  是单摆的线长和质量， $d$ 、 $m$ 、 $\rho$  是摆球的直径、质量和密度， $\rho_0$  是空气密度， $\theta$  是摆角。

从公式上看，实验结果都受了哪些因素影响？

### 【注意事项】

合适的实验器材、正确的测量方法、规范的操作是减小误差的重要保证，为了使实验结果更准确，实验时应该注意以下几点：

(1) 选择摆线时，应选择轻、细而不易伸长的材料，如丝线等，质量远小于摆球的质量；作为摆球的小球应选择体积小而密度较大的金属球；

(2) 摆线的上端不可随意卷在铁夹上，而应该**紧夹在铁夹中固定**，以免摆动时发生摆长改变的现象；摆长应为悬线长与球半径之和；

(3) **摆动时偏角不应超过  $5^\circ$** ，摆动过程中可忽略空气阻力；

(4) 摆球应无初速度释放，且摆动时，要使之保持在**同一个竖直平面内**，不要形成圆锥摆；

(5) 计算单摆的振动次数时，应从小球通过最低点时开始计时，以后应从摆球从同一方向通过最低点时计数，且测多次全振动的时间，通过取平均值求周期  $T=t/n$ ；

(6) 为了减少测量误差，要进行多组实验数据的测量，并要画出合适的数据点图像，对实验图像进行拟合，根据拟合方程求出重力加速度。

#### 思考题

1. 用单摆测定重力加速度必须满足的条件是什么？
2. 摆球从平衡位置移开的距离为摆长的几分之一时，摆角约为  $5^\circ$  ？