# 数字电路
# Digital Circuits and System

李文明
liwenming@ict.ac.cn

中国科学院计算技术研究所
INSTITUTE OF COMPUTING TECHNOLOGY, CHINESE ACADEMY OF SCIENCES
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 逻辑代数基础

中国科学院计算技术研究所
INSTITUTE OF COMPUTING TECHNOLOGY, CHINESE ACADEMY OF SCIENCES

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 逻辑代数基础

- 概述
- 逻辑代数中的三种基本运算
- 逻辑代数的基本公式和常用公式
- 逻辑代数的基本定理
- 逻辑函数及其表示方法
- 逻辑函数的化简方法
- 具有无关项的逻辑函数及其化简

# 逻辑代数基础

- 概述
- 逻辑代数中的三种基本运算
- 逻辑代数的基本公式和常用公式
- 逻辑代数的基本定理
- 逻辑函数及其表示方法
- 逻辑函数的化简方法
- 具有无关项的逻辑函数及其化简

# 逻辑概念(1)

- 逻辑
  - 指事物的规律性和因果关系
- 逻辑运算
  - 两个表示不同的逻辑状态的二进制数码，按照指定的某种因果关系进行推理运算
- 逻辑代数
  - 逻辑学中的数学分支，在电子领域用二值变量进行描述，称布尔代数，统称逻辑代数

# 逻辑概念(2)

- 逻辑状态
  - 完全对立、截然相反的二种状态，如：好坏、美丑、真假、有无、高低、开关等
- 逻辑变量
  - 代表逻辑状态的符号，取值 0 和 1
- 逻辑函数
  - 输出是输入条件的函数，有一定的因果关系
- 逻辑电路
  - 电路的输入和输出具有一定的逻辑关系

# 二值逻辑

- 在数字电路中，1位二进制数码“0”和“1”不仅可以表示数量的大小，也可以表示事物的两种不同的逻辑状态，如电平的高低、开关的闭合和断开、电机的起动和停止、电灯的亮和灭等

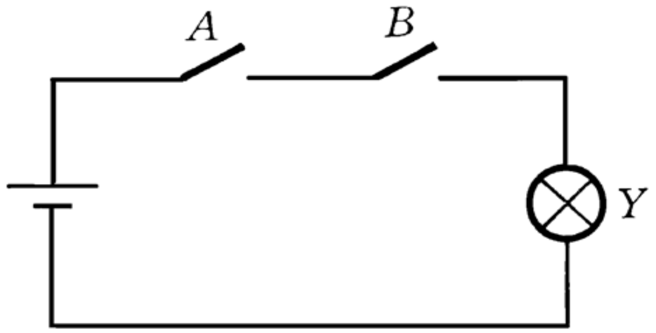
- 这种只有两种对立逻辑状态的逻辑关系，称为**二值逻辑**

# 逻辑代数基础

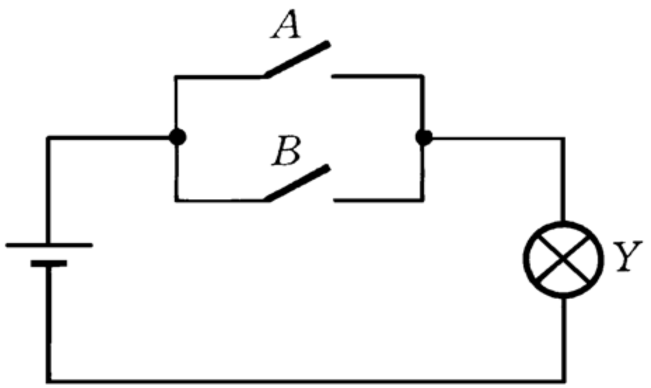
- 概述
- **逻辑代数中的三种基本运算**
- 逻辑代数的基本公式和常用公式
- 逻辑代数的基本定理
- 逻辑函数及其表示方法
- 逻辑函数的化简方法
- 具有无关项的逻辑函数及其化简

# 三种基本运算

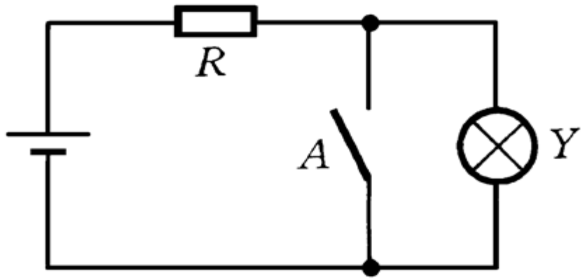
与（AND）




或（OR）




非（NOT）

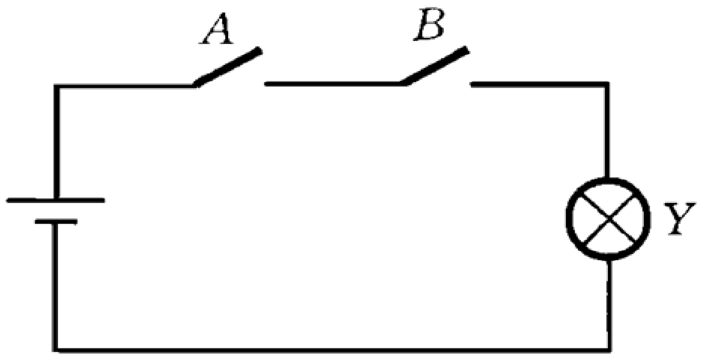



A、B：开关，值为1，开关闭合；值为0，开关断开

Y：灯泡，值为1，灯亮；值为0，灯灭

# 逻辑“与(AND)”

- 定义：只有决定结果的全部条件同时具备时，结果才会发生，又称逻辑乘
- 例：

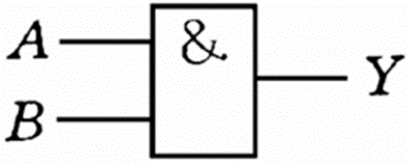



| $A$ | $B$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

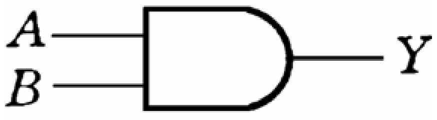
逻辑真值表

有0出0
全1出1

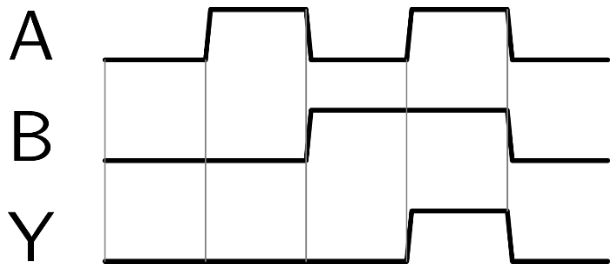
- 逻辑表达式： $\boldsymbol{Y = A \cdot B}$
- 符号图：




欧洲标准符号




美国标准符号




波形图

# 逻辑“或(OR)”

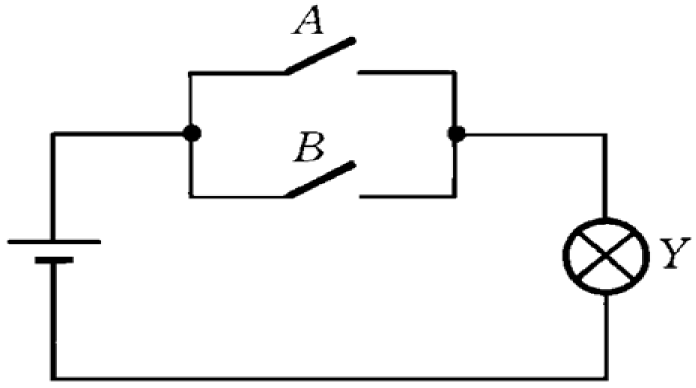
- 定义：在决定事物结果的诸条件中只要有一个满足，结果就会发生，又称逻辑相加

| $A$ | $B$ | $Y$ |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

逻辑真值表

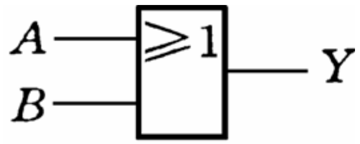
有1出1
全0出0

- 例：



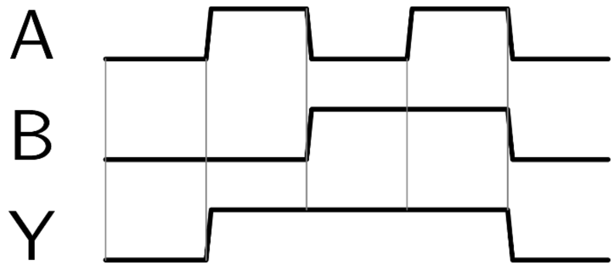

- 逻辑表达式：$Y = A + B$

- 逻辑符号图：




欧洲标准符号

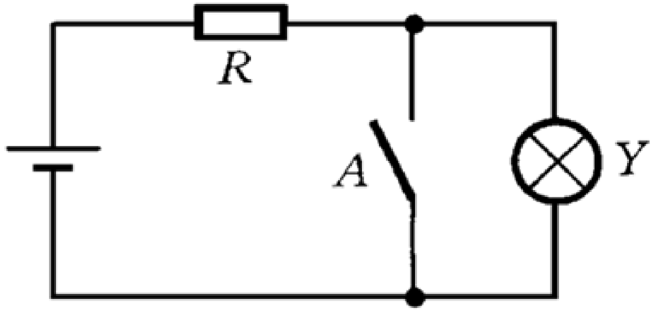

美国标准符号




波形图

# 逻辑“非(Not)”

- 定义：只要条件具备了，结果便不会发生；如果条件不具备，结果一定发生，又成逻辑求反
- 例：

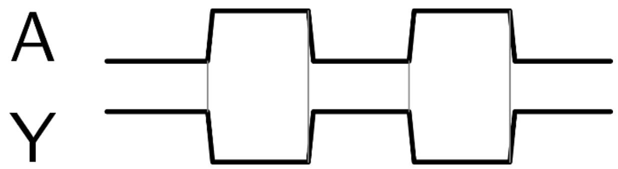



| $A$ | $Y$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

真值表

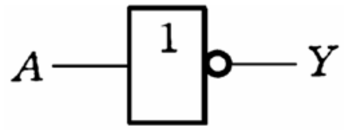
入0出1
入1出0

- 逻辑表达式：$Y = A'$ 或 $Y = \bar{A}$ 或 $Y = \sim A$ 或 $Y = \neg A$

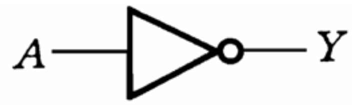



波形图

- 逻辑符号：




欧洲标准符号

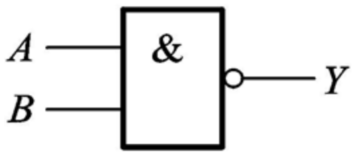



美国标准符号

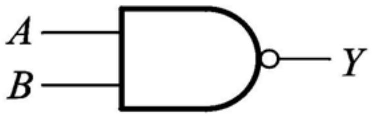
# 复合逻辑运算“与非(NAND)”

- 逻辑表达式：$Y = (A \cdot B)'$

- 逻辑符号：

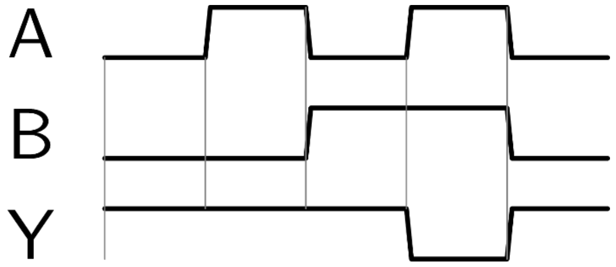



欧洲标准符号




美国标准符号

- 波形图：



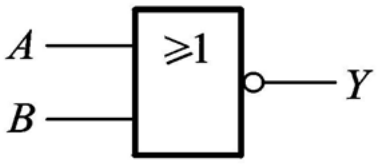

| $A$ | $B$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

逻辑真值表

有0出1
全1出0

# 复合逻辑运算“或非(NOR)”

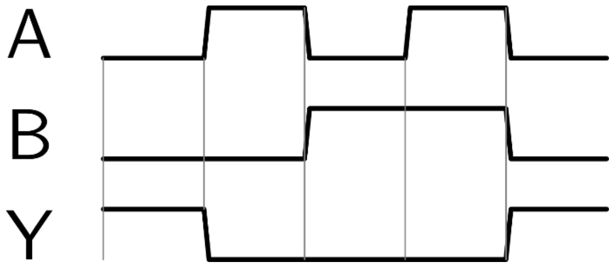
- 逻辑表达式：$Y = (A + B)'$
- 逻辑符号：




欧洲标准符号


美国标准符号

- 波形图：



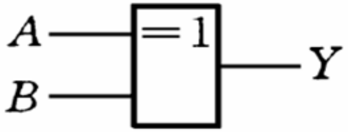

| $A$ | $B$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

逻辑真值表

有1出0
全0出1

# 复合逻辑运算“异或(EXCLUSIVE OR)”

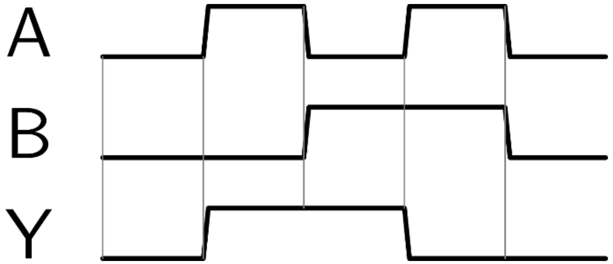
- 逻辑表达式：$Y = A \oplus B = AB' + A'B$
- 逻辑符号：




欧洲标准符号


美国标准符号

- 波形图




| $A$ | $B$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

逻辑真值表

输入相同出0
输入不同出1

# “异或”运算的性质

- 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$
- 交换律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- 分配律 $A(B \oplus C) = AB \oplus AC$

- $A \oplus A' = 1$
- $A \oplus A = 0$
- $A \oplus 1 = A'$
- $A \oplus 0 = A$

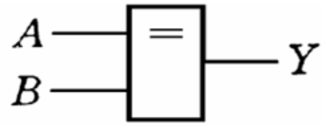
推论：当 $n$ 个变量做异或运算时，

若有偶数个变量取1时，则函数为0

若有奇数个变量取1时，则函数为1

# 复合逻辑运算“同或(EXCLUSIVE NOR)”

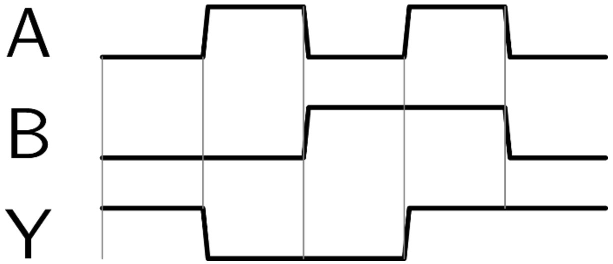
- 逻辑表达式：$Y = A \odot B = AB + A'B'$
- 逻辑符号：




欧洲标准符号


美国标准符号

- 波形图



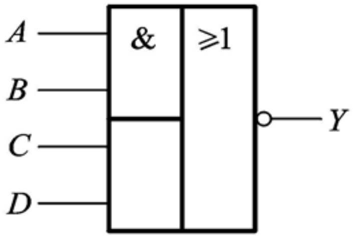

| $A$ | $B$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

逻辑真值表

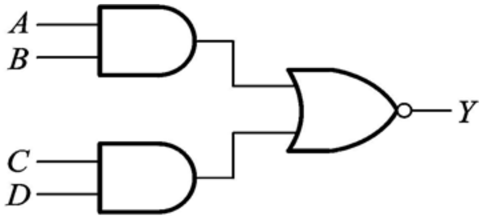
输入相同出1
输入不同出0

# 复合逻辑运算“与或非(AND-NOR)”

- 逻辑表达式：$Y=(A\cdot B+C\cdot D)'$
- 逻辑符号：

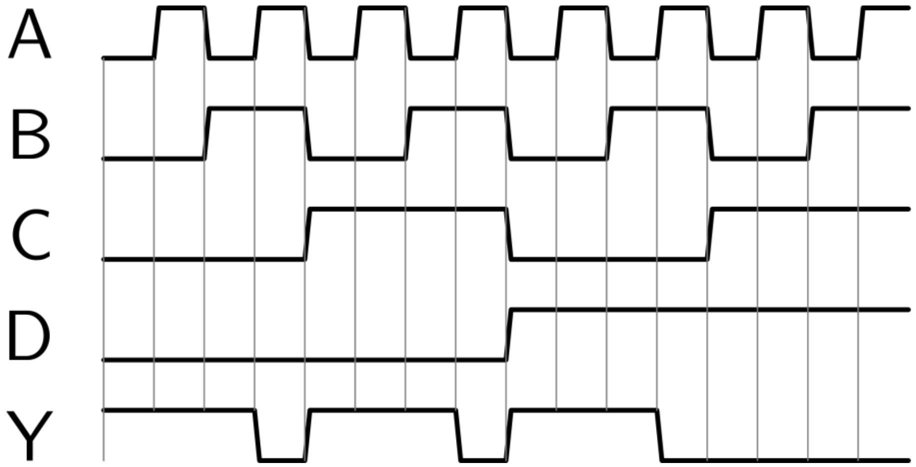



欧洲标准符号




美国标准符号

- 波形图：




真值表

| D | C | B | A | Y |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# 逻辑代数基础

- 概述
- 逻辑代数中的三种基本运算
- 逻辑代数的基本公式和常用公式
- 逻辑代数的基本定理
- 逻辑函数及其表示方法
- 逻辑函数的化简方法
- 具有无关项的逻辑函数及其化简

# 逻辑代数基本公式(1)

- 数值与数值间的关系

| 与 | 或 | 非 |
|---|---|---|
| $0 \cdot 0 = 0$ | $0 + 0 = 0$ | $0' = 1$ |
| $0 \cdot 1 = 0$ | $0 + 1 = 1$ | $1' = 0$ |
| $1 \cdot 0 = 0$ | $1 + 0 = 1$ | |
| $1 \cdot 1 = 1$ | $1 + 1 = 1$ | |

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 又称**布尔恒等式**

变量与常量间的运算

| 序号 | 公　　式 | 序号 | 公　　式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 10 | $1' = 0;\ 0' = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 13 | $A + A = A$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 9 | $(A')' = A$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |

变量自身运算

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 又称**布尔恒等式**

重叠律

| 序号 | 公　　式 | 序号 | 公　　式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 10 | $1' = 0; 0' = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 13 | $A + A = A$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 9 | $(A')' = A$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 又称**布尔恒等式**

互补律

| 序号 | 公　　式 | 序号 | 公　　式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 10 | $1' = 0;\ 0' = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 13 | $A + A = A$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 9 | $(A')' = A$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 又称**布尔恒等式**

| 序号 | 公　　式 | 序号 | 公　　式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 10 | $1' = 0;\ 0' = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 13 | $A + A = A$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 9 | $(A')' = A$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |

结合律

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 又称**布尔恒等式**

| 序号 | 公　　式 | 序号 | 公　　式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 10 | $1' = 0;\ 0' = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 13 | $A + A = A$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 9 | $(A')' = A$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |

分配律

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 又称**布尔恒等式**

| 序号 | 公 式 | 序号 | 公 式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 10 | $1' = 0;\ 0' = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 13 | $A + A = A$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 9 | $(A')' = A$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |

德·摩根定律，又称反演律

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 又称**布尔恒等式**

| 序号 | 公　　式 | 序号 | 公　　式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 10 | $1' = 0;\ 0' = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 13 | $A + A = A$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 9 | $(A')' = A$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |

还原律

# 逻辑代数基本公式证明方法(1)

- 证明方法：(1)公式推演法， (2)列真值表法

- 例：证明式(17)的正确性，即证明：$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

- 公式推演法: $$\begin{aligned}(A+B)\cdot(A+C) &= A\cdot A + A\cdot C + B\cdot A + B\cdot C) \\ &= A + A\cdot C + A\cdot B + B\cdot C \\ &= A\cdot(1 + B + C) + B\cdot C \\ &= A + B\cdot C\end{aligned}$$

# 逻辑代数基本公式证明方法(2)

- 列真值表法，证明：　$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

| A B C | B · C | A+B · C | A+B | A+C | (A+B) · (A+C) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 1 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 逻辑代数的基本公式(3)

| 序号 | 公　　式 |
|---|---|
| 19 | $A + A \cdot B = A$ |
| 20 | $A + A' \cdot B = A + B$ |
| 21 | $A \cdot B + A \cdot B' = A$ |
| 22 | $A \cdot (A + B) = A$ |
| 23 | $A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + A' \cdot C$<br>$A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C \cdot D = A \cdot B + A' \cdot C$ |
| 24 | $A \cdot (A \cdot B)' = A \cdot B'$<br>$A' \cdot (A \cdot B)' = A'$ |

# 逻辑代数基本公式证明(1)

- 证明: $A + A \cdot B = A$

$$
\begin{aligned}
A + A \cdot B &= A \cdot (1 + B) \\
&= A
\end{aligned}
$$

- 在两个乘积项相加时，如果其中一项包含另一项，则这一项是多余的，可以删掉

- 证明: $A + A' \cdot B = A + B$

$$
\begin{aligned}
A + A' \cdot B &= A + A \cdot B + A' \cdot B \\
&= A + B \cdot (A + A') \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

- 在两个乘积项相加时，如果其中一项含有另一项的取反因子，则此取反因子多余的，可从该项中删除

# 练习

- 证明：$A \cdot (A + B) = A$
- 证明：$A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + A' \cdot C$
- 证明：$A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C \cdot D = A \cdot B + A' \cdot C$
- 证明：$A \cdot (A \cdot B)' = A \cdot B'$
- 证明：$A' \cdot (A \cdot B)' = A'$

# 逻辑代数基础

- 概述
- 逻辑代数中的三种基本运算
- 逻辑代数的基本公式和常用公式
- 逻辑代数的基本定理
- 逻辑函数及其表示方法
- 逻辑函数的化简方法
- 具有无关项的逻辑函数及其化简

# 逻辑代数基本定理 - 代入定理

- 在任何一个包含变量A的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代入式中所有A的位置，则等式仍然成立
- 即如下公式成立：

$$(A \cdot B \cdot C)' = A' + B' + C'$$

$$(A + B + C)' = A' \cdot B' \cdot C'$$

已知二变量的德•摩根定理：

$$(A \cdot B)' = A' + B'$$

$$(A + B)' = A' \cdot B'$$

$$\therefore A \cdot (B \cdot C))' = A' + (B \cdot C)'$$

$$= A' + B' + C'$$

$$(A + (B + C))' = A' \cdot (B + C)'$$

$$= A' \cdot B' \cdot C'$$

注意运算的优先顺序

# 逻辑代数基本定理 -反演定理

- 对于任何一个逻辑式 Y
- 将所有的 · → + , + → · , **0 → 1 , 1 → 0,**

  原变量 → 反变量，反变量 → 原变量
- 得到的结果为 Y′
- **变换原则:**
  - 仍需遵守“先括号、然后乘、最后加”的运算优先次序
  - 不属于单个变量上的反号应保留不变

- 【例】若 $Y = ((A \cdot B' + C)' + D)' + C$, 求 $Y'$;

  解：依据反演定理直接写出

  $$Y' = (((A' + B) \cdot C')' D')' \cdot C'$$

# 反演定理举例

- 例：$$Y = A' + B' \cdot (C + D' \cdot E)$$
$$Y' = A \cdot (B + (C' \cdot (D + E')))$$
与变或时要加括号
$$= A \cdot B + A \cdot C' \cdot D + A \cdot C' \cdot E'$$

- 例：$$Y = A \cdot B + (A' \cdot B \cdot C)' + B' \cdot C'$$
$$Y' = (A \cdot B + (A' \cdot B \cdot C)' + B' \cdot C')'$$
最外层非号不变
$$= (A' + B') \cdot (A + B' + C')' \cdot (B + C)$$

# 逻辑代数基本定理 – 对偶定理

- 若两逻辑式相等，则它们的对偶式也相等。
- 对偶式：
  - 对于任何一个逻辑式 $Y$，若将其 $\cdot \rightarrow +$ , $+ \rightarrow \cdot$ , $0 \rightarrow 1$ , $1 \rightarrow 0$
  - 则得到一个新的逻辑式$Y^D$, $Y^D$ 就是Y的对偶式，或者说Y和$Y^D$互为对偶式
- 例如

$$Y = A(B + C), \qquad Y^D = A + BC$$

$$Y = (AB + CD)', \qquad Y^D = ((A + B)(C + \mathrm{D}))'$$

**求某一函数 $F$ 的对偶式时，同样要注意保持原函数的运算顺序不变！**

# 对偶定理应用举例

- 例：试证明 $\mathrm{A} + \mathrm{BC} = (A + B)(A + C)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A + BC} \arrow[d, "对偶式"'] & = & \mathbf{(A + B)(A + C)} \arrow[d, "对偶式"] \\
\mathbf{A(B + C)} & = \arrow[u] & \mathbf{AB + AC}
\end{tikzcd}
$$

# 逻辑代数的基本公式(2)

- 互为对偶式

| 序号 | 公　　式 | 序号 | 公　　式 |
|---|---|---|---|
| | | 10 | $1' = 0;\ 0' = 1$ |
| 1 | $0 \cdot A = 0$ | 11 | $1 + A = 1$ |
| 2 | $1 \cdot A = A$ | 12 | $0 + A = A$ |
| 3 | $A \cdot A = A$ | 13 | $A + A = A$ |
| 4 | $A \cdot A' = 0$ | 14 | $A + A' = 1$ |
| 5 | $A \cdot B = B \cdot A$ | 15 | $A + B = B + A$ |
| 6 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | 16 | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| 7 | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ | 17 | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| 8 | $(A \cdot B)' = A' + B'$ | 18 | $(A + B)' = A' \cdot B'$ |
| 9 | $(A')' = A$ | | |

# 逻辑函数表示方法

- 逻辑真值表
- 逻辑函数式（逻辑式或函数式）
- 逻辑图
- 波形图
- 卡诺图

- 硬件描述语言

# 逻辑真值表

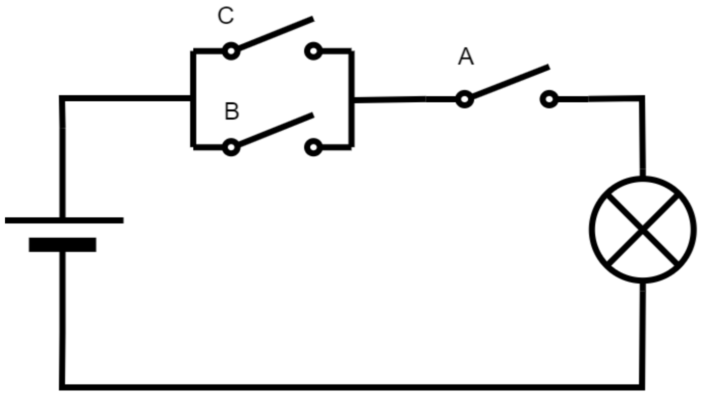
- 将输入变量所有的取值下对应的输出值找出来，列成表格，即可得到真值表

| 输入变量<br>$A \quad B \quad C\cdots$ | 输出<br>$Y_1 \quad Y_2\cdots$ |
|---|---|
| 遍历所有可能的输入变量的取值组合 | 输出对应的取值 |

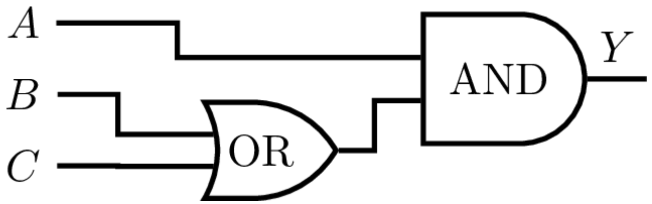
# 逻辑函数表示方法举例

- 举重裁判电路

  【A、B、C】　　【Y】
  1：闭合　　　1：灯亮
  0：断开　　　0：灯暗




- 逻辑函数：Y = A · (B + C)

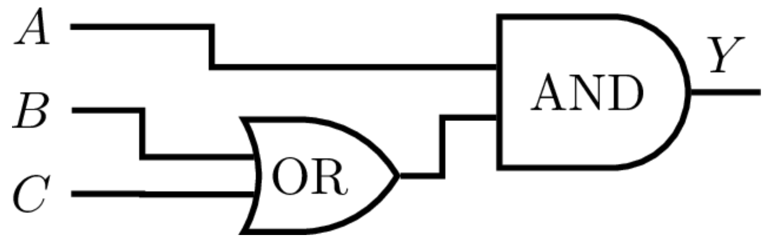


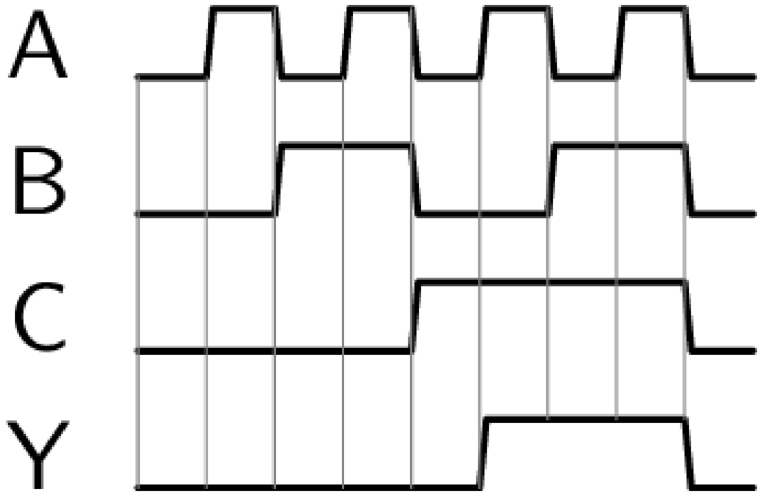

- 逻辑电路图
  - 将逻辑函数式中各变量之间的与、或、非等逻辑关系用图形符号表示出来，就可以画出表示函数关系的逻辑图(logic diagram)
  - 如用逻辑运算的图形符号代替Y = A · ( B + C )中的代数运算符号得到的逻辑图

| 输入 | | | 输出 |
|---|---|---|---|
| A | B | C | Y |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# 波形图(waveform)

- 又称时序图(timing diagram)
- 将逻辑函数输入变量每一种可能出现的取值与对应的输出值按时间顺序依次排列起来，就得到了表示该逻辑函数的波形图
- 将Y = A·( B + C )给出的输入变量与对应的输出变量取值依时间顺序排列起来，即可得到波形图



# 卡诺图表示方法

| $A \backslash B$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $A'B'$ $m_0$ | $A'B$ $m_1$ |
| 1 | $AB'$ $m_2$ | $AB$ $m_3$ |

二变量
卡诺图

| $A \backslash BC$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| 1 | $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |

三变量
卡诺图

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| 01 | $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |
| 11 | $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | $m_{14}$ |
| 10 | $m_8$ | $m_9$ | $m_{11}$ | $m_{10}$ |

四变量
卡诺图

# 硬件描述语言

- HDL (Hardware Description Language)
  - VHDL (Very High Speed Integrated Circuit)
  - Verilog HDL
- EDIF (Electronic Design Interchange Format)
- ……

```verilog
module Compare1 (A, B, Equal, Alarger, Blarger);
    input A, B;
    output Equal, Alarger, Blarger;
    assign Equal = (A & B) | (~A & ~B);
    assign Alarger = (A & ~B);
    assign Blarger = (~A & B);
endmodule

module shifter (in, A,B,C,clk);
    input in, clk;
    input A,B,C;
    reg A, B, C;
    always @ (posedge clk) begin
        A <= in;
        B <= A;
        C <= B;
    end
endmodule
```

# 真值表 — 逻辑函数式的转换

1. 找出真值表中使逻辑函数为“1”的输入变量的组合

2. 对应每个输出为“1”变量组合关系为与的关系，即乘积项，其中如图输入变量取值为“1 ”的写成原变量，输入变量取值为“0”的写成反变量，如 $A'B'C$

3. 将这些乘积项相加，即得到输出的逻辑式

$$
\begin{aligned}
Y(A,B,C) &= A'B'C + A'BC' + AB'C' + ABC \\
&= (A'B + AB')C' + (A'B' + AB)C \\
&= (A \oplus B)C' + (A \oplus B)'C \\
&= A \oplus B \oplus C
\end{aligned}
$$

真值表

| 输入 | | | 输出 | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | Y | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $A'B'C = 1$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $A'BC' = 1$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $AB'C' = 1$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $ABC = 1$ |

# 逻辑真值表 —函数式的转换

- 例：

**真值表**

| 输入 | | | 输出 | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | Y | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | $A'B'C'$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $A'BC$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $AB'C$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $ABC'$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | |

**函数式**

$$Y(A,B,C) = A'B'C' + A'BC + AB'C + ABC'$$

# 逻辑函数式 — 真值表的转换

- 例：写出逻辑函数

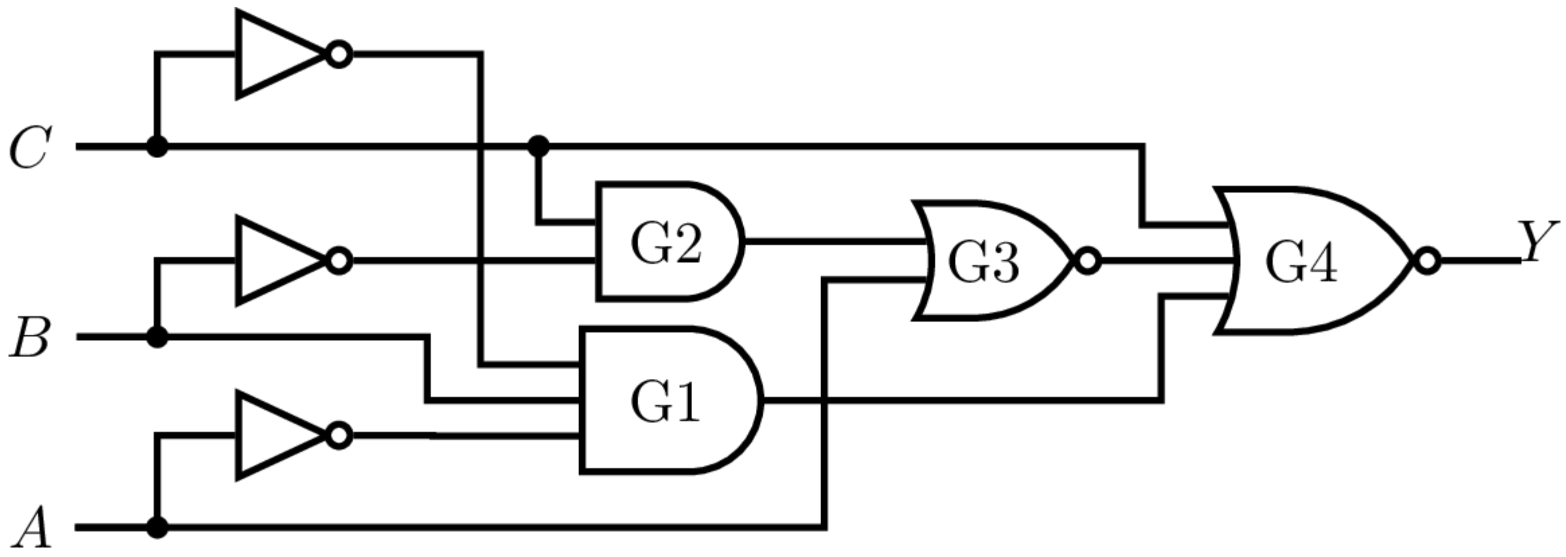
  $Y = AB' + C'$ 的真值表

| 输入 | | | 输出 |
|---|---|---|---|
| A | B | C | Y |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

# 逻辑函数式—逻辑图转换

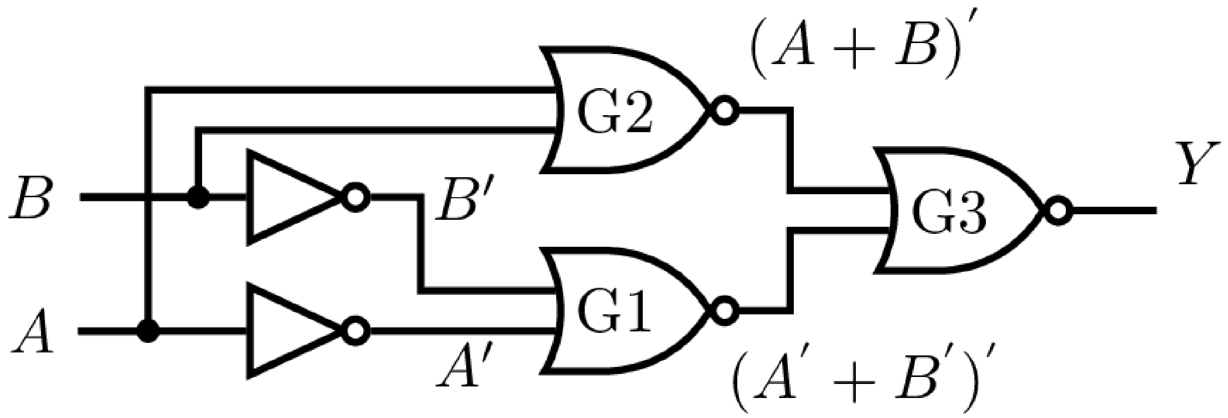
- 用逻辑图形符号代替逻辑函数中的逻辑运算符号，并按运算优先顺序将它们连接起来，即可得到所求的逻辑图

- 例：画出逻辑函数的逻辑电路， $Y(A,B,C)=(A+B'C')'+A'BC+C$



# 逻辑图—逻辑函数式转换

- 由逻辑图写逻辑函数式
  - 已知逻辑图，从逻辑图的输入端到输出端逐级写出每个图形符号的输出逻辑式，即可在输出端得到所求的逻辑函数式




$$
\begin{aligned}
Y(A,B) &= ((A+B)' + (A'+B')')' \\
&= (A+B)(A'+B') \\
&= AB' + A'B \\
&= A \oplus B
\end{aligned}
$$

# 逻辑图 - 真值表 - 逻辑函数式转换练习

- 例：设计一个逻辑电路，当三个输入A、B、C至少有两个为低电平时，该电路输出为高，试写出该要求的真值表和逻辑表达式，画出实现的逻辑图。

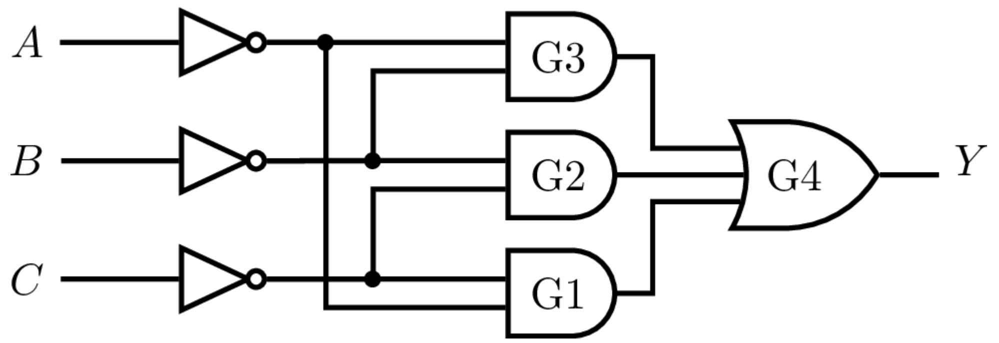
1、写出真值表

| 输入 | | | 输出 |
|---|---|---|---|
| A | B | C | Y |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

2、根据真值表写函数式

$$
\begin{aligned}
Y &= A'B'C' + A'B'C + A'BC' + AB'C' \\
&= A'B'(C' + C) + A'BC' + AB'C' \\
&= A'B' + A'BC' + AB'C' \\
&= A'(B' + BC') + AB'C' \\
&= A'B' + A'C' + AB'C' \\
&= A'B' + C'(A' + AB') \\
&= A'B' + C'(A' + B') \\
&= A'B' + A'C' + B'C'
\end{aligned}
$$

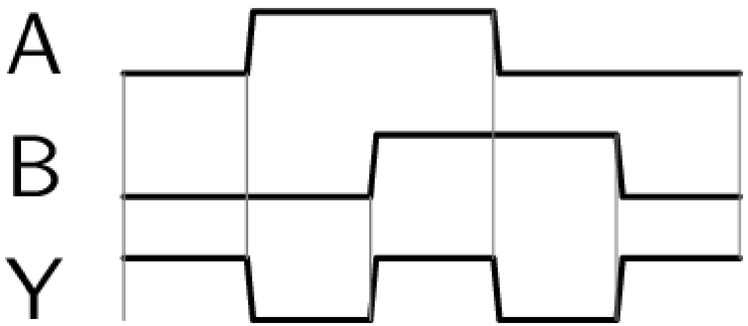
3、画出逻辑图



# 波形图 — 逻辑真值表的转换(1)

- 由波形图写真值表
  - 从波形图上找出每个时间段里输入变量与函数输出的取值，然后将这些输入、输出取值对应列表，得到所求真值表
- 例：已知逻辑函数Y的输出波形，试分析其逻辑功能

波形图




真值表

| B | A | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

逻辑函数式

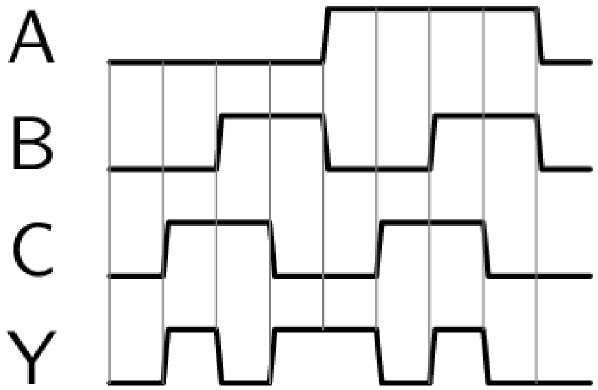
$$Y = A'B' + AB$$

逻辑功能：
输出和输入是同或关系

# 波形图 — 逻辑真值表的转换(2)

- 例：已知某个数字逻辑电路的输入输出波形，试画出该组合逻辑电路图，并判断其逻辑功能

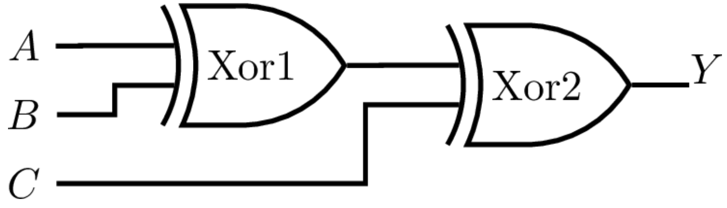
**波形图**




**真值表**

| 输入 | | | 输出 |
|---|---|---|---|
| A | B | C | Y |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

**逻辑符号图**




**函数式**

$$Y = A'B'C + A'BC' + AB'C' + ABC$$
$$= A'(B'C + BC') + A(B'C' + BC)$$
$$= A'(B \oplus C) + A(B \oplus C)'$$
$$= A \oplus B \oplus C$$

**电路功能**

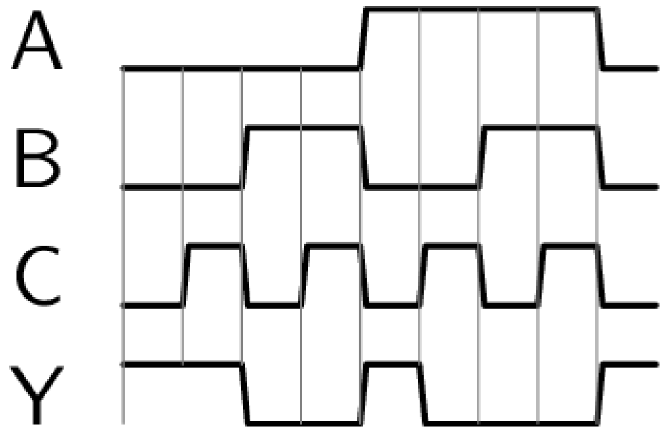
当输入有奇数个“1”时，输出为“1”

此电路为“判奇电路”

# 逻辑真值表—波形图的转换

- 将真值表中所有的输入变量与对应的输出变量取值以此排列画成以时间为横轴的波形，即得到所求的波形图
- 例：已知逻辑函数的真值表，试画出输入输出波形和输出端的逻辑函数式

**函数式** 
$$\begin{aligned} Y &= A'B'C' + A'B'C + AB'C' \\ &= A'B'(C' + C) + AB'C' \\ &= A'B' + AB'C' \\ &= B'(A' + AC') \\ &= A'B' + B'C' \end{aligned}$$




**波形图**

*逻辑符号图?*

**真值表**

| 输入 | | | 输出 |
|---|---|---|---|
| A | B | C | Y |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

# 逻辑函数的标准形式—最小项

- 在n变量逻辑函数中，若m为包含n个因子的乘积项，而且这n个变量均以原变量或反变量的形式在m中出现一次，则称m为该组变量的最小项。
- 例：二变量A,B的最小项 $\boldsymbol{A'B'}$，$\boldsymbol{A'B}$，$\boldsymbol{AB'}$，$\boldsymbol{AB}$　　$2^2$ =4个
- 例如：三变量A,B,C的最小项　$\boldsymbol{A'B'C'}$, $\boldsymbol{A'B'C}$, $\boldsymbol{A'BC'}$, $\boldsymbol{A'BC}$, $\boldsymbol{AB'C'}$, $\boldsymbol{AB'C}$, $\boldsymbol{ABC'}$, $\boldsymbol{ABC}$　$2^3 = 8$个

# 最小项编号

- 对于$n$变量函数有$2^n$个最小项

- 输入变量的每一组取值，都使一个对应的最小项的值等于“1”

- 通常用 $m_i$ 表示第 $i$ 个最小项，变量按$A_1\sim An$排列，以原变量出现时对应的值为“1”，以反变量出现时对应的值取“0”，按二进制排列时，其十进制数即为 $i$

| 最小项 | 取值 | | | 十进制数 | 编号 |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | | |
| $A'B'C'$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $m_0$ |
| $A'B'C$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $m_1$ |
| $A'BC'$ | 0 | 1 | 0 | 2 | $m_2$ |
| $A'BC$ | 0 | 1 | 1 | 3 | $m_3$ |
| $AB'C'$ | 1 | 0 | 0 | 4 | $m_4$ |
| $AB'C$ | 1 | 0 | 1 | 5 | $m_5$ |
| $ABC'$ | 1 | 1 | 0 | 6 | $m_6$ |
| $ABC$ | 1 | 1 | 1 | 7 | $m_7$ |

# 最小项真值表

| 编号 | ABC | $A'B'C'$ | $A'B'C$ | $A'BC$ | $A'BC'$ | $ABC'$ | $ABC$ | $AB'C$ | $AB'C'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_0$ | 000 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_1$ | 001 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_3$ | 011 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_2$ | 010 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_6$ | 110 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $m_7$ | 111 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $m_5$ | 101 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $m_4$ | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# 最小项的性质

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最小项的值为“1”
- 全体最小项之和为“1”，即$\sum m_i = 1$
- 任何两个最小项之积为“0”，即$i \neq j$时，$m_i \cdot m_j = 0$

- 两个相邻的最小项之和可以合并，消去一对因子，只留下公共因子
- 相邻：仅一个变量不同的最小项
- 例

$$A'BC' \text{与} A'BC$$

$$A'BC' + A'BC = A'B(C' + C) = A'B$$

# 逻辑函数的标准形式—最大项

- 在n变量逻辑函数中，若M为包含n个变量之和，而且这n个变量均以原变量或反变量的形式在M中出现一次，则称M为该组变量的最大项。
- 对于n变量函数有$2^n$个最大项

- 例如：两变量A,B的最大项：　$2^2=4$个

$$A'+B',\ A'+B,\ A+B',\ A+B$$

- 三变量A、B、C的最大项：$2^3=8$个

$$A'+B'+C',\ A'+B'+C,\ A'+B+C',\ A'+B+C$$
$$A+B'+C',\ A+B'+C,\ A+B+C',\ A+B+C$$

# 最大项的编号

- 输入变量的每一组取值都使一个对应的最大项的值为“0”

- 通常用 $M_i$表示第i 个最大项，变量按$A_1$~ $A_n$排列，以原变量出现时对应的值为“0”，以反变量出现时对应的值取“1”，按二进制排列时，其十进制数即为i 。

| 最大项 | 取值 | | | 十进制数 | 编号 |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | | |
| $A'+B'+C'$ | 1 | 1 | 1 | 7 | $M_7$ |
| $A'+B'+C$ | 1 | 1 | 0 | 6 | $M_6$ |
| $A'+B+C'$ | 1 | 0 | 1 | 5 | $M_5$ |
| $A'+B+C$ | 1 | 0 | 0 | 4 | $M_4$ |
| $A+B'+C'$ | 0 | 1 | 1 | 3 | $M_3$ |
| $A+B'+C$ | 0 | 1 | 0 | 2 | $M_2$ |
| $A+B+C'$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $M_1$ |
| $A+B+C$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $M_0$ |

# 最大项的真值表

| 编号 | ABC | $A+B+C$ | $A+B+C'$ | $A+B'+C'$ | $A+B'+C$ | $A'+B'+C$ | $A'+B'+C'$ | $A'+B+C'$ | $A'+B+C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_0$ | 000 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $M_1$ | 001 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $M_3$ | 011 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $M_2$ | 010 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $M_6$ | 110 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $M_7$ | 111 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $M_5$ | 101 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $M_4$ | 100 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# 最大项的性质

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最大项的值为“0”
- 全体最大项之积为“0”
- 任何两个最大项之和为“1”
- 只有一个变量不同的最大项的乘积等于各相同变量之和

# 问题和建议？