计算机科学导论

张家琳

中国科学院计算技术研究所

zhangjialin@ict.ac.cn

2021-4-2

教学日历

周次	理论课（周五上午）		实验课（周三下午）		截止时间（周日23:30）
1	3月12日	绪论	3月10日	无	
2	3月19日	绪论	3月17日	无	作业1
3	3月26日	绪论	3月24日	无	作业2
4	4月2日	逻辑思维	3月31日	无	
5	4月9日	逻辑思维	4月7日	无	
6	4月16日	逻辑思维	4月14日	图灵机实验	作业3
7	4月23日	算法思维	4月21日	图灵机实验	
8	4月30日	算法思维	4月28日	图灵机实验	图灵机实验报告
9	5月7日	算法思维	5月5日（5月8日补）	班级排序实验	作业4
10	5月14日	班级排序现场操作	5月12日	班级排序实验	
11	5月21日	班级排序报告	5月19日	班级排序实验	班级排序实验报告
12	5月28日	系统思维	5月26日	信息隐藏实验	
13	6月4日	系统思维	6月2日	信息隐藏实验	
14	6月11日	系统思维	6月9日	信息隐藏实验	作业5
15	6月18日	网络思维	6月16日	个人作品	信息隐藏实验报告
16	6月25日	网络思维	6月23日	个人作品	
17	7月2日	网络思维	6月30日	个人作品	作业6
18	7月9日	期末总结	7月7日	无	个人作品报告
19	考试周				

逻辑思维

- 逻辑——①思维的规律、规则：这个想法似乎不合逻辑。②研究思维规律的科学，即逻辑学。③客观事物的规律：历史的逻辑。④观点，主张。多用于贬义：霸权主义的逻辑。（新华字典）
- 广义：泛指规律、道理
- 狭义：逻辑学
  - 哲学（古希腊）、数学（19世纪）
  - 计算机科学、语言学、心理学……

逻辑思维主要内容

- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 谓词逻辑
  - 公理系统
- 图灵机模型
- 后续课程
  - 离散数学、数理逻辑、理论计算机基础……

逻辑学基础

引入

- 用“若p则q”的形式，写出“全等三角形一定相似”的四种命题，并判断它们的真假。
  - 原命题：　若是全等三角形，则它们一定是相似三角形
  - 逆命题：　若是相似三角形，则它们一定是全等三角形
  - 否命题：　若不是全等三角形，则它们一定不是相似三角形
  - 逆否命题：若不是相似三角形，则它们一定不是全等三角形
- 原命题和逆否命题为等价命题
- 否命题和逆命题为等价命题
- 为什么？

布尔逻辑

- 真 T (true)，假 F (false)
  - 今天是星期五。
  - $a^2 \geq 0$。
- 非 $\neg$ (negation, not)
  - $\neg x = 1$ (T) *iff* $x = 0$ (F)
  - 有时，也用$\bar{x}$表示$\neg x$
- 合取，与 $\wedge$ (conjunction, and)
  - $x \wedge y = 1$ (T) *iff* $x = y = 1$ (T)

- 析取，或 $\vee$ (disjunction, or)
  - $x \vee y = 0$ (F) *iff* $x = y = 0$ (F)
- 异或 $\oplus$ (exclusive or)
  - $x \oplus y = 1$ (T) *iff* $x \neq y$
  - $x + y \bmod 2$

0, 0 → 0
0, 1 → 1
1, 0 → 1
1, 1 → 0.

$A_0 \to B$ $\qquad$ $\boxed{B \to A_x}$

0 $\quad$ 1 $\qquad$ 1 $\quad$ 0

↑ $\qquad\qquad$ ↑

1 $\qquad\qquad$ 0

1) $B \to (A_1 \lor A_2 \lor \cdots \lor A_5)$

2) $\boxed{B \to (A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_5)}$

- 蕴含 → (material implication)
  - ($x \to y$) = 1 (T) *iff* x = 0 (F) or y = 1 (T)
  - "若两个三角形是全等三角形，则它们一定是相似三角形"
    - x = 两个三角形是全等三角形
    - y = 两个三角形是相似三角形
    - $x \to y$

$x=0,\ y=0 \quad x\to y:\ 1$

$x=0 \quad y=1 \quad x\to y:\ 1$

$x=1 \quad y=0 \quad x\to y:\ 0$

$x=1 \quad y=1 \quad x\to y:\ 1$

A_1 $\qquad$ A_2 $\qquad$ A_3 $\qquad$ A_4 $\qquad$ A_5.

- 山无陵，江水为竭，冬雷震震，夏雨雪，天地合，乃敢与君绝。B.

请课后思考

- 原命题： $x \to y$
- 逆命题： $y \to x$
- 否命题：？
- 逆否命题：？

真值表

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

布尔逻辑

- 性质：
  - $x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$
  - $x \vee \neg x = 1, x \wedge \neg x = 0$
  - $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x, x \oplus y = y \oplus x$ (**交换律**)
  - $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
  - $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

  (**结合律**)

  - $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
  - $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$

  (**分配律**)

  - more ??

- 性质：
  - $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ $\quad$ $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$
  - $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ $\quad$ (**De Morgan律**)
  - $x \rightarrow y = \neg x \vee y$
  - $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$ $= (\neg(\neg y)) \vee \neg x$ (**逆否命题**)
  - $x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$
  - $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

$x \to y = \neg x \vee y.$

范式

- 合取范式(conjunctive normal form, CNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \ldots \wedge Q_m$
  - 其中: $Q_i = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$

- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \ldots \vee Q_m$
  - 其中: $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

- 例： $x \to (y \to z) = ?$

$(x \vee \neg y \vee \neg z)$

$\wedge$

- 合取范式： $(\neg x \vee \neg y \vee z)$

$Q_1 \vee \cdots \vee Q_m$

- 析取范式： $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee \boxed{(x \wedge \neg y \wedge z)} \vee (x \wedge y \wedge z)$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1 0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

范式

- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{Q}_1 \vee \mathrm{Q}_2 \vee \mathrm{Q}_3 \ldots \vee \mathrm{Q}_m$
  - 其中: $\mathrm{Q}_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$， $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

非全零

定理：任何一个有n个变元的命题$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)$，一定可以表示成如下的析取范式：

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n) = \mathbf{Q}_1 \vee \mathbf{Q}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{Q}_m,$$

其中每一个$\mathbf{Q}_i$都是这n个变元或其“非”的合取（“与”）连接式，即$\mathbf{Q}_i = \mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{l}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{l}_n$，$\mathbf{l}_j = \mathbf{x}_j$或者$\overline{\mathbf{x}_j}$。

布尔函数

- 布尔函数$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- 举例
  - $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\vee_{i=1}^{n-1} x_i) \oplus x_n$
- 两个布尔函数相同：有相同的真值表
  - 类似：$f(x,y) = x^2 - y^2$和$g(x,y) = (x+y)(x-y)$是相同的多项式

$\underbrace{x \to y}_{f(x,y)} . = \underbrace{\neg x \vee y}_{g\ x, y} .$

布尔函数

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

0/1
0/1
0/1
0/1

$2\times2\times2\times2=16$

- n个变量的布尔函数有多少个？
  - n=0, 2个（0和1）
  - n=1, 4个（1，0，x和¬ x ）
  - n=2, **?**

$y\to x$

$1,\ 0,\ x,\ \neg x,\ y,\ \neg y,\ x\vee y,\ x\wedge y,\ x\to y,\ x\oplus y$

x_1	x_2	…	x_n	$f(x_1,\ldots,x_n)$
0	0			0/1
⋮	⋮			⋮
1	1		1	0/1

  - 2^{2^n}

2^{2^n} 2^{n+1}

$\boxed{f(0,0) \le f(0,1)} \le f(1,1)$　　$f(0,0)=1$: 1

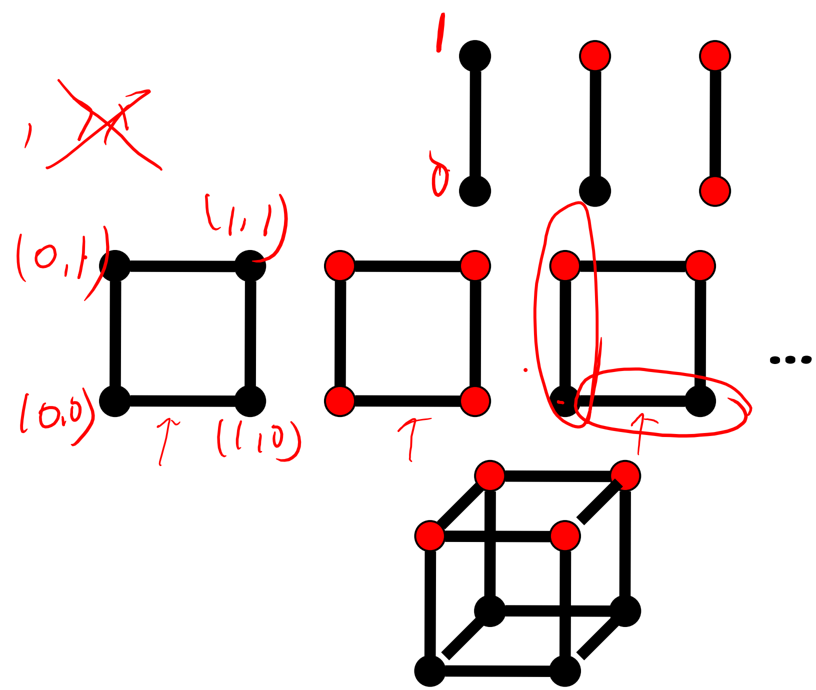
$f(0,0) \le f(1,0) \le f(1,1)$　　$f(0,0)=0$

$f(0,1)$	0	0	1	1
$f(1,0)$	0	1	0	1

$f(1,1)=0/1$,　$f(1,1)=1$

思考题（单调布尔函数个数）

- n个变量的单调布尔函数有多少个？
  - 对$(x_1, \dots, x_n)$和$(y_1, \dots, y_n)$，如果$x_i \le y_i$对所有i成立，则$f(x_1, \dots, x_n) \le f(y_1, \dots, y_n)$
  - n=0：2个　0，1，
  - n=1：3个　0，1，x，~~x̄~~
  - n=2：6个
  - n=3：**?**



布尔函数

(¬, ∨)

- 根据De Morgan律和合取范式（或析取范式），使用¬和∧(或∨)可以表示出所有的布尔函数（允许使用0,1）。
- 问题：能否只用∧, ∨表示出所有的布尔函数？（允许使用0,1）
  - **不能！**
  - ∧, ∨只能表达**单调布尔函数**

√ 8

思考题

- 问题：能否只用 $\oplus$？（允许使用0,1）
- 问题：如果只用$\rightarrow$呢？（允许使用0,1）

思考题

- 问题：*n*名同学围成一圈，每个人随机的分配一顶红色或者蓝色的帽子，要求所有人同时猜出自己帽子的颜色。请设计一种策略，使得**同时猜对**的概率最高。

$\frac{1}{2^n}$

总结

- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 布尔函数
- 思考题
  - 单调布尔函数的计数
  - 只用$\oplus$或只用$\rightarrow$表达所有布尔函数
  - 猜帽子问题

谢谢！