理论计算机科学基础

第三、四、五章习题课

晏荣杰
中科院软件所
计算机科学国家重点实验室

第三章 丘齐-图灵论题

- 3.1根据图灵机M2，在每个输入串上，给出M2进入的格局序列

d. 000000

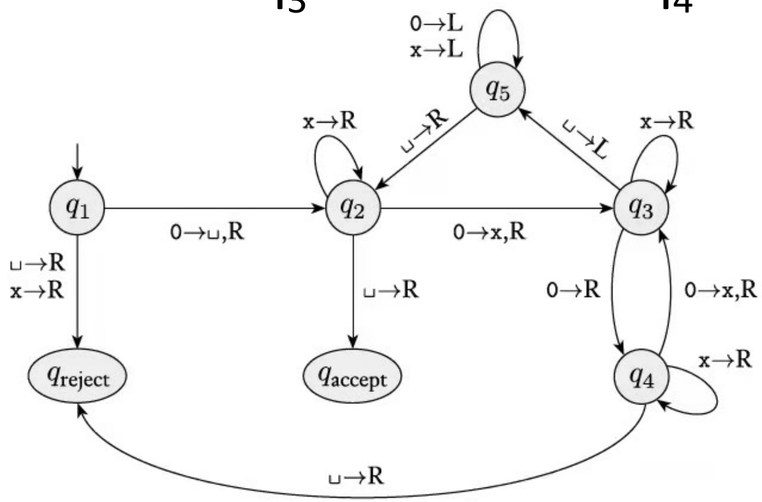
$Q_1000000 \vdash \sqcup q_200000 \vdash \sqcup xq_30000 \vdash \sqcup x0q_4000 \vdash \sqcup x0xq_300$

$\vdash \sqcup x0x0q_40 \vdash \sqcup x0x0xq_3 \sqcup \vdash \sqcup x0x0q_5x\sqcup$

$\vdash \sqcup x0xq_50x\sqcup \vdash \sqcup x0q_5x0x\sqcup \vdash \sqcup xq_50x0x\sqcup \vdash \sqcup q_5x0x0x\sqcup \vdash q_5\sqcup x0x0x\sqcup$

$\vdash \sqcup q_2x0x0x\sqcup \vdash \sqcup xq_20x0x\sqcup \vdash \sqcup xxq_3x0x\sqcup \vdash \sqcup xxxq_30x\sqcup \vdash \sqcup xxx0q_4x\sqcup$

$\vdash \sqcup xxx0xq_4\sqcup \vdash \sqcup xxx0x\sqcup q_{reject}$



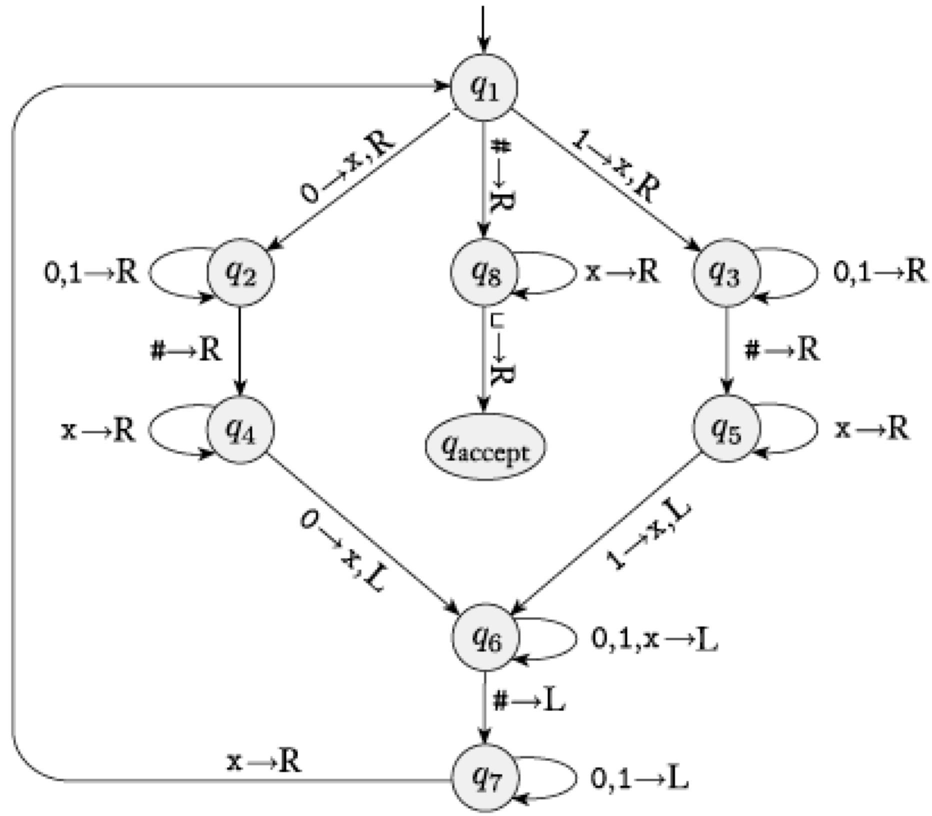
第三章 丘齐-图灵论题

- 3.2根据图灵机M1，在每个输入串上，给出M1进入的格局序列

d. 10#11

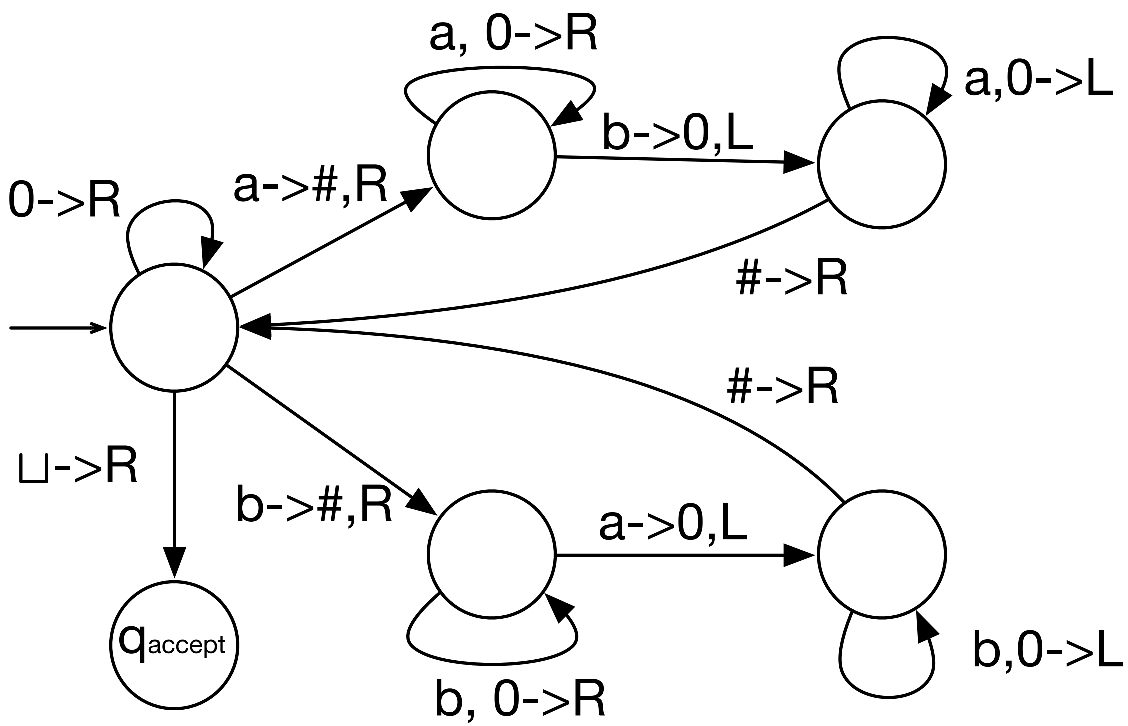
$q_1 10\#11 \vdash x q_3 0\#11 \vdash x0q_3\#11 \vdash x0\#q_5 11 \vdash x0q_6\#x1 \vdash xq_7 0\#x1$

$\vdash q_7 x0\#x1 \vdash xq_1 0\#x1 \vdash xxq_2\#x1 \vdash xx\#q_4 x1 \vdash xx\#xq_4 1$



第三章 丘齐-图灵论题

- 设Σ = {a, b}，设计一台图灵机，它识别语言{w|w∈Σ*，且w中a和b的数目相同}。请画出该图灵机的状态图。



第三章 丘齐-图灵论题

- 3.8 下面的语言都是字母表{0,1}上的语言，以实现层次的描述给出判定这些语言的图灵机：

b. {w|w所包含的0的个数是1的个数的两倍}

- Σ={0,1}，Γ={0,1, $\#^0$, $\#^1$,x, ⌴}

对于输入串w：

1. 从左向右扫描带子，如果带子符号是空白符，则接受。如果最左端带子为0，则标记为$\#^0$，转到第2步。如果为1，则标记为$\#^1$，转到第3步。
2. 向右扫描找到一个未被标记的0与1，标记为x，转到4，否则拒绝。
3. 向右扫描找到两个未被标记的0，标记为x，转到4，否则拒绝。
4. 读写头返回带子最左端，找到一个未被标记的1，标记为x。如果找到，转到步骤5。如果未找到，则重新回到左边，寻找未标记的0，如果存在，则拒绝，否则接受。
5. 读写头回到最左端，找到两个未标记的0，标记为x。若未找到，则拒绝，否则回到步骤4。

第三章 丘齐-图灵论题

- 3.8 下面的语言都是字母表{0,1}上的语言，以实现层次的描述给出判定这些语言的图灵机：

b. {w|w所包含的0的个数是1的个数的两倍}

- Σ={0,1}，Γ={0,1, ␣}

构造具有3条带的图灵机。对于输入串w：

1. w 先读入第一条带，然后读到0就把0写入第2条带，读到1就把1写入第3条带，直到读到空格为止。

2. 然后把3个读写头都返回到最左边。

3. 每次读带3的一个字符就读带2的两个字符，如果同时遇上空格符，就接收，否则拒绝。

第三章 丘齐-图灵论题

- 3.15证明图灵可识别语言类在连接运算下封闭

证明：对于任意两个图灵可识别语言L_1,L_2，令M_1与M_2分别为识别两个语言的图灵机。构建识别L_1与L_2连接的非确定性图灵机M:

“对于任意输入w:

1.非确定的将w分成两部分$w=w_1w_2$。

2.在w_1上运行M_1。如果M_1停机并拒绝，则拒绝。如果接受，转到步骤3。

3.在w_2上运行M_2。如果接受，则接受。如果停机并拒绝，则拒绝。”

如果可以将w分成两部分使得M_1接受第一部分，M_2接受第二部分，w属于两个语言的连接，并且M将在有限步内接受w。

第三章 丘齐-图灵论题

- 3.16证明可判定语言类在连接运算下封闭

证明：对于任意两个图灵可判定语言L_1,L_2，令M_1与M_2分别为判定两个语言的图灵机。构建判定L_1与L_2连接的非确定性图灵机M:

“对于输入w:

1. 将w分成两部分$w=w_1w_2$。

2.在w_1上运行M_1。

3.在w_2上运行M_2。

4.如果 M_1与M_2都接受，则接受。否则继续下一组w_1w_2。

5.如果尝试了所有划分方式后仍未接受，则拒绝。”

这里尝试了w的所有划分。如果存在一种划分使得M_1接受第一部分，M_2接受第二部分，w属于两个语言的连接，并且M接受w。否则，w不属于两个语言的连接，并且M拒绝w。

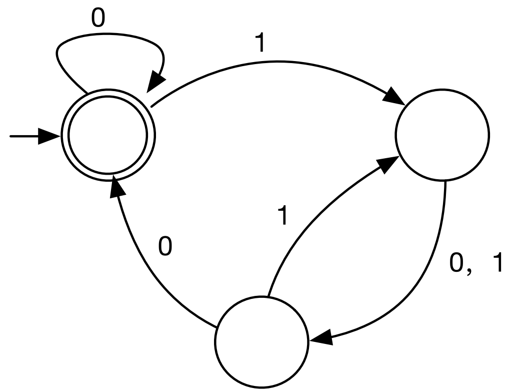
第四章 可判定性

4.1 对于下图所示的DFA M，回答下列问题，并说明理由。

a. $\langle M,0100\rangle \in A_{DFA}$　　b. $\langle M,011\rangle \in A_{DFA}$

c. $\langle M\rangle \in A_{DFA}$　　d. $\langle M,0100\rangle \in A_{REX}$

e. $\langle M\rangle \in E_{DFA}$　　f. $\langle M,M\rangle \in EQ_{DFA}$



a. 是，M接受0100
b. 否，M不接受011
c. 否，<M>不满足<B,w>的形式
d. 否，M不是正则表达式
e. 否，M非空
f. 是

第四章 可判定性

4.2考虑DFA和正则表达式是否等价的问题。将这个问题表示为一个语言并证明它可判定。

解：设EQ_{D-R}={<A,B>|A是DFA,B是正则表达式，L(A)=L(B)}。

构造如下TM，
F=“对于输入<A,B> , A是DFA，B是正则表达式，
1)将正则表达式B转化为等价的DFA C。
2)检测A与C是否等价(EQ_{DFA}可判定)。
3)若等价，则接受；否则拒绝。”
F判定EQ_{D-R}。

第四章 可判定性

4.3 设ALL_{DFA}={<A> | A是一个识别Σ^*的DFA}。证明ALL_{DFA}可判定。

证明：

构造DFA B，使得L(B)= Σ^*。

M＝“对于输入<A>,其中A是一个DFA:

1)检测<A,B>是否等价(EQ_{DFA}可判定)。

2)若<A,B>等价，则接受；若<A,B>不等价，则拒绝。”

第四章 可判定性

4.4 $A_{\varepsilon CFG}$={<G> | G是一个派生ε的CFG}。证明$A_{\varepsilon CFG}$可判定。

证明：M="输入<G>，G是一个CFG，

1)构造与G等价的Chomsky文法P。

2)若P的规则集中有$S_0 \to \varepsilon$(其中S_0为起始变元)，则接受；否则拒绝。"

M判定$A_{\varepsilon CFG}$。

第五章 可归约性

1. 考虑下面的判定问题：

“对于任意给定的图灵机M，判定M是否接受字符串010?”

(a). 将此判定问题写成为一个语言L_{010}，使得图灵机M接受字符串010当且仅当$\langle M\rangle \in L_{010}$。

(b). 通过构造从A_{TM}到L_{010}的归约，用反证法证明L_{010}是不可判定的。

(c). 使用Rice定理证明L_{010} 是不可判定的。

第五章 可归约性

a. L_{010} ={〈M〉：M是一个图灵机，且010∈L(M)}

b. 证明：设R是判定L_{010}的图灵机，下面构造判定A_{TM}的图灵机S。S的运行方式如下：

S=“对于输入〈M,w〉，其中M是图灵机，w是串；

1. 对于输入x，在输入w上运行M。若M接受w，且x是010则接受。

2. 如果接受，则010∈L(S)，否则不成立。”

为了判定A_{TM}：

1. 对于输入〈M,w〉，构造S。

3. 在〈S〉上运行R，如果R接受，则S接受，如果R拒绝，则S拒绝。

第五章 可归约性

L_{010} ={⟨M⟩: M是一个图灵机，且010∈L(M)}

c.

1. 给定TM M_1,M_2,且L(M_1) =L(M_2),则或者两个TM都识别010或都不识别，所以有⟨M_1⟩，⟨M_2⟩ ∈ L_{010}或都不是。

2. 存在TM接受010或拒绝010，L_{010}是非平凡的。

因此，根据Rice定理，L_{010}是不可判定的。

第五章 可归约性

2. 令$TOTAL_{TM}$ = $\{\langle M\rangle \mid M$是一个图灵机，且$L(M) = \Sigma^* \}$.

(a). 通过构造从A_{TM} 到$TOTAL_{TM}$ 的归约，用反证法证明$TOTAL_{TM}$ 是不可判定的。

(b). 使用Rice 定理证明$TOTAL_{TM}$ 是不可判定的。

(c). 通过构造从$TOTAL_{TM}$ 到EQ_{TM} 的归约，用反证法证明EQ_{TM}是不可判定的。(EQ_{TM} 的定义见教材P139)

第五章 可归约性

a. 证明：设R是判定**TOTAL**$_{TM}$的图灵机。

S=“对于输入<M,w>，其中M是图灵机，w是串；

1. 构造M’

M’=“对于输入x，在w上运行M，如果M接受w则接受。

a.如果M接受w， L(M’)= Σ^*

b.如果M拒绝w，则L(M’)=∅ ”

2. 对于输入<M,w>，构造M’，在<M’>上运行R。

3. 如果R接受M’，则接受，否则拒绝。

第五章 可归约性

b.

1. 给定TM M_1，M_2，满足 $L(M_1) = L(M_2)$

   a. 如果$\langle M_1\rangle \in$ **TOTAL**$_{TM}$那么 $\langle M_2\rangle \in$ **TOTAL**$_{TM}$

   b. $\langle M_1 \rangle \notin$ **TOTAL**$_{TM}$那么$\langle M_2\rangle \notin$ **TOTAL**$_{TM}$

2. 存在M_1，接受任何输入w $\in \boldsymbol{\Sigma}^*$;存在$M_2$，仅识别{01}，显然不在**TOTAL**$_{TM}$中

因此，根据Rice定理，**TOTAL**$_{TM}$是不可判定的。

第五章 可归约性

c.设EQ_{TM} 是可判定的,有图灵机R判定，如下构造判定$TOTAL_{TM}$的TM S。

S=“对于输入<M>，其中M是图灵机：

1. 在输入<M,M_1>上运行R，其中M_1是接受所有输入的图灵机。

2.如果R接受，则接受；如果R拒绝，则拒绝。”

如果R判定EQ_{TM}，则S判定$TOTAL_{TM}$。$TOTAL_{TM}$是不可判定的，所以EQ_{TM} 不是可判定的。

第五章 可归约性

5.1 证明EQ_{CFG}是不可判定的。

解：由定理5.10，ALL_{CFG}={<G>|G是CFG，且L(G)=Σ*}是不可判定的，只需证明ALL_{CFG}可以归约到EQ_{CFG} 即可。假设EQ_{CFG}是可判定的。

构造ALL_{CFG}的判定器M如下:

M=“对于输入<G>:

1.构建CFG H使得L(H)= Σ*”

2.对<G, H>运行EQ_{CFG}的判定器

3.如果接受，则接受，否则拒绝。

因此，得到ALL_{CFG}是可判定的，矛盾。

第五章 可归约性

5.2 证明EQ_{CFG}是补图灵可识别的。

证明：注意到A_{CFG}={<G,w>|G是能派生串w的CFG}是可判定的。

构造如下TM：

F=“输入<G,H>，其中G,H是CFG，

对于字符串S_1, S_2,…，重复如下步骤。

检测S_i是否可以由G和H派生。

若G和H中有一个能派生w，而另一个不能，则接受。”

F识别EQ_{CFG}的补。

第五章 可归约性

5.3 试找出下面PCP实例中的一个匹配

$$\left\{\left[\frac{ab}{abab}\right],\left[\frac{b}{a}\right],\left[\frac{aba}{b}\right],\left[\frac{aa}{a}\right]\right\}$$

$$\left[\frac{ab}{abab}\right],\left[\frac{ab}{abab}\right],\left[\frac{aba}{b}\right],\left[\frac{b}{a}\right],\left[\frac{b}{a}\right],\left[\frac{aa}{a}\right],\left[\frac{aa}{a}\right]$$

$$\frac{ab}{abab}\right],\left[\frac{ab}{abab}\right],\left[\frac{aba}{b}\right],\left[\frac{b}{a}\right],\left[\frac{b}{a}\right],\left[\frac{aa}{a}\right],\left[\frac{aba}{b}\right],\left[\frac{aa}{a}\right],\left[\frac{b}{a}\right],\left[\frac{ab}{abab}\right]$$

$$\left[\frac{aa}{a}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{aba}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{aba}{b}\right]\left[\frac{ab}{abab}\right]\left[\frac{aa}{a}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{aba}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{ab}{abab}\right]\left[\frac{ab}{abab}\right]$$

$$\left[\frac{ab}{abab}\right]$$

第五章 可归约性

5.4 如果$A \leq_m B$且B是正则语言，这是否蕴涵着A也是正则语言？为什么？

解：否。例如：

对非正则语言$A=\{0^n1^n | n \geq 0\}$和正则语言$B=\{0\}$，可以构造一个可计算函数f使得：

$$f(w) = \begin{cases} 0 & if \ w = 0^n1^n \\ 1 & if \ w \neq 0^n1^n \end{cases}$$

于是$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$，故$A \leq_m B$。