4月19日作业　唐嘉良　2020K8009907032

5.1　首先，$ALL_{CFG}=\{\langle G\rangle \mid G$ 是一个 CFG 且 $L(G)=\Sigma^*\}$ 是不可判定的.

假设 $EQ_{CFG}=\{\langle G_1,G_2\rangle \mid G_1,G_2$ 是两个 CFG，且 $L(G_1)=L(G_2)\}$ 是可判定的，

则~~取 G_2~~ 取生成语言为 Σ^* 的一个 PDA，其对应的 CFG 为 G_2，则 $L(G_2)=\Sigma^*$

设 T 是 EQ_{CFG} 一个判定器，构造 ALL_{CFG} 判定器如下：

S = "对于输入 G：

1. 在 $\langle G,G_2\rangle$ 上运行判定器 T
2. 若 T 接受则接受，否则拒绝"

则 $\langle G\rangle \in ALL_{CFG} \Leftrightarrow \langle G,G_2\rangle \in EQ_{CFG}$　∴ S 是判定 ALL_{CFG} 的一个判定器　与 ALL_{CFG} 不可判定矛盾. ∴ EQ_{CFG} 不可判定.　□

5.2　仅需证 $\overline{EQ_{CFG}}$ 是 Turing 可识别的. $\overline{EQ_{CFG}}=\{\langle G_1,G_2\rangle \mid G_1,G_2$ 是两个 CFG 且 $L(G_1)\neq L(G_2)\}$

已经知道 A_{CFG} 是可判定语言，设其判定器为 T

构造识别 $\overline{EQ_{CFG}}$ 的 Turing 机 M 如下：

M = "对于输入 $\langle G_1,G_2\rangle$：

1. 枚举 Σ^* 中字符串 $w_1,w_2,\cdots$，从 w_1 开始做如下操作
2. 若对于某个 w_i，在 $\langle G_1,w_i\rangle$ 与 $\langle G_2,w_i\rangle$ 上运行判定器 T，若有且仅有一个被接受，则接受，否则取下一个 w_i 重复步骤 2."

则易见 $L(M)=\overline{EQ_{CFG}}$　∴ EQ_{CFG} 是补 Turing 可识别的.　□

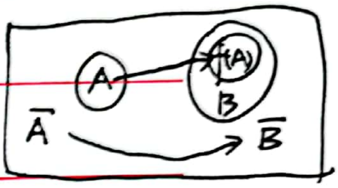
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

5.3 $\left[\frac{ab}{abab}\right]\left[\frac{ab}{abab}\right]\left[\frac{aba}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{aa}{a}\right]\left[\frac{aa}{a}\right]$ 就是一个匹配.

ab|ab|aba|b|b|aa|aa

ab ab|ab ab|b|a|a|a|a

5.4 $A \le_m B \Leftrightarrow$ 存在可计算函数 $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ s.t. 对每个 w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$



$\therefore \exists$ a Turing Machine M, it accepts each $w \in \Sigma^*$ and the output is $f(w)$ when it stops. ~~We now only need to give a Turing Machine M' such that $L(M')=A$~~

$\Sigma = \{0,1\}$. A is Turing 可判定的. 判定器为T

Giving a counter-example: $A = \{0^n 1^n \mid n \ge 0\}$ ~~is regular~~

$B = \{1\}$. $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$, $f(w) = \begin{cases} 0, & \text{if } w \ne 0^n 1^n \\ 1, & \text{if } w = 0^n 1^n \end{cases}$ $\therefore w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$

M' = " for input w:

1. ~~if $w = 0^n1^n$~~ Operate T on w,
2. If accepted, then accepted and output '1'; If rejected, then rejected and output '0'

so f is a computable function and $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$, $A \le_m B$ but B is regular and A is not regular. □