



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

2.2 (a) 令 $C = A \cap B = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, 欲证 CFL 在交运算下不封闭, ~~先~~ 证 C 不是 CFL.

用泵引理, 若 C 是 CFL, 则存在泵长度 p s.t. $\forall w \in C, w = uvxyz$ 且 $|vxy| \leq p; |v| \geq 1; uv^nxy^nz \in C, \forall n$.

取 $w = a^p b^p c^p$, 考虑到 v, y 均含一种符号, 泵出后, 它们均不含的那个符号与其它两个符号数量不等, 矛盾; 若 v 或 y 含有一种以上符号, 泵出后三个符号的次序不再正确, 矛盾.

~~于是~~ C 不是 CFL ~~证毕~~. 再证 A 与 B 是上下文无关语言.

考虑 CFG 如下: $G = (\{S, T\}, \{a, b, c\}, R, S)$, 其中 R :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow TF \\ T &\rightarrow aT \mid \epsilon \\ F &\rightarrow bFc \mid \epsilon \end{aligned}$$

则 G 生成 A , 于是 A 是 CFL. 类似地, B 也是 CFL.

综上, CFL 在交运算下不封闭. 证毕. \square

(b) 我们假设 CFL 在补运算下封闭, 则 $\forall A, B$ 是 CFL, \bar{A} 与 \bar{B} 也是 CFL, 由于 CFL 关于并运算封闭, 可见 $A \cup B$ 也是 CFL, 则 $\overline{A \cup B}$ 也是 CFL. 由 De Morgan 律, $\bar{A} \cap \bar{B}$ 也是 CFL. 由于我们假设条件 \bar{A}, \bar{B} 可以是任意 CFL, 我们得到 ~~矛盾~~ 结论: 上下文无关语言关于交运算封闭, 这与 (a) 中结论矛盾.

综上, CFL 在补运算下不封闭. 证毕. \square

