



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

7.45 设 $A \in P$ 且 $A \neq \emptyset$, $A \neq \Sigma^*$

$\forall L \in P$, 有多项式时间内判定 L 的图灵机 M . 取 $a \in A$, $b \in \bar{A}$.

构造图灵机 $M' = "$ 对输入 $w \in \Sigma^*$,

1. 在 w 上运行 M

2. 若接受, 则打印 a , 否则打印 b ."

于是 $w \in L \Leftrightarrow M \text{ 接受 } w \Leftrightarrow M' \text{ 输出 } a \Leftrightarrow f(w) \in A$.

f 为 M' 对应的多项式函数

\therefore 除 $A = \emptyset$ 及 $A = \Sigma^*$ 以外, 所有语言 $A \in P$ 均是 NPC 的. \square

2. 证明 $L = \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ 是一个布尔公式, 且 } \neg \varphi \text{ 是可满足的} \}$, 证明 L 是 NP 完全的.

~~由定理 7.22~~ 由 Cook-Levin 定理, SAT 是 NPC 的. 下面构造 SAT 到 L 的归约 p .

~~构造~~ 设 SAT 被非确定性多项式时间图灵机 M 判定.

构造 $M' = "$ 对输入 $\langle \varphi \rangle$ ~~构造~~,

1. ~~在 $\langle \varphi \rangle$ 上运行 M 并输出 $\langle \neg \varphi \rangle$~~ 输出 $\langle \neg \varphi \rangle$

2. 在 $\langle \varphi \rangle$ 上运行 M , 接受则接受并打印 $\langle \varphi \rangle$, 否则拒绝并打印 $\langle \varphi \rangle$."

则 M' 是多项式的非确定性图灵机, 它判定 SAT, 且 $\langle \varphi \rangle \in \text{SAT} \Leftrightarrow f(\langle \varphi \rangle) \in L$.
 f 是 M' 对应的多项式函数.

$\therefore \text{SAT} \leq_p L \quad \therefore L \text{ 是 NPC 的.}$





7.35 若 $P = NP$, 则 $SAT \in P$ 于是 \exists 判定器 M , 它是确定性图灵机且多项式时间内判定 SAT . 下面给出一个多项式算法给出其中的满足赋值:

构造图灵机 $M' = "$ 对输入 $\langle \varphi \rangle \in SAT$,

1. 重复下列步骤, 直至 $\langle \varphi \rangle$ 仅剩一个变元 ~~或拒绝或接受~~.
 2. 用 0 和 1 分别代替 $\langle \varphi \rangle$ 中 ~~所有~~ ^{所有} 变元, 这个变元可以任取, 对新 $\langle \varphi' \rangle$ 运行 M , ~~若用 0 代替和用 1 代替均拒绝,~~ 若均拒绝, 则拒绝, 否则, 若用 0 代替接收则以用 0 代替后产生的 $\langle \varphi' \rangle$ 代替 $\langle \varphi \rangle$, 若用 1 代替接收则以用 1 代替后产生的 $\langle \varphi' \rangle$ 代替 $\langle \varphi \rangle$, 并将被代替变量值记录下来.
 3. 对仅剩一个变元的 $\langle \varphi \rangle$ 运行 M , 若拒绝则拒绝, 否则 ~~出最后一个变元取值~~ 取其为 0 或 1 并分别判断整个公式是否为真, 若均不为真, 则拒绝, 否则选取为真的取值并记录下来.
 4. ~~接受~~ 接受, 并顺序打印 $\langle \varphi \rangle$ 的一组满足赋值."
- 则 M' 是多项式运行时间.
- 则若 $\langle \varphi \rangle \in SAT$, M' 对应的多项式算法 f 必给出 $\langle \varphi \rangle$ 的一组满足赋值.

