5月17日作业　唐嘉良　2020K8009907032

x_1 $\bar{x_1}$
x_2 $\bar{x_2}$
x_3 $\bar{x_3}$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

7.5　将$(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$代入，发现表达式均为0

∴ 该公式是不可满足的.

7.29　3SAT $=\{\langle\phi\rangle \mid \phi$是一个可满足的3CNF形式的布尔公式$\}\in NP$.

先证 SET-SPLITTING 是NP问题，因为有验证器V = "对输入$\langle\langle S,C\rangle, a\rangle$，a是S的一种染色方案，

1. 检查a是否仅有红、蓝两色，若是则进入2，否则拒绝

2. ~~对~~每个i，检查C_i中元素颜色是否完全一致，若是则拒绝，~~否~~若都不是则接受"

则 SET-SPLITTING $=\{\langle S,C\rangle \mid \langle\langle S,C\rangle,a\rangle$被V接受$\}$.

设$|S|=n$，由于1是$O(n)$的，2是$O(C_n^2\cdot n)=O(n^3)$的　∴ V是多项式时间验证器.

∴ SET-SPLITTING $\in NP$.

再证 3SAT $\leq_p$ SET-SPLITTING

设$\varphi\in$3CNF，则构造$f(\varphi)=\langle S,C\rangle$，其中$S=\{x_i,\bar{x_i}$ ~~|~~ x_i是φ中文字$\}$ ~~for all i~~，x是测试元素$\}$

令$C_i=$ ~~$\{x_i,\bar{x_i}\}$~~ ~~则若φ可满~~ 且 ~~文字值为1当且仅当它染红(蓝)色~~ 每个子句中的文字，形如$\{x_1,\bar{x_2},x_3\}$ 并上一个测试元素x，$x\}$，$1\leq i\leq$子句个数 以及$\{x_i,\bar{x_i}\}$ for all i.　不妨设x染红色，代表假，蓝色代表真

~~则若φ可满足，则∃一组$\{x_i\}$的取值满足φ，则C_i必不同色(for all i)~~

~~若C_i对每个i均不同色，则$\forall i$，∃文字$\in C_i$且它为红色，取出~~

则若φ可满足，必可以把每个子句相关的C_i中除x外某些文字染成蓝色（这些文字是取1的文字），于是这部分$\{C_i\}$不同色，再把~~每~~没染过的文字染成任意色（不染它的反文字），最后把已染过的文字的反文字染反色，则每个C_i不同色.

若每个C_i不同色，则由$\{x_i,\bar{x_i}\}$的那些C_i可得到一组赋值，由形如$\{x_1,\bar{x_2},x_3,x\}$的C_i不同色可得里面除x外至少有个~~若~~文字为蓝色　∴ φ可满足

$(x_1\vee\bar{x_2}\vee x_3)\wedge(x_1\vee x_2\vee x_3)$　(1,1,1)

这样的归约是多项式时间的，于是 $3SAT \leq_p$ SET-SPLITTING.

∴ SET-SPLITTING是NP完全的.

7.39 先证 PUZZLE $\in$ NP. 构造非确定性TM M=" 对输入 $\langle c_1,\cdots,c_k\rangle$,

1. 非确定性地选择 $c_1,\cdots,c_k$ 放入盒子的方式
2. 检查是否每个孔均被堵住"

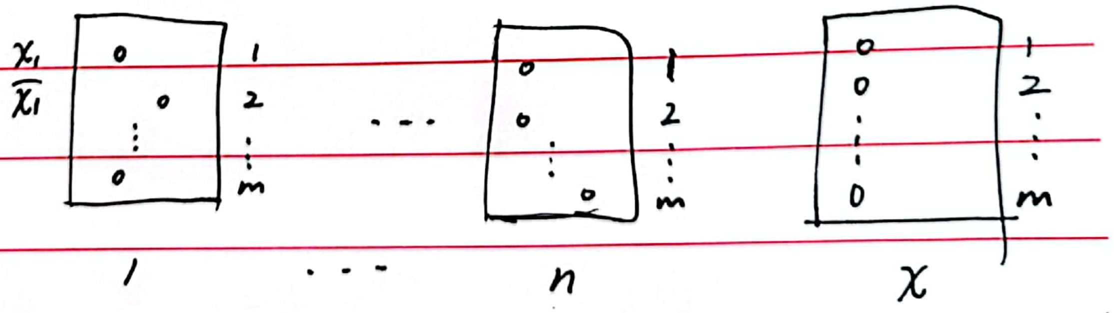
则M是多项式时间的 ∴ PUZZLE $\in$ NP.

再证 $3SAT \leq_p$ PUZZLE.

设 $\varphi \in$ 3CNF 设φ有n个变量、m个子句

构造 $f(\varphi)$ 是如下n张卡片：每张卡片对应一个变元，每排孔对应一个子句，

若第i个变量在第j个子句中(正)出现，则在第i张卡片第j排右边打孔，反出现则在左边打孔，(不出现则均打孔)，再构造一个左边全打孔的卡片x.



若φ可满足，则∃一组取值 s.t. $\varphi=1$ 在该组取值中若 $x_i = 1/0$ 则将第i张卡片正/反放 (for all i)，并将x正放. 则只要某个i卡片第j行被堵，则该子句为真，于是该卡片集有解.

若卡片集有解，则∃一组取值 s.t. 每个子句均为真 ∴φ可满足

∴ $3SAT \leq_p$ PUZZLE

∴ PUZZLE是NP完全的.

7.48 (b) 构造非确定性TM $M=$ "对输入 $\langle G, a, b, k\rangle$,

1. 从 a 为起点，非确定性选择长度为 $k, k+1, \cdots, s-1$ 的简单路径（s 为 G 点个数）

2. 检查该路径终点是否为 b，若是则接受，否则在该计算分支拒绝."

则 M 多项式时间内判定了 LPATH.

下证 $UHAMPATH \le_p LPATH$.

构造 $f(\langle G, a, b\rangle) = \langle G, a, b, s-1\rangle$

则若 $\langle G, a, b\rangle \in UHAMPATH$ 则 $f(\langle G, a, b\rangle) \in LPATH$

若 $\langle G, a, b, s-1\rangle \in LPATH$ 则 $\langle G, a, b\rangle \in UHAMPATH$

$\therefore UHAMPATH \le_p LPATH$ $\therefore$ LPATH 是 NP 完全的.