# 习题课讲义 (CH4,5)

诸葛佳明

2022 年 6 月 10 日

## 1 数学补充

### 1.1 叉乘

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

性质

1. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$
2. $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|A||B|\sin\theta$
3. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$

### 1.2 混合积

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}C_x & C_y & C_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

性质

1. $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$
2. $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$
3. $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$

### 1.3 三重积 (拉格朗日公式，三重积展开)

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

## 2 毕奥-萨法尔定律

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV$$

## 3 高斯定理与环路定理

积分形式：

$$\begin{cases} \oiint\limits_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \\ \oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum I_0 \end{cases}$$

微分形式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 \end{cases}$$

H 与 B,M 关系：

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$$

总电流、传导电流、磁化电流关系：

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}'$$

磁化关系：

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

得到：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{j}' \end{cases}$$

利用数学上的 Gauss 定理，得到以下规律：

1. 将 $\nabla$ 改为垂直于面的单位向量 $\hat{n}$，由 1 指向 2
2. 将 $\nabla$ 作用的场或源 $\boldsymbol{F}$ 改为 $\boldsymbol{F_2} - \boldsymbol{F_1}$
3. 其余场改为 0，其余源由体密度改为面密度

由此得到：

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\boldsymbol{B_2} - \boldsymbol{B_1}) = 0 \\ \hat{n} \times (\boldsymbol{H_2} - \boldsymbol{H_1}) = \boldsymbol{i}_0 \\ \hat{n} \times (\boldsymbol{M_2} - \boldsymbol{M_1}) = \boldsymbol{i}' \end{cases}$$

第一式常用于给出边界条件，后两式常用于计算面电流或矢量关系。

### 3.1 习题 6.9

**6.9** 一无限长的直圆柱形铜导线外包一层磁导率为 $\mu$ 的圆筒形磁介质，导线半径为 $R_1$，磁介质的外半径为 $R_2$，导线内有均匀分布的电流 $I$ 通过.

（1）求导线内、介质内和介质外的磁场强度和磁感应强度的分布；

（2）求介质内、外表面的磁化面电流密度.

**解** （1）取圆柱坐标（$r,\phi,z$）. 由对称性，可判断磁场沿 $\phi$ 方向，大小只与 $r$ 有关. 取半径为 $r$ 的圆回路，圆心位于 $z$ 轴上，圆面与 $z$ 轴垂直，运用安培环路定理可求得各区磁场.

$$2\pi rH(r<R_1)=j\cdot\pi r^2 \quad\Rightarrow\quad H(r<R_1)=\frac{Ir}{2\pi R_1^2},\ B(r<R_1)=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$

$$2\pi rH(R_1<r<R_2)=I \quad\Rightarrow\quad H(R_1<r<R_2)=\frac{I}{2\pi r},\ B(R_1<r<R_2)=\frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$2\pi rH(r>R_2)=I \quad\Rightarrow\quad H(r>R_2)=\frac{I}{2\pi r},\ B(r>R_2)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

图 1: 习题 6.9(1)

(2)

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\boldsymbol{H}$$

$\boldsymbol{H},\boldsymbol{M}$ 均为 $\hat{\phi}$ 方向，取 $\hat{n}=\hat{r}$，则 $\boldsymbol{i}'$ 为 $\hat{z}$ 方向。

介质内侧 ($R_1$ 处)：

$$i'=M(R_1+)-M(R_1-)=M(R_1+)$$

介质外侧 ($R_2$ 处)：

$$i'=M(R_2+)-M(R_2-)=-M(R_2-)$$

# 4 磁 (偶极) 矩

磁化磁矩

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}V$$

磁偶极矩

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j})dV = \frac{1}{2}I\oint\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{l}$$

例如，载流线圈：

$$\boldsymbol{m} = IS\hat{z}$$

磁偶极矩**远处磁场** (例 5.3, 式 5.2.6)：

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0[3\hat{r}(\boldsymbol{m}\cdot\hat{r})-\boldsymbol{m}]}{4\pi r^3}$$

磁矩在磁场中的力矩与受力：

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

注意：这里的磁矩受力与虚功原理求出来的会有差别，原因王助教已作补充。感兴趣的可以去听下次习题课 (能量那章)。

## 4.1 习题 6.10

**6.10** 一抗磁质小球的质量为 0.10g，密度 $\rho$=9.8g·cm$^{-3}$，磁化率为 $\chi_{\mathrm{m}} = -1.82\times10^{-4}$，放在一个半径 $R$ = 10cm 的圆线圈的轴线上且距圆心为 $l$ = 10cm 处（习题 6.10 图）. 线圈中载有电流 $I$=100A. 求电流作用在这小球上力的大小和方向.

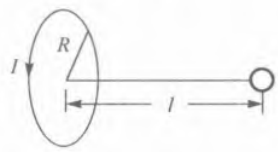


图 2: 习题 6.10

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m\boldsymbol{H} = \frac{\chi_m\boldsymbol{B}}{\mu_0(1+\chi_m)}$$

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}V$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = m\frac{d}{dz}\boldsymbol{B}$$

# 5 磁路定理

| | | | |
|---|---|---|---|
| 电路 | 电动势 $\varepsilon$ | 电流 $I=\iint \vec{j}\cdot d\vec{S}$ | 电阻 $R=l/(\sigma S)$ |
| 磁路 | 磁动势 $\varepsilon_m=NI_0$ | 磁通量 $\Phi_B=\iint \vec{B}\cdot d\vec{S}$ | 磁阻 $R_m=l/(\mu_r\mu_0 S)$ |

图 3: 磁路定理的对照

$$\varepsilon_m=\Phi_B\sum_i R_{mi}$$

前提是 $\mu_r \gg 1$，对铁磁体一般都能满足。

# 6 磁镜

**守恒量：回旋磁矩：**

$$\mu=\frac{1}{2}mv_\perp^2/B$$

可以自行计算粒子在磁镜中的磁矩，推出上式。

**投掷角与磁镜比：**

$$\sin^2\theta_m=\frac{B_0}{B_m}=\frac{1}{R_{mi}}$$

**立体角**

$$d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi$$

立体角对应于平面的弧长，是由张角对应的面积定义的，可自行查找相关解释。

## 6.1 习题 5.18

**5.18** 有一磁镜装置，磁镜比为 $R_{\mathrm{m}}=4$，在磁镜装置中心部位有一各向同性带电粒子源，问从磁镜中逃逸的粒子占多少比例？

图 4: 习题 5.18

$$\theta_c = \arcsin\sqrt{\frac{1}{R_{mi}}} = \frac{\pi}{6}$$

这里的比例对应于一个球中逃逸粒子区域对应的面积，应用立体角计算，由对称性，仅考虑半个球面 (分母 $2\pi$) 即可。

$$\eta = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_c}\sin\theta d\theta d\phi}{2\pi} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

# 7 补充题

## 7.1 磁镜

（1）一个半径为 R，电流为 I 的电流圆环，求在轴线上的磁感应强度。

（2）设两个线圈各有 N 匝线圈，通以相同的电流为 I，两个线圈半径都为 R。如果两个线圈之间的距离为 10R，这时两个线圈之间的磁场就形成了一个磁镜，带电粒子在磁镜中的磁矩是守恒量。宇宙射线中的带电粒子在各个方向均匀的进入这个磁镜，则什么角度范围内的带电粒子进入这个磁镜后会被捕获？

（3）带电粒子在磁镜中运动 (非相对论性 $v \ll c$)，如果磁感应强度为 B 处的回旋半径 a，证明：

$$a\sqrt{B} = Constant$$