习题课讲义

诸葛佳明

2022 年 4 月 23 日

1 标量、矢量与张量

标量 (0 阶张量)：

$$\varphi$$

矢量 (1 阶张量)：

$$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}$$

* 张量 (2 阶)：广义电容，电极化张量

$$\overleftrightarrow{\chi_e} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

1.1 基矢的表示

$$\hat{e}_x = \hat{x} = \frac{\overrightarrow{x}}{|x|}$$

$$\hat{e}_r = \hat{r} = \frac{\overrightarrow{r}}{|r|}$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{\theta} = \frac{\overrightarrow{\theta}}{|\theta|}$$

1.2 Nabla 算子,∇

$$\nabla = \sum_i \hat{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

P314, 附录

1.2.1 直角坐标系

梯度

$$\nabla\Phi = grad\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = div\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = rot\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

1.2.2 柱坐标系

梯度

$$\nabla\Phi = grad\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = div\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1.2.3 球坐标系

梯度

$$\nabla\Phi = grad\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = div\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

1.2.4 * 一般正交曲线坐标系

Lame 系数

对任意一组正交曲线坐标系基矢 $\hat{u_a}(a=1,2,3)$，定义 Lame 系数：

$$d\boldsymbol{l} = \sum_{a=1}^{3}(h_a du_a)\hat{u_a}$$

定义 $H = h_1h_2h_3$

梯度、散度、旋度由以下给出：

$$Grad(f) = \sum_{a=1}^{3}\frac{\hat{u_a}}{h_a}\frac{\partial f}{\partial u_a} = (\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{u_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{u_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{u_3})$$

$$Div(\boldsymbol{F}) = \frac{1}{H}\sum_{a=1}^{3}(\frac{H}{h_a}F_a)$$

$$Curl(\boldsymbol{F}) = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$$

例如，对球坐标，有：

$$h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r\sin\theta, H = r^2\sin\theta$$

对柱坐标有：

$$h_r = 1, h_\phi = r, h_z = 1, H = r$$

2 高斯定理与环路定理

积分形式：

$$\begin{cases} \iint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q_0 \\ \oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \end{cases}$$

微分形式：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \end{cases}$$

D 与 E 关系：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$

总电荷、自由电荷、极化电荷关系：

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

得到：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_0 \\ -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = \rho' \\ \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \end{cases}$$

利用数学上的 Gauss 定理，得到以下规律：

1. 将 ∇ 改为垂直于面的单位向量 $\hat{n}$，由 1 指向 2
2. 将 ∇ 作用的场或源 $\boldsymbol{F}$ 改为 $\boldsymbol{F_2} - \boldsymbol{F_1}$
3. 其余场改为 0，其余源由体密度改为面密度

由此得到：

$$
\begin{cases}
\hat{n} \cdot (\boldsymbol{D_2} - \boldsymbol{D_1}) = \sigma_0 \\
-\hat{n} \cdot (\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}) = \sigma' \\
\hat{n} \times \boldsymbol{E} = 0
\end{cases}
$$

前两式常用于求自由电荷面密度和极化电荷面密度，最后一式常用于给出边界条件（电动力学）

（例 2.11 边界条件）

2.1 习题 2.14

2.14 半径为 a、b（$a<b$）的同心导体球壳之间充满非均匀介质，介电常量为 $\varepsilon = \varepsilon_0/(1+kr)$，其中 k 为常数，r 为径向距离. 内球壳表面有电荷 Q，外球壳接地. 计算

（1）系统的电容；

（2）介质内的极化电荷密度；

（3）球面上极化电荷面密度.

图 1: 习题 2.14

(1)

$$4\pi r^2 D = Q (a < r < b)$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1+kr)\hat{r}$$

$$V = \int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + k\ln\frac{b}{a})$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

(2)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{E} = -\frac{kQ}{4\pi r}\hat{r}$$

$$\rho' = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = \frac{kQ}{4\pi r^2}$$

(3)

取 $\hat{n}=\hat{r}$，注意导体一侧 $\boldsymbol{P}=0$

$$\sigma_a' = -\hat{n}\cdot(\boldsymbol{P_2}-\boldsymbol{P_1}) = -\hat{r}\cdot\boldsymbol{P_2} = \frac{kQ}{4\pi a}$$
$$\sigma_b' = -\hat{n}\cdot(\boldsymbol{P_2}-\boldsymbol{P_1}) = \hat{r}\cdot\boldsymbol{P_1} = -\frac{kQ}{4\pi b}$$

2.2 习题 2.19

2.19 如习题 2.19 图所示，一导体球外充满两半无限电介质，介电常量分别为 ε_1 和 ε_2，介质界面为通过球心的无限平面. 设导体球半径为 a，总电荷为 q，求空间电场分布和导体球表面的自由面电荷分布.

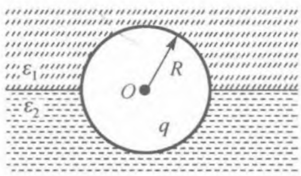

图 2: 习题 2.19

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\pi r^2 E = q$$
$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$
$$\boldsymbol{D_1} = \varepsilon_1\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D_2} = \varepsilon_2\boldsymbol{E}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_0$$

取 $\hat{n}=\hat{r}$，注意导体内 $\boldsymbol{D}=0$

$$\sigma_1 = \hat{n}\cdot(\boldsymbol{D_{1,out}}-\boldsymbol{D_{1,in}}) = \hat{n}\cdot\boldsymbol{D_{1,out}} = D_1$$

区域 2 类似

注意介质面垂直和平行于电场线的区别

2.3 习题 2.20

2.20 把平行板电容器的两极板接到电源上（接通 K），然后在电容器内左半区中放入介电常量为ε的电介质（习题 2.20 图）.

（1）问 A、B 两点的场强哪个大？各为没有介质时的多少倍？

（2）如果在充电后，先把电源断开（即断开 K），再在左半区中放入介质，电场强度如何变化？

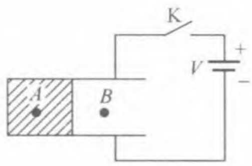

图 3: 习题 2.20

(1)

电源连接，V 不变，则 E 也不变

(2)

电源断开，Q 不变。加入介质后，A 区有极化电荷，为保证 A、B 区域 U 相同，B 板会有自由电荷去 A 板，直到平衡。可以定性知道 E 必减小（多了极化电荷）

$$Q_0 = C_0 E_0 d = C_1 E_1 d$$
$$E_1 = \frac{C_0}{C_1} E_0 = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0$$

3 电像法（导体）

1. 平面
2. 球面（内、外）
3. 无数个像电荷（等比数列求和）

3.1　习题 2.23

***2.23**　如习题2.23图(a)所示，一半径为R的导体球壳，球内部距离球心为$d(d<R)$处有一点电荷q，求

（1）当球壳接地时球内的电场强度和电势；

（2）当球壳不接地且带电量为Q时球内的电场强度和电势.

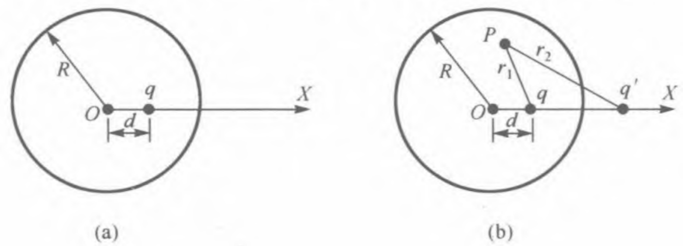

图 4: 习题 2.23

(1)

设像电荷与 O 点距离为 b

$$\begin{cases} bd = R^2 \\ \dfrac{q'}{b-R} = -\dfrac{q}{R-d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q' = -\frac{R}{d}q$$

(2)

不接地后，以无穷远为电势零点。(1) 中 q’ 已经保证了导体壳电势为零时的感应电荷分布。需要在球壳外表面均匀分布 Q+q 电势。Q 是另加的，q 相当于内部源电荷感应出的外表面电荷（电势不为 0）。

$$U = U_1 + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

附加 (3)

考虑在 (1) 题目条件基础上，球壳不接地的电势

$$U = U_1 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

4 静电能

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i U_i$$

注意点电荷、导体、电容运用公式的区别

4.1 能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E} = w_0 + w'$$

静电能、宏观静电能、介质极化能

4.2 利用静电能求静电力

虚功原理，功能关系

电荷 Q 不变

$$\boldsymbol{F} = -(\nabla W_e)_Q$$

电势差 U 不变

$$\boldsymbol{F} = (\nabla W_e)_U$$

注意：电源做功是系统静电能变化的两倍

4.3 习题 3.4

3.4 假定电子是球形的，并且它的静止能量 mc^2（m 是它的静质量，c 是真空光速）就是来自它的静电能量. 这样就可以由它的电荷分布算出它的半径.

（1）假定电子电荷 e 均匀分布在球面上，求电子的半径；

（2）假定电子电荷 e 均匀分布在球体内，求电子的半径；

（3）由于假定电荷分布情况不同，算出的电子半径便稍有不同. 目前把 $r_0 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)$ 叫做电子的经典半径. 已知电子电荷 $e = -1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，电子的静质量 $m = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，光速 $c = 3.0\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求 r_0 的值.

图 5: 习题 3.4

(1)

$$u = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$W = \frac{1}{2}eU = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = mc^2$$

$$a = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

(2)

$$E = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(r < a), E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r > a)$$

$$U(r) = \int_r^\infty E dr = \frac{e(3a^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho U dV = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a} = mc^2$$

$$a = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

5 其它

5.1 习题 2.5

2.5 如习题 2.5 图所示，在金属球 A 内有两个球形空腔，此金属球整体上不带电，在两空腔中心各放置一点电荷 q_1 和 q_2，在金属球 A 之外远处放置一点电荷 q（q 至 A 中心距离 $r \gg$ 球 A 的半径 R）. 计算作用在 A、q_1、q_2、q 四物体上的静电力.

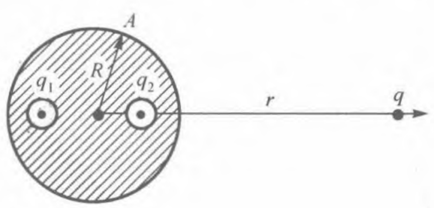

图 6: 习题 2.5

$$\boldsymbol{F}_{q1} = \boldsymbol{F}_{q2} = 0$$

$$\boldsymbol{F}_q = -\boldsymbol{F}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1+q_2)q}{r^2}\hat{r}$$

5.2 补充题

3. 平板电容器极板长 a，宽 b，极板间距 d，极板间充有 ε_1 和 ε_2 两种电介质，体积各占一半，介质界面垂直于极板，当电容器加上电压 U 时，求

(1) 每个电介质中的电位移和电场强度；

(2) 自由电荷密度和极化电荷密度；

(3) 电容器的宏观静电能；

(4) 若介质与极板间无摩擦，为维持平衡，应在介质上施加怎样的外力？

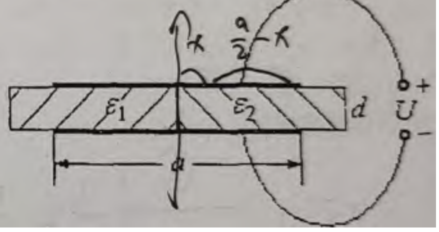

图 7: 某年期中题

更正习题课上讲的有问题的地方：

(1)

直接用电容关系算，不需要列高斯定理（更简单了）

$$E = \frac{U}{d}$$

$$D_i = \varepsilon_i E$$

(3)

题目求的是宏观静电能，利用 4.1 能量密度公式求

$$W_0 = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$