

Handout: Erweiterte Regelkreisstrukturen

Die Möglichkeiten des Reglerentwurfs im Standardregelkreis sind oft nicht ausreichend, wenn spezielle Anforderungen zum Beispiel an die Ausregelung der Störgröße oder an das Führungsverhalten gestellt werden. Deshalb muss der Standardregelkreis entsprechend erweitert werden, um diesen gesteigerten Anforderungen gerecht zu werden. Dieses Handout bietet eine Zusammenfassung der in der Praxis gebräuchlichen erweiterten Regelkreisstrukturen und Entwurfsmethoden. Der Appendix bietet schließlich eine Anleitung, wie die hier vorgestellten, aber auch beliebige andere lineare Regler, zur Regelung eines nichtlinearen Modells, wie es in der Praxis meist der Fall ist, verwendet werden können.

1 Internal Model Principle (IMP)

Zunächst wird der Standardregelkreis aus Abbildung 1 betrachtet und wir stellen die Frage, welche Eigenschaften der Regler $K(s)$ aufweisen muss, damit ein gutes Führungsverhalten (keine bleibende Regelabweichung) bei einem gegebenen Referenzsignal erreicht wird.

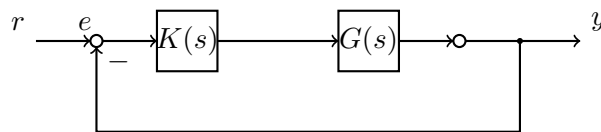


Abbildung 1: Standardregelkreis.

Unter der Annahme, dass sich das Referenzsignal $R(s)$, die Strecke $G(s)$ und der Regler $K(s)$ gebrochen rationale Funktionen darstellen lassen, d.h.

$$R(s) = \frac{Z_R(s)}{N_R(s)}, \quad G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}, \quad K(s) = \frac{Z_K(s)}{N_K(s)}$$

ergibt sich für den Regelfehler

$$E = SR = \frac{1}{1 + GK} R = \frac{1}{1 + \frac{Z_G}{N_G} \frac{Z_K}{N_K}} \frac{Z_R}{N_R} = \frac{N_G N_K}{N_G N_K + Z_G Z_K} \frac{Z_R}{N_R}.$$

Weiterhin wird angenommen, dass sich die Pole von $R(s)$ in der geschlossenen rechten Halbebene befinden. D.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \neq 0$.

Satz (Internal Model Principle (IMP)). *Für die Reglerstruktur aus Abbildung 1 und den obigen Annahmen gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

genau dann wenn

- *Der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist*

- und $N_R(s)$ ein Faktor des charakteristischen Polynoms des offenen Kreises ist, d.h. es existiert ein Polynom $Q(s)$ so, dass $N_G(s)N_K(s) = Q(s)N_R(s)$.

Für gutes Führungsverhalten muss der Regler also ein Modell des Referenzsignals besitzen.

Beispiel. Gegeben sei die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = \frac{1}{s+2}$. Das Referenzsignal sei ein Einheitssprung, d.h. $R(s) = \frac{1}{s}$. Dann ergibt sich für den Regelfehler $E(s) = \frac{(s+2)N_K(s)}{(s+2)N_K(s)+Z_K(s)} \frac{1}{s}$. Nach dem Internal Model Principle wird nun $N_K(s) = s$ sowie $Z_K = k$ gewählt (I-Regler). Damit ergibt sich für den Regelfehler $E(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+k}$. Mit Hilfe des Endwertsatzes kann nun gezeigt werden, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ gilt.

Beispiel. Gegeben sei wieder die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = \frac{1}{s+2}$. Das Referenzsignal sei $r(t) = \sin(t)$, d.h. $R(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Für den Regelfehler ergibt sich $E(s) = \frac{(s+2)N_K(s)}{(s+2)N_K(s)+Z_K(s)} \frac{1}{s^2+1}$. Aufgrund des Internal Model Principle wählen wir für den Regler $N_K(s) = s^2+1$ sowie $Z_k(s) = b_1s+b_0$. Dadurch ergibt sich für den Regelfehler $E(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+(b_1+1)s+b_0+2}$. Wenn b_1 und b_0 so gewählt werden, dass die Beiwertebedingung erfüllt ist, kann wieder mit Hilfe des Endwertsatzes gezeigt werden, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ gilt.

2 Störgrößenaufschaltung

Unter der Annahme, dass die Störung z gemessen werden kann und das Störmodell $G_z(s)$ bekannt ist, kann der Einfluss der Störung über eine Störgrößenaufschaltung $K_z(s)$ effizienter kompensiert werden, als dies alleine durch den geschlossenen Kreis mit Regler $K(s)$ möglich ist. Unter geeigneten Bedingungen, die weiter unten diskutiert werden, kann der Einfluss der Störung auf den Ausgang sogar vollständig unterdrückt werden. Die prinzipielle Struktur einer Störgrößenaufschaltung ist in Abbildung 2 gezeigt.

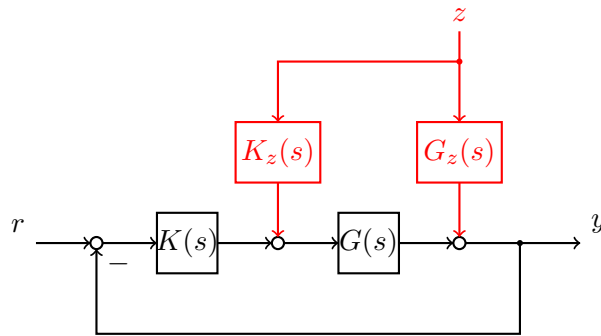


Abbildung 2: Störgrößenaufschaltung.

Wir stellen zunächst die Gesamtübertragungsfunktion des Systems auf. Dafür ergibt sich

$$\begin{aligned} Y &= G_z Z + G(K_z Z + K(R - Y)) \\ \Rightarrow Y &= \frac{GK}{1 + GK} R + \frac{G_z + GK_z}{1 + GK} Z. \end{aligned} \quad (1)$$

Daraus sehen wir, dass um den Einfluss von Z auf Y vollständig zu eliminieren,

$$K_z = -\frac{G_z}{G}$$

gewählt werden müsste. Dies ist jedoch nur unter den folgenden Bedingungen möglich:

- K_z muss kausal sein. Um dies zu erreichen muss gelten:

$$\text{rel. Grad}(G) \leq \text{rel. Grad}(G_z).$$

- K_z muss stabil sein. Um dies zu erreichen müssen alle Nullstellen der Strecke G links der imaginären Achse liegen.

Beispiel. Gegeben seien die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = \frac{1+s}{3+s}$ und die Störübertragungsfunktion $G_z(s) = \frac{1}{4+s}$. Beide oben genannten Bedingungen sind erfüllt und die Störgrößenaufschaltung $K_z(s) = -\frac{3+s}{(1+s)(4+s)}$ ist kausal und stabil und ermöglicht eine exakte Kompensation der Störgröße.

Sollten nicht beide Bedingungen erfüllt sein, ist eine vollständige Kompensation der Störung z nicht möglich. Wie dann dennoch eine approximative Kompensation erreicht werden kann, soll mithilfe der folgenden zwei Beispiele gezeigt werden.

Beispiel. Gegeben seien die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = \frac{1-s}{3+s}$ und die Störübertragungsfunktion $G_z(s) = \frac{1}{4+s}$. Da G eine instabile Nullstelle besitzt, ist die Störgrößenaufschaltung $K_z(s) = -\frac{G_z(s)}{G(s)} = -\frac{3+s}{(4+s)(1-s)}$ instabil und kann nicht verwendet werden.

Der Lösungsansatz besteht nun darin, $G(s)$ in einen Allpassanteil $G_{AP}(s)$ und einen minimalphasigen Anteil $G_{MP}(s)$, d.h. einen Anteil ohne instabile Nullstellen, aufzuspalten. In unserem Beispiel folgt

$$G(s) = \frac{1-s}{3+s} = \underbrace{\frac{1-s}{1+s}}_{G_{AP}(s)} \cdot \underbrace{\frac{1+s}{3+s}}_{G_{MP}(s)}.$$

Wird jetzt nur der minimalphasige Anteil berücksichtigt, d.h., $K_z(s) = -\frac{G_z(s)}{G_{MP}(s)}$, ergibt sich ein stabiles Übertragungsglied. In unserem Beispiel folgt $K_z(s) = -\frac{3+s}{(4+s)(1+s)}$. Die Auswirkung dieser Störgrößenaufschaltung kann nun mit Hilfe des Terms $\frac{G_z+GK_z}{1+GK}$ aus Gleichung (1) untersucht werden.

$$\begin{aligned} \frac{G_z(s) + G(s)K_z(s)}{1 + G(s)K(s)} &= \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \left(\frac{1}{4+s} - \frac{(1-s)}{(3+s)} \frac{(3+s)}{(4+s)(1+s)} \right) \\ &= \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \frac{1}{4+s} \left(1 - \underbrace{\frac{1-s}{1+s}}_{\text{Allpass}} \right). \end{aligned}$$

Für $s = 0$ folgt $\frac{G_z(s)+G(s)K_z(s)}{1+G(s)K(s)} = 0$, d.h., zumindest für den stationären Fall ist eine exakte Störgrößenkompensation gewährleistet (die Stabilität des geschlossenen Kreises ist dabei vorausgesetzt, d.h., das charakteristische Polynom $1 + G(s)K(s)$ hat nur Nullstellen in der linken offenen komplexen Halbebene). Dies gilt nicht nur in diesem Beispiel, sondern allgemein.

Beispiel. Gegeben seien die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = \frac{1+s}{(3+s)(5+s)^2}$ und die Störübertragungsfunktion $G_z(s) = \frac{1}{4+s}$. Da der relative Grad von G größer als der von G_z ist, ergibt sich eine akasale Störgrößenaufschaltung $K_z(s) = -\frac{G_z(s)}{G(s)} = -\frac{(3+s)(5+s)^2}{(4+s)(1+s)}$. Dies kann aber behoben werden, indem K_z mit einem Filter $F(s) = \frac{V}{\prod_i (\lambda_i + s)}$ multipliziert wird. Um die Auswirkung dieser modifizierten Störgrößenaufschaltung zu untersuchen, wird wieder der Term $\frac{G_z+GK_z}{1+GK}$ aus Gleichung (1) analysiert.

$$\begin{aligned}\frac{G_z(s) + G(s)K_z(s)}{1 + G(s)K(s)} &= \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \left(\frac{1}{4+s} - \frac{(1+s)}{(3+s)(5+s)^2} \frac{(3+s)(5+s)^2}{(4+s)(1+s)} \frac{V}{\prod_i(\lambda_i + s)} \right) \\ &= \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \frac{1}{4+s} \left(1 - \frac{V}{\prod_i(\lambda_i + s)} \right).\end{aligned}$$

Daraus kann man erkennen, dass durch ein Filter $F(s)$ mit genügend stabilen Polen und mit $F(0) = 1$ zumindest im stationären Fall die Störgröße exakt kompensiert werden kann. In unserem Beispiel ist $F(s) = \frac{100}{(10+s)^2}$ eine mögliche Wahl. Als realisierbaren Störgrößenkompensator erhalten wir damit $K_z(s) = -\frac{100(3+s)(5+s)^2}{(4+s)(1+s)(10+s)^2}$.

3 Kaskadenregelung

Wie aus Abbildung 3 zu erkennen ist, besteht eine Kaskadenregelung aus (mindestens) zwei überlagerten Regelkreisen. Durch diese Struktur kann erreicht werden, dass Störungen auf die Strecke schneller ausgegelt werden.

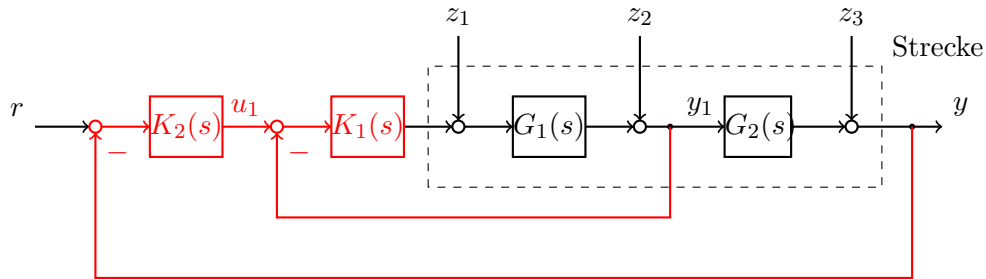


Abbildung 3: Kaskadenregelung.

Die typische Vorgehensweise beim Entwurf einer Kaskadenregelung gliedert sich in die folgenden Schritte.

- Entwurf des inneren Reglers K_1 für den inneren Kreis, so dass die Störung z_1, z_2 auf die Strecke schnell ausgegelt wird.
- Zusammenfassen des inneren Kreises. Wir nehmen an, dass K_1 so entworfen wurde, dass der innere Kreis stabil ist und y_1 der Führungsgröße des inneren Kreises, u_1 , schnell genug folgt. Dann kann der innere Kreis vereinfacht werden zu

$$Y_1 = \frac{G_1 K_1}{1 + G_1 K_1} \approx U_1,$$

d.h., $G_{u_1 \rightarrow y_1} \approx 1$.

- Entwurf des Reglers K_2 für den äußeren Kreis. Dabei kann der innere Kreis durch die Übertragungsfunktion $G_{u_1 \rightarrow y_1} \approx 1$ ersetzt werden. Damit diese Approximation gültig ist, muss der innere Kreis schneller als der äußere sein.

Zusammenfassend sollen also durch den inneren Regler K_1 die Störgrößen z_1 und z_2 ausgegelt werden. Mit dem äußeren Regler wird dann für die Ausregelung der Störung z_3 und gutes Führungsverhalten gegenüber der Führungsgröße r gesorgt.

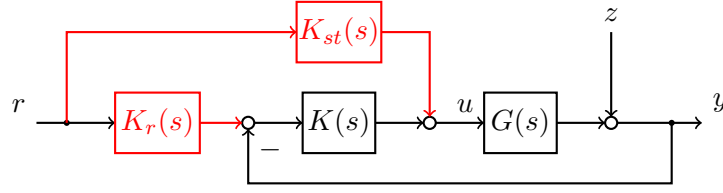


Abbildung 4: Struktur mit zwei Freiheitsgraden (2-DOF).

4 Struktur mit zwei Freiheitsgraden (2-DOF)

Die Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden wie in Abbildung 4 ermöglicht eine “Arbeitsteilung” zwischen Steuerung K_{st} , K_r und Regler K . Während durch die Steuerung und deren direkten Einfluss auf die Stellgröße u ein gutes Führungsverhalten erreicht werden kann, wird die Stabilisierung und Ausregelung der Störgröße vom Regler K übernommen. Dadurch kann im Vergleich zum Standardregelkreis ein wesentlich verbessertes dynamisches Verhalten erreicht werden. Steuerung und Regler können unabhängig voneinander entworfen werden und werden im Folgenden beschrieben.

Entwurf der Steuerung K_{st}

Die Steuerung K_{st} wird als reine Steuerung entworfen, d.h., es wird nur der offene Kreis ($K_r = 0$, $K = 0$) aus Abbildung 5 untersucht.

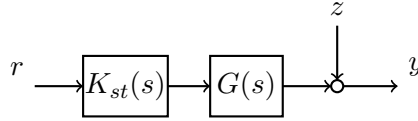


Abbildung 5: Offener Kreis für Führungsverhalten.

Für den offenen Kreis folgt $Y = GK_{st}R$. Für ideales Führungsverhalten, d.h. $Y = R$, müsste $K_{st} = G^{-1}$ gewählt werden. Oft ist G^{-1} jedoch nicht realisierbar. Wir bezeichnen die realisierbare Wunschübertragungsfunktion GK_{st} mit G_{ry} . Im Idealfall ist $G_{ry} = 1$.

Entwurf der Vorsteuerung K_r

Für den Entwurf von K_r berechnen wir die Gesamtübertragungsfunktion

$$\begin{aligned} Y &= Z + G(K_{st}R + K(K_rR - Y)) \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1 + GK}Z + \frac{GK_{st} + GK_rK}{1 + GK}R. \end{aligned}$$

Wir fordern nun, dass auch der geschlossene Kreis die Führungsübertragungsfunktion G_{ry} besitzt, d.h., dass gilt

$$\frac{GK_{st} + GK_rK}{1 + GK} = \frac{G_{ry} + GK_rK}{1 + GK} \stackrel{!}{=} G_{ry}.$$

Unabhängig von K wird dies erreicht durch

$$K_r = G_{ry}.$$

Entwurf des Reglers K

Der Regler K wird so entworfen, dass der geschlossene Kreis stabil ist und eine gute Störunterdrückung aufweist. Dafür können beliebige Reglerentwurfsverfahren angewendet werden. Auf gutes Führungsverhalten muss beim Entwurf von K nicht mehr geachtet werden, da dies schon durch den Entwurf von K_{st} und K_r sichergestellt ist.

Beispiel. Für verschiedene Strecken sollen “möglichst gute” Steuerungen K_{st} entworfen werden.

- Gegeben sei $G(s) = \frac{2+s}{7+s}$. Die ideale Steuerung $K_{st}(s) = G^{-1}(s) = \frac{7+s}{2+s}$ ist realisierbar und es folgt $G_{ry} = 1$.
- Gegeben sei $G(s) = \frac{1-s}{3+s}$. Die ideale Steuerung $K_{st}(s) = G^{-1}(s) = \frac{3+s}{1-s}$ ist instabil und daher nicht realisierbar. Wie im Fall der Störgrößenkompensation können wir dieses Problem beheben, indem G wieder in einen Allpass- und einen minimalphasigen Anteil zerlegt und nur der minimalphasige Anteil für die Steuerung berücksichtigt wird. Wir erhalten $G = G_{AP} G_{MP}$ mit $G_{AP}(s) = \frac{1-s}{1+s}$ und $G_{MP}(s) = \frac{1+s}{3+s}$. Es folgen $K_{st}(s) = G_{MP}^{-1}(s) = \frac{3+s}{1+s}$ und $G_{ry} = \frac{1-s}{1+s}$ (Allpass).
- Gegeben sei $G(s) = \frac{3+s}{(1+s)^2}$. Die ideale Steuerung $K_{st}(s) = G^{-1}(s) = \frac{(1+s)^2}{3+s}$ ist akausal und daher nicht realisierbar. Wie im Fall der akausalen Störgrößenkompensation können wir auch K_{st} mit einem Filter $F(s) = \prod_i \frac{V}{(\lambda_i + s)}$ multiplizieren. $F(s)$ muss genügend stabile Pole besitzen, damit die Steuerung kausal wird. Weiterhin muss $F(0) = 1$ gelten, um eine stationäre Verstärkung der Steuerung von 1 zu erreichen. In unserem Fall ist $F(s) = \frac{10}{10+s}$ ein mögliches Filter, was zur Steuerung $K_{st}(s) = \frac{10(1+s)^2}{(3+s)(10+s)}$ führt. Es folgt $G_{ry}(s) = \frac{10}{10+s}$.

Beispiel. Ein vollständiger Entwurf einer 2-dof Reglerstruktur soll am Beispiel der Strecke $G(s) = \frac{3+s}{1+s}$ gezeigt werden. Der Pol des geschlossenen Kreises soll bei $s = -1$ liegen.

- $K_{st}(s) = G^{-1}(s) = \frac{s+1}{s+3}$. Damit folgt $G_{ry} = 1$.
- $K_r = G_{ry} = 1$.
- Als Regler K wählen wir einen P-Regler mit $K(s) = k_p$. Der Regler kann unabhängig von K_{st} und K_r entworfen werden, d.h. wir müssen nur den geschlossenen Kreis $G_c = \frac{GK}{1+GK}$ untersuchen. Das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises, $1 + GK$, ist $s - 1 + k_p(3 + s)$. Für $k_p = 1$ hat dieses wie gefordert eine Nullstelle bei $s = -1$.

5 Anti-Windup

Ist in einem Regelkreis mit Stellgrößenbeschränkung der Reglerausgang u_R größer als die maximal zulässige Stellgröße u , so ist keine ausreichende Rückkopplung vorhanden. Enthält der Regler einen instabilen Anteil, so kann dies den Regler destabilisieren. Bei einem Regler mit I-Anteil wird z.B. der so entstehende zusätzliche Regelfehler aufintegriert, was zu starkem Überschwingen und sogar zu Instabilität führen kann.

Dieses Problem wird “Windup” genannt. Eine mögliche Abhilfe schafft das sogenannte Anti-Windup, dargestellt in Abbildung 5 am Beispiel eines PI-Reglers. Das Ziel des Anti-Windup ist es, den Integrator zu stoppen, wenn die Stellgröße in der Beschränkung ist:

- Falls u nicht in der Beschränkung ist, gilt $u = u_R$. Der rote Pfad in Abbildung 5 hat dann keinen Einfluss und die Struktur entspricht einem PI-Regler.

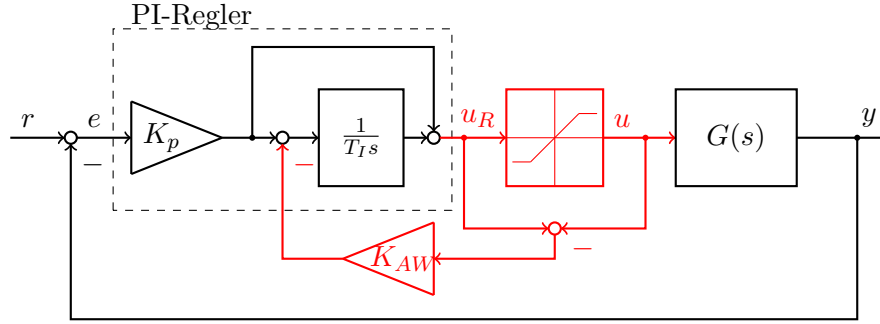


Abbildung 6: Struktur eines Regelkreises mit Anti-Windup.

- Falls u in der Beschränkung ist, gilt $u \neq u_R$. Im Idealfall sollte in dieser Situation der Integratoranteil des PI-Reglers angehalten werden, d.h., u_R sollte nur über den P-Regler $u_R = K_p e$ bestimmt werden. Die Struktur in Abbildung 5 führt zu

$$u_R = K_p e + \frac{1}{T_I s} [K_p e - K_{AW}(u_R - u)] = \underbrace{K_p \frac{1 + T_I s}{K_{AW} + T_I s} e}_{\text{P-Regler}} + \underbrace{\frac{K_{AW}}{K_{AW} + T_I s} u}_{\text{Offset}},$$

wobei $u = u_{\max}$. In diesem Fall ist also kein I-Anteil aktiv. Genauer gesagt handelt es sich für $K_{AW} = 1$ um einen P-Regler mit Offset.

Diese Struktur behebt folglich das Windup-Problem.

6 Zustandsrückführung mit I-Anteil

In einem Standardregelkreis kann die bleibende Regelabweichung bei sprungförmigen Führungs- bzw. Störgrößenänderungen durch einen integrierenden Anteil im offenen Kreis beseitigt werden. Der Einsatz einer klassischen Zustandsrückführung führt zwar zu einem asymptotisch stabilen Regelkreis, das stationäre Verhalten wird jedoch aufgrund der vorhandenen Störungen im Allgemeinen unbefriedigend sein, da eine klassische Zustandsrückführung keinen I-Anteil enthält. Die in Abbildung 7 dargestellte Regelkreisstruktur löst dieses Problem, indem ein I-Anteil in den offenen Kreis integriert wird.

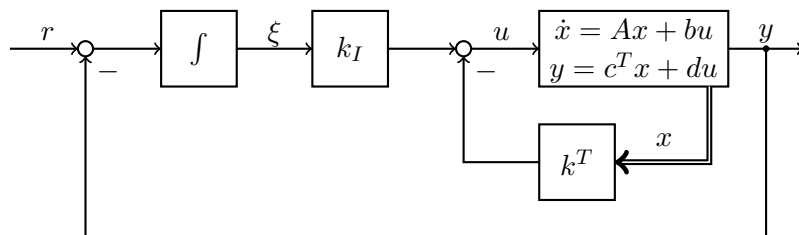


Abbildung 7: Zustandsrückführung mit I-Anteil.

Der Entwurf einer Zustandsrückführung mit I-Anteil nach Abbildung 7 lässt sich zurückführen auf den bekannten Entwurf einer Zustandsrückführung. Dazu wird das Zustandsraummodell $\dot{x} = Ax + bu$ der Regelstrecke erweitert um die Zustandsvariable ξ , wobei

$$\dot{\xi} = r - y.$$

Für das erweiterte System ergibt sich das Zustandsraummodell

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r. \quad (2)$$

Für dieses System kann nun mit bekannten Methoden eine Rückführmatrix \tilde{k}^T gemäß

$$u = -\tilde{k}^T \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = -[k^T \quad -k_I] \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

bestimmt werden, sodass die Pole des geschlossenen Kreises an gewünschten Positionen liegen. Das System (2) ist steuerbar, wenn die Regelstrecke $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x + du$ steuerbar ist und keine Nullstelle bei $s = 0$ hat. Die Dynamik des geschlossenen Kreises ergibt sich dann zu

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk^T & bk_I \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r.$$

Diese Regelstruktur gewährleistet, dass $\xi(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Damit ist die Forderung nach stationärer Genauigkeit erfüllt, d.h. für konstante Referenzsignale $r(t) = r_0$ gilt $y(t) \rightarrow r_0$ für $t \rightarrow \infty$ (keine bleibende Regelabweichung).

Die in Abbildung 7 dargestellte Regelkreisstruktur kann bei Bedarf um eine Führungsgrößen-Aufschaltung erweitert werden. Das resultierende Blockdiagramm ähnelt der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur in Abschnitt 4 und ist in Abbildung 8 dargestellt. Wie bereits dis-

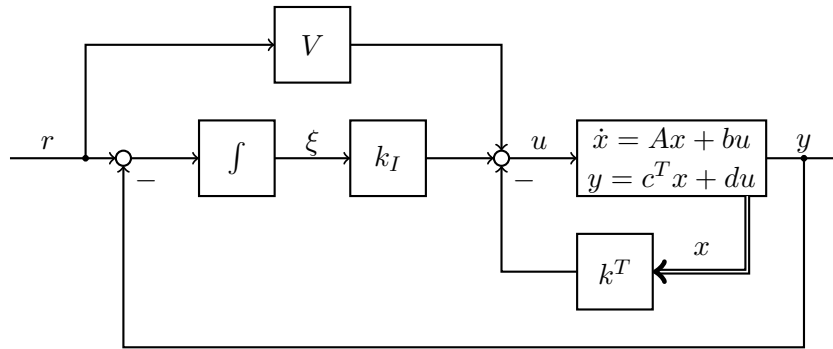


Abbildung 8: Zustandsrückführung mit I-Anteil.

kutiert, führt die Zustandsrückführung mit I-Anteil auch ohne eine solche Führungsgrößen-Aufschaltung dazu, dass die bleibende Regelabweichung für sprunghafte Referenzsignale r verschwindet. Die notwendige stationäre Stellgröße wird dabei durch den Integrator eingestellt.

Meist wird dieser Vorgang aber langsam sein. Die Führungsgrößen-Aufschaltung führt zu einer schnelleren Antwort und ist daher empfehlenswert. Eine mögliche Wahl für die Führungsgrößen-Aufschaltung ist das bekannte statische Vorfilter

$$V = -(c^T(A - bk^T)^{-1}b)^{-1}.$$

Hinweis: Falls nicht der ganze Zustand x gemessen werden kann, sind die vorgestellten Regelstrukturen dennoch einsetzbar. Sie können in diesem Fall einfach um einen Beobachter erweitert werden, der eine Schätzung \hat{x} für x aus dem Ausgang y und dem Eingang u rekonstruiert.

Appendix

A Lineare Regelung nichtlinearer Systeme

Die Methoden und Werkzeuge der linearen Regelungstheorie sind auch einsetzbar, um nichtlineare Systeme zu stabilisieren und zu regeln. In diesem Abschnitt wird erläutert, wie lineare Regler, die auf Basis des linearisierten Modells einer nichtlinearen Regelstrecke entworfen wurden, an das nichtlineare System angekoppelt werden.

Der Ausgangspunkt ist ein nichtlineares Zustandsraummodell der Regelstrecke,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u),\end{aligned}\tag{3}$$

mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$, Eingang $u \in \mathbb{R}^q$ und Ausgang $y \in \mathbb{R}^p$. Dieses System soll nun entsprechend Abb. 9 durch einen linearen Regler stabilisiert werden. Dazu wird zunächst die Ruhelage von (3)

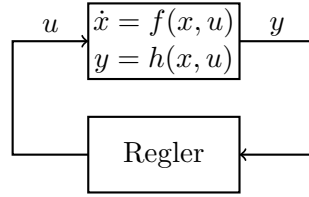


Abbildung 9: Geschlossener Kreis.

berechnet, welche durch den Regler stabilisiert werden soll. Die Ruhelage (x_s, u_s) genügt

$$0 = f(x_s, u_s)$$

und der zugehörige stationäre Ausgang ergibt sich aus

$$y_s = h(x_s, u_s).$$

Im nächsten Schritt wird das nichtlineare System (3) um die bestimmte Ruhelage (x_s, u_s) linearisiert. Mit den relativen Größen

$$\Delta x = x - x_s, \quad \Delta u = u - u_s, \quad \Delta y = y - y_s,\tag{4}$$

ergibt sich das linearisierte Modell der Regelstrecke zu

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y &= C \Delta x + D \Delta u,\end{aligned}\tag{5}$$

wobei die Matrizen A, B, C, D des linearen Zustandsraummodells wie folgt berechnet werden.

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_s, u_s)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_s, u_s)}, \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x_s, u_s)}, \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(x_s, u_s)}.$$

Auf Basis des linearen Modells (5) können nun die bekannten Entwurfsmethoden für lineare Regler angewendet werden. Der entworfene Regler lässt sich wiederum darstellen als ein lineares dynamisches System

$$\begin{aligned}\dot{x}_K &= A_K x_K + B_K \Delta y \\ \Delta u &= C_K x_K + D_K \Delta y.\end{aligned}\tag{6}$$

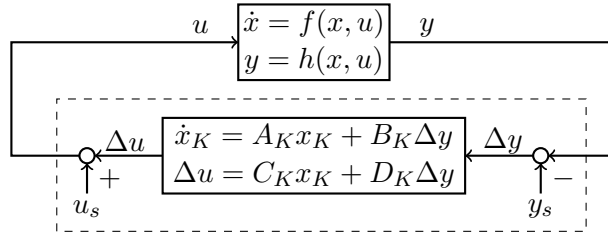


Abbildung 10: Anbindung des linearen Reglers an die nichtlineare Regelstrecke.

Bei der Anbindung dieses Regler an die nichtlineare Strecke (3) ist nun der Unterschied zwischen absoluten Größen x , u , y und relativen Größen Δx , Δu , Δy zu beachten. Eingang und Ausgang des linearen Reglers (6) sind relative Größen. Diese müssen gemäß (4) durch Subtraktion von y_s vor, bzw. Addition von u_s nach dem Regler in absolute Größen umgerechnet werden. Das entsprechende Blockdiagramm ist in Abb. 10 zu sehen.

Hinweis: Falls eine Folgeregelung im Standardregelkreis implementiert wird, ergibt sich der Regelfehler $e = r - y$ als Differenz zweier absoluter Größen direkt als relative Größe. Das entsprechende Blockdiagramm ist in Abb. 11 zu sehen.

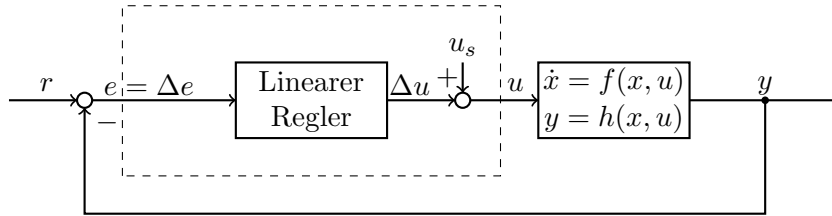


Abbildung 11: Geschlossener Kreis.