

Versuch 3: Ball auf Platte

M. Ostermann, M.Sc. Technische Kybernetik, 3539468

E. Rommel, M.Sc. Technische Kybernetik, 3552157

J. Yu, M.Sc. Autonome Systeme, 3532601

Z. Zhou, M.Sc. Autonome Systeme, 3524224

14.06.2022

Vorbereitungsaufgaben

V3.1

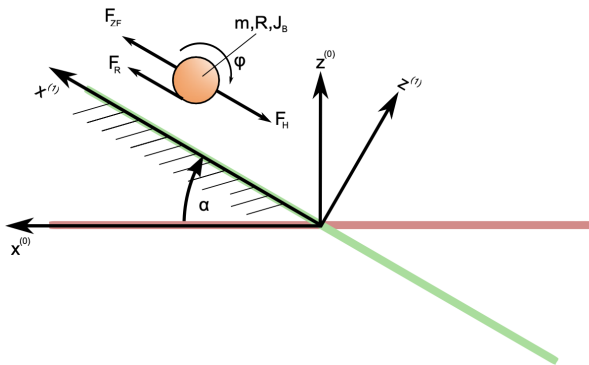


Abb. 1: Freischnitt

(a) Impulssatz:

$$F_H - F_{ZF} - F_R = -m\ddot{x}$$

Drallsatz:

$$M = F_R \cdot R = J_B \ddot{\phi} \quad (1)$$

(b) Kinematischen Beziehungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\phi}R \\ \ddot{x} &= -\ddot{\phi}R \end{aligned} \quad (2)$$

(c) Rollreibungskraft:

$$F_R \stackrel{(1)}{=} \frac{J_B \ddot{\phi}}{R} \stackrel{(2)}{=} -\frac{J_B \ddot{x}}{R^2}$$

(d) Hangabtriebskraft:

$$F_H = \sin \alpha \cdot mg$$

Zentrifugalkraft:

$$F_{ZF} = m\dot{x}^2$$

(e) Nach Einsetzen aller bisherigen Beziehungen in den Impulssatz, ergibt sich die Bewegungsgleichung des Balls in x-Richtung:

$$mg \sin \alpha - m\dot{x}^2 + \frac{J_B \ddot{x}}{R^2} = -m\ddot{x} \quad (3)$$

V3.2

(a) Die Geschwindigkeiten des Balls in x-, y- und z-Richtung sind entsprechend \dot{x} , \dot{y} und 0.

(b) Die Funktion der kinetischen Energie lautet

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_B \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$$

(c) Die Funktion der potentiellen Energie lautet

$$V = \sin \alpha \cdot x \cdot mg$$

(d) Die Lagrange-Funktion lautet

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_B \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - \sin \alpha \cdot x \cdot mg \end{aligned}$$

Die generalisierte Koordinate ist x . Es sind keine nicht-konservativen Kräfte vorhanden.

(e) Die Lagrange-Gleichung zweiter Art lautet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \frac{dL}{dx} = 0$$

Nach Einsetzen der Lagrange-Funktion erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\dot{x}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_B \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - \sin \alpha \cdot x \cdot mg \right) \right) \\ - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_B \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - \sin \alpha \cdot x \cdot mg \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(m\dot{x} + \frac{J_B \dot{x}}{R^2} \right) - (m\dot{x}^2 + \sin \alpha \cdot mg) = 0 \\ m\ddot{x} + \frac{J_B \ddot{x}}{R^2} - m\dot{x}^2 + \sin \alpha \cdot mg = 0 \end{aligned}$$

(f) Die Bewegungsgleichung des Balls in x-Richtung lautet

$$m\ddot{x} + \frac{J_B \ddot{x}}{R^2} - m\dot{x}^2 + \sin \alpha \cdot mg = 0$$

V3.3

(a) Nichtlineare Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \dot{\alpha} \\ \mathbf{x} &= [x \quad \dot{x} \quad \alpha]^T \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{m u^2 x_1 - \sin x_3 \cdot m g}{m + \frac{J_B}{R^2}} \\ u \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= x_1 \end{aligned}$$

(b) Der relative Grad lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= x_1 \\ \dot{\mathbf{y}} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \dot{x}_2 = \frac{m u^2 x_1 - \sin x_3 \cdot m g}{m + \frac{J_B}{R^2}} \end{aligned}$$

Eine Abhängigkeit von \mathbf{u} tritt bei der zweiten Ableitung des Ausgangs auf, der relative Grad ist somit $r = 2$.

(c) Da der relative Grad $r = 2$ kleiner als die Systemordnung $n = 3$ ist, ist das System kein flaches System.

V3.4

(a) Das nichtlineare Modell wurde mit Hilfe der Simulink Vorlage implementiert.

(b) In der Praxis ist die Länge der Platte in x-Richtung auf 0.3 m begrenzt. Diese Einschränkung für x_1 ist im Simulationsmodell nicht implementiert, sodass in die Position in x-Richtung kontinuierlich abnimmt. Der Winkel α in dem Simulationsmodell verhält sich gleich wie in der Messung. Das Ergebnisse werden in Abbildung 2 und Abbildung 3 dargestellt.

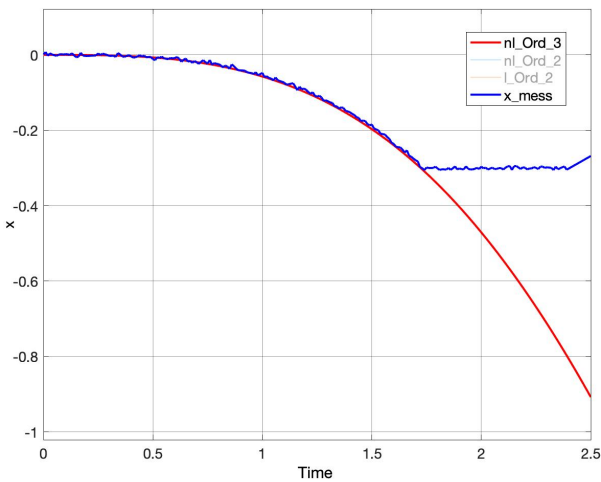


Abb. 2: Vergleich zwischen der Messung von x_1 und simuliertem x_1 des Systems 3. Ordnung

(c) Die vorherige Bewegungsgleichung des Ball in x-Richtung (3) kann nach \ddot{x} umgestellt werden

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{J_B}{R^2}\right) \ddot{x} &= -m g \sin \alpha + m \dot{\alpha}^2 \\ \ddot{x} &= \frac{(\dot{\alpha}^2 x - \sin \alpha \cdot g) R^2}{R^2 + \frac{J_B}{m}} \end{aligned}$$

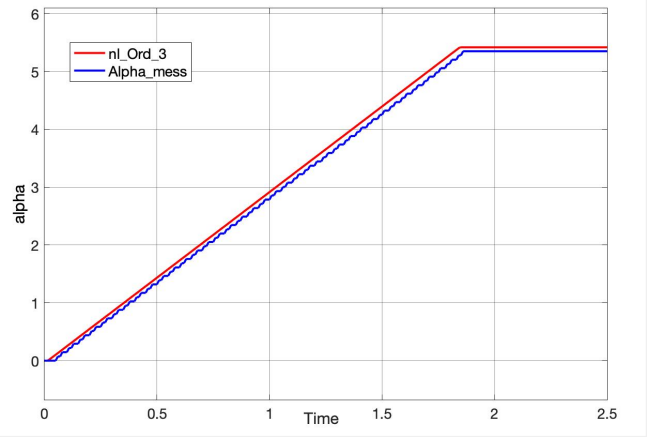


Abb. 3: Vergleich zwischen der Messung von α und simuliertem α des Systems 3. Ordnung

Die vorherige Gleichung besteht hauptsächlich aus zwei Termen, dem der Zentrifugalkraft ($\dot{\alpha}^2 x$) und dem der Hangabtriebskraft ($\sin \alpha \cdot g$). Wir nutzen die vorgegebenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{max} &= \pm 30^\circ / s \\ \alpha_{max} &= \pm 5.3^\circ \\ x_{max} &= 0.3 m \end{aligned}$$

um die zwei Anteile zu vergleichen.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^2 x &= 0.082 \\ \sin \alpha \cdot g &= 0.901 \end{aligned}$$

Sowohl aus der praktischen Erfahrung und Beobachtung, als auch aus der Berechnung ist zu erkennen, dass der Anteil der Hangabtriebskraft im Vergleich zur Zentrifugalkraft deutlich überwiegt.

(d) Ja, der Term der Zentrifugalkraft kann vernachlässigt werden. Die neue Bewegungsgleichung des Balls in x-Richtung lautet dann

$$m \ddot{x} + \frac{J_B}{R^2} \ddot{x} + m g \sin \alpha = 0$$

(e) Das System 2. Ordnung lautet dann

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha \\ \mathbf{x} &= [x \quad \dot{x}]^T \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{m g}{m + \frac{J_B}{R^2}} \sin u \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= x_1 \end{aligned}$$

(f) Der relative Grad lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= x_1 \\ \dot{\mathbf{y}} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \dot{x}_2 = -\frac{m g}{m + \frac{J_B}{R^2}} \sin u \end{aligned}$$

Der Eingang \mathbf{u} taucht in der zweiten Zeitableitung auf, deshalb ist der relative Grad $r = 2$. Da der relative Grad gleich mit der Systemordnung $n = 2$ ist, ist das System flach.

(g) Das reduzierte Modell wird in Simulink implementiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4 dargestellt.

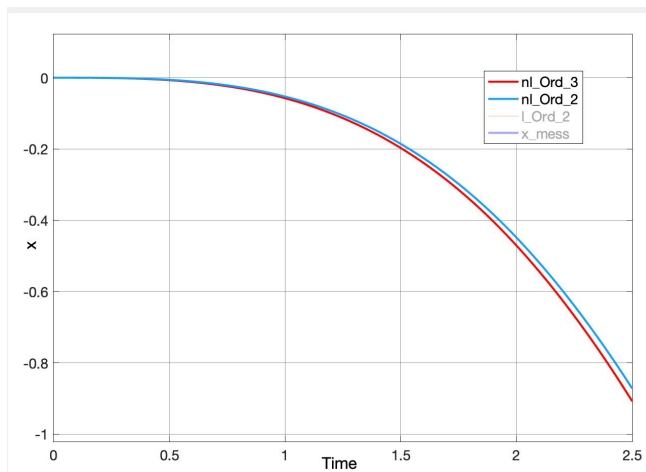


Abb. 4: Vergleich zwischen dem System 2. Ordnung und dem System 3. Ordnung

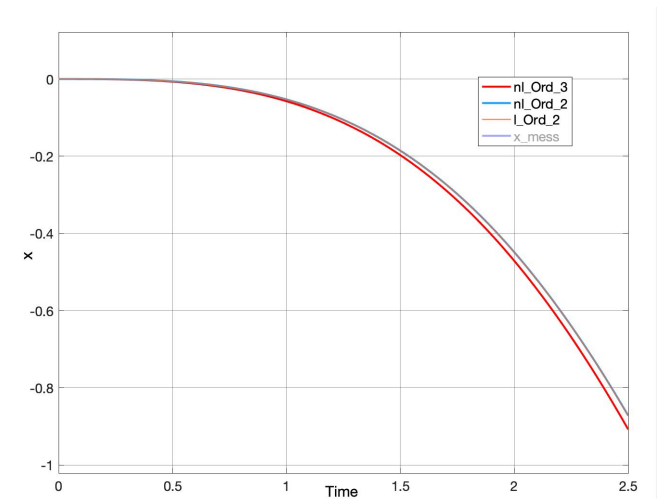


Abb. 5: Vergleich zwischen dem linearen Modell und dem nichtlinearen Modell

V3.5

- (a) Die Ruhelage ist

$$\dot{x} := 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

Das Ergebnis bedeutet, dass der Ball in der Ruhelage ohne Anfangsgeschwindigkeit irgendwo auf der horizontalen Platte ($\alpha = 0$) liegt.

- (b) Die Linearisierung um den Arbeitspunkt $x_A = [0 \ 0]^T$ und $u_A = 0$ lautet

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_A, u_A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_A, u_A} &= \left[-\frac{mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \cos(u) \right] \bigg|_{x_A, u_A} = \left[-\frac{mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \right] \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_A, u_A} &= [1 \ 0] \\ \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_A, u_A} &= 0 \end{aligned}$$

- (c) Am Arbeitspunkt ist

$$x_A = [0 \ 0]^T, u_A = 0 \Rightarrow x_A = 0, y_A = 0$$

Die lineare Zustandsraumdarstellung lautet

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \left[-\frac{mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \right] \Delta u \\ \Delta y &= [1 \ 0] \Delta x \end{aligned}$$

- (d) Das Modell wurde in der Simulink Vorlage ModellVerifikation.slx in den Block lModell Ord2 implementiert.
- (e) In Abbildung 5 wird die Simulation des linearen Modells dargestellt. Die Ergebnisse der zwei Modelle der Ordnung 2 sind fast identisch und können sich nicht zueinander unterscheiden.

V3.6

- (a) Aus der Linearisierung erhalten wir die Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte des Systems sind somit

$$\lambda_{1,2} = 0$$

Das System ist somit grenzstabil.

- (b) Die Steuerbarkeitsmatrix lautet

$$\begin{aligned} S &= [B \ AB] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \\ -\frac{mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da die Steuerbarkeitsmatrix vollen Rang hat ($n = 2$), ist das System steuerbar.

- (c) Die Beobachtbarkeitsmatrix lautet

$$\begin{aligned} O &= [C \ CA]^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da die Beobachtbarkeitsmatrix vollen Rang hat ($n = 2$), ist das System beobachtbar.

- (d) Das Ergebnis gibt global für alle Ruhelagen, da die Ruhelagen unabhängig von x sind.

V3.7

- (a) Die Differentialgleichung für den Plattenwinkel α lautet

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

- (b) Im Blockschaltbild entspricht das Motormodell einem Integrator.

$$\begin{aligned} u &= \dot{\alpha} \\ y &= x \\ x &= \alpha \\ \dot{x} &= u \end{aligned}$$

V3.8

(a)

$$\begin{aligned}\int K(\alpha_d(t) - \alpha(t)) dt &= \alpha(t) \\ K(\alpha_d(t) - \alpha(t)) &= \frac{d\alpha(t)}{dt} \\ K(\alpha_d(s) - \alpha(s)) &= S\alpha(s) \\ G(s) &= \frac{\alpha(s)}{\alpha_d(s)} \\ &= \frac{K}{K + s} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{s}{K}}\end{aligned}$$

Diese Übertragungsfunktion wird als PT-1 Glied bezeichnet.

(b)

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{K_\alpha} = 0.1s \\ K_\alpha &= 10\end{aligned}$$

Die Verstärkung K_α des P-Reglers ist gleich 10.

(c) Siehe Simulinkdatei v3_8_regler_test.slx.

(d) Siehe Simulinkdatei v3_8_regler_test.slx.

(e) Wie die Abbildung 8 zeigt, werden die Stellgrößenbeschränkungen im Plattenwinkel eingehalten ($< 5^\circ$, Wahl der Durchtrittsfrequenz: $\omega_c = 0.45$).

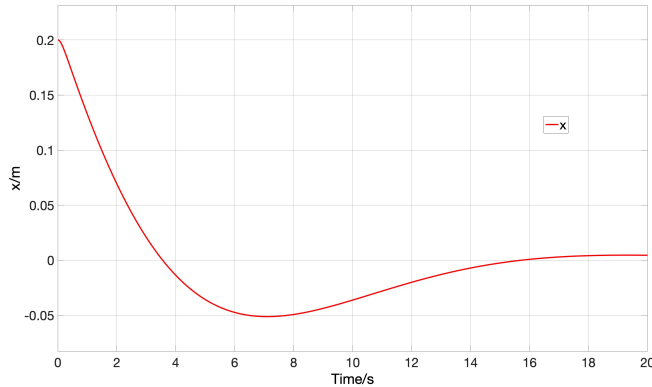


Abb. 6: Ballposition x

V3.9

(a) Das System 3. Ordnung aus Aufgabe V3.3 wird bei Vernachlässigung der Zentrifugalkraft direkt zu einem eingangsaffinen System:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \dot{\alpha} \\ \mathbf{x} &= [x \quad \dot{x} \quad \alpha]^T \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\sin x_3 \cdot mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= x_1\end{aligned}$$

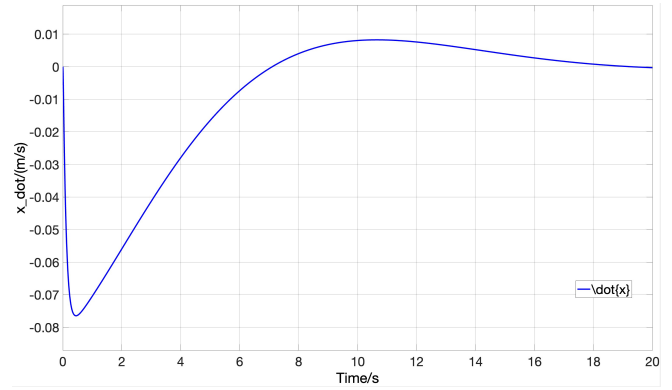


Abb. 7: Ballgeschwindigkeit \dot{x}

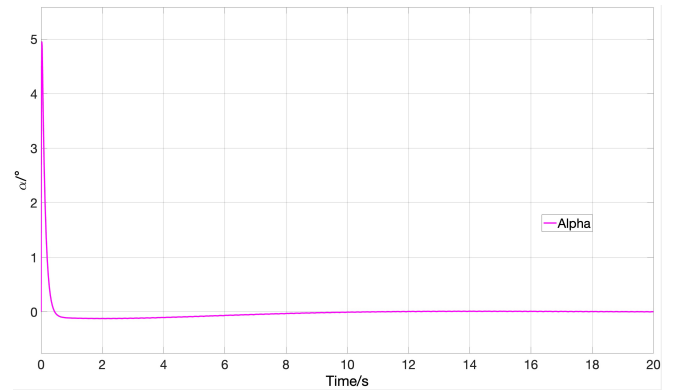


Abb. 8: Stellgröße Plattenwinkel α

(b) Wir erhalten den relativen Grad $r = 3$ nach Ableiten des Ausgangs.

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{x}_1 \\ \dot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{-\sin x_3 \cdot mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \frac{-\cos x_3 \cdot mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

Da der relative Grad gleich der Systemordnung $n = 3$ ist, ist das System flach.

(c) Die Zustandstransformation lautet

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-\sin x_3 \cdot mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \end{bmatrix}$$

(d) Die Byrnes-Isidori-Normalform lautet

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -\frac{mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \cdot \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-z_3 \cdot (m + \frac{J_B}{R^2})}{mg}\right)\right) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \\ y &= z_1\end{aligned}$$

V3.10

(a) Die inverse Koordinatentransformation lautet

$$\Phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \sin^{-1}\left(\frac{-\mathbf{z}_3 \cdot (m + \frac{J_B}{R^2})}{mg}\right) \end{bmatrix}$$

(b) Die flachheitsbasierte Vorsteuerung wird zu

$$u_{st}(t) = \frac{\ddot{y}_{\text{ref}}}{-\frac{mg}{m + \frac{J_B}{R^2}} \cdot \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-\mathbf{z}_3 \cdot (m + \frac{J_B}{R^2})}{mg}\right)\right)} \cdot \mathbf{u}$$

berechnet.

V3.11

(a) Die Anfangs- und Endbedingungen ergeben sich aus der Anforderung für einen Ruhelage-zu-Ruhelage Wechsel. Damit müssen alle Ableitungen der Referenztrajektorie in den Anfangs- und Endpunkten verschwinden:

$$\dot{y}_{\text{ref}}(0) = \dot{y}_{\text{ref}}(T) = 0$$

$$\ddot{y}_{\text{ref}}(0) = \ddot{y}_{\text{ref}}(T) = 0$$

$$\ddot{y}_{\text{ref}}(0) = \ddot{y}_{\text{ref}}(T) = 0$$

Die Bedingungen für $y_{\text{ref}}(0) = y_0$ und $y_{\text{ref}}(T) = y_T$ ergeben sich aus den Sollpositionen, zwischen welchen das System wechseln soll.

Die polynomiale Referenztrajektorie der Ordnung $n_{\text{ref}} = 7$ lautet

$$y_{\text{ref}}(t) = y_0 + (y_T - y_0) \cdot \left[35\left(\frac{t}{T}\right)^4 - 84\left(\frac{t}{T}\right)^5 + 70\left(\frac{t}{T}\right)^6 - 20\left(\frac{t}{T}\right)^7 \right].$$

(b) Die notwendigen Zeitableitungen von $y_d(t)$ sind

$$\dot{y}_{\text{ref}}(t) = (y_T - y_0) \cdot \left[\frac{35 \cdot 4}{T^4} t^3 - \frac{84 \cdot 5}{T^5} t^4 + \frac{70 \cdot 6}{T^6} t^5 - \frac{20 \cdot 7}{T^7} t^6 \right],$$

$$\ddot{y}_{\text{ref}}(t) = (y_T - y_0) \cdot \left[\frac{35 \cdot 4 \cdot 3}{T^4} t^2 - \frac{84 \cdot 5 \cdot 4}{T^5} t^3 + \frac{70 \cdot 6 \cdot 5}{T^6} t^4 - \frac{20 \cdot 7 \cdot 6}{T^7} t^5 \right],$$

$$\ddot{y}_{\text{ref}}(t) = (y_T - y_0) \cdot \left[\frac{35 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{T^4} t - \frac{84 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{T^5} t^2 + \frac{70 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{T^6} t^3 - \frac{20 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{T^7} t^4 \right].$$

(c) Der Vorsteuerungsentwurf ist für die Transitionszeit von $T = 2.45\text{s}$ realisierbar.

V3.12

(a) Die Funktion für die periodische Schwingung lautet

$$y_{\text{ref}}(t) = R_p \cos(\omega t).$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist damit die Position $y_{\text{ref}}(0) = R_p$.

(b) Die Ableitungen der periodischen Solltrajektorie sind

$$\dot{y}_{\text{ref}}(t) = -R_p \omega \sin(\omega t),$$

$$\ddot{y}_{\text{ref}}(t) = -R_p \omega^2 \cos(\omega t).$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Soll-Geschwindigkeit des Balles $\dot{y}_{\text{ref}}(0) = 0$.