

## Versuch 2: Bionischer Handling-Assistent

### Vorbereitungsaufgaben

M. Ostermann, M.Sc. Technische Kybernetik, 3539468

E. Rommel, M.Sc. Technische Kybernetik, 3552157

J. Yu, M.Sc. Autonome Systeme, 3532601

Z. Zhou, M.Sc. Autonome Systeme, 3524224

07.07.2022

#### V2.1

a) Die Drehmatrix  $C_{ZY'X''}$  lautet:

$$C_{ZY'X''} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma \\ \dots & \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

b)

$$C_{ZY'X''} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) Die Drehachse  $\mathbf{n}$  und der Drehwinkel  $\phi$  können mit der Drehmatrix  $C_{ZY'X''}$  und Gleichung (8) des Versuchskriptes berechnet werden.

$$\begin{aligned} \phi &= \arccos \left( \frac{C_{11} + C_{22} + C_{33} - 1}{2} \right) \\ &= \arccos \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} - 1}{2} \right) \\ &= 1.287 \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{2 \sin(\phi)} \begin{bmatrix} C_{32} - C_{23} \\ C_{13} - C_{31} \\ C_{21} - C_{12} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \sin(1.287)} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} - 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.77 \\ 0.32 \\ 0.55 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dann werden  $\mathbf{n}$  und  $\phi$  in die Drehmatrix  $C_n(\phi)$  eingesetzt, mit Gleichungen (6) und (7) des Versuchskriptes, um die Ergebnisse zu überprüfen. Die Ergebnisse sind

fast identisch zur Drehmatrix  $C_{ZY'X''}$ .

$$\begin{aligned} C_n(\phi) &= \begin{bmatrix} c+n_x^2(1-c) & n_x n_y(1-c)-n_z s & n_x n_z(1-c)+n_y s \\ n_x n_y(1-c)+n_z s & c+n_y^2(1-c) & n_y n_z(1-c)-n_x s \\ n_x n_z(1-c)-n_y s & n_y n_z(1-c)+n_x s & c+n_z^2(1-c) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.71 & -0.35 & 0.61 \\ 0.70 & 0.35 & -0.61 \\ 0 & 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### V2.2

Die Endeffektorposition  ${}^B \underline{p}_e$  kann unter Verwendung von 3 homogenen Transformationsmatrizen in der Gleichung 2 repräsentiert werden. Die homogene Repräsentation des Ortsvektors  ${}^G \underline{p}_e$  lautet  $[{}^G \underline{p}_e \quad 1]^T$ .

$$\begin{aligned} {}^B \underline{p}_e &= \begin{bmatrix} {}^B C_O & {}^B O_O \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^O C_U & {}^O O_U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^U C_G & {}^U O_G \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^G \underline{p}_e \quad (2) \\ &= \begin{bmatrix} {}^B C_O & {}^B O_O \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^O C_U & {}^O O_U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^U C_G \cdot {}^G \underline{p}_e + {}^U O_G \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^B C_O & {}^B O_O \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^O C_U \cdot ({}^U C_G \cdot {}^G \underline{p}_e + {}^U O_G) + {}^O O_U \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^B C_O \cdot ({}^O C_U \cdot ({}^U C_G \cdot {}^G \underline{p}_e + {}^U O_G) + {}^O O_U) + {}^B O_O \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt mit der Transformationsvorschrift aus dem Skript überein.

#### V2.3

a) Die Rotation um die z-Achse mit dem Winkel  $\phi$  wird durch die homogene Transformationsmatrix  ${}^0 \mathbf{H}_1(\phi)$  beschrieben:

$${}^0 \mathbf{H}_1(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- b) Die Transformationsmatrix  ${}^1\mathbf{H}_2(r, \phi)$  beschreibt die Beziehung zwischen den Koordinatensystemen  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$ :

$${}^1\mathbf{H}_2(r, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & r(1 - \cos(\theta)) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & r \cdot \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- c) Nach Einsetzen der Beziehungen  $\theta = \kappa l$  und  $r = \frac{1}{\kappa}$  ergibt sich:

$${}^1\mathbf{H}_2(\kappa, l) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa l) & 0 & \sin(\kappa l) & \frac{1}{\kappa}(1 - \cos(\kappa l)) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\kappa l) & 0 & \cos(\kappa l) & \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa l) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

- d) Die Gesamttransformationsmatrix  ${}^0\mathbf{H}_3(r, \phi)$  mit  ${}^2\mathbf{H}_3(\phi) = {}^0\mathbf{H}_1(-\phi)$  ergibt sich zu:

$${}^0\mathbf{H}_3(\kappa, l) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi (\cos \kappa l - 1) + 1 & \sin \phi \cos \phi (\cos \kappa l - 1) & \cos^2 \phi (1 - \cos \kappa l) + \cos \kappa l & -\cos \phi \sin \kappa l \\ \sin \phi \cos \phi (\cos \kappa l - 1) & \cos^2 \phi (1 - \cos \kappa l) + \cos \kappa l & -\cos \phi \sin \kappa l & \cos \phi \sin \kappa l \\ -\cos \phi \sin \kappa l & -\cos \phi \sin \kappa l & \cos \kappa l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Die Gleichung (6) ist identisch zu Gleichung (19) des Versuchskriptes.

## V2.4

- a) Analog zu den Gleichungen (17) bis (19) des Versuchshandbuchs ergibt sich mit  ${}^{1b}\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  die Abbildungsvorschrift zu

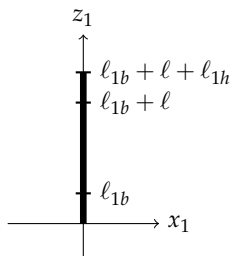
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= {}^{1b}\mathbf{O}_{1h} = {}^{1b}\mathbf{S}_{1h} {}^{1b}\mathbf{P} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) \left( \frac{1}{\kappa}(1 - \cos(\kappa l)) + \ell_{1h} \sin(\kappa l) \right) \\ \sin(\phi) \left( \frac{1}{\kappa}(1 - \cos(\kappa l)) + \ell_{1h} \sin(\kappa l) \right) \\ \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa l) + \ell_{1b} + \ell_{1h} \cos(\kappa l) \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\Psi}(\phi, \kappa, \ell). \end{aligned}$$

- b) Für  $\kappa = 0$  ergibt sich damit der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_{1b} + \ell_{1h} \end{bmatrix}.$$

Für den Fall, dass der variable Sektionsbereich aufrecht statt gekrümmt steht und die Orientierung  $\phi$  bei einer Krümmung  $\kappa = 0$  nicht definiert ist, wird die aufrechtstehende Sektion nur durch die Sektionslänge  $\ell$  parametrisiert.

- c) Biegezustand der Sektion für  $\kappa = 0$ :



- d) Jacobimatrix der Abbildungsvorschrift mit  $\kappa = 0$  und  $\ell = 1$  lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\Psi}}(\kappa) &= \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=0, \ell=1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \cos(\phi) \ell_{1h} & 0 \\ 0 & \sin(\phi) \ell_{1h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- e) Die Posengeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}(\kappa) \dot{\kappa} \\ &= \mathbf{J}(\kappa) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\kappa} \\ \dot{\ell} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\kappa} \cos(\phi) \ell_{1h} \\ \dot{\kappa} \sin(\phi) \ell_{1h} \\ \dot{\ell} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit sind Bewegungsänderungen in alle Raumrichtungen möglich.