离散数学

1.命题公式的等价

基础关系真值表

1. 逻辑或（OR，析取）

符号：$P \vee Q$

定义：当至少一个命题为真时，结果为真。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

或（可兼取）

2. 异或（XOR，互斥析取）

符号：$P \oplus Q$

定义：当两个命题的真值不同时，结果为真

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

异或

3. 逻辑合取（AND，合取）

符号：$P \wedge Q$

定义：当两个命题均为真时，结果为真。

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

合取

4. 等价（Equivalence）

符号：$P \leftrightarrow Q$

定义：当两个命题的真值相同时，结果为真。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

等价，和异或相反

5. 蕴含（Implication，充分条件）

符号：$P \to Q$

定义：只有当前提 P 为真且结论 Q 为假时，结果为假，其他情况均为真。

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

充分条件，必要条件就是调个顺序

必要条件（Necessary Condition）

符号：$Q \to P$（即"Q 是 P 的必要条件"）

定义：

- 如果 Q 是 P 的必要条件，则 P 为假时必须满足 Q 为真。
- 但 Q 为真时，P 不一定为真（即必要条件不保证充分性）。

P	Q	$Q \to P$ (Q是P的必要条件)
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

必要条件

基础等价公式

基础等价公式：

(1) 对合律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2) 幂等律 $P \vee P \Leftrightarrow P$　　$P \wedge P \Leftrightarrow P$

(3) 交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$　　$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(4) 结合律 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

(5) 分配律 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(6) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

对合、幂等、交换、分配、吸收、结合

(7) 底摩根定律 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(8) 同一律 $P \vee F \Leftrightarrow P$　　$P \wedge T \Leftrightarrow P$

(9) 零律 $P \vee T \Leftrightarrow T$　　$P \wedge F \Leftrightarrow F$

(10) 互补律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$　　$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

(11) $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(12) $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

(13) $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

(14) $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

地摩根即非的分配律

- 同一律即P或F等价P，即不变
- 零率就是得到的还是右边的
- 互补律说明或等价对 和等价错
- 充分等价于 非和
- 非充分可以调换位置
- 等价等于充分和必要
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
  - 记住了

可以用真值表相同推出等价

等价
- 自反性
- 对称性
- 传递性

证明方法
- 列真值表 — 对于命题变元较多会比较麻烦
- 用等价公式变换
  - 置换定律：A是一个命题公式，X是A中的一部分且也是合式公式，如果X⇔Y，用Y代替A中的X得到公式B，则A⇔B。
    - 置换定律
  - 例子
    - 例：求证 $(\neg P \vee Q) \to (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
      证明：$(\neg P \vee Q) \to (P \wedge Q)$
      $\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$　(公式E_{11})
      $\Leftrightarrow (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$　(底-摩根定律)
      $\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$　(对合律)
      $\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee Q)$　(分配律)
      $\Leftrightarrow P \wedge T$　(互补律)
      $\Leftrightarrow P$　(同一律)
      ◇ 公式E_{11}：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

对偶式

对偶式：
在一个只含有联结词 ¬、∨、∧的公式 A 中，将∨换成∧，∧换成∨，T 换成 F，F 换成 T，其余部分不变，得到另一个公式 A*，称 A 与 A* 互为对偶式。

类似相反数？

定理
- 定理　令 $A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一个只含有联结词 ¬、∨、∧的命题公式，则
  $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$
  此定理可以反复地使用底-摩根定律证明。
  推论：$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$
  - 将非塞进去变对偶，提出来也变对偶
  - 应用上述定理可以直接将"¬"放到命题变元的前面。
    例如：
    $\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee R)$
    $\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)) \wedge \neg R$
    - 很好用，简化了多次使用地摩根定律

2.重言式与矛盾式

P	¬P∨P	¬P∧P
F	T	F
T	T	F

¬P∨P为重言式(永真式)；
¬P∧P为矛盾式(永假式)。

- 或是永真 和是永假
- 就是互补律

重言式(矛盾式)定义：
若公式 A ⇔ T，则 A 为重言式或永真式。
若公式 A ⇔ F　则 A 为矛盾式或永假式。

定义

证明
- 列真值表
  - 例：证明：$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$ 为重言式。
    ◇ 方法1. 列真值表

P	Q	P→Q	P∧(P→Q)	(P∧(P→Q))→Q
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

永真公式真值表的最后一列全是"T"。

- 等价公式变换
  - ◇方法2：等价公式变换
    $(P \wedge (P \to Q)) \to Q \Leftrightarrow (P \wedge (\neg P \vee Q)) \to Q$
    $\Leftrightarrow ((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)) \to Q$
    $\Leftrightarrow (F \vee (P \wedge Q)) \to Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to Q$
    $\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee Q \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee Q$
    $\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee Q)$
    $\Leftrightarrow \neg P \vee T$
    $\Leftrightarrow T$ 、
  - 注意结合律

定理1
- 定理　设A,B为两个命题公式，A⇔B当且仅当 A→B 是一个重言式。
  证明：若A⇔B，则不论对A、B做何种赋值，A与B的真值都相同，于是 A→B⇔T，即 A→B是一个重言式。
  若A→B是一个重言式，则 A→B⇔T，于是不论在何种赋值下，A与B的真值均相同，即 A⇔B。
  - 等价推充分必要，反过来也行
  - 都是永真
  - 真值要相同

定理2
- 定义：当且仅当 A→B 是重言式，则称 A 重言(永真)蕴涵 B，记作 A⇒B。
  ◇ 即　若 A→B⇔T，则 A⇒B。
  - 如果充分是真的，那A重言B
- 证明方法
  - 假设A真，能退出B真
    - 1. 假设前件 A 为真，若在此假设下能推出后件 B 也为真，则 A⇒B 成立。
      例1　求证 $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$
      证明：假设 $P \wedge (P \to Q)$为T，则P为T 并且 $(P \to Q)$为T。于是Q为T，所以 $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ 成立。
    - 例2　求证：
      $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
      证明：设前件$((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为真，则 $((A \wedge B) \to C)$、$\neg D$、$(\neg C \vee D)$ 均为真。
      $\neg D$ 为T，则 D 为F，由 $\neg C \vee D$ 为T，于是 $\neg C$ 为T，即 C 为F，再由 $((A \wedge B) \to C)$ 为T，则 $(A \wedge B)$ 为F，即 $\neg(A \wedge B)$ 为T，于是 $\neg A \vee \neg B$ 为T，因此 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$。
    - 稍微复杂一点
  - 假设B为假，能推出A也为假
    - 2. 假设后件 B 为假，若在此假设下能推出前件 A 也为假，则 A⇒B 成立。
      例：求证 $P \Rightarrow P \vee Q$，$Q \Rightarrow P \vee Q$
      证明：假设 $P \vee Q$ 为 F，
      则 P为 F，Q 为 F，所以
      $P \Rightarrow P \vee Q$，$Q \Rightarrow P \vee Q$ 成立。
    - 例子很简单
    - 例2 求证：$((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
      证明：假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 F，则 A 与 B 均为 T。
      1. 如 C 为 F，则 $(A \wedge B) \to C$ 为 F，
      所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 F
      2. 如 C 为 T，则 (1) 若 D 为 T，则 $\neg D$ 为 F，
      所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 F。
      (2) 若 D 为 F，则 $\neg C \vee D$ 为 F，
      所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 F。
      综上
      $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$ 成立。
    - 因为不知道CD的真值，所以要分类讨论

定理：等价充要为互相蕴含
- 定理：设 A，B 为任意两个命题公式，A⇔B 的充要条件是 A⇒B 且 B⇒A。
  - 证明
    - 定理：设 A，B 为任意两个命题公式，A⇔B 的充要条件是 A⇒B 且 B⇒A。
      证明：若 A⇔B，则 A↔B⇔T，而
      $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$，于是 $A \to B \Leftrightarrow T$ 且 $B \to A \Leftrightarrow T$，即 $A \Rightarrow B$ 成立。
      若 A⇒B 且 B⇒A，则 $A \to B \Leftrightarrow T$ 且 $B \to A \Leftrightarrow T$，于是 $(A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow T$，而
      $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$，于是 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$，
      即知 A⇔B 成立。

思考题
- 思考：(1) 若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 是否有 A⇔B ？
  解：若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 则 $\neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow T$　而
  $\neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow (\neg A \to \neg B) \wedge (\neg B \to \neg A)$
  $\Leftrightarrow (B \to A) \wedge (A \to B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$
  于是 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$，即 A⇔B
  (2) 若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 是否有 A⇒B ？
  解：若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 则 $\neg A \to \neg B \Leftrightarrow T$　而
  $\neg A \to \neg B \Leftrightarrow B \to A$，于是 $B \to A \Leftrightarrow T$，
  即 B⇒A 而不是 A⇒B 、
- 不要像当然等价可以提出非，这是个关系符而不是运算符号

3.析取范式和合取范式

析取范式定义
- 1. 析取范式定义：
  命题公式 A 如果可等价地写成如下形式：
  $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ (n≥1)，
  其中每个项 A_i (i=1,2,…,n) 是单题变元或其否定形式的合取式，称该公式为 A 的析取范式。
  - 否定必须在命题变元前面
  - $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
    - 就是不同之间是析取，但内部是合取

合取范式定义
- 2.合取范式定义：
  命题公式 A 如果可等价地写成如下形式：
  $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ (n≥1)，
  其中每个项 A_i (i=1,2,…,n)是单题变元或其否定形式的析取式，称该公式为 A 的合取范式。
  例：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
  $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ 是 $P \leftrightarrow Q$ 的合取范式。
  - 就是和析取范式完全相反

P或Q，既是合取也是析取

写法
- 1.去掉->和<->
- 2.非移到变元前
- 3.再用公式整理

例题
- 析取范式好说
  - 例：求$(P \leftrightarrow Q) \to R$ 的析取范式与合取范式。
    先求析取范式：
    $(P \leftrightarrow Q) \to R$
    $\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \vee R$ ---去掉其它连结词
    $\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee R$ --- "¬" 移到命题变元前面
    再求合取范式：
    $(P \leftrightarrow Q) \to R$
    $\Leftrightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \vee R$ ---去掉其它连结词
    $\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge ((P \vee Q) \vee R)$ --- "¬" 移到命题变元前面
    $\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge ((P \vee Q) \vee R)$ --- 整理
  - 主要是合取范式，运用的基础公式还是需要再熟悉一下
  - $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
    - 记住了
- 应用题
  - 例：A，B，C，D 四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？① 若 A 去则 C 和 D 中要去一个人。② B 和 C 不能都去。③ C 去则 D 要留下。
    解：令 A，B，C，D 分别表示 A去，B去，C去，D去。
    ① $A \to (C \vee D) \Leftrightarrow A \to ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$
    $\Leftrightarrow \neg A \vee ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$
    ② $\neg(B \wedge C) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg C$
    ③ $C \to \neg D \Leftrightarrow \neg C \vee \neg D$
    总的条件为：
    $(\neg A \vee ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$
  - 异或的式子别忘了
  - $A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$。
    - 第一种
  - $A \oplus B = (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
    - 第二种
  - 将几个条件的合取式化成析取范式：
    $(\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$
    $\Leftrightarrow (\neg A \vee ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))) \wedge (\neg C \vee (\neg B \wedge \neg D))$
    $\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg C) \vee$
    $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee$
    $(\neg C \wedge D \wedge \neg B \wedge \neg D)$
    $\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee$
    $(C \wedge \neg D \wedge \neg B)$
    - 这种问题要化成析取范式，从而找到有几种派发
    - 其中一个合取范式里由C和非C显然为F
    - 别忘了幂等律，相同的直接小调一个
      - (2) 幂等律　P∨P⇔P　　P∧P⇔P

4.主析取范式和主合取范式

主析取范式
- 小项
  - 一。主析取范式
    ◇ 小项定义：是n个命题变元的合取式，其中每个变元必出现且仅出现一次(以本身或否定形式)，称这个合取式为小项。
    例如，含有两个变元的小项：
    $P \wedge Q$、$P \wedge \neg Q$、$\neg P \wedge Q$、$\neg P \wedge \neg Q$
    ◇ 若有n个变元，则有2^n个小项。
    - 就是合取式
  - 小项编码：
    ◇ 含有 n 个变元的小项的角标用 n 位二进制码表示。
    ◇ 变元按字母次序排列。
    ◇ 用 1 表示变元本身，0 表示变元的否定形式。
    例：$m_{00} \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$，　$m_{01} \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$，
    $m_{10} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$，　$m_{11} \Leftrightarrow P \wedge Q$
    $m_{101} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$，$m_{100} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
    - 小项编码
  - 赋值与编码相同即为T

	P	Q	m_{00} $\neg P \wedge \neg Q$	m_{01} $\neg P \wedge Q$	m_{10} $P \wedge \neg Q$	m_{11} $P \wedge Q$
00	F	F	T	F	F	F
01	F	T	F	T	F	F
10	T	F	F	F	T	F
11	T	T	F	F	F	T

1. 每个小项当且仅当其赋值与编码相同时，其真值为T，而其余2ⁿ-1组赋值均使该小项的真值为F。
2. 全体小项的析取式为永真式，记为：
$\sum h_i \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$

- 因为小项里总有真值为真的，所以其析取式是永真式
- 定义
  - 主析取范式定义：若一个命题公式的析取范式为 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$(n≥1)，其中每个 A_i (i=1,2,…,n) 都是小项，则称之为该命题公式的主析取范式。
    - 与析取范式区别在于每个项都是小项
  - 小项要求每种可能都出现且只出现一次，而项则不同，所以对于缺少变元的项，要补全之
    - 主析取范式的求法：
      (1) 先写出给定公式的析取范式
      $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$，
      (2) 为使每个 A_i 都变成小项，对缺少变元的项 A_i 要补全变元，比如缺变元 R，就用"$\wedge(R \vee \neg R)$"的形式补 R。
      - 很明显，合取一个永真式，就能化为R
- 求法
  - 1.在定义中说的方法
    - 例：求 P→Q 的主析取范式。
      解：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ ---去掉其它连结词
      $\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$ ---补变元
      $\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
      --- 用分配律展开
      $\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$
    - 补变元就对当前另外的两种变元补就可以了，比如缺少非Q，就乘一个合取（Q析取非Q）
  - 2.用真值表的方法去求
    - 看真值表中为T的，然后用析取连接各项即可

分支主题 2

Presented with xmind