**传热与流体流动的数值计算**

**第一次小组作业**

**冯夷宁 李静 唐伟**

目录

[**1一维、稳态、无源项对流扩散方程** 2](#_Toc511240485)

[1.1计算域的离散和标记 2](#_Toc511240486)

[1.2节点标记及网格划分 2](#_Toc511240487)

[**2问题描述** 3](#_Toc511240488)

[**3离散格式** 3](#_Toc511240489)

[3.1中心差分格式 3](#_Toc511240490)

[3.2上风格式 3](#_Toc511240491)

[3.4 边界条件 4](#_Toc511240492)

[3.4.1 内节点法 4](#_Toc511240493)

[3.4.2 外节点法 5](#_Toc511240494)

[**4计算结果** 5](#_Toc511240495)

[4.1内节点法 5](#_Toc511240496)

[4.2外节点法 6](#_Toc511240497)

[**5计算与运行结果** 8](#_Toc511240498)

**1一维、稳态、无源项对流扩散方程**

1.1计算域的离散和标记

一维、稳态、无源项对流扩散方程的标准形式如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

空间离散点的标记如图1：

****

图1 计算域的离散和标记

对包绕P点的控制容积ΔV做积分：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

积分中认为分段线性分布，整理可得：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

在上式中，w和e处的值难以确定，本文我们将采取三种格式进行讨论。

1.2节点标记及网格划分

本文采用了两种节点设置方式：内节点法与外节点法，如图2所示。其中内节点法，边界处没有设置节点；外节点法在边界处放置节点，边界处节点的值与物理边界处的真实值一致。



（a）内节点法 （b）外节点法

图2 两种节点设置方法

**2问题描述**

已知变量的输运过程由如下对流—扩散方程控制：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

对于如图3所示的计算域（0≤*x*≤1），其对应的边界条件为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

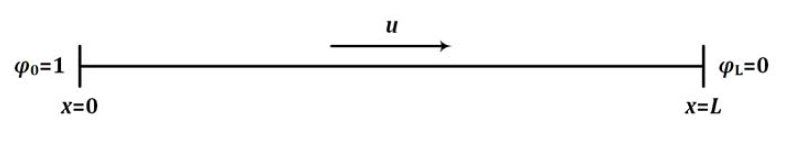


图3 计算域示意图

已知：L=1.0 m、=1.0 kg/m3、=0.1 kg/(m·S)，此方程的精确解为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

**3离散格式**

3.1中心差分格式

对于中心差分格式，控制体界面处的值可表示为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

则离散方程可整理为：

(8)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

3.2上风格式

在上风格式中，我们考虑到流动方向的影响，控制体界面处的值可表示为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

则有：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

离散方程同样可用(8)式表示，其中：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

3.3混合格式

在混合格式中，我们考虑Peclet数的影响，，控制体界面处的值可表示为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

整理可得与(8)式相同离散格式，其中：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |
| 3.4 边界条件  3.4.1 内节点法  对于节点1（节点5），式（2）中的积分限w（e）点为固定边界，因此积分所得的其离散格式分别为   |  |  | | --- | --- | |  | (15) |   **表1 边界处节点不同格式的离散**   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | 节点1 | 节点5 | | 中心差分格式 |  |  | | 迎风格式 |  |  | | 混合格式 | *u*=0.1 m/s 中心差分格式  *u*=2.5 m/s 迎风格式 | *u*=0.1 m/s 中心差分格式  *u*=2.5 m/s 迎风格式 |   3.4.2 外节点法  由于外节点法中节点1、节点6设置在边界上，直接用第一类边界条件： | | |
|  | | |

**4计算结果**

4.1内节点法

对于内节点法，节点1，2，…，5分别位于x=0.1 m, x=0.3 m,…, x=0.9 m处。当速度*u*=0.1 m/s时，计算结果如表2及图4。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表2不同离散格式与精确解的比较(*u*=0.1 m/s) | | | | | |
| 节点  离散格式 | 节点1 | 节点2 | 节点3 | 节点4 | 节点5 |
| 中心差分 | 0.928106 | 0.784319 | 0.608579 | 0.393786 | 0.131262 |
| 迎风格式 | 0.925727 | 0.777183 | 0.598930 | 0.385026 | 0.128342 |
| 混合格式 | 0.928106 | 0.784319 | 0.608579 | 0.393786 | 0.131262 |
| 精确解 | 0.938792 | 0.796390 | 0.622459 | 0.410019 | 0.150544 |



图4 不同离散格式与精确解的比较(内节点法，*u*=0.1 m/s)

观察表2及图4观察可知，对于较小的速度*u*=0.1 m/s，中心差分格式及混合格式计算结果完全一致，且计算精度好于迎风格式，计算结果与精确解更为接近。由此可以判断，在Peclet数较小时，中心差分格式和混合格式可得到更为精确的结果。

当速度u=2.5 m/s时，计算结果如表3及图5。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表3不同离散格式与精确解的比较（u=2.5 m/s） | | | | | |
| 节点  离散格式 | 节点1 | 节点2 | 节点3 | 节点4 | 节点5 |
| 中心差分 | 1.034615 | 1.103846 | 0.942307 | 1.319230 | 0.439743 |
| 迎风格式 | 0.998639 | 0.995918 | 0.979591 | 0.881632 | 0.293877 |
| 混合格式 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 0.333333 |
| 精确解 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999996 | 0.999446 | 0.917914 |



图5 不同离散格式与精确解的比较(内节点法，u=2.5 m/s)

观察表3及图5观察可知，对于较大的速度u=2.5 m/s，上风格式与混合格式计算结果相对近似，计算精度好于中心差分格式，但无论哪种格式，计算结果与精确解的接近程度都不及速度较小的情况。由此可以判断，在Peclet数较大时，迎风格式和混合格式可得到更为精确的结果。

综上可判断，无论Peclet数较大还是较小，均可使用混合格式来逼近精确解，混合格式的计算适用范围更广。

4.2外节点法

对于外节点法，节点1，2，…，5，6分别位于x=0 m,x=0.2 m,…,x=1.0 m处。当速度u=0.1 m/s时，计算结果如表4及图6。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表4不同离散格式与精确解的比较（u=0.1 m/s） | | | | | | |
| 节点  离散格式 | 节点1 | 节点2 | 节点3 | 节点4 | 节点5 | 节点6 |
| 中心差分 | 1.000000 | 0.871355 | 0.714123 | 0.521950 | 0.287072 | 0.000000 |
| 迎风格式 | 1.000000 | 0.865620 | 0.704364 | 0.510857 | 0.278649 | 0.000000 |
| 混合格式 | 1.000000 | 0.871355 | 0.714123 | 0.521950 | 0.287072 | 0.000000 |
| 精确解 | 1.000000 | 0.871148 | 0.713769 | 0.521546 | 0.286763 | -0.222044 |

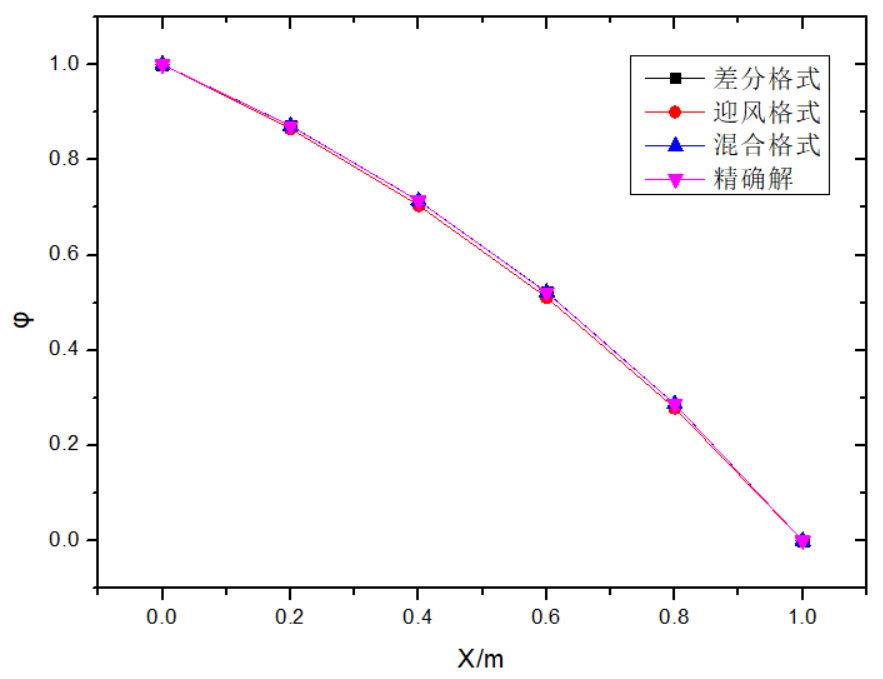


图6 不同离散格式与精确解的比较(外节点法，u=0.1 m/s)

观察表4及图6观察可知，对于较小的速度u=0.1 m/s，中心差分格式及混合格式计算结果完全一致，且计算精度好于迎风格式，这与内节点法在Peclet数较小时，得到的结论一致。同时，对比外节点法与内节点法计算结果可知，外节点法计算精度比内节点法大大提高。这是因为在处理边界值时，内节点法使用内部节点对边界值进行了二阶精度的近似，而外节点法直接将节点放在边界上，可以准确地使用边界条件。因此我们认为，对于本文讨论的问题，使用外节点法，可以提高计算精度。

当速度u=2.5 m/s时，计算结果如表5及图7。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表5不同离散格式与精确解的比较（u=2.5 m/s） | | | | | | |
| 节点  离散格式 | 节点1 | 节点2 | 节点3 | 节点4 | 节点5 | 节点6 |
| 中心差分 | 1.000000 | 0.952492 | 1.063343 | 0.804692 | 1.408211 | 0.000000 |
| 迎风格式 | 1.000000 | 0.999356 | 0.995498 | 0.972347 | 0.833440 | 0.000000 |
| 混合格式 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 0.000000 |
| 精确解 | 1.000000 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999954 | 0.993262 | 0.000000 |

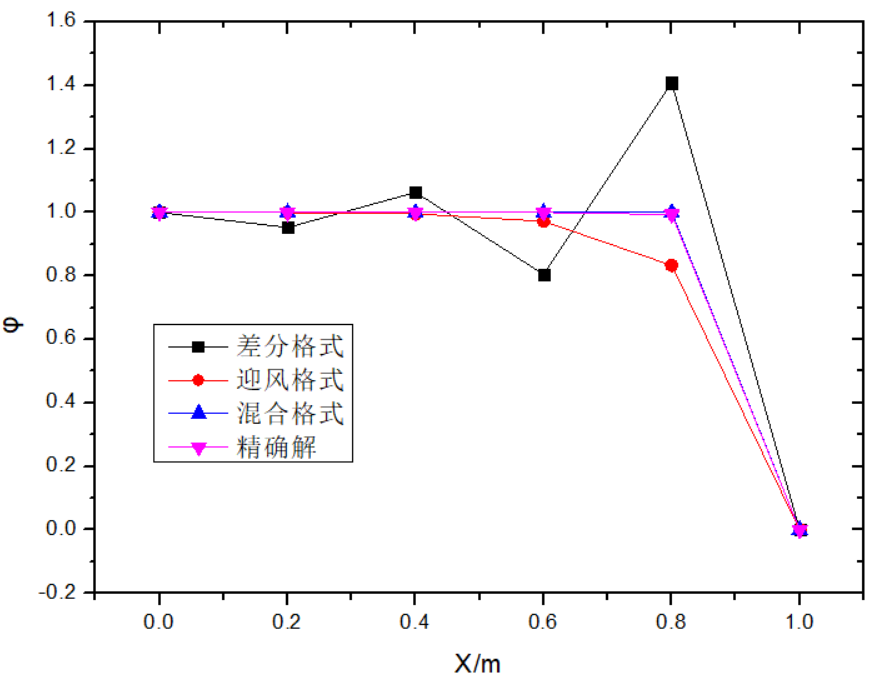


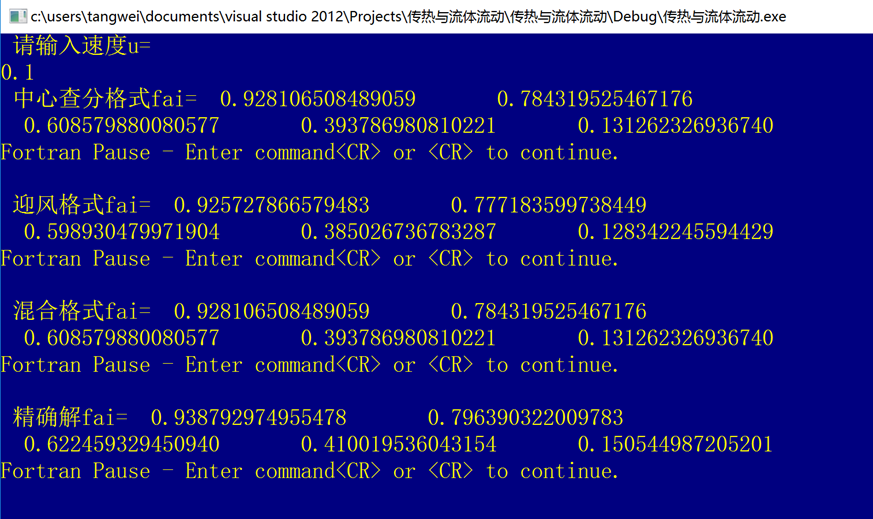
图7 不同离散格式与精确解的比较(外节点法，u=2.5 m/s)

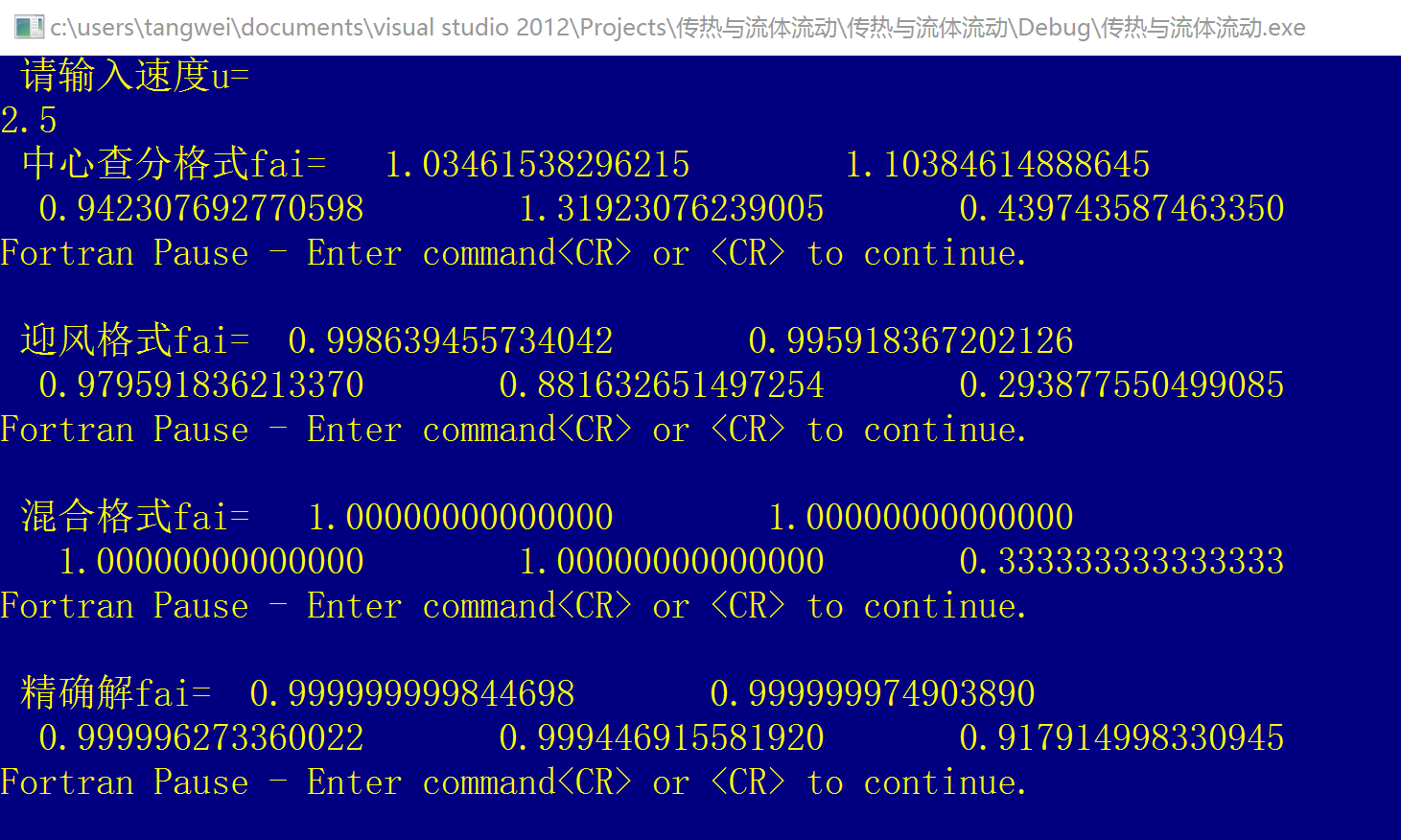
观察表5及图7观察可知，对于较小的速度u=2.5 m/s，迎风格式及混合格式计算结果非常接近，且计算精度好于中心差分格式，这与内节点法在Peclet数较大时，得到的结论一致。同时，对比外节点法与内节点法计算结果可知，外节点法计算精度比内节点法大大提高。采用外节点法精度提高原因与u=0.1 m/s时相同。

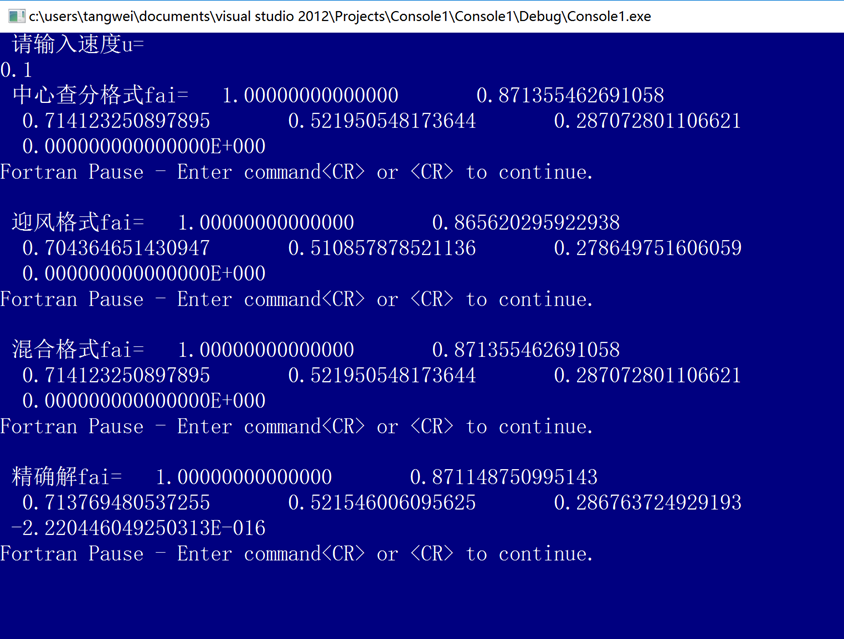
综上可得如下结论：无论Peclet数较大还是较小，均可使用混合格式来逼近精确解，混合格式的计算适用范围更广，计算精度更高。同时，对于本文中涉及的第一类边界条件问题，使用外节点法可以准确地使用边界条件，计算精度高于内节点法。

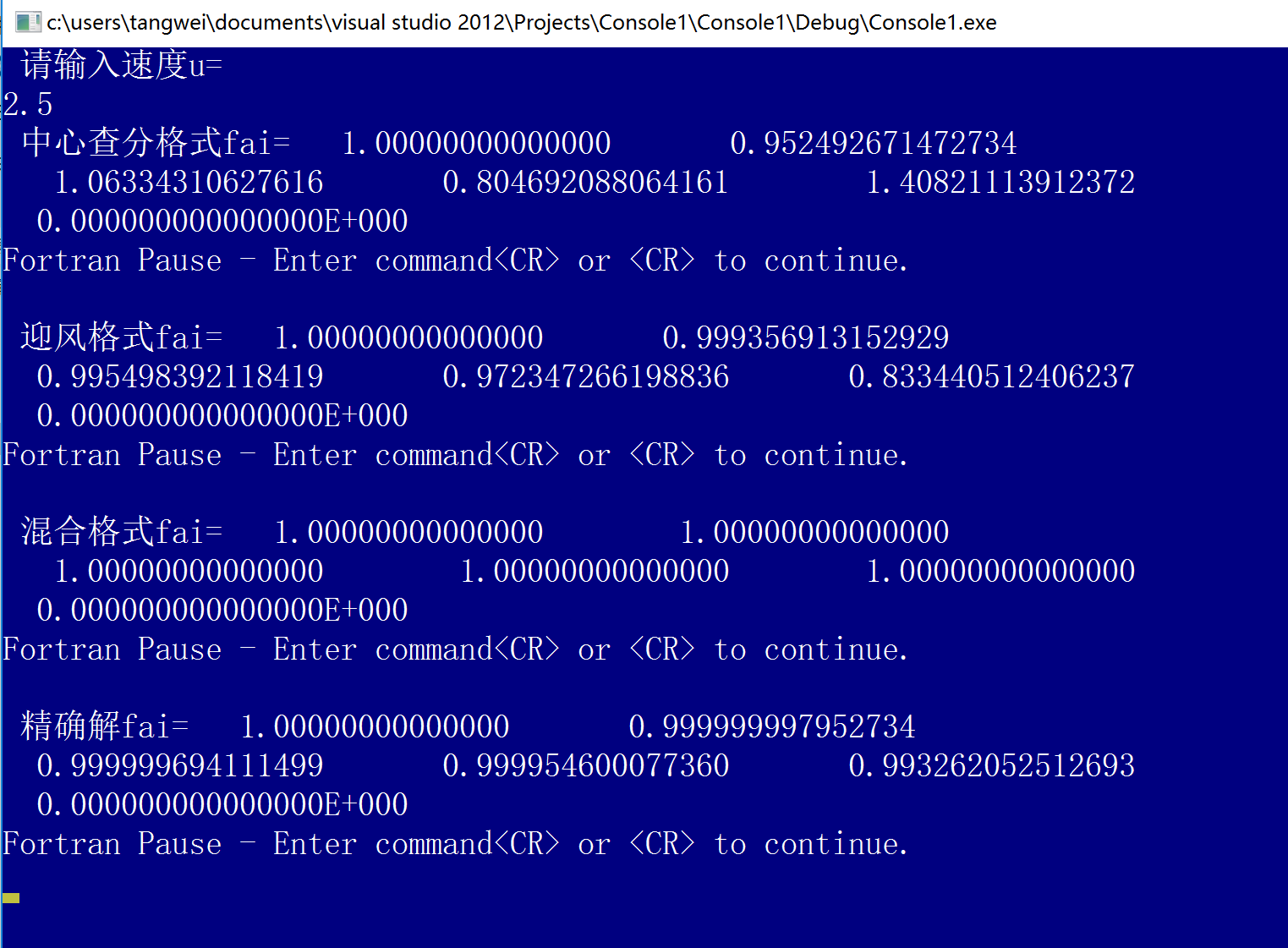
**5计算与运行结果**

计算程序见压缩包内附件，计算结果如下。

内节点法：

****

外节点法

****