数值传热学第三次作业

第四组

组员：崔曦元 黄潇立 刘雨嘉

一、 问题描述

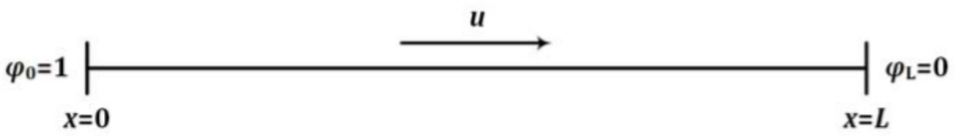
已知变量ϕ的输运过程由如下对流—扩散方程控制

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\rho u\phi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\Gamma_\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dx}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\rho u)}{\mathrm{dx}}=0$$

对于如下图所示的计算域，其对应边界条件为：

$$\begin{cases}\phi_0=1\text{，}\ x=0\\ \phi_L=0\text{，}\ x=L\end{cases}$$



该方程的精确解为：

$$\frac{\phi-\phi_0}{\phi_L-\phi_0}=\frac{\exp(\rho ux/\Gamma)-1}{\exp(\rho uL/\Gamma)-1}$$

若已知：L=1.0 m、ρ=1.0 kg/m3、Γ=0.1 kg/(m•s)，要求：

（1）将该计算域划分为 5 个均分的网格，分别采用中心差分格式、上风格式、混合格式（仅对 u=2.5 m/s）三种离散格式，在（i）u=0.1 m/s、（ii）u=2.5 m/s 的条件下进行求解

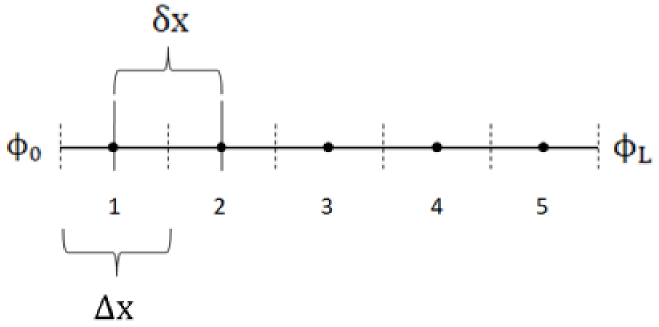
（2） 采用 Fortran 语言编写计算机程序代码

（3）分别以图和表的形式，将上述三种 离散格式的计算结果与精确解的计算结果进行比较。

二、 网格划分与确定边界点离散后差分方程系数

1. 网格划分

网格划分方式有内节点法和外节点法两种。本题中由于题目要求将计算域均分成五个网格，因此笔者认为此题应采用外节点法（内节点法无法实现全域均分且网格数为 5）。采用外节点法划分方式如下图所示：



2.　确定边界点离散后差分方程系数

外节点法在处理求解线性方程组方程 Ax=b 时，系数矩阵内第一行和最后一行的系数由于反映了两个边界节点（节点 1，5）的信息，因此和内节点（节点 2，3，4）的通用形式不同，需单独整理差分方程确定。以下是对中心差分格式、上风格式、混合格式三种情况下边界点矩阵系数的确定过程。

一维、稳态对流-扩散方程

$$\frac{d}{dx}(\rho u\phi)=\frac{d}{dx}(\Gamma_\phi\frac{d\phi}{dx})$$

一维、稳态对流-扩散方程的离散

$$(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w=\left(\Gamma_\phi\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\Gamma_\phi\frac{d\phi}{dx}\right)_w$$

定义

$$F=\rho u$$

$$D=\Gamma/\delta x$$

$$P=F/D$$

由于同一网格内ϕ的梯度不变（分段线性型线分布），所以边界点处的$\frac{d\phi}{dx}$离散为$\frac{\phi_{\text{节点}}-\phi_{\text{边界}}}{\frac{1}{2}\delta x}$。

1)　中心差分格式

对 1 节点：

$$F_e\phi_e-F_w\phi_0=D_e(\phi_E-\phi_P)-2D_w(\phi_P-\phi_0)$$

其中

$$\phi_e=\frac{\phi_E-\phi_P}{2}$$

带入，得：

$$\frac{\mathrm{F_e}}{2}(\phi_\mathrm{E}-\phi_\mathrm{P})-\mathrm{F_w}\phi_0=\mathrm{D_e}(\phi_\mathrm{E}-\phi_\mathrm{P})-2\mathrm{D_w}(\phi_\mathrm{P}-\phi_0)$$

$$\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}+\mathrm{D_e}+2\mathrm{D_w}\right)\phi_\mathrm{P}=\left(\mathrm{D_e}-\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\phi_\mathrm{E}+(2\mathrm{D_w}+\mathrm{F_e})\phi_0$$

因此系数矩阵

$$\mathrm{A}(1,1)=\left(\frac{\mathrm{F_e}}{2}+\mathrm{D_e}+2\mathrm{D_w}\right)$$

$$\mathrm{A}(1,2)=-\left(\mathrm{D_e}-\frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)$$

$$\mathrm{b}(1)=(2\mathrm{D_w}+\mathrm{F_e})\phi_0$$

对 5 节点：

$$\mathrm{F_e}\phi_\mathrm{L}-\mathrm{F_w}\phi_\mathrm{w}=2\mathrm{D_e}(\phi_\mathrm{L}-\phi_\mathrm{P})-\mathrm{D_w}(\phi_\mathrm{P}-\phi_\mathrm{W})$$

其中

$$\phi_\mathrm{w}=\frac{\phi_\mathrm{P}-\phi_\mathrm{W}}{2}$$

带入，得：

$$\mathrm{F_e}\phi_\mathrm{L}-\frac{\mathrm{F_w}}{2}(\phi_\mathrm{P}-\phi_\mathrm{W})=2\mathrm{D_e}(\phi_\mathrm{L}-\phi_\mathrm{P})-\mathrm{D_w}(\phi_\mathrm{P}-\phi_\mathrm{W})$$

$$\left(2\mathrm{D_e}+\mathrm{D_w}-\frac{\mathrm{F_w}}{2}\right)\phi_\mathrm{P}=(2\mathrm{D_e}-\mathrm{F_e})\phi_\mathrm{L}+(\mathrm{D_w}-\frac{\mathrm{F_w}}{2})\phi_\mathrm{W}$$

因此系数矩阵

$$\mathrm{A}(5,4)=-(\mathrm{D_w}-\frac{\mathrm{F_w}}{2})$$

$$\mathrm{A}(5,5)=\left(2\mathrm{D_e}+\mathrm{D_w}-\frac{\mathrm{F_w}}{2}\right)$$

$$\mathrm{b}(5)=(2\mathrm{D_e}-\mathrm{F_e})\phi_\mathrm{L}$$

2) 上风格式

对 1 节点：

$$\mathrm{F_e}\phi_\mathrm{e}-\mathrm{F_w}\phi_0=\mathrm{D_e}(\phi_\mathrm{E}-\phi_\mathrm{P})-2\mathrm{D_w}(\phi_\mathrm{P}-\phi_0)$$

其中

$$\phi_\mathrm{e}=\begin{cases}\phi_\mathrm{P}，\ \mathrm{F_e}>0\\ \phi_\mathrm{E}，\ \mathrm{F_e}<0\end{cases}$$

于是，当$\mathrm{F_e}>0$

原式等于：

$$\mathrm{F_e}\phi_\mathrm{P}-\mathrm{F_w}\phi_0=\mathrm{D_e}(\phi_\mathrm{E}-\phi_\mathrm{P})-2\mathrm{D_w}(\phi_\mathrm{P}-\phi_0)$$

$$(\mathrm{F_e}+\mathrm{D_e}+2\mathrm{D_w})\phi_\mathrm{P}=\mathrm{D_e}\phi_\mathrm{E}+(2\mathrm{D_w}+\mathrm{F_w})\phi_0$$

因此系数矩阵

$$A(1,1) = F_e + D_e + 2D_w$$

$$A(1,2) = -D_e$$

$$b(1) = (2D_w + F_w)\phi_0$$

当$F_e < 0$

原式等于：

$$F_e\phi_E - F_w\phi_0 = D_e(\phi_E - \phi_P) - 2D_w(\phi_P - \phi_0)$$

$$(D_e + 2D_w)\phi_P = (D_e - F_e)\phi_E + (2D_w + F_w)\phi_0$$

因此系数矩阵

$$A(1,1) = D_e + 2D_w$$

$$A(1,2) = -(D_e - F_e)$$

$$b(1) = (2D_w + F_w)\phi_0$$

对 5 节点：

$$F_e\phi_L - F_w\phi_w = 2D_e(\phi_L - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

其中

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_W，F_e > 0 \\ \phi_P，F_e < 0 \end{cases}$$

于是，当$F_w > 0$

原式等于：

$$F_e\phi_L - F_w\phi_W = 2D_e(\phi_L - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$(D_w + 2D_e)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + (2D_e - F_e)\phi_L$$

因此系数矩阵

$$A(5,4) = -(D_w + F_w)$$

$$A(5,5) = D_w + 2D_e$$

$$b(5) = (2D_e - F_e)\phi_L$$

当$F_w < 0$

原式等于：

$$F_e\phi_L - F_w\phi_P = 2D_e(\phi_L - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$(D_w + 2D_e - F_w)\phi_P = D_w\phi_W + (2D_e - F_e)\phi_L$$

因此系数矩阵

$$A(5,4) = -D_w$$

$$A(5,5) = D_w + 2D_e - F_w$$

$$b(5) = (2D_e - F_e)\phi_L$$

3) 混合格式

对 1 节点：

$$F_e\phi_e - F_w\phi_0 = D_e(\phi_E - \phi_P) - 2D_w(\phi_P - \phi_0)$$

其中

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & ，P_e > 2 \\ (\phi_P + \phi_E)/2，& |P_e| \le 2 \\ \phi_E & ，P_e < -2 \end{cases}$$

当$|P_e| \le 2$

$$\left(\frac{F_e}{2} + D_e + 2D_w\right)\phi_P = \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E + (2D_w + F_e)\phi_0$$

因此系数矩阵

$$A(1,1) = \frac{F_e}{2} + D_e + 2D_w$$

$$A(1,2) = -\left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)$$

$$b(1) = (2D_w + F_e)\phi_0$$

于是，当$P_e > 2$

$$F_e\phi_P = F_w\phi_0$$

因此系数矩阵

$$A(1,1) = F_e$$

$$A(1,2) = -F_w$$

当$P_e < -2$

$$-F_w\phi_P = -F_e\phi_E$$

因此系数矩阵

$$A(1,1) = F_w$$

$$A(1,2) = -F_e$$

同理，对 5 节点：

$$F_e\phi_L - F_w\phi_w = 2D_e(\phi_L - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

当$|P_e| \le 2$

$$\left(2D_e + D_w - \frac{F_w}{2}\right)\phi_P = \left(D_w - \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + (2D_e - F_e)\phi_L$$

因此系数矩阵

$$A(5,4) = -\left(D_w - \frac{F_w}{2}\right)$$

$$A(5,5) = 2D_e + D_w - \frac{F_w}{2}$$

$$b(5) = (2D_e - F_e)\phi_L$$

于是，当$P_e > 2$

$$F_e\phi_P = F_w\phi_W$$

因此系数矩阵

$$A(5,4) = -F_w$$

$$A(5,5) = F_e$$

当$P_e < -2$

$$-F_w\phi_P = -F_e\phi_L$$

因此系数矩阵

$$A(5,4) = -F_e$$

$$A(5,5) = F_w$$

三、 编程求解

此处见主程序。

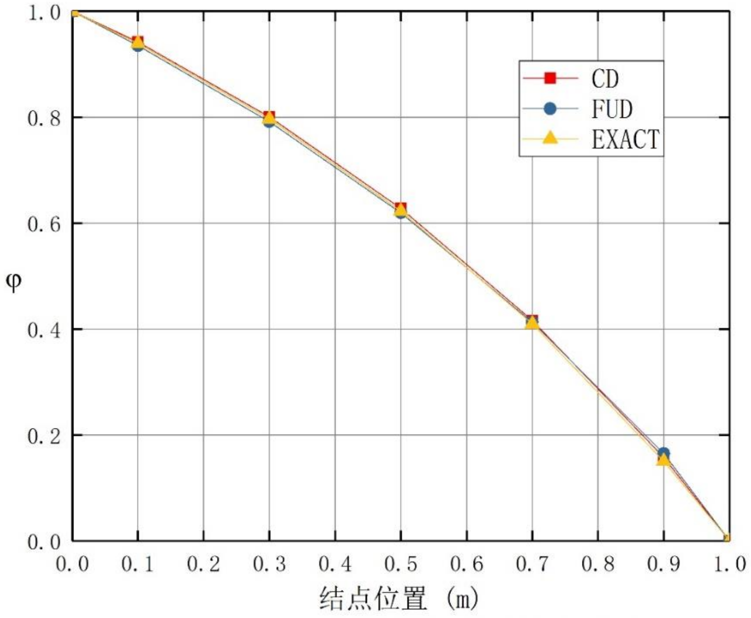
四、 结果分析

1. u=0.1 m/s 条件下

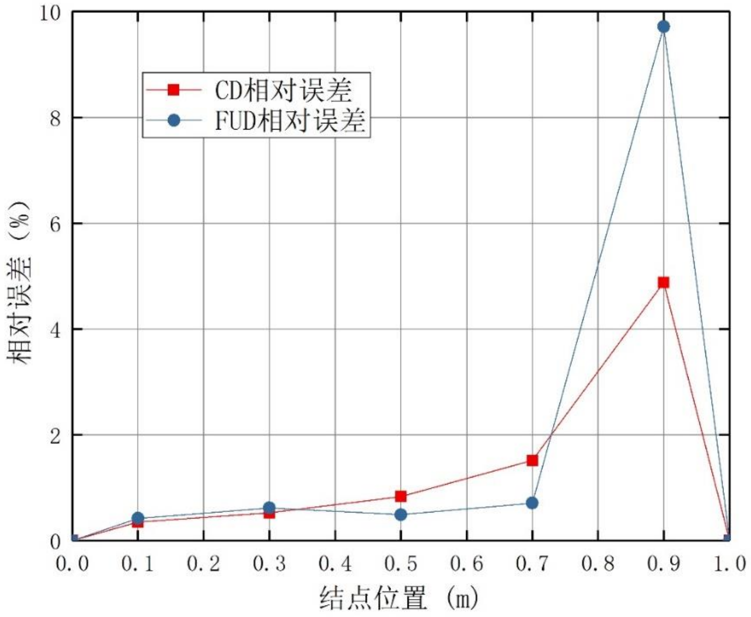
由图可见，在 u=0.1 m/s 时，中心差分（Central Difference）格式、一阶迎风差分（First-order Upwind Difference）格式与精确解的偏差很小。

u=0.1 m/s 时，CD 和 FUD 格式的节点ϕ值计算结果

	左边界	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4	节点 5	右边界
中心差分	1	0.9421	0.8006	0.6276	0.4163	0.1579	0
迎风	1	0.9348	0.7914	0.6194	0.4129	0.1652	0
精确解	1	0.9388	0.7964	0.6225	0.4100	0.1505	0



u=0.1时，CD、FUD以及精确解的φ值分布



u=0.1时，CD、FUD各结点相对误差分布

从相对误差的折线图中可以看出，结点 1~4 的相对误差都在 2%以下，只有 5 号结点的相对误差较大，且 FUD 误差大于 CD 误差，但也这两者也都控制在了 10%以内。说明当 P（贝克莱数）较小时，两种格式的差分结果均与精确解相当一致。

2. u=2.5 m/s 条件下

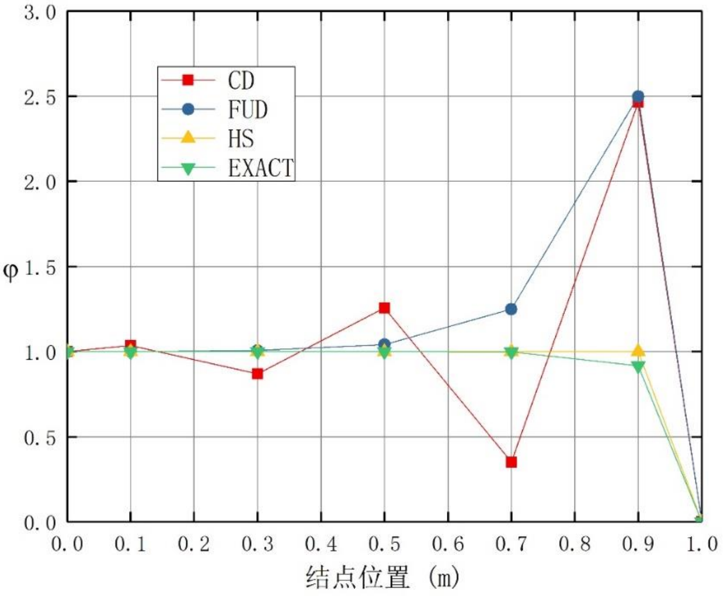
由表中可以看出，混合格式的节点 1-5 计算结果均为 1，乍看之下有些令人费解，但仔细观察混合格式在 P>2 时的差分方程不难发现，此时扩散项已经被完全忽略：

$$F_e\phi_P = F_w\phi_W$$

节点的ϕ值仅由上一节点和界面 e、w 的 F 确定。而一维问题在满足连续性方程的前提下，F 在各处均为定值。因此所有节点的ϕ值相同就可以解释了。

u=2.5 m/s 时，三种格式的节点ϕ值计算结果

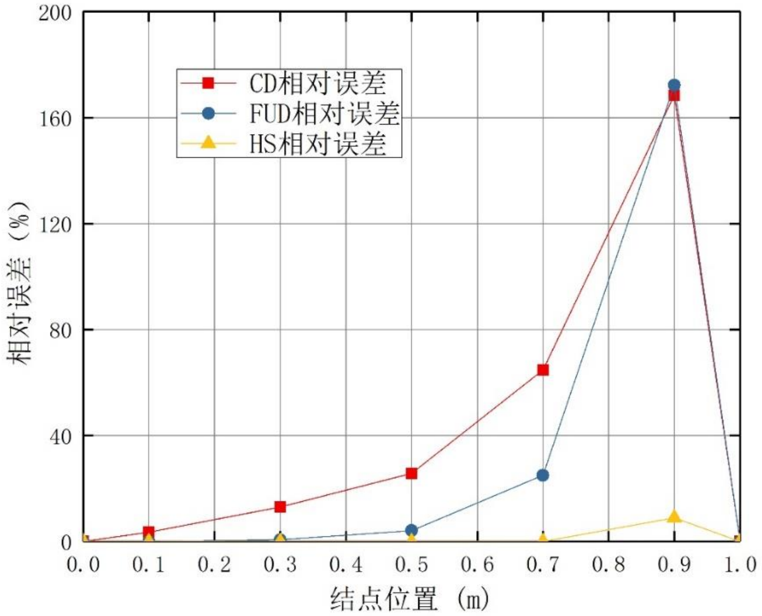
	左边界	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4	节点 5	右边界
中心差分	1	1.0356	0.8694	1.2573	0.3521	2.4644	0
迎风	1	1.0008	1.0066	1.0413	1.2496	2.4992	0
混合	1	1	1	1	1	1	0
精确解	1	1	1	0.999996	0.9994	0.9179	0



u=2.5时，CD、FUD、HS以及精确解φ值的分布

在 u=2.5 m/s 时，CD 格式出现了震荡现象，且随结点位置增大震荡越加剧烈，与精确解的偏差也越来越大；FUD 格式在前几个结点的 φ 值与精确解吻合程度较好，但在靠近右边界的 4、5 号结点出现了明显偏差，其中 5 结点的偏差近乎一

种“突跳”；混合格式（Hybrid Scheme）从始至终与精确解吻合程度很好，仅在 5 结点处出现了一点偏差，但相较此处的 CD 格式和 FUD 格式，偏差小了一个量级。



u=2.5时，CD、FUD、HS各结点相对误差分布

在误差折线图中可以看出，CD 格式和 FUD 格式的相对误差都是沿着结点位置逐渐增大的，虽然 FUD 的相对误差比 CD 的小一些，但偏差都在一个量级。而 HS 的相对误差在前四个结点几乎可以忽略不计，而 5 点的相对误差也仅有 8.9%。说明当 P 较大时，差分格式会出现震荡现象，FUD 也会出现偏差较大的点，而 HS 则能较好的反映出真实解的情况。

下面分析一下 FUD 在靠近右边界出现“突跳”的现象。我们在处理等式右端对流项的时候采用的是一阶导数项的差分，实际在离散对流项时舍去了包含一个系数为$\frac{\rho u \Delta x}{2}$的二阶导数项，因此引入了较大的数值计算误差，产生了一种假扩散现象。可以看出，精确解在最后一个网格内有一个锐减的过程，而此时由于 P 太大，FUD 由于自身引入误差较大的原因，对于这种温度的变化没有及时的响应，从而出现了结果中的“突跳”现象。