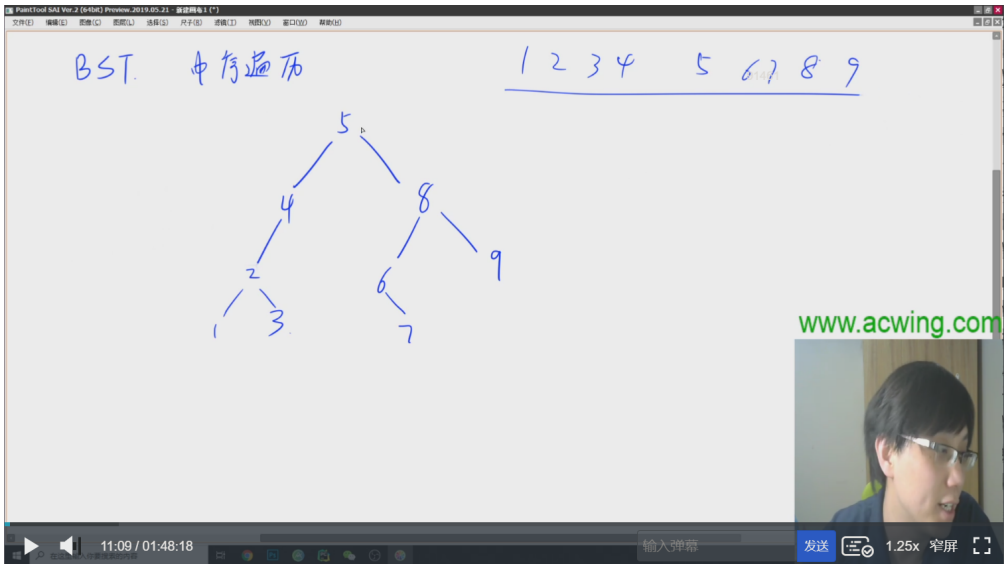
L2C4 Lesson6

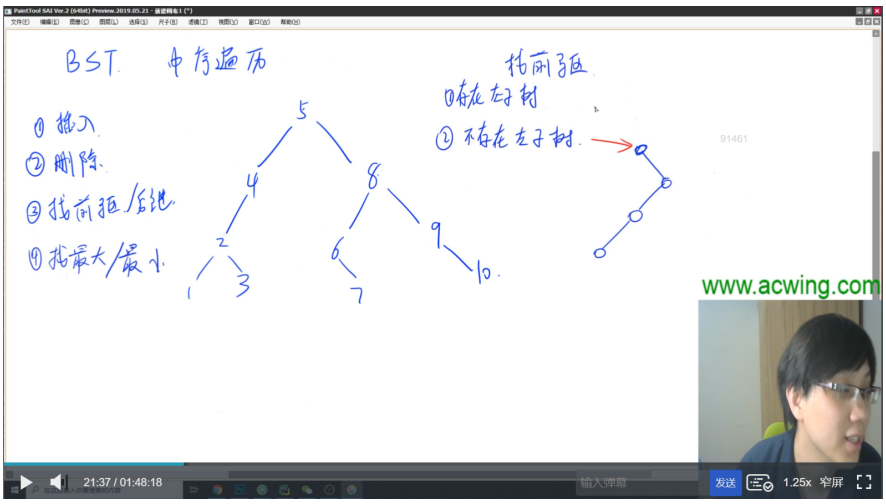
> 平衡树（treap）
>
> tree + heap
>
> 同类型：红黑树，splay（重点,），sbt， AVL
>
> 红黑树太麻烦，难写，其中splay，treap常用

二叉搜索树（Binary Search tree BST）

> 性质：
>
> 1. 当前结点左子树中的任意一个点的权值 < 当前结点权值
> 2. 当前结点右子树中的任意一个点的权值 > 当前结点权值
> 3. 一般情况下没有相同权值，若有相同权值，额外为每个结点维护一个cnt，记录该权值出现多少次
> 4. 主要看**中序(根的位置)遍历**，即按照左->根->右的顺序遍历
>   1. BST中序遍历，最终结果一定是**从小到大排序**
>
> 
>
> 5. 平衡树本质上，主要作用是**动态维护一个有序序列（集合）**
> 6. 主要操作：
>   1. 插入
>   2. 删除：在treap和splay里将结点换到叶结点上并删除
>   3. 找前驱，后继
>   - 前驱：中序遍历中当前结点前一个位置的数，首元素无前驱
>
>   如何找前驱：
>
>   1. 当前结点存在左子树，则前驱为左子树中的最大值，走到左子树，再一直往右走，即为当前结点的前驱，假设当前结点是p
>
>   left = p->left;

while (left->right) left = left->right; //最终left即为前驱

2. 当前结点不存在左子树，红色箭头所指结点即为尾结点前驱



- 后继：中序遍历中当前结点后一个位置的数，尾元素无后继

4. 找最大值（一直往右走）/最小值（一直往左走），1-4操作在Set中已经实现（insert，erase，++/--，begin/end-1），若一道题只涉及前四种操作，则可直接是使用Set来做
5. 求某个值的排名
6. 求排名是k（中序遍历中第k个数）的数是啥
7. lower-bound（比某数大的最小值，输入的值在平衡树中可能不存在，找到在平衡树中满足条件的值）
8. upper-bound（比某数小的最大值）

Treap

Tree + heap

对于BST而言，每个操作一般而言时间复杂度和树高成正比，最坏情况退化成一条链，此时为O(n)。

结论：一颗结构随机的BST，期望树高度是O(logn)级别

因此，treap的思想是让BST变得尽可能随机，从而让整棵树期望高度接近logn

结点性质：

```
Node {
int l, r;   //l和r存储左右儿子的编号
int key, value; //key存储用于BST排序的关键字，value是大根堆中的优先级
    //同时满足两个条件，一是BST：key（中序遍历）有序满足BST条件
    //二是大根堆：每个结点的value值>=左右儿子的value，且value是随机值
}tr[N];
```

性质：

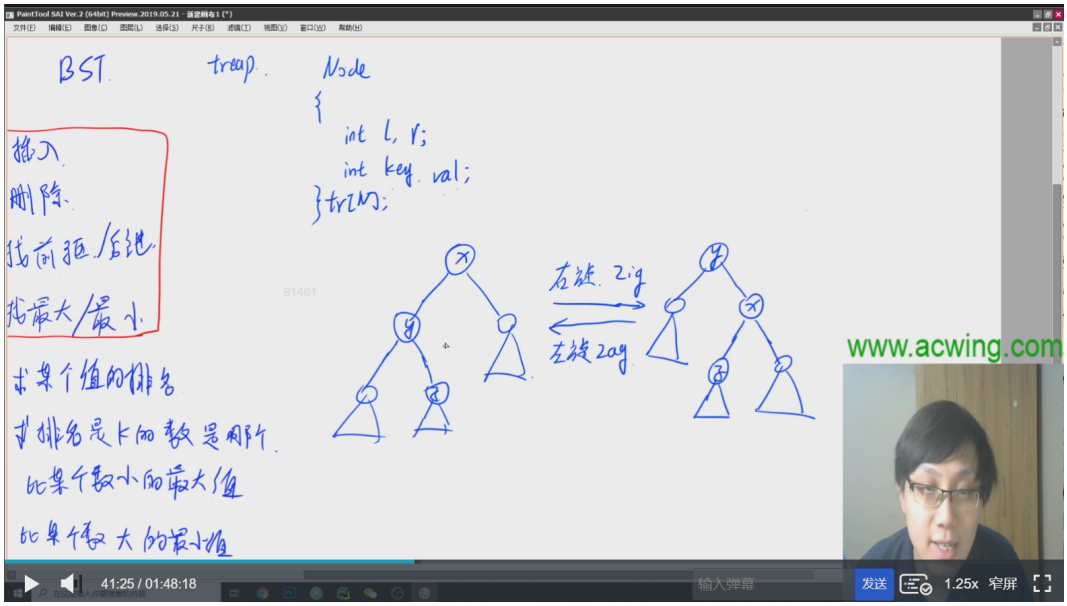
- 只要所有key不同，所有value不同，则通过key，value就可以唯一确定一颗BST的结构，递归证明。**如果对value随机，则整棵BST结构也会随机。**随机BST的树高是logN。
- BST的结点个数是N，一个点对应一个数，线段树一个点可能对应多个数。因此，BST空间复杂度是O(N)级别

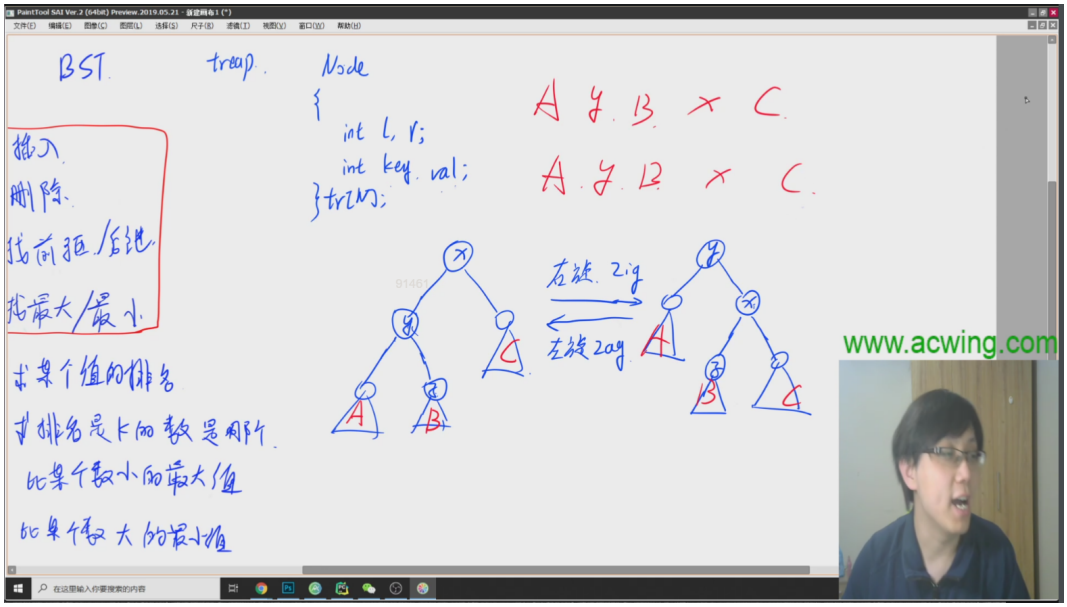
具体操作：

- 初始化：BST一般加入两个哨兵，防止出现边界问题，减少判断

  即根节点为-∞，下一个结点为+∞，保证所有用到的值都处于[-∞, +∞]之间

- 插入： 通过递归将新结点插到某个叶子上，并给新节点赋值随机value，并通过回溯更新位置。**所有BST都有左旋/右旋操作，即交换父结点与儿子的顺序。左右旋之后不会影响中序遍历的顺序，但是可以让父子结点的顺序发生交换。**





  - 右旋(zig)
  - 左旋(zag)
- 删除：将要删除的结点左右旋至叶结点，并删除
  - 左儿子value大->右旋，右儿子value大->左旋

普通平衡树（模板题）

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>

```

```cpp
using namespace std;        //253. 普通平衡树

const int N = 100010, INF = 1e8;

int n;
struct Node {
    int l, r;   //l，r分别表示左右儿子的编号
    int key, val;   //key表示BST排序的权值，val表示大根堆的权值
    int cnt, size;  //cnt表示当前结点出现的次数，size表示左右子树和当前结点cnt之和，用于求排名rank
}tr[N];

int root, idx;  //root表示根结点，idx表示当前使用到了第几个结点，和链表中idx同义

void pushup(int p) {    //利用p的左右儿子信息维护p的信息，信息往上传递
    tr[p].size = tr[tr[p].l].size + tr[tr[p].r].size + tr[p].cnt;
}

int get_node(int key) {     //创建一个结点
    tr[++idx].key = key;
    tr[idx].val = rand();    //创建结点时，随机赋value值
    tr[idx].cnt = tr[idx].size = 1;     //创建结点时，为叶结点，cnt = size = 1
    return idx;     //返回创建节点的编号
}

void zig(int &p) {      //对结点p右旋，需要更改实参的值，故传引用
    int q = tr[p].l;    //旋转后p的左儿子q将成为父结点
    tr[p].l = tr[q].r, tr[q].r = p, p = q;  //p左结点=q右节点，q右节点=p，q成为新父结点
    pushup(tr[p].r), pushup(p);     //更新原父结点与新父结点的信息，注意顺序从下往上

}

void zag(int &p) {  //对结点p左旋
    int q = tr[p].r;
    tr[p].r = tr[q].l, tr[q].l = p, p = q;  //对称，p右节点=q左结点，q左结点=p，q成为新父结点
    pushup(tr[p].l), pushup(p);
}

void build() {  //初始化树
    get_node(-INF), get_node(INF);  //创建两个哨兵结点(1, 2)，简化边界判断，0表示空结点
    root = 1, tr[root].r = 2;   //初始化树结构，-INF为根结点，INF为右儿子
    pushup(root);   //更新root结点信息

    if (tr[1].val < tr[2].val) zag(root);   //满足大根堆
}

void insert(int &p, int key) {  //插入一个key，需要更改实参的值，故传引用，递归实现
    if (!p) p = get_node(key);  //到达空叶子位置，新建一个叶子结点，记得更新p
```

```
    else if (tr[p].key == key) tr[p].cnt++;      //当前结点key==插入key，cnt++
    else if (tr[p].key > key) {
        insert(tr[p].l, key);   //在左子树中去插入key
        if (tr[tr[p].l].val > tr[p].val) zig(p);    //插入后如果左子树val>父val，右旋父结点
    }
    else {
        insert(tr[p].r, key);   //对称，左子树中去插入key
        if (tr[tr[p].r].val > tr[p].val) zag(p);    //右子树val>父val，左旋父结点
    }

    pushup(p);  //从下往上更新p结点信息
}

void remove(int &p, int key) {  //删除一个key，需要更改实参的值，故传引用，递归实现
    if (!p) return;      //删除的key不存在，直接return
    if (tr[p].key == key) {
        if (tr[p].cnt > 1) tr[p].cnt--;      //当前结点个数>1，cnt--;
        else if (tr[p].l || tr[p].r) {      //当前结点存在左子树或右子树
            if (!tr[p].r || tr[tr[p].l].val > tr[tr[p].r].val) {
                //当前结点右子树不存在 || 左儿子val > 右儿子val -> 右旋
                zig(p);      //右旋，右旋后原p结点 = 新p结点.r
                remove(tr[p].r, key);   //将原p结点递归旋转至叶子结点，并删除
            }
            else {  //否则左旋
                zag(p);      //左旋
                remove(tr[p].l, key);
            }
        }
        else p = 0;      //已经旋转至叶子结点，令p=0直接删除
    }
    else if (tr[p].key > key) remove(tr[p].l, key);      //去左子树中删
    else remove(tr[p].r, key);       //去右子树中删

    pushup(p);       //从下往上更新p结点信息
}

int get_rank_by_key(int p, int key) {   //根据key找排名，不涉及修改操作，不用传引用
    if (!p) return 0;   //所找key不存在，返回rank=0，本题中不存在此情况
    if (tr[p].key == key) return tr[tr[p].l].size + 1;     //左子树size+1，即为rank
    if (tr[p].key > key) return get_rank_by_key(tr[p].l, key);      //左子树中找
    //左子树size+父结点cnt+右子树中找
    return tr[tr[p].l].size + tr[p].cnt + get_rank_by_key(tr[p].r, key);
}

int get_key_by_rank(int p, int rank) {  //通过rank找key
```

```
    if (!p) return INF;      //所找rank不存在，返回key=INF，本题中不存在此情况
    if (tr[tr[p].l].size >= rank) return get_key_by_rank(tr[p].l, rank);      //左子树中找，注意>=
    if (tr[tr[p].l].size + tr[p].cnt >= rank) return tr[p].key;      //此时p.key即为所找
    return get_key_by_rank(tr[p].r, rank - tr[tr[p].l].size - tr[p].cnt);    //右子树中找，记得更新rank
}

int get_prev(int p, int key) {  //找前驱，严格小于key的最大数
    if (!p) return -INF;
    if (tr[p].key >= key) return get_prev(tr[p].l, key);     //左子树中找
    return max(tr[p].key, get_prev(tr[p].r, key));  //注意需加上max，因为递归终点可能返回-INF
}

int get_next(int p, int key) {  //找后继，严格大于key的最小数
    if (!p) return INF;
    if (tr[p].key <= key) return get_next(tr[p].r, key);
    return min(tr[p].key, get_next(tr[p].l, key));
}

int main(void) {
    build();

    scanf("%d", &n);
    while (n--) {
        int opt, x;
        scanf("%d%d", &opt, &x);

        if (opt == 1) insert(root, x);
        else if (opt == 2) remove(root, x);
        else if (opt == 3) printf("%d\n", get_rank_by_key(root, x) - 1);    //-1考虑左哨兵
        else if (opt == 4) printf("%d\n", get_key_by_rank(root, x + 1));   //+1考虑左哨兵
        else if (opt == 5) printf("%d\n", get_prev(root, x));
        else printf("%d\n", get_next(root, x));
    }

    return 0;
}

```

营业额统计（平衡树的简单应用）

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>

using namespace std;        //265. 营业额统计
```

```cpp

typedef long long LL;

const int N = 33010, INF = 1e7;

int n;
struct Node {
    int l, r;
    int key, val;
}tr[N];

int root, idx;

int get_node(int key) {
    tr[++ idx].key = key;
    tr[idx].val = rand();
    return idx;
}

void zig(int &p) {
    int q = tr[p].l;
    tr[p].l = tr[q].r, tr[q].r = p, p = q;
}

void zag(int &p) {
    int q = tr[p].r;
    tr[p].r = tr[q].l, tr[q].l = p, p = q;
}


void build() {
    get_node(-INF), get_node(INF);
    root = 1, tr[1].r = 2;

    if (tr[2].val > tr[1].val) zag(root);
}

void insert(int &p, int key) {
    if (!p) p = get_node(key);
    else if (tr[p].key == key) return;  //不需要维护cnt和size
    else if (tr[p].key > key) {
        insert(tr[p].l, key);
        if (tr[tr[p].l].val > tr[p].val) zig(p);
    }
    else {
        insert(tr[p].r, key);
        if (tr[tr[p].r].val > tr[p].val) zag(p);
    }
}

int get_prev(int p, int key) {
    if (!p) return -INF;
    if (tr[p].key > key) return get_prev(tr[p].l, key);    //注意找<=的最大值，因此条件为>
    return max(tr[p].key, get_prev(tr[p].r, key));

```

```
}

int get_next(int p, int key) {
    if (!p) return INF;
    if (tr[p].key < key) return get_next(tr[p].r, key);
    return min(tr[p].key, get_next(tr[p].l, key));
}


int main(void) {
    build();

    scanf("%d", &n);
    LL res = 0;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);

        if (i == 0) res += x;
        else res += min(x - get_prev(root, x), get_next(root, x) - x);

        insert(root, x);
    }

    printf("%lld\n", res);


    return 0;
}
```

堆 （heap 使用大根堆）