Lesson3

高斯消元

作用：

- 可以在O(n^3)时间复杂度内求解一个包含n个方程n个未知数的多元线性方程组

  解的三种情况

  - 唯一解
  - 无穷多组解
  - 无解

矩阵的3种等价变换操作（初等行列变换，不会影响方程组的解）

- 某一行乘一个非零的数
- 交换某两行
- 把某行的若干倍加到另外一行之上

  目的：**将增广矩阵变为上三角矩阵**

  解的情况

  - 唯一解：完美的阶梯型
  - 无解：化简之后，存在方程左边无未知数，右边不为0（0 = 非零）
  - 无穷多组解：化简之后，存在0 = 0情况的方程

算法步骤

```
枚举每一列c：
    找到该列绝对值最大的一行（出于精度考虑）
    将该行换至当前最上面（没有被换到过）
    将该行的第一个非零数变为1。（初等行变换）
    将下面的所有行的第c列消为0

判断解的情况，若有解则从最后一行的方程开始求解
```

具体实现：时间复杂度O(n^3)

```cpp
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <cmath>

using namespace std;

const int N = 110;
const double eps = 1e-6;

int n;
double a[N][N];

int gauss() {
    int c, r;   //c表示列，r表示行

    for (c=0, r=0; c<n; c++) {
        int t = r;

        //找出第c列绝对值最大的一行
        for (int i=r; i<n; i++)
            if (fabs(a[i][c]) > fabs(a[t][c]))
                t = i;

        //如果最大值是0，结束本次循环，跳到下一列
        if (fabs(a[t][c]) < eps) continue;

        //将该行换至当前最上面
        for (int i=c; i<n+1; i++) swap(a[t][i], a[r][i]);
        //将该行第一个非零数化为1，注意行数已经变为r
        for (int i=n; i>=c; i--) a[r][i] /= a[r][c];

        //将该行之下所有行的第c列消为0
        for (int i=r+1; i<n; i++)
            if (fabs(a[i][c]) > eps)
                for (int j=n; j>=c; j--)
                    a[i][j] -= a[r][j]*a[i][c]; //a[i][c]为乘的系数

        r++;
    }

```

```
    if (r < n) {    //无穷多解或者无解
        for (int i=r; i<n; i++)      //从第r行开始看
            if (fabs(a[i][n]) > eps)
                return 2;    //0 = 非零，无解

        return 1;    // 无穷多组解
    }

    //若有解则从最后一行的方程开始求解
    for (int i=n-1; i>=0; i--)  //从最后一行开始
        for (int j=i+1; j<n; j++)
            //最终结果为a[i][n]-主元外的所有系数a[i][j]*与系数对应的xj的值即a[j][n]
            a[i][n] -= a[i][j]*a[j][n];

    return 0;    //唯一解
}

int main(void) {
    scanf("%d", &n);

    for (int i=0; i<n; i++)     //行
        for (int j=0; j<n+1; j++)    //列，循环n+1次，a[i][n]存储等号右侧常数
            scanf("%lf", &a[i][j]); //注意输入格式控制！

    int t = gauss();

    if (t == 0) {    //存在唯一解
        for (int i=0; i<n; i++) printf("%.2f\n", a[i][n]);
    }
    else if (t == 1) puts("Infinite group solutions");
    else puts("No solution");

    return 0;
}
```

- e2: 解异或线性方程组

  异或：不进位加法

```
#include <iostream>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 110;

int n;
int a[N][N];

int gauss() {
    int c, r;

    for (c=0, r=0; c<n; c++) {
        int t = r;

        for (int i=r; i<n; i++)
            if (a[i][c]) {
                t = i;
                break;
            }

        if (a[t][c] == 0) continue;

        for (int i=0; i<n+1; i++) swap(a[t][i], a[r][i]);

        for (int i=r+1; i<n; i++)
            if (a[i][c])
                for (int j=n; j>=c; j--)
                    a[i][j] ^= a[r][j];
        r++;
    }

    if (r < n) {
        for (int i=r; i<n; i++)
            if (a[r][n])
                return 2;

        return 1;
    }

```

```
    for (int i=n-1; ~i; i--)
        for (int j=i+1; j<n; j++)
            //对非主元的每一项a[i][j]*a[j][n]，等式两边同时^a[i][j]*a[j][n]
            //从而将该项消零
            a[i][n] ^= a[i][j]*a[j][n];

    return 0;
}

int main(void) {
    scanf("%d", &n);

    for (int i=0; i<n; i++)
        for (int j=0; j<n+1; j++)
            scanf("%d", &a[i][j]);

    int t = gauss();

    if (!t)
        for (int i=0; i<n; i++) printf("%d\n", a[i][n]);
    else if (t == 1) puts("Multiple sets of solutions");
    else puts("No solution");

    return 0;
}
```

组合数

根据**数据范围**选择使用的算法

求组合数1:

- 范围:

  $1 \le n \le 10000$

  $1 \le b \le a \le 2000$

- 递推式：**C(a, b) = C(a-1, b) + C(a-1, b-1)**;

  证明:

  C(a, b)表示从a个苹果中选出b个的方案数

  把所有选法分成两种情况：包含某一个苹果的选法C(a-1, b-1)，不包含某一个苹果的选法C(a-1, b)

具体实现：将所有组合数预处理出来（递推）时间复杂度O(n^2)

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 2010, mod = 1e9+7;

int c[N][N];

void init() {
    for (int i=0; i<N; i++)
        for (int j=0; j<=i; j++)
            if (!j) c[i][j] = 1;    //当j=0时，进行特判
            else c[i][j] = (c[i-1][j-1]+c[i-1][j])%mod;
}

int main(void) {
    init();

    int n;
    scanf("%d", &n);

    while (n--) {
        int a, b;
        scanf("%d%d", &a, &b);
        printf("%d\n", c[a][b]);
    }

    return 0;
}
```

求组合数2:

- 范围

  1 ≤ n ≤ 10000,
  1 ≤ b ≤ a ≤ 10^5

- 思路：预处理阶乘
  - fact[i] = i! mod 1e9+7
  - infact[i] = (i!)^(-1) mod 1e9+7
  - C(a, b) = fact[a] * infact[a-b] * infact[b]

具体实现：时间复杂度O(nlogn)

```
#include <iostream>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int N = 100010, mod = 1e9+7;

// fact[i]表示i! % mod, infact[i]表示(i!)^(-1) % mod
LL fact[N], infact[N];

LL qmi(int a, int k, int p) {
    LL res = 1 % p;

    while (k) {
        if (k & 1) res = res*a%p;
        k >>= 1;
        a = (LL)a*a%p;
    }

    return res;
}

int main(void) {
    int n;
    scanf("%d", &n);

    //预处理fact（阶乘）与infact（阶乘的逆）的数组
    fact[0] = infact[0] = 1;
    for (int i=1; i<N; i++) {
        fact[i] = (LL)fact[i-1]*i%mod;
        infact[i] = (LL)infact[i-1]*qmi(i, mod-2, mod)%mod;
    }

    while (n--) {
        int a, b;
        scanf("%d%d", &a, &b);
        printf("%lld\n", fact[a]*infact[b]%mod * infact[a-b]%mod);    //组合数公式
    }

    return 0;
}
```

求组合数3

- 范围

  1 ≤ n ≤ 20,
  1 ≤ b ≤ a ≤ 10^18,
  1 ≤ p ≤ 10^5

- 思路

  卢卡斯(lucas)定理：**C(a, b) = C(a mod p, b mod p) * C(a / p, b / p) (mod p)** （等号表示同余）

  时间复杂度O(log(p)N * p * logp) ≈ O(p * logN * logp)，当N为10^18级别时，logN≈64

  但p增大时log(p)N急速减少，所以计算次数为10^5 * 20 * 20 ≈ 4*10^7

  证明：

  a = ak * p^k + a(k-1) * P^(k-1) + ... + a0 * p^0 （将a化为类p进制）

  b = bk * p^k + b(k-1) * P^(k-1) + ... + b0 * p^0 （将b化为类p进制）

  (1+x)^p = C(p, 0) * x^0 + C(p, 1) * x^1 + ... + C(p, p) * x^p

  且p为质数，故C(p, 1), C(p, 2), ..., C(p, p-1) 模 p 为 0，故 (1+x)^p = 1+x^p (mod p) （等号同余）

  将a分解

  (1+x)^a = ((1+x)^a0) * (((1+x)^p)^a1) * ... * (((1+x)^(p^k))^ak)

  = ((1+x)^a0) * ((1+x^p)^a1) * ... * ((1+x^(p^k))^ak)

对于x^b，等式左边其系数为C(a, b)，等式右边其系数为C(ak, bk) * C(a(k-1), b(k-1)) * ... * C(a0, b0)

所以左=右即： C(a, b) = C(ak, bk) * C(a(k-1), b(k-1)) * ... * C(a0, b0) (mod p)

若存在bi > ai，则C(a, b) = 0

P.S. 最后一步对应没太懂QAQ

Lucas 定理 设 p 是一个素数，将 m ，n 写成 p 进制数:
$m = a_k p^k + a_{k-1}p^{k-1} + \cdots + a_1 p + a_0$ ，
$n = b_k p^k + b_{k-1}p^{k-1} + \cdots + b_1 p + b_0$ ，其中 $0 \le a_i, b_i \le p(i = 1, 2, \cdots, k)$ ，则

$$C_m^n \equiv \prod_{i=0}^{k} C_{a_i}^{b_i} (mod\ \ p) .$$

证明 不难看出，只需证：当 $m = m_1 p + a_0$ ，$n = n_1 p + b_0$ 时，$C_m^n \equiv C_{m_1}^{n_1} C_{a_0}^{b_0} (mod\ \ p)$.

注意到，$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n = \sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{b_0=0}^{a_0} C_m^n x^{n_1 p + b_0}$ ，

$$(1+x)^{m_1 p + a_0} = ((1+x)^p)^{m_1}(1+x)^{a_0}$$

$$= (\sum_{i=0}^{p} C_p^i x^i)^{m_1}(1+x)^{a_0}$$

$$\equiv (1+x^p)^{m_1}(1+x)^{a_0}$$

$$= (\sum_{n_1=0}^{m_1} C_{m_1}^{n_1} x^{n_1 p})(\sum_{b_0=0}^{a_0} C_{a_0}^{b_0} x^{b_0})$$

$$\equiv \sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{b_0=0}^{a_0} C_{m_1}^{n_1} C_{a_0}^{b_0} x^{n_1 p + b_0} (mod\ \ p) .$$

而 $(1+x)^m = (1+x)^{m_1 p + a_0}$ ，故 $C_m^n \equiv C_{m_1}^{n_1} C_{a_0}^{b_0} (mod\ \ p)$.

具体实现：O(log(n)p×p×log(2)p) = O(plog(2)n)

```
#include <iostream>

using namespace std;

typedef long long LL;

//快速幂用于求逆元
LL qmi(int a, int k, int p) {
    LL res = 1%p;

    while (k) {
        if (k & 1) res = res*a%p;
        k >>= 1;
        a = (LL)a*a%p;
    }

    return res;
}

//求C(a, b, p)
int C(int a, int b, int p) {
    if (b > a) return 0;

    int res = 1;
    for (int i=1, j=a; i<=b; i++, j--) {
        res = (LL)res*j%p;
        res = (LL)res*qmi(i, p-2, p)%p;
    }

    return res;
}

```

```
//lucas定理
int lucas(LL a, LL b, int p) {
    if (a<p && b<p) return C(a, b, p);
    // C(a, b) = C(a mod p, b mod p) * C(a / p, b / p) (mod p)
    return (LL)C(a%p, b%p, p)*lucas(a/p, b/p, p)%p;
}

int main(void) {
    int n;
    scanf("%d", &n);

    while (n--) {
        LL a, b;
        int p;
        scanf("%lld%lld%d", &a, &b, &p);

        printf("%d\n", lucas(a, b, p));
    }

    return 0;
}
```

求组合数4

范围

- 输入 a, b,求 C(a, b) 的值
- 1 ≤ b ≤ a ≤ 5000

思路

- 将C(a, b)分解质因数

  C(a, b) = a! / (b! (a- b)!)

  优化：对于一个质因数P，用分子的指数减去分母的指数即可得最终指数

- **a! 中包含p（质因子）的个数 = a/p + a/p^2 + ... + a/p^n (当p^n>a截止) （/表示下取整)**

  证明：

  a/p表示1~a中p的倍数个数（从每个p的倍数中拿出一个质因子，可能存在漏网之鱼，例如p^2中有两个p，a/p表示只从其中取了一个p），a /p^2表示1~a中p ^ 2的倍数个数（从每个p^2的倍数中继续拿出一个质因子，仍可能存在漏网之鱼，继续重复该过程）..., a /p^n表示1~a中p ^ n的倍数个数 。

  从单独每个数角度考虑，若1~a!中某数ai中含有k个质因子p，则在a/p会被计算1次，a/p^2会被计算1次，... a/p^k会被计算1次，总共会被计算k次，不重不漏

```
//求出n!中某个质因子p的个数
int get(int n, int p) {
    int res = 0;
    //计算公式 a!中包含p的个数 = a/p + a/p^2 + … + a/p^n (当a/p^n==0截止)
    //第一次循环 res += n/p
    //第二次循环 res += n/p^2
    //...
    while (n) {
        res += n/p;
        n /= p;
    }

    return res;
}
```

- 实现高精度乘法

具体实现

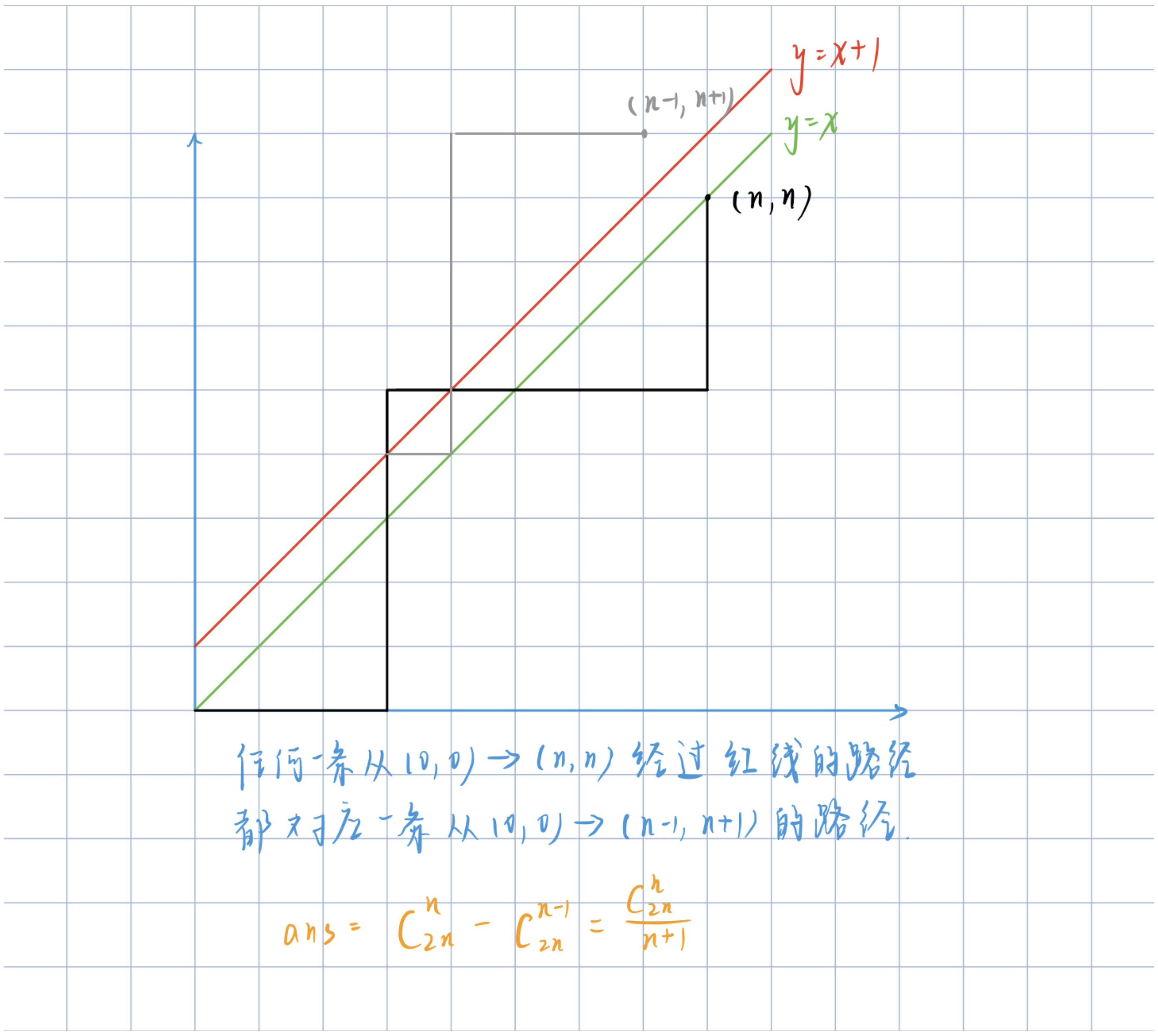
```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int N = 5010;

int primes[N], cnt;
bool st[N];
int sum[N];
```

```cpp

//线性筛
void get_primes(int n) {
    for (int i=2; i<=n; i++) {
        if (!st[i])
            primes[cnt++] = i;

        for (int j=0; primes[j]<=n/i; j++) {
            st[primes[j]*i] = true;
            if (i%primes[j] == 0) break;
        }
    }
}

//求出n!中某个质因数p的个数
int get(int n, int p) {
    int res = 0;
    //计算公式 a!中包含p的个数 = a/p + a/p^2 + … + a/p^n (当a/p^n==0截止)
    //第一次循环 res += n/p
    //第二次循环 res += n/p^2
    //...
    while (n) {
        res += n/p;
        n /= p;
    }

    return res;
}

//高精度乘法
vector<int> mul(vector<int> &A, int b) {
    vector<int> C;

    for (int i=0, t=0; i<A.size() || t; i++) {
        if (i < A.size()) t += A[i]*b;
        C.push_back(t%10);
        t /= 10;
    }

    while (C.size()>1 && C.back()==0) C.pop_back();

    return C;
}


int main(void) {
    int a, b;
    scanf("%d%d", &a, &b);

    get_primes(a);

    //对小于a的每一个质数，处理出其指数
    for (int i=0; i<cnt; i++) {
        int p = primes[i];
        sum[i] = get(a, p) - get(b, p) - get(a-b, p);
    }

    //保存结果
    vector<int> res;
    res.push_back(1);

    //将所有质数相乘
    for (int i=0; i<cnt; i++)
        for (int j=0; j<sum[i]; j++)
            res = mul(res, primes[i]);

    for (int i=res.size()-1; i>=0; i--) printf("%d", res[i]);
    puts("");

    return 0;
}
```

卡特兰数

- e1：满足条件的01序列
    - **C(2n, n) - C(2n, n-1) = 1/(n+1) C(2n, n)（卡特兰数）**

      证明：等式左半部分画图进行理解证明，参见《ACWing数学知识4》 2:00




```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int mod =1e9+7;

//快速幂
LL qmi(int a, int k, int p) {
    LL res = 1%p;

    while (k) {
        if (k & 1) res = res*a%p;
        k >>= 1;
        a = (LL)a*a%p;
    }

    return res;
}

int main(void) {
    int n;
    scanf("%d", &n);

    int a = 2*n, b = n;
    int res = 1;

    //计算C(2n, n)
    for (int i=1, j=a; i<=b; i++, j--) {
        res = (LL)res*j%mod;
        res = (LL)res*qmi(i, mod-2, mod)%mod;
    }

    //计算(1/(n+1))*C(2n, n) （卡特兰数）
    res = (LL)res*qmi(n+1, mod-2, mod)%mod;

    cout << res;

    return 0;
}
```