Lesson1

动态规划大纲

- 常用模型：背包
- 不同类型的DP：线性DP，区间DP，计数类DP，数位统计DP，状压DP，树形DP

背包问题

DP分析方式：从集合角度进行理解

- **状态表示**：用几维变量表示状态（例如背包问题用两维f(i, j)表示）
  - **集合**：例如背包问题是所有选法的集合，以背包问题分析，f(i, j)属性对应的集合满足的条件为
    - 只从前 i 个物品中选
    - 总体积 ≤ j
  - **属性**：集合的属性，一般为以下三种
    - 最大值Max（求最大值时，子集划分不重原则可以进行放松）
    - 最小值Min
    - 元素数量
- **状态计算**：**如何一步步计算出每一个状态。**对于背包问题，如何计算出每个f(i, j)，问题答案为f(N, V)。
  - **集合划分**： **把当前的集合划分为若干个更小的子集，使得每一个子集都可用前面已经计算出的状态表示。**

    对于背包问题，将f(i, j)分为两大子集，第一类为不含i的选法，第二类为包含i的选法。第一类子集从1~i中选，总体积小于j，且不包含i，可以简化为从1 ~ i-1中选，总体积不超过j，所以该子集的最大价值可用**f(i-1, j)**表示；第二类子集从1~i中选，总体积小于j，且每种选法都包含i，因此我们可以去掉第二类子集所包含的每种选法中的i，且同时去掉i不会导致**原子集**中价值最大的选法发生变化，去掉之后的集合的最大价值可用**f(i-1, j-vi)**表示。且原子集最大价值可用 **f(i-1, j-vi)+wi**表示（曲线救国）。

    因此 **f(i, j) = max(f(i-1, j), f(i-1, j-vi)+wi)**

    子集划分原则

    - 不重
    - **不漏**

DP优化：一般是对DP代码或者DP计算方程做等价变形

01背包问题

每件物品最多只能用一次

具体实现1：朴素方法

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1010;

int n, m;
int v[N], w[N];     //v[i]表示第i件物品的体积，w[i]表示第i物品的价值
int f[N][N];    //f[i][j]表示分析中满足i,j限制条件集合的最大值属性

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    //根据题意，从1开始输入
    for (int i=1; i<=n; i++) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    //根据实际意义f[0][0~m] = 0，全局变量默认为0，所以从1开始
    for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=0; j<=m; j++) {
            f[i][j] = f[i-1][j];
            if (j >= v[i]) f[i][j] = max(f[i][j], f[i-1][j-v[i]]+w[i]);
        }

    cout << f[n][m] << endl;

    return 0;
}
```

具体实现2：DP优化

能优化的两个条件

- 状态转移方程中，f(i)只用到了f(i-1)，因此可以用滚动数组优化（仍为2维）
- **转移方程右侧的 j 与 j-v[i] 都小于等于 j，因此可以进一步用一维数组进行计算（逆序计算）**

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1010;

int n, m;
int v[N], w[N];     //v[i]表示第i件物品的体积，w[i]表示第i物品的价值
int f[N];

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    //根据题意，从1开始输入
    for (int i=1; i<=n; i++) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    //根据实际意义f[0][0~m] = 0，全局变量默认为0，所以从1开始
    for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=m; j>=v[i]; j--)
            //若从小向大遍历，则该方程等价与f[i][j] = max(f[i][j], f[i][j-v[i]]+w[i])
            //所以应该从大到小遍历
            f[j] = max(f[j], f[j-v[i]]+w[i]);

    cout << f[m] << endl;

    return 0;
}
```

完全背包问题

每件物品有无限个

分析思路

- 状态表示：f[i, j]（f[i, j]存储属性）
  - 集合：只考虑前i个物品，且总体积不大于j的所有选法
  - 属性：最大值
- 状态计算：集合的划分
  - 对于f(i, j)，按第i个物品选多少个将集合划分为若干个子集（0, 1, 2, 3,..., k）

    因此，选k个第i个物品的子集的最大值属性可用**f[i-1, j-k * v[i]]+k * w[i]**表示

    状态转移方程：f[i, j] = Max(f[i, j], f[i-1, j - k * v[i]] + k * w[i])

具体实现：朴素写法，时间复杂度较高（TLE，初级）

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1010;

int n, m;
int v[N], w[N];
int f[N][N];

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    for (int i=1; i<=n; i++) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=0; j<=m; j++)
            for (int k=0; k*v[i]<=j; k++)    //依据选i的个数，划分为k个子集
                f[i][j] = max(f[i][j], f[i-1][j-k*v[i]]+k*w[i]);

    cout << f[n][m];

    return 0;
}
```

具体实现：优化1（降低时间复杂度，高级）

f[i, j] = Max(f[i-1, j], f[i-1, j-v]+w, f[i-1, j-2v]+2w, f[i-1, j-3v]+3w, ...) （用v, w分别代替v[i], w[i]）

f[i, j-v] = Max(f[i-1, j-v],   f[i-1, j-2v]+w,   f[i-1, j-3v]+2w, ...)

所以Max(f[i-1, j-v]+w, f[i-1, j-2v]+2w, f[i-1, j-3v]+3w, ...) = f[i, j-v] + w

所以   **f[i, j] = Max(f[i-1, j], f[i, j-v[i]]+w[i])**

对比01背包   **f[i, j] = Max(f[i-1, j], f[i-1, j-v[i]]+w[i])**

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1010;

int n, m;
int v[N], w[N];
int f[N][N];

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    for (int i=1; i<=n; i++) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=0; j<=m; j++) {
            f[i][j] = f[i-1][j];
            if (j>=v[i]) f[i][j] = max(f[i][j], f[i][j-v[i]]+w[i]);
        }

    cout << f[n][m];

    return 0;
}
```

具体实现：进一步优化（降维，优化时间复杂度，终极）

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1010;

int n, m;
int v[N], w[N];
int f[N];

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    for (int i=1; i<=n; i++) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=v[i]; j<=m; j++)      //从小到大循环，与01背包唯一区别
            f[j] = max(f[j], f[j-v[i]]+w[i]);

    cout << f[m];

    return 0;
}
```

多重背包问题

第 i 个物品有 Si 个

分析思路

- 状态表示：f[i, j]（f[i, j]存储属性）
    - 集合：只考虑前i个物品，且总体积不大于j的所有选法
    - 属性：最大值
- 状态计算：集合划分
    - 对于f(i, j)，按第i个物品选多少个将集合划分为若干个子集（0, 1, 2, 3,..., s[i]）

      状态转移方程：f[i, j] =max(f[i, j]，f[i-1, j - k * v[i]] + k * w[i])，且(k<=s[i])

具体实现：朴素版本

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 110;

int n, m;
int v[N], w[N], s[N];
int f[N][N];

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    for (int i=1; i<=n; i++) scanf("%d%d%d", &v[i], &w[i], &s[i]);

    for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=0; j<=m; j++)
            for (int k=0; k<=s[i] && k*v[i]<=j; k++)
                f[i][j] = max(f[i][j], f[i-1][j-k*v[i]]+k*w[i]);

    cout << f[n][m];

    return 0;
}
```

具体实现：优化方案（位运算优化）

优化思路：

- 不能使用完全背包的优化问题

  f[i, j] = Max(f[i-1, j], f[i-1, j-v]+w, f[i-1, j-2v]+2w, ... , f[i-1, j-sv]+sw) （用v, w分别代替v[i], w[i]）

  f[i, j-v] = Max(f[i-1, j-v], f[i-1, j-2v]+w, ..., f[i-1, j-sv]+(s-1)w, f[i-1, j-(s+1)v]+sw)

  且Max(f[i-1, j-v], f[i-1, j-2v]+w, ..., f[i-1, j-sv]+(s-1)w) 在给定f[i, j-v]时并不能计算出来，即Max不能做减法。因此不能采用完全背包的优化方式

- **二进制优化**

  思考： 假设s[i]=1023，是否需要枚举0~1023？有无可能用更高效方式进行枚举

  把第i个物品进行打包，每组i的数量分别为：1, 2, 4, 8, ..., 512 （一共10组），且每组最多只能选一次。因此，我们可以利用这10组拼凑出0~1023中的任意一个数，且每组最多只选一次。将每组数量转为二进制表示可以很容易证明这一结论。进一步，将每一组打包后的包裹看成是01背包中的物品，即用10个互不相同的新物品来表示原来的第i个物品。因此时间复杂度降为O(NVlogS)

  例如s=200，则可以将物品打包为：1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 73，即一共7组。

  证明： 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64可以拼凑出0~127中任意一个数，且0 ~ 127中每个数加上73即可拼凑出73~200中任意一个数，所以从0 ~ 200之内的数都可以被该7组数凑出来，且每一组最多只用一次。

  推广：对于任意一个S，将其分为1, 2, 4, 8, ..., 2^k，k是满足1+2+..+2^k <= S的最大正整数，最后补上

  C = S-(1+2+..+2^k) < 2^(k+1)。这些数可以凑出0~S中任意一个数，且每个数最多只使用一次。

  证明：

  首先1, 2, ..., 2^k可以凑出0~(2^(k+1))-1中任意一个数（二进制性质）

  对于1, 2, ..., 2^k，每个数加上C，则可以凑出C ~ (2^(k+1)) -1+C中任意一个数，且 (2^(k+1)) -1+C = S,

  且C <= 2^(k+1)-1，所以[0, (2^(k+1))-1] U [C, (2^(k+1)) -1+C] = [0, S]

- **最终优化思路**：对每一个物品i，将其划分为 S[i] - > logS[i] 组物品，拆分之后进行01背包问题求解，因此时间复杂度从O(NVS)降为O(NVlogS)。

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

// N ~ 1000 * log(2000) = 11000
const int N = 15000, M = 2010;

int n, m;
int v[N], w[N], cnt;     //cnt代表将每种物品分组后，转换为01背包问题里物品的总个数
int f[M];    //降维后01背包问题

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    //通过二进制优化将多重背包转换为01背包问题
    for (int i=1; i<=n; i++) {
        int a, b, s;     //a表示容量，b表示价值，s表示数量
        scanf("%d%d%d", &a, &b, &s);

```

```
        //将s[i]件物品划分为log(s[i])上取整组
        int k = 1;
        while (k <= s) {
            cnt++;
            v[cnt] = k*a;
            w[cnt] = k*b;
            s -= k, k *= 2; //s减去k，k倍增
        }

        // 若s还有剩余，则补上C = S-(1+2+..+2^k)
        if (s) {
            cnt++;
            v[cnt] = s*a;
            w[cnt] = s*b;
        }
    }

    //01背包问题求解
    for (int i=1; i<=cnt; i++)
        for (int j=m; j>=v[i]; j--)
            f[j] = max(f[j], f[j-v[i]]+w[i]);

    cout << f[m] << endl;

    return 0;
}
```

分组背包问题

物品有n组，每组物品里有若干种物品，每种若干个，且每组里面最多只能选一个物品

分析思路

- 状态表示：f[i, j]（f[i, j]存储属性）
  - 集合：只从**前i组**物品中选，且总体积不大于j的所有选法
  - 属性：最大值（Max）
- 状态计算：集合的划分
  - 对于f(i, j)，**依据第i组物品选哪个或者不选来划分子集。**

    若不选，则为**f(i-1, j)**，若选择第i组里第k个，则为**f(i-1, j-v[i, k])+w[i, k])**

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 110;

int n, m;
int v[N][N], w[N][N], s[N];
int f[N];

int main(void) {
    scanf("%d%d", &n, &m);

    for (int i=1; i<=n; i++) {
        scanf("%d", &s[i]);
        for (int j=0; j<s[i]; j++)
            scanf("%d%d", &v[i][j], &w[i][j]);
    }

    for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=m; j>=0; j--)
            //若不选，则降维后f[j] = f[j]，此处省略不写
            for (int k=0; k<s[i]; k++) //枚举选第i组中哪一个
                if (j >= v[i][k]) f[j] = max(f[j], f[j-v[i][k]]+w[i][k]);

    cout << f[m] << endl;

    return 0;
}
```

背包九讲地址：https://www.bilibili.com/video/BV1qt411Z7nE