微分方程数值解法 第三次实验

15336204 邢剑飞 信息与计算科学

一、问题

求解二维偏微分方程：

$$\begin{gathered} -\Delta u = f \\ where\ u:\ P \to \mathbb{R},\ P \subseteq \mathbb{R}^2, \\ u(x) = g(x), for\ x \in \partial P \end{gathered} \tag{1}$$

为简化问题，求解以下方程：

$$\begin{gathered} -\Delta u(x,y) = f \\ where\ f = 8\pi^2 \cdot sin(2\pi \cdot x)sin(2\pi \cdot y), \\ x \in [0,1], y \in [0,1] \\ u(x,y) = 0\ on\ \partial P \end{gathered} \tag{2}$$

其精确解为：

$$u = sin(2\pi \cdot x)sin(2\pi \cdot y) \tag{3}$$

二、实验原理和实现分析

与一维情况类似，利用有限元方法

$$\begin{gathered} \int -\Delta u \cdot v = \int f \cdot v \Rightarrow \\ \int \nabla u \cdot \nabla v = \int f \cdot v \end{gathered} \tag{4}$$

设基函数为φ_i，则有：

$$u(x,y) = \Sigma_i u_i \cdot \varphi_i \tag{5}$$

将上式代回(4)，令$v = \varphi$，则可以得到：

$$\begin{gathered} \Sigma_j u_j \cdot a(\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i),\ i = 1, 2, \ldots, N \\ where\ a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_P \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j, \\ (f, \varphi_i) = \int_P f \cdot \varphi_i dxdy \end{gathered} \tag{6}$$

实现时，利用单元刚度矩阵：将区域P剖分，假设使用正方形网格，其中第i个网格上的基函数分别为 $\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, \varphi_i^{(3)}, \varphi_i^{(4)}$

将网格映射到单位单元上，基函数命名为：$\psi^{(1)}(\xi,\eta),\psi^{(2)}(\xi,\eta),\psi^{(3)}(\xi,\eta),\psi^{(4)}(\xi,\eta)$

显然有以下关系成立：

$$
\begin{gathered}
\psi^{(1)}(0,0)=1,\psi^{(1)}(1,0)=\psi^{(1)}(1,1)=\psi^{(1)}(0,1)=0;\\
\psi^{(2)}(1,0)=1,\psi^{(2)}(0,0)=\psi^{(2)}(1,1)=\psi^{(2)}(0,1)=0;\\
\psi^{(3)}(1,1)=1,\psi^{(3)}(1,0)=\psi^{(3)}(0,0)=\psi^{(3)}(0,1)=0;\\
\psi^{(4)}(0,1)=1,\psi^{(4)}(1,0)=\psi^{(4)}(1,1)=\psi^{(4)}(0,0)=0;
\end{gathered}
\tag{7}
$$

故可表示为：

$$
\begin{gathered}
\psi^{(1)}(\xi,\eta)=(1-\xi)\cdot(1-\eta)=1-\xi-\eta+\xi\cdot\eta,\\
\psi^{(2)}(\xi,\eta)=\xi\cdot(1-\eta),\\
\psi^{(3)}(\xi,\eta)=\xi\cdot\eta,\\
\psi^{(4)}(\xi,\eta)=(1-\xi)\cdot\eta
\end{gathered}
\tag{8}
$$

求单元刚度矩阵：

$$
a(\psi^{(1)},\psi^{(1)})=\int_{P_0}(1-\xi)^2+(1-\eta)^2d\xi d\eta=\frac{2}{3}
\tag{9}
$$

类似可得到：

$$
\begin{gathered}
a(\psi^{(2)},\psi^{(2)})=a(\psi^{(3)},\psi^{(3)})=a(\psi^{(4)},\psi^{(4)})=\frac{2}{3}\\
a(\psi^{(1)},\psi^{(2)})=a(\psi^{(2)},\psi^{(3)})=a(\psi^{(3)},\psi^{(4)})=a(\psi^{(1)},\psi^{(4)})=-\frac{1}{6}\\
a(\psi^{(1)},\psi^{(3)})=a(\psi^{(2)},\psi^{(4)})=-\frac{1}{3}
\end{gathered}
\tag{10}
$$

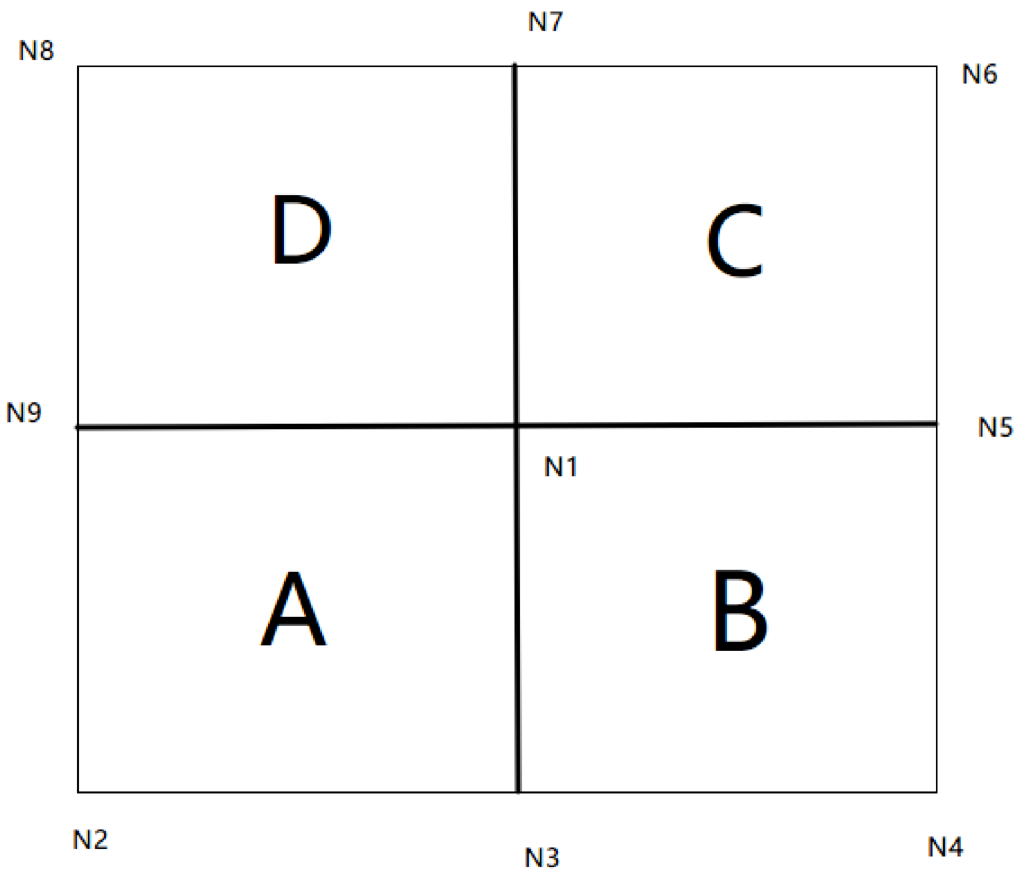
再由矩阵对称性便可以得到整个单元刚度矩阵，得到

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\
-\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\
-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{bmatrix}
\tag{11}
$$

通过仿射变换将单元网格映射到分割的某个网格，映射为：

$$
\begin{gathered}
T:(\xi,\eta)\to(x,y)\\
s.t.\ \xi=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},\\
\eta=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}
\end{gathered}
\tag{12}
$$

之后，将单元刚度矩阵组装成总体刚度矩阵，以某个节点为例：



对于N_1来说，对其产生影响的网格只有其周围的八个节点，分别标记为$N_2 - N_9$。采用一维类似的影响叠加的方法，有

$$\Sigma_{i=1}^{9} a_i^{N_1} \cdot u_i = \Sigma_{A,B,C,D} \int f \cdot \psi_\Omega^{N_1} d\xi d\eta \tag{13}$$

其中$\psi_\Omega^{N_1}$表示区域Ω在节点N_1的基函数，由于其他区域均不会对N_1产生影响，Ω只可以取A, B, C, D

于是有如下成立：

$$\begin{aligned} a_1^{N_1} &= \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} \\ a_2^{N_1} &= a_4^{N_1} = a_6^{N_1} = a_8^{N_1} = -\frac{1}{3} \\ a_3^{N_1} &= a_5^{N_1} = a_7^{N_1} = a_9^{N_1} = -\frac{1}{6} \cdot 2 = -\frac{1}{3} \end{aligned} \tag{14}$$

因此，对于整体来讲，有

$$\frac{1}{3} \cdot (8u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 - u_7 - u_8 - u_9) = \int f \cdot (\psi_A^{(3)} + \psi_B^{(4)} + \psi_C^{(1)} + \psi_D^{(2)}) d\xi d\eta \tag{15}$$

至于存储方式，由于网格节点是二维的，但每个节点在总体刚度矩阵中只有一行，因此需要进行一次角标的映射。规则如下：

N_{ij}表示第i行第j列的节点。其在总体刚度矩阵中的序号t为：

$$t_{ij} = i \cdot N + j \tag{16}$$

其中，N为行剖分的区域数量。

$N_{i_2 j_2}$对$N_{i_1 j_1}$节点的影响可以表示为刚度矩阵的元素$A[t_{11}, t_{22}]$。下面分为内部节点和边界节点两方面进行考虑：

1. 内部节点：

   当且仅当$|i_1 - i_2| \leq 1, |j_1 - j_2| \leq 1$时，两节点才会有影响，其他情况不相邻，故不会产生影响，对应刚度矩阵元素为0；对于互相影响的节点，将矩阵对应元素值赋为系数即可。

2. 边界节点：

   边界节点满足的条件为：$i = 0$，$i = N - 1$或$j = 0, j = N - 1$。对于这些位置，由于边界的约束条件

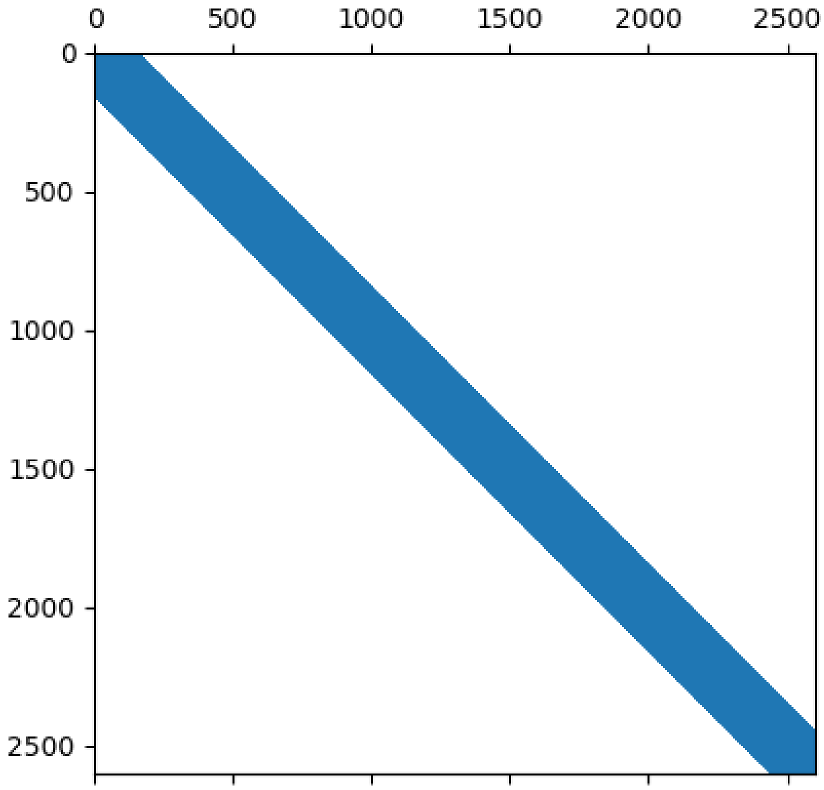
   $$u(p) = g(p),\ where\ p \in \partial P \tag{17}$$

   只要令刚度矩阵对应元素赋值为1，右端赋值为$g(p)$，也就是

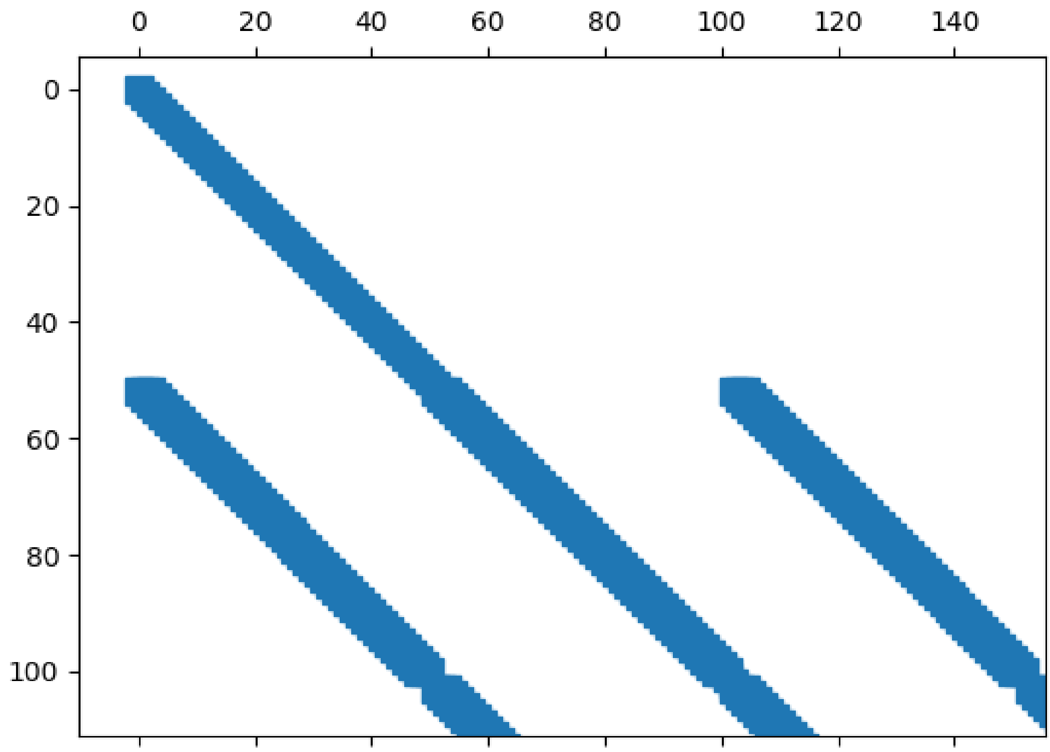
   $$\begin{gathered} A[i_p \cdot N + j_p][i_p \cdot N + j_p] = 1, \\ F[i_p \cdot N + j_p] = g(p) \end{gathered} \tag{18}$$

   即可。

   矩阵的图形化描述如图：



总体



一个局部

在实现过程中，由于刚度矩阵过大，以标准的矩阵形式保存消耗较大，不可取。可以利用稀疏矩阵保存。问题最终转化为解以下方程：

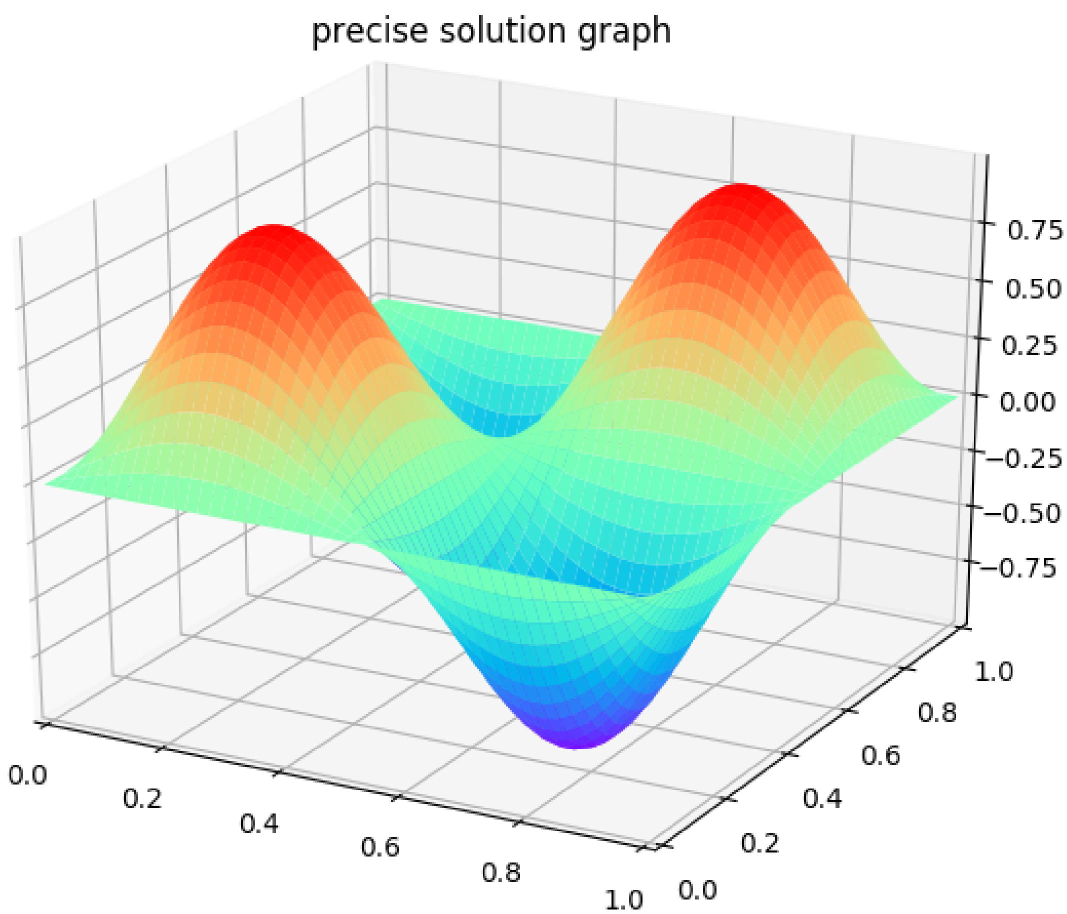
$$
\begin{aligned}
&A \cdot u = F \\
&where\ A\ satisfy\ (17)(18) \\
&F_i\ satisfy\ (15) RHS\ for\ p_i \in P \backslash \partial P,\ (18)\ for\ p_i \in \partial P
\end{aligned}
\tag{19}
$$

三、实验过程和结果

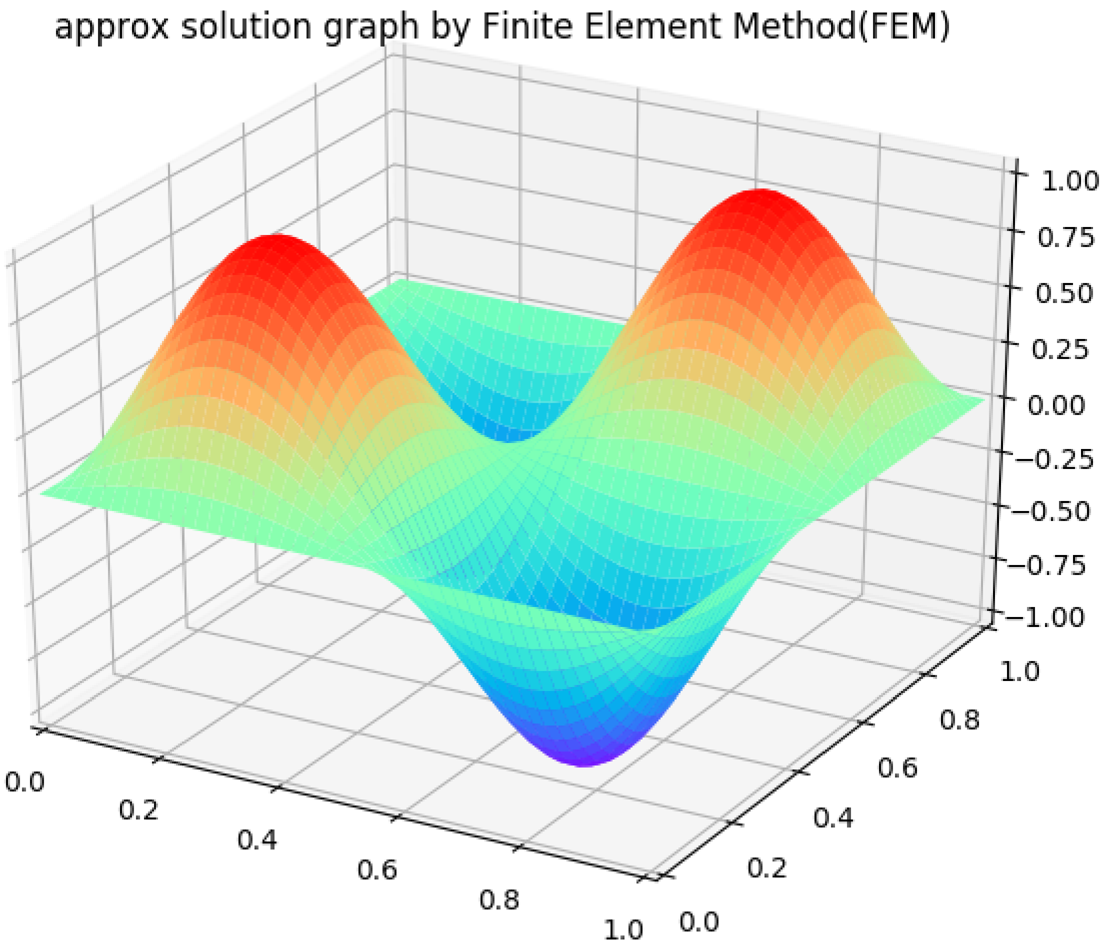
1. 实验环境：Linux 4.13.0-39-generic x86_64 GNU/Linux，Python version 3.6.3。其他依赖包及版本在根目录下requirement.txt中定义。
2. 实验结果：

   利用泊松方程测试，剖分网格选为矩形网格，每个维度剖分为50份。

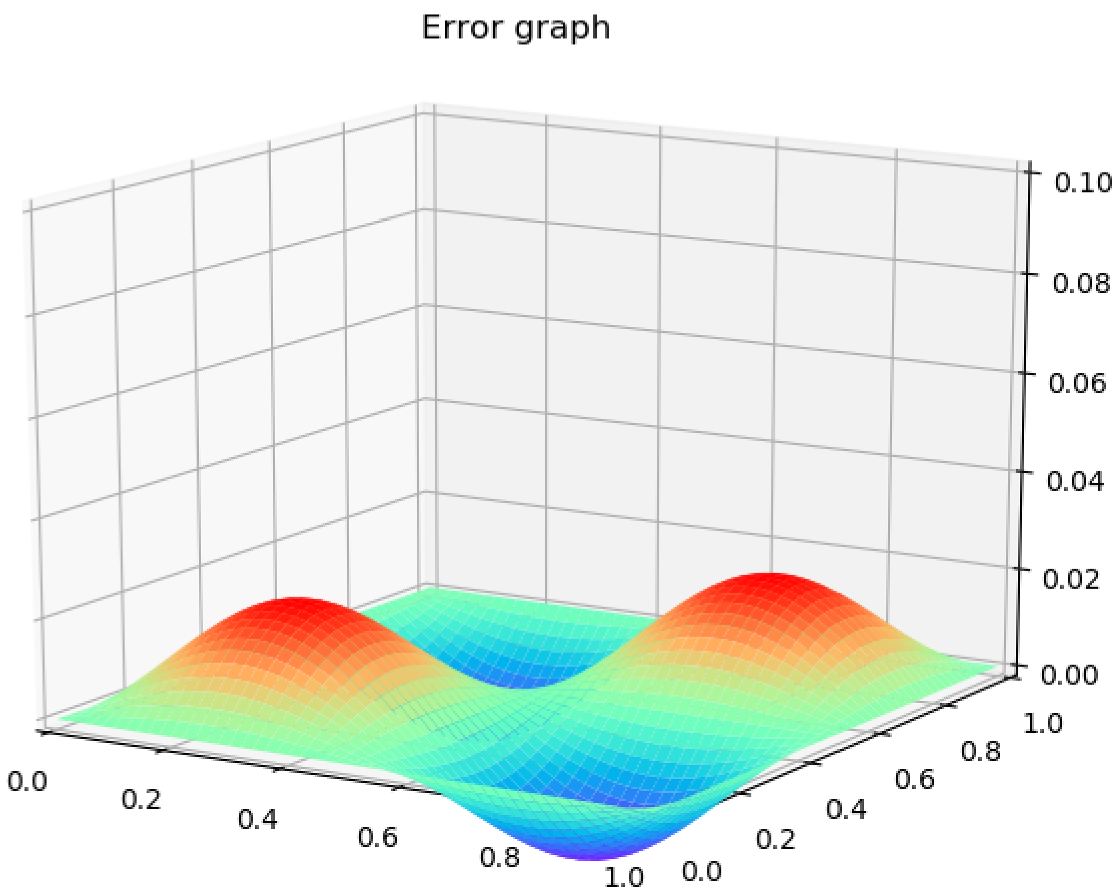
   下图为精确结果（3）的图像



下图为利用有限元方法求得的结果的图像：



下图为二者的误差分布图像：



平均误差计算结果为0.00830287883352228，拟合程度比较好。

备注：剖分为50份在绘图时压力可能较大，可以选择减少剖分网格数量来加速运行。网格数量定义在/index.py中。

测试时可能需要修改的参数：

/function.py中的方程RHS，u的精确解

/index.py中的剖分网格数

程序运行方式：

1. 在根目录下打开终端，输入

```
pip install -r requirement.txt
```

安装所需要的依赖包。

2. 输入

```
python index.py
或者
python3 index.py
```

程序会依次弹出 精确解图像，有限元方法解图像，误差图像。每个图像需要手动关闭，关闭之前可以进行操作，但程序不会继续运行，每次只弹出一个。（所以每个图像看完之后直接关闭这个图像就可以了，程序会继续向下执行。

2018年 04月 28日 星期六 09:33:15 CST