微分方程数值解法 第一次 实验报告

信息与计算科学
15336204
邢剑飞

一、问题

利用有限元方法解微分方程

$-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f$

$where\ u(a) = 0,\ u'(b) = 0$

二、理论分析

为方便表示，用以下方程代替上述微分方程

$-(pu')' + qu = f$

两端同时乘v,化为变分形式

$\int_a^b (-p'u' - pu'' + qu)vdx = \int_a^b fvdx$

$-\int_a^b p'u'vdx - \int_a^b pu''vdx + \int_a^b quvdx = \int_a^b fvdx$

利用分部积分公式，进一步化简

$-\int_a^b p'u'vdx - (u'pv|_a^b - \int_a^b (pv)'u'dx) + \int_a^b quvdx = \int_a^b fvdx$

$-\int_a^b p'u'vdx - u'pv|_a^b + \int_a^b p'u'vdx + \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b quvdx = \int_a^b fvdx$

$-u'pv|_a^b + \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b quvdx = \int_a^b fvdx$

代入边界条件得

$$\int_a^b pu'v'dx+\int_a^b quvdx=\int_a^b fvdx$$

由插值公式知道

$$u(x)=\Sigma_{i=1}^n u_i\varphi_i(x)$$

其中，$\varphi_i(x)$为插值基函数

将上式代入原式中，令$v(x)=\varphi(x)$，得到

$$\int_a^b p(\Sigma_{i=1}^n u_i\varphi_i(x))'\varphi_j'(x)dx+\int_a^b q\Sigma_{i=1}^n u_i\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\int_a^b f\varphi_j(x)dx$$

整理得

$$\Sigma_{i=1}^n u_i(\int_a^b p\varphi_i'\varphi_j'dx+\int_a^b q\varphi_i\varphi_j dx)=\int_a^b f\varphi_j dx$$

因此，函数的解可以表示为

$$Au=F$$

其中，

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$$

$$F=((f,\varphi_1),(f,\varphi_2),\cdots,(f,\varphi_n))^T$$

$$A=A^1+A^2$$

A_1为刚度矩阵，A_2为质量矩阵，表示为

$$A_{ji}^1=\int_a^b p\varphi_i'\varphi_j'dx$$

$$A_{ji}^2=\int_a^b q\varphi_i\varphi_j dx$$

A为三对角矩阵，一定是可逆的，计算时只要求解以下方程

$$u=A^{-1}F$$

便可以得到$u(x)$在x_i处的近似值

三、实验相关说明

1. 开发环境: Linux version 4.10.0-42-generic

2. 语言: Python >= 3.5.0

3. 目录树：

```
.
├── static/ # 静态文件目录
├── config.conf # 配置文件，包含具体参数，如目标端点值，步长等
├── config_parser.py # 配置文件驱动
├── function.py # 函数信息配置，运行时需要手动进行修改
├── index.py # 入口文件
├── integration.py # 功能：数值积分
├── README.md # 运行指南
└── requirement.txt # 依赖包记录
```

全部实验代码存放于

https://github.com/Jianfei2333/difference_equation

四、运行说明

运行前，可以手动调整各个函数及参数的值。函数存放于/function.py中，参数存放于/config.conf中。

其中函数配置部分包括待求函数真实表达式，其一阶、二阶导数表达式；$p(x)$, $q(x)$表达式及$p(x)$的一阶导数表达式。这些函数需要同步进行(手动)修改，如果不

匹配可能导致很糟糕的结果。其他部分通过调用方式使用上面的函数，不需要进行手动的修改。

由于版本的关系，一些依赖包和语法在Python2.7及以下不能正常运行，请确保在Python3.5及以上的环境下使用pip安装依赖和运行程序。

五、实验结果

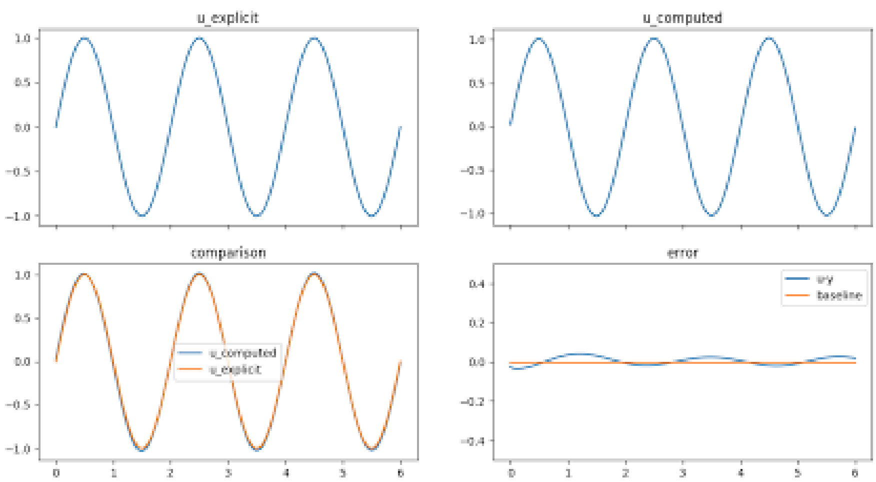
使用的测试函数为

$$u(x) = sin(\pi x)$$

$$p(x) = x^2$$

$$q(x) = sin(e^x)$$

得到结果如下图：



图左上：$u(x)$实际图像

图右上：经过解微分方程得到的$u(x)$图像

图左下：两个图像合并于同一坐标系下图像

图右下：误差图像($u-y$关于x)

拟合度较好，平均误差值约为0.0063

...一些题外话

Python环境真的难搭Orz，各种版本冲突语法规则冲突，如果实在不能运行的话可以发邮件给我2333，邮箱：xjf999999@hotmail.com

BTW虽然感觉有点紧张但是助教姐姐依然很努力地在讲课啦！其实讲得非常清楚了(虽然大家好像都没有什么反应...其实所有课都是这个状况2333 反正希望助教姐姐以后也一定要加油啦！(≧∇≦)ﾉ

2018年**03**月**31**日 星期六 **17:54:13 CST**

算法设计：

算法核心为解一个矩阵方程

$Au=F$

而全过程中最主要的部分是刚度矩阵A的设计。可以利用单元刚度矩阵拼接的方式获得A，具体如下：

1. 如何获得单元刚度矩阵

> 假设我们使用一维k次元，其基函数表达为φ_{il}，其中$i=1,2,\cdots,n$，表示$[x_{i-1},x_i]$; $l=0,1,\cdots,k$，表示$[x_{i-1},x_i]$上第l个小分点对应的基函数，其仿射变换到参考区间$[0,1]$上，参考区间的基函数为:

> $\varphi_l^{[0,1]}(\xi)=\Pi_{t=0,t\neq l}^k\frac{\xi-\xi_t}{\xi_l-\xi_t}$,其中$\xi_l=\frac{l}{k}$

> 仿射变换为：

> $\xi=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$

> 将其带回基函数便可得到$\varphi_{il}^{[x_{i-1},x_i]}(x)$的表达式

> 单元刚度矩阵的方程表示为$K_iu=F_i$,其中

> $F_i = ((f, \varphi_{i0}), (f, \varphi_{i1}), \cdots, (f, \varphi_{ik}))^T$

2. 拼接规则

> 首先考虑自由度。将$[c, d]$剖分为了n个区间，每个区间上有$k+1$个基函数，所以首先有$n(k+1) = nk + n$个自由度。再考虑其他限制条件

> 1. 边界值已经限定

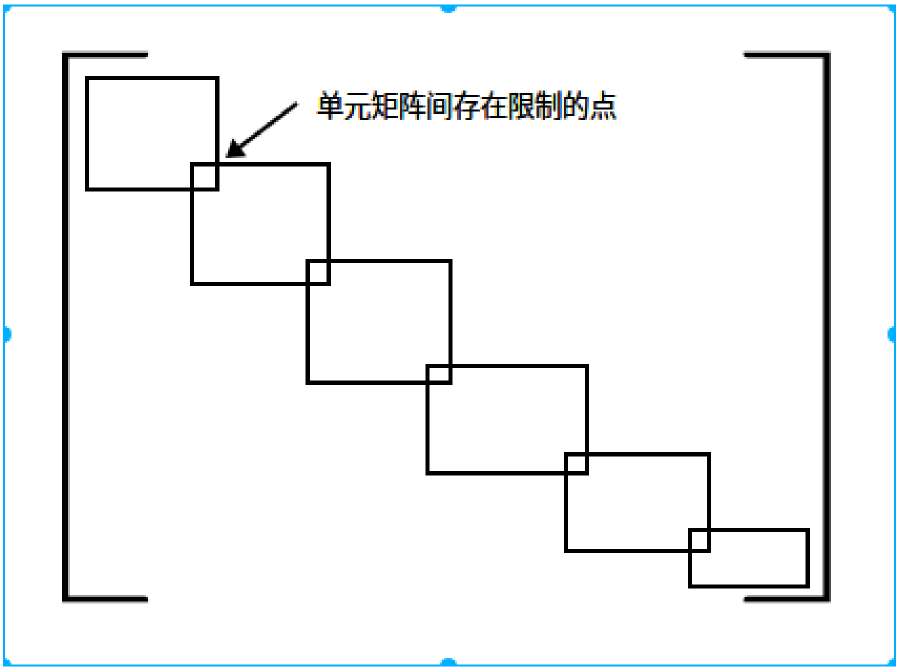
> 2. 相邻区间的首末端点重合，所以要求相邻区间计算的端点值一致

> 由以上两个条件得出$n+1$个限制，因此总自由度为$nk-1$

> 再考虑拼接问题。约定$x_j, j = 1, \cdots, N(= nk-1)$为实际的剖分点,显然$x_{tk}, t = 1, \cdots, k-1$为第一层剖分的分点。由于限制条件在这些点上，其他点并不存在限制，所以对于任意$j \neq tk$的点，只有它所在的一层剖分区间上的基函数会对其产生影响，而其他区间不会，所以这一行其他区间对应的系数显然为0。

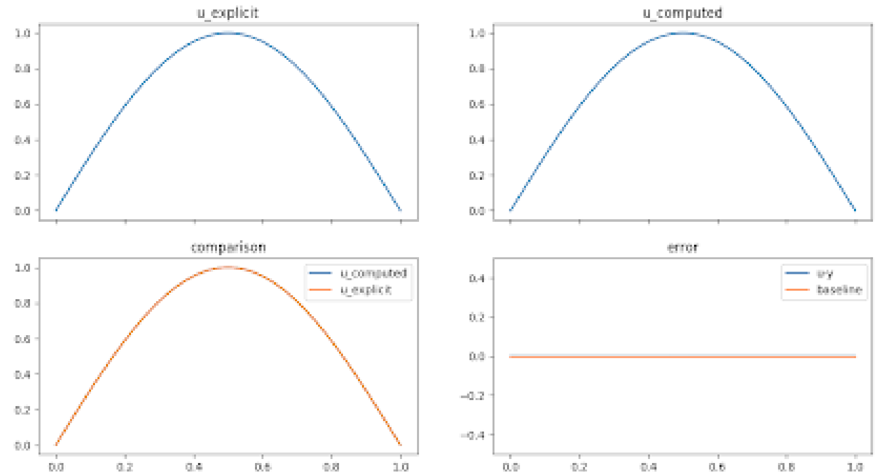
> 对于$j = tk$的点，不妨表示为x_i，则有来自$[x_{i-1}, x_i]$的一个方程$\lambda_1 u = (f, \varphi_{ik})$，来自$[x_i, x_{i+1}]$的一个方程$\lambda_2 u = (f, \varphi_{(i+1)0})$。要使二者统一，只需相加即可。即$(\lambda_1 + \lambda_2)u = (f, \varphi_{ik}) + (f, \varphi_{(i+1)0})$。

> 下图从分块矩阵的角度描述了上述过程。

> 
>

至此，我们便可以得到拼接的刚度矩阵A和方程的右端F，解此方程即可。

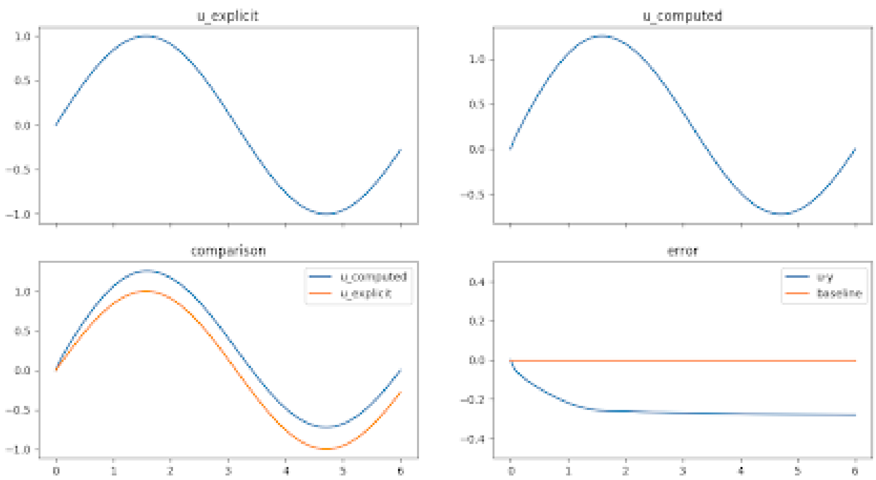
本实验改进后的方案如上描述。添加端点值后编码实现即可。



利用改进后的算法计算结果如上图。平均误差水平为1e-5。

尚存在的问题：

这套算法只适用于左右两点边值均为0的状况(不知道为什么)。当某一点边界值不是0时，计算结果存在很大的偏差，如下图所示。



更新于 **2018**年**04**月**02**日 星期一 **18:27:21 CST**