2024-2025学年数学分析 I 期中考回忆卷

江一帆

2024.11.2

1　计算下列极限

1.1　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

1.2　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+\frac{1}{k}}$

1.3　$\lim\limits_{n\to\infty}(n+e^n)^{\frac{1}{n}}$

1.4　$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

1.5　$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

1.6　$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

2　写出下列命题的否定

2.1　数列x_n是正无穷大量

2.2　$f(x)$在$x=x_0$处的右极限为a

3　证明下列极限存在

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{arctan(k!)}{k^2}$

4 证明下列命题

已知函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，
且$\forall x \in [0,+\infty), 0 \leq f(x) \leq x, x_1 \in [0,+\infty), x_n = f(x_{n-1})$，求证：

4.1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

4.2 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,则$f(l) = l$

4.3 将题目条件中的“$\forall x \in [0,+\infty), 0 \leq f(x) \leq x$”改为“$\forall x \in (0,+\infty), 0 \leq f(x) < x$”，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

5 叙述证明题

5.1 叙述Bolzano-Weierstrass定理（即致密性定理）

5.2 叙述确界原理

5.3 叙述闭区间套原理

5.4 用闭区间套原理证明确界原理