数学分析方法解析

目录

第零章　初等数学基础

§1. 集合论基础

- **集合的概念**

1. 集合元素的特性：确定性、互异性、无序性

2. 集合与元素的关系：属于和不属于

- **集合的表示方法**

1. 枚举法 = 列举法 2. 描述法

- **集合之间的关系**

1. 包含与不包含

2. 集合相等

- **集合的运算 (交、并、补、差)**

1. 四种集合运算的定义

2. 集合运算的规律，例如交换律，结合律，分配律，De Morgen 律

- **集合的笛卡尔乘积与坐标系**

- **集合的势**

1. 自然数集、整数集和有理数集的势 $\aleph_0$

2. 连续统 $\mathbf{R}$ 的势 $\aleph$

例 1.1 设 A, B 是两个集合。证明：

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

例 1.2 设 A, B 是两个集合。证明：

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

证 由以下等价即得：

$$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A,\ x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A^c,\ x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c.$$

■

注 (1) 证明两个集合 A, B 相等只需证明 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，或者 $x \in A \Rightarrow x \in B$ 且 $x \in B \Rightarrow x \in A$，于是这个过程课简略地写成 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$。

(2) 如下集合的运算规律称为 De morgen 律：

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

例 1.3 设集合 X 的元素个数为 n，证明 X 的所有子集的个数为 2^n(即幂集 2^X 有 2^n 个元素)。

证 方法一. 利用组合论.

把 X 的所有子集按其元素个数 k 分为 $n+1$ 类，$0 \leqslant k \leqslant n$，其中每个类中有 $\binom{n}{k}$ 个成员，因此 X 的所有子集的个数总和为

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

方法二. 利用归纳法.

当 $n = 0$ 时 $X = \varnothing$，此时其子集仅为它本身，共有 $1 = 2^0$ 个成员，命题结论成立。

设当 $n=k$ 时命题结论成立,即任意有 k 个元素的集合共有 2^k 个子集。设 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1}\}$。记 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$，则 $X=S\cup\{x_{k+1}\}$。现把 X 的子集分成 2 类：第一类中不含有 x_{k+1}，这种子集也是 S 的子集，其成员共 2^k 个 (由归纳假设)；第二类中子集都含有 x_{k+1}，它们中的每个都可由第一类中的集合并上 $\{x_{k+1}\}$ 得到，因此也有 2^k 个成员。于是 X 的子集的个数总和为

$$2^k+2^k=2^{k+1}.$$

因而命题结论当 $n=k+1$ 时也成立。

由归纳法原理知命题对任意 $n\in\mathbf{N}$ 成立。

■

注 本题求解过程有两点需要注意：一方面，不同的分类方法导致不同的证明方法；另一方面，对于涉及自然数 n 的一般性命题，归纳法是不错的选择。

例 1.4 若集合 S 是无限集，则它必有可列子集 $X=\{x_n:n\geqslant 1\}$。

证 我们围绕 S 是无限集，采用归纳法选取 X 的元素。

首先，$X\neq\varnothing$，因此存在 $x\in X$，把它记为 x_1。

假设我们已经取出 X 的 n 个互不相同的元素 $x_1,\ldots,x_n$。由于 X 是无限集,因此 $X\backslash\{x_1,\ldots,x_n\}$ 非空，于是可从其中选出元素 x_{n+1}，显然，$x_{n=1}\neq x_k(1\leqslant k\leqslant n)$。

由归纳法原理，我们可以选出 X 的一列互不相同的元素

$$x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots,$$

由它们构成集合 S，它是 X 的可列子集。

■

注 (1) 本题不能用反证法，因为不可列集的否定是或为有限集，或为不可列无限集，后一情形太复杂，甚至比本题更难以处理。因此构造性证明基本上是必然的思路。

(2) 本题可以从另一个角度来解读—集合的势，它表明：任意无限集的势至少是 $\aleph_0$；或者说，$\aleph_0$(阿列夫零) 是 "**最小的无穷大**"。

§2. 实数系

- 实数系与确界存在定理

1. 实数系的构成与运算规律
2. 数集的最大数、最小数以及上、下确界
3. 确界存在定理

例 2.1 证明：

(1) $\sqrt{2}$ 不是有理数；

(2) 设

$$A=\{x\in\mathbf{Q}_+ :\ x^2<2\},\qquad B=\{x\in\mathbf{Q}_+ :\ x^2>2\},$$

则 A 在 $\mathbf{Q}$ 中没有最大数，B 在 $\mathbf{Q}$ 中没有最小数。

证 (1) 反证法。若不然则 $\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，从而存在互素的正整数 p,q，使得 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，于是

$$2=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow p^2=2q^2.$$

由于奇数的平方仍为奇数，而偶数的平方为偶数，因此必然有 p 为偶数，即存在正整数 m，使得 $p=2m$，于是 $p^2=4m^2=2q^2$，从而 $2m^2=q^2$。类似于上面讨论知 q 也必须是偶数，即存在正整数 n，使得 $q=2n$。但是如此一来，p 与 q 有公约数 2，这与 p,q 互素矛盾。这个矛盾表明假设 $\sqrt{2}$ 是有理数是错误的，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数。得证。

(2) 设 $r \in \mathbf{Q}_+$，令 $x = \dfrac{2r+2}{r+2}$，则 $x \in \mathbf{Q}_+$ 且有

$$\begin{aligned} x - r &= \frac{2 - r^2}{r+2}, \\ x^2 - 2 &= \frac{(2r+2)^2}{(r+2)^2} - 2 \\ &= \frac{2(r^2-2)}{(r+2)^2}, \end{aligned}$$

计算表明：若 $r \in A$，则 $r^2 < 2$，于是 $x - r > 0$, $x^2 - 2 < 0$，即 $x > r$ 且 $x \in A$，从而 A 中任意数 r 都不是最大数；若 $r \in B$，则 $r^2 > 2$，于是 $x - r < 0$, $x^2 - 2 > 0$，即 $x < r$ 且 $x \in B$，从而 B 中任意数 r 都不是最小数。结论成立。

■

例 2.2 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中具有上界的非空子集，且 $\sup E \notin E$。证明：存在 E 中严格单调增加的一列点 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup E$。

证 令 $H = \sup E$，则 $\forall x \in E$，成立 $x \leqslant H$，但是 $H \notin E$，因而 $x < H$。对于 $\varepsilon_1 = 1$，由确界的定义，存在 $x_1 \in E$，使得 $x_1 > H - \varepsilon_1$。

假设已经选定 $x_1, \cdots, x_k \in E$，已经正数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$，满足

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{i+1} = \min\Big(H - x_i, \frac{1}{i+1}\Big), \\ &x_{i+1} > H - \varepsilon_{i+1}, \end{aligned}\right. \qquad i = 1, \cdots, k-1,$$

则有

$$H > x_{i+1} > H - \varepsilon_{i+1} > H - (H - x_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

令 $\varepsilon_{k+1} = \min\big(H - x_k, \frac{1}{k+1}\big)$，则存在 $x_{k+1} \in E$，使得 $x_{k+1} > H - \varepsilon_{k+1}$，从而

$$x_k = H - (H - x_k) \leqslant H - \varepsilon_{k+1} < x_k < H.$$

由此，利用归纳法可选出数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \in E$，且总成立

$$H - \varepsilon_n < x_n < x_{n+1} < H,$$

即此数列是严格单调增加的，且

$$|x_n - H| < \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n},$$

因而 $x_n \to H(n \to \infty)$。

■

§3. 函数的基本概念和运算

- 函数的定义与运算

1. 函数的定义：定义域，值域，图像
2. 函数的表示方法—解析式，隐函数，由参数方程确定的函数以及图像法，图表法
3. 函数的运算规律，包括四则运算、复合以及反函数
4. 函数的图像和特殊点，例如零点、不动点等。

例 3.1 在函数的复合运算可行的条件下，记 f^n 为 f 的 n 此复合函数，即

$$f^n(x) = \big(\underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n}\big)(x).$$

若 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f^n(x)$。

解 可见

$$f^2(x) = f[f(x)] = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

假设 $f^n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，则

$$f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}.$$

因此由归纳法原理知 $f^n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ 对一切正整数 n 成立。 ■

例 3.2 证明：映射 $f:\ X \to Y$ 是满射的充分必要条件是存在单射 $g:\ Y \to X$，使得 $f \circ g:\ Y \to Y$ 为恒同映射 id_Y: $\mathrm{id}_Y(y) = y$。

证 (1) 必要性。设映射 $f:\ X \to Y$ 是满射。$\forall y \in Y$，y 关于 f 的原像集 $f^{-1}(\{y\})$ 非空，任意固定一个 $x \in f^{-1}(\{y\})$，定义 $g(y) = x$，于是得到映射

$$g:\ Y \to X, \quad y \mapsto x(f(x) = y).$$

首先证明 f 是单射，若 $y_1, y_2 \in Y$ 且 $y_1 \neq y_2$，则 $x_1 = g(y_1) \neq g(y_2) = x_2$，否则成立

$$y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2,$$

矛盾。这就证明了 f 是单射。

其次，由 g 的定义可见，$\forall y \in Y$，成立

$$f \circ g(y) = f[g(y)] = f(x) = y,$$

因此 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(2) 充分性。若存在单射 $g:\ Y \to X$，使得 $f \circ g:\ Y \to Y$ 为恒同映射 id_Y: $\mathrm{id}_Y(y) = y$，则 $\forall y \in Y$，令 $x = g(y)$，成立

$$y = \mathrm{id}_Y(y) = f \circ g(y) = f[g(y)] = f(x),$$

即每个 y 都是 f 的像，因此由 y 的任意性知 f 是满射。

■

例 3.3 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格单调增加的函数，其反函数为 $f^{-1}(x)$。若 x_1 是方程 $f(x)+x=a$ 的解，x_2 是方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 的解，求 x_1+x_2。

解　令 $z=f^{-1}(x_2)$，则 $x_2=f(z)$。于是由 x_2 是方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 的解得到

$$a=f^{-1}(x_2)+x_2=z+f(z),$$

这表明 z 是方程 $f(x)+x=a$ 的解。由于 f 单调增加，因此 $f(x)+x$ 是严格单调增加的函数，从而方程 $f(x)+x=a$ 的解唯一。因此 $z=x_1$，从而

$$x_1+x_2=z+x_2=f^{-1}(x_2)+x_2=a.$$

■

注 本题的考点是双射的像和原像的唯一性。因此如果把条件该为 f 是双射，而其中两个方程之一有唯一解，则结果仍然相同。对函数添加条件从而得到函数的某些性质，如奇偶性，周期性，零点等，是考察我们对函数的理解的几个方面。

例 3.4 满足 $f(x)=x$ 的 x 称为 f 的不动点。证明：若 f 的二次复合函数 $f\circ f$ 有唯一不动点，则此不动点也是 f 的唯一不动点。

证　设 a 是 $f\circ f$ 的唯一不动点，即 $f(f(a))=a$，则

$$f[f(f(a))]=f(a),$$

因此 $f(a)$ 也是 $f\circ f$ 的不动点，从而由唯一性得 $f(a)=a$。再由 f 的不动点也是 $f\circ f$ 的不动点得出 f 不动点得唯一性。

■

例 3.5 若 $f\circ f$ 恰有 2 个不动点 $a,b(a\neq b)$，则或者 $f(a)=a,f(b)=b$，或者 $f(a)=b,f(b)=a$。

证 若 x 是 $f\circ f$ 的不动点，如同上例知 $f(x)$ 也是 $f\circ f$ 的不动点。注意，$f[f(a)]=a, f[f(b)]=b$，因此 $\{f(a),f(b)\}=\{a,b\}$，结论成立。

■

注 这里用到集合元素的**唯一性** (也称**互异性**)。

§4. 函数的简单特性

- 函数的简单特性

1. 有界性
2. 单调性
3. 奇偶性
4. 周期性

例 4.1 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数。试证明：若 $f(x)$ 以 $T(T>0)$ 为周期，则函数 $f(-x)$ 也以 T 为周期。并由此证明，函数 $\sin x+\cos(\sqrt{2}\,x)$ 不是周期函数。

证 (1) 由 $f(x)$ 以 $T(T>0)$ 为周期，对任意实数 y，成立 $f(y)=f(T+y)$，取 $y=-x-T$，则有

$$f(-(x+T))=f(-x-T)=f((-x-T)+T)=f(-x),$$

因此 $f(-x)$ 也以 T 为周期。

(2) 用反证法。首先注意有相同周期 T 的函数的和与差仍为以 T 为周期的函数。

假设 $f(x)=\sin x+\cos(\sqrt{2}\,x)$ 以 $T>0$ 为周期。则由 (1) 知 $f(-x)=-\sin x+\cos(\sqrt{2}\,x)$ 也以 T 为周期，从而 $\sin x=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 和 $\cos(\sqrt{2}\,x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 都以 T 为周期。但这两个函数的最小正周期分别是 2π 和 $\sqrt{2}\,\pi$，因而没有公共的周期，矛盾。这个矛盾表明假设不成立，即函数 $\sin x+\cos(\sqrt{2}\,x)$ 不是周期函数。

■

注 多个具有不同最小正周期的函数的线性组合 (它们的常数倍相加) 一般不是周期函数 (此时称为**拟周期函数**)，除非它们的周期互相有理相关，即两个周期之间是一个有理数倍的关系。

例 4.2 设 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数满足双镜效应，即存在实数 a,b，满足 $a<b$，使得函数 $y=f(x)$ 的图像关于轴 $x=a$ 和 $x=b$ 对称，也即对任意 x，成立 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$。证明 $f(x)$ 是一个周期函数。

证 用 $x-a$ 替换等式 $f(a+x)=f(a-x)$ 中得 x 得到 $f(x)=f(2a-x)$。同理可得，$f(x)=f(2b-x)$。在等式 $f(x)=f(2b-x)$ 中用 $2a-x$ 代替 x 得到：

$$f(2a-x)=f(2(b-a)+x).$$

结合 $f(x)=f(2a-x)$ 得 $f(x)=f(2(b-a)+x)$。因此 f 是一个以 $2(b-a)$ 为周期的函数。

■

注 由函数方程证明周期性的主要方法是多次 (选点) 迭代，它也是求解函数方程的一个重要方法。请完成下面习题。

习题 1 设 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 满足 $f(x+1)=-f(x)$，则 f 是周期函数。

提示：周期 $T=2$。

*习题 2 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(x)=g(x+1)$，且 $g(x)$ 满足 $g(\frac{1}{2}-x)=-g(x)$ 以及 $f(-1)=1, g(\frac{1}{2})=2$。求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2015)$。

提示：由 f 是偶函数有 $f(x)=f(-x)=g(1+x)=g(1-x)$。再结合题设 $g(\frac{1}{2}-x)=-g(x)$ 得出 $g(t)$ 以 3 为周期，从而 $f(x)$ 也以 3 为周期。

例 4.3 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，且满足

$$f(x)+f\big(x+\frac{13}{42}\big)=f\big(x+\frac{1}{6}\big)+f\big(x+\frac{1}{7}\big),\quad (\forall\, x\in\mathbf{R})$$

证明 $f(x)$ 是周期函数。

证 令 $F(x)=f\big(x+\frac{1}{6}\big)-f(x)$，则

$$F\big(x+\frac{1}{7}\big)=f\big(x+\frac{13}{42}\big)-f\big(x+\frac{1}{7}\big)$$
$$=f(x+\frac{1}{6})-f(x)=F(x).$$

因此 F 以 $\frac{1}{7}$ 为周期。再令 $H(x)=f(x+1)-f(x)$，则

$$H(x)=\sum_{k=0}^{5}F\big(x+\frac{i}{6}\big),$$

因此 H 也以 $\frac{1}{7}$ 为周期，从而以 1 为周期。注意

$$f(x+n)-f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\big[f(x+i+1)-f(x+i)\big]$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}H(x+i)=nH(x),$$

由 f 的有界性知 $H(x)\equiv 0$，否则令 $n\to\infty$ 得矛盾。因此 f 是以 1 为周期的函数。

■

例 4.4 设 f,g 都是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，满足 $f\circ g=g\circ f$。证明：若 $f[f(x)]=g[g(x)]$ 有解 $\iff$ 方程 $f(x)=g(x)$ 有解。

证 $\Rightarrow$ 令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则

$$h[f(x)]+h[g(x)]=\big(f[f(x)]-g[f(x)]\big)+\big(f[g(x)]-g[g(x)]\big)$$
$$=f[f(x)]-g[g(x)].$$

若方程 $f[f(x)]=g[g(x)]$ 有解，而方程 $f(x)=g(x)$ 无解，则由连续性知 $h(x)$ 没有零点，因而同号。于是

$$0\neq h[f(x)]+h[g(x)]=f[f(x)]-g[g(x)],$$

但上式右端可以是 0，矛盾。因此 $f(x)=g(x)$ 有解。必要性得证。

$\Leftarrow$ 设方程 $f(x)=g(x)$ 有解，即存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$，则由题设可得

$$\begin{aligned}f[f(x_0)]&=f[g(x_0)]=g[f(x_0)]\\&=g[g(x_0)],\end{aligned}$$

从而 x_0 是方程 $f[f(x)]=g[g(x)]$ 的解。充分性得证。 ■

例 4.5 求解满足下列条件的实函数：

(1) $f(x)+f(\dfrac{x-1}{x})=1+x(x\neq 0,1)$；

(2) $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$。

解 (1) 在题设的等式中用 $\dfrac{1}{1-x}$ 代替 x 代入等式得到

$$f(\frac{1}{1-x})+f(x)=1+\frac{1}{1-x},$$

再在题设的等式中用 $\dfrac{x-1}{x}$ 代替 x 得到

$$f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=1+\frac{x-1}{x},$$

结合三个式子得到

$$2f(x)=1+x+\frac{1}{1-x}-\frac{x-1}{x}=\frac{1+x^2-x^3}{x(1-x)},$$

即

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)},\ x\neq 0,1.$$

(2) 在题设的等式中取 $x=y=1$ 得到 $2f(1)=2f^2(1)$，因此 $f(1)=0$ 或 $f(1)=1$。

(i) $f(1)=0$，在题设的等式中取 $y=1$ 得到 $f(x)=0$；

(ii) $f(1)=1$，在题设的等式中取 $y=1$ 得到

$$x+f(x)=(x+1)f(x),$$

即 $f(x)=1(x\neq 0)$。此时 $f(0)$ 可取任意实数。 ■

例 4.6 设 $f(x)$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的函数，且对任意实数 λ，函数 $f(x)+\lambda x$ 是单调函数，试证明 $f(x)$ 是线性函数，即存在 a,b，使得 $f(x)=ax+b$。

证 首先证明 $f(x)+\lambda x$ 不能对一切 λ 都是单调增函数或都是单调减函数。令

$$F_\lambda(x)=f(x)+\lambda x,$$

则 $F_\lambda(-1)=f(-1)-\lambda$，$F_\lambda(0)=f(0)$，$F_\lambda(1)=f(1)+\lambda$，因此当 $\lambda<f(-1)-f(0)$ 时 $F_\lambda(-1)>F_\lambda(0)$，因此 $F_\lambda(x)$ 不是单调增函数。同理，当 $\lambda>f(0)-f(1)$ 时，$F_\lambda(x)$ 不是单调减函数。

其次，设 λ_0 使得 $F_{\lambda_0}(x)$ 单调增加，则当 $\lambda>\lambda_0$ 时 $F_\lambda(x)=F_{\lambda_0}(x)+(\lambda-\lambda_0)x$ 必然严格单调增加；若 $F_{\lambda_0}(x)$ 单调减少，则当 $\lambda<\lambda_0$ 时 $F_\lambda(x)$ 严格单调减少。

最后，令

$$\alpha=\inf\{\lambda:F_\lambda(x)\text{单调减少}\},\quad \beta=\sup\{\lambda:F_\lambda(x)\text{单调增加}\},$$

则由前面讨论和题设知 $\alpha=\beta=-a$，因而 $F_{-a}(x)$ 为常函数，设它为 b，则

$$f(x)-ax=b\Rightarrow f(x)=ax+b.$$

■

第一章　极限理论

§1. 用定义证明极限

- 极限的定义与证明

1. 极限的定义 — ε-N 方法，ε-δ 方法等

2. 极限的性质 — 唯一性、(局部) 有界性、(局部) 保序、保号性等

3. 用定义证明极限的方法

(1) 直接法—直接求解 N、δ 等

(2) 适当放大法—不等式的应用、分部、分步法、拟合法等

例 1.1 用定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-7n}=\frac{2}{3}.$$

证 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=4+\left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，$n>4$，从而

$$3n^2-7n=n(3n-7)>n^2,\ 14n+3<15n,$$

进而有

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2-7n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{14n+3}{3(3n^2-7n)}<\frac{15n}{3n^2}=\frac{5}{n}<\varepsilon,$$

因此由极限的定义有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-7n}=\frac{2}{3}.$$

■

例 1.2 利用定义证明：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

证　方法一，利用二项式定理。

记 $h = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$，则当 $n \geqslant 2$ 时，成立

$$\begin{aligned} n &= (1+h)^n \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \\ &> 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2, \end{aligned}$$

从而有

$$0 < h < \sqrt{\frac{2}{n}},$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 2$，则当 $n > N$ 时，$n > 2$ 且 $n > \frac{2}{\varepsilon^2}$，由此得

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = h < \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon,$$

因此由极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

方法二，利用平均值不等式放大。

由于 $n \geqslant 2$ 时成立

$$\begin{aligned} 1 < \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdots 1} \\ &\leqslant \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

因此

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right] + 2$，则当 $n > N$ 时，成立

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

因此由极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

■

例 1.3 证明 Cauchy 命题：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

证 $\forall\, \varepsilon > 0$，由条件知存在正整数 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，成立

$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

对这个 N_1，由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1} - N_1 a}{n} = 0,$$

因此存在正整数 $N > N_1$，使得 $n > N$ 时

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1} - N_1 a}{n}\right| < \varepsilon/2.$$

因此当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| \\
=& \left|\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1} - N_1 a) + (x_{N_1+1} - a) + \cdots + (x_n - a)}{n}\right| \\
\leqslant& \left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1} - N_1 a}{n}\right| + \frac{|x_{N_1+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} \\
<& \varepsilon/2 + \frac{(n - N_1)\cdot \varepsilon/2}{n} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon,
\end{aligned}$$

因此由极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

■

注 证明的关键是控制前面的 N_1 项。之所以可以如同证明过程去做，是因为在取 N 的时候，ε 是要当作常数来看待的，因而 N_1 相对于 n 是常数，相应地，数列的前 N_1 项也是常数，这为 N 的确定性打下基础。还可把证明过程做如下改动：$\{x_n\}$ 收敛，因而有界，从而存在 $M>0$，使得

$$|a|\leqslant M,\quad |x_n|\leqslant M,\quad \forall\, n,$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}-N_1a}{n}\right|\\ \leqslant&\frac{1}{n}\left(|x_1|+\cdots+|x_{N_1}|+N_1|a|\right)\\ \leqslant&\frac{2N_1M}{n},\end{aligned}$$

因而只需使得 $\dfrac{2N_1M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，即 $n>\dfrac{4N_1M}{\varepsilon}$ 即可。可见，可取 $N=\max\left(N_1,[4N_1M/\varepsilon]\right)$。

习题 3 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

提示 记 $b_n=a_n-a_{n-2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 且有 (分 n 是奇数和偶数讨论)

$$\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{n}\right|\leqslant\frac{|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|}{n}+\frac{|a_1-a_0|}{n}.$$

例 1.4 利用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$。

证 对任意正整数 n，存在 $k \in \mathbf{N}$，使得 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$，于是 $k\ln 2 \leqslant \ln n < (k+1)\ln 2$，因此

$$0 < \frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{(k+1)\ln 2}{2^k} < \frac{k+1}{2^k}.$$

而当 $k > 2$ 时，利用二项式定理

$$\begin{aligned} 2^k = (1+1)^k &= 1 + k + \frac{k(k-1)}{2} + \cdots \\ &\geqslant k + \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)}{2}, \end{aligned}$$

从而相应地有

$$0 < \frac{\ln n}{n} < \frac{k+1}{k(k+1)/2} = \frac{2}{k}.$$

$\forall \varepsilon > 0$，令

$$K = \max\left(2, \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right), \quad N = 2^K,$$

则当 $n > N$ 时，若 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$，则必有 $k > K$，从而 $k > 2$ 且 $\dfrac{2}{k} < \varepsilon$，由此得到

$$\left|\frac{\ln n}{n} - 0\right| < \frac{2}{k} < \varepsilon.$$

因此由极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

■

注 如果是计算题，可定义数列 $x_1 = 0, x_n = \ln n - \ln(n-1)(n \geqslant 2)$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，从而由 Cauchy 命题得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

例 1.5 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-a}{x_n+a}=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

证 方法一，利用条件直接证明。

从已知条件，可取 N，使得当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{x_n-a}{x_n+a}-0\right|<\varepsilon,$$

于是 $|x_n-a|<\varepsilon|x_n+a|$，又因为

$$|x_n+a|\leqslant|x_n-a|+2|a|,$$

因而

$$|x_n-a|<\varepsilon(|x_n-a|+2|a|),$$

即

$$|x_n-a|<\frac{2|a|\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

若再限制 $\varepsilon<\dfrac{1}{2}$，则有

$$|x_n-a|<4|a|\varepsilon,$$

右端是 ε 的常数倍，得证。

方法二，利用极限的运算法则证明。

令 $y_n=\dfrac{x_n-a}{x_n+a}$，则 $y_n=o(1)$，且

$$x_n=\frac{1-y_n}{1+y_n}a,$$

因而 $x_n\to a(n\to\infty)$。得证。

方法三，反证法。

若不然，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$，则 $\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, N \in \mathbf{N}_+, \exists\, n > N$, s.t.

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon_0,$$

从而

$$\left|\frac{x_n - a}{x_n + a} - 0\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{|x_n + a|} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{|x_n - a| + 2\,|a|} > \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + 2\,|a|},$$

不等式右端为常数，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{x_n + a} \neq 0$，这与题设矛盾。因此必有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

■

例 1.6 利用极限的定义证明：Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 1/p, & x = q/p\text{是既约分数，}p > 0 \\ 0, & x\text{是无理数} \end{cases}$$

在任意一点处的极限都为 0.

证 $R(x)$ 是周期为 1 的函数，只要证明：对每个 $x_0 \in [0,1]$，$\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$。$\forall\, \varepsilon > 0$，不妨设 $\varepsilon < 1$。令 $m = \left[1/\varepsilon\right]$ 为不超过 $1/\varepsilon$ 的正整数。在区间 $[0,1]$ 中，分别以 $1,2,\cdots,m$ 为分母的分数只有有限个，设它们为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$。令

$$\delta = \min\left\{|x_i - x_0| : i = 1,2,\cdots,k, x_i \neq x_0\right\} > 0,$$

则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，若 x 是无理数，则 $R(x) = 0$；若 $x = q/p$ 是有理数，则 $x \neq x_i (i = 1,2,\cdots,k)$，从而 $p > m$，因此

$$R(x) = 1/p \leqslant 1/(m+1) < \varepsilon.$$

总之，此时总成立

$$0 \leqslant R(x) < \varepsilon,$$

因而由函数极限的定义知

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = 0.$$

■

§2. 极限的存在性

- 单调有界收敛定理

1. 单调性判据

(1) 利用单调性定义、前后项之差、商或导数的值

(2) 对递推数列 $x_{n+1} = f(x_n)$，有如下单调性结论：

定理 2.1 设数列 $\{x_n\}$ 由递推关系 $x_{n+1} = f(x_n)$ 确定。

(i) 若迭代函数 f 单调增加，则数列 $\{x_n\}$ 必然单调；

(ii) 若迭代函数 f 单调减少，则数列 $\{x_n\}$ 不单调，但其奇数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和偶数列 $\{x_{2n}\}$ 都是单调的，且具有相反的单调性。

2. 单调有界收敛定理

(1) 单调有界收敛定理—注意数列与函数对应定理的异同

(2) 函数值与极限的大小关系

(3) 单调但无界时广义极限存在

(4) 重要极限 e

例 2.1 (1) 证明：设

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

则数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \mathrm{e}.$$

(2) 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$

证 (1) 利用 Bernoulli 不等式得到

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$
$$>1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

于是

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=x_n,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 单调增加。

利用调和-几何平均值不等式有

$$\sqrt[n+2]{y_n}=\sqrt[n+2]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n+1}\cdot 1}$$
$$>\frac{n+2}{\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{n+2}{\dfrac{n+1}{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

因此

$$y_n>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=y_{n+1},$$

即数列 $\{y_n\}$ 严格单调减少。

最后，由这些单调性得到

$$2=x_1\leqslant x_n<y_n\leqslant y_1=4,\quad\forall\, n\geqslant 1,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是单调且有界的，从而它们都收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot 1 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(2) 当 $n \leqslant x < n+1$ 时，

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n},$$

因此

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1\cdot \mathrm{e} = \mathrm{e},\end{aligned}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e},$$

因此，$\forall\, \varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，成立

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - \mathrm{e}\right| < \varepsilon, \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \mathrm{e}\right| < \varepsilon,$$

即有

$$\mathrm{e}-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \mathrm{e}+\varepsilon.$$

于是，当 $n \leqslant x < n+1$ 时，成立

$$\mathrm{e}-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \mathrm{e}+\varepsilon,$$

从而成立

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}\right| < \varepsilon.$$

令 $X = N+1$，则当 $x > X$ 时，$[x] \geqslant N+1 > N$，从而存在 $n > N$，使得 $n \leqslant x < n+1$，因而有上面的不等式成立。由函数极限的定义知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

当 $x < 0$ 时，令 $t = -x > 0$，则当 $x \to -\infty$ 时，$t \to +\infty$，从而成立 (复合函数求极限)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) \\
&= \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

结合前面的结果得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

最后，用 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x 得到

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

■

注 由数列单调性有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n,$$

取对数得到

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad \forall n. \tag{1.1}$$

这个不等式非常重要，见下例。

例 2.2 (Euler 常数) 设

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

证 因为

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \end{aligned}$$

因此数列 $\{x_n\}$ 严格单调减少。

又利用前面不等式得到

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n \\ &= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n \\ &= \cancel{\ln 2} + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \cdots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln n}) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

因此数列 $\{x_n\}$ 有下界 0.

于是由单调有界收敛定理知数列 $\{x_n\}$ 收敛，其极限称为 Euler **常数**，且有近似值

$$C = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772\cdots.$$

■

注 本例的结论可以用来解极限的题，这个结果可表示为

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + o(1), \quad n \to \infty.$$

例 2.3 设 $0 < p < 1$，

$$x_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} - \frac{1}{1-p} n^{1-p}.$$

证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛。

证 利用微分中值定理，

$$(n+1)^{1-p} - n^{1-p} = (1-p)\xi^{-p},$$

其中 $\xi \in (n, n+1)$，因此

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{1-p}\left[(n+1)^{1-p} - n^{1-p}\right] \\ &= \frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{\xi^p} < 0, \end{aligned}$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调减少。同时，

$$(n+1)^{1-p} - n^{1-p} = (1-p)\xi^{-p} < \frac{1-p}{n^p},$$

因此

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{1-p}\left[(n+1)^{1-p} - n^{1-p}\right],$$

从而

$$\begin{aligned} x_n >& \frac{1}{1-p}\left[((n+1)^{1-p} - n^{1-p}) + (n^{1-p} - (n-1)^{1-p}) \right. \\ & \left. + \cdots + (2^{1-p} - 1^{1-p})\right] - \frac{1}{1-p} n^{1-p} \\ =& \frac{1}{1-p}\left[(n+1)^{1-p} - n^{1-p} - 1\right] > -\frac{1}{1-p}, \end{aligned}$$

即数列 $\{x_n\}$ 有下界。由单调有界收敛定理知数列 $\{x_n\}$ 收敛。 ■

注 由极限的保序性还可得到极限的一个下限估计：

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant -\frac{1}{1-p}.$$

- 极限中关于全部与部分、局部与整体的关系

1. 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$;
2. 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛
3. Heine 归结原理

例 2.4 设数列 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{2n-1}\}$、$\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{3n}\}$ 都收敛，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛。

证 注意，

$$6n = 3(2n) = 2(3n), \quad 6n-3 = 2(3n-1)-1 = 3(2n-1),$$

因此数列 $\{x_{6n}\}$ 同时是 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{3n}\}$ 的子列，$\{x_{6n-3}\}$ 同时是 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{3n}\}$ 的子列，因此，由数列极限与子列极限的关系，结合题目条件可得

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{6n} = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} x_{6n-3} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1},$$

即数列 $\{x_n\}$ 的奇数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和偶数列 $\{x_{2n}\}$ 有相同的极限，因而收敛。 ■

例 2.5 (1) 证明数列 $\{\sin n\}$ 发散。

(2) 证明函数

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

在 0 的极限不存在。

证 (1) 取

$$n_k^{(1)} = \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] + 1, \quad n_k^{(2)} = \left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right] + 1,$$

则利用整数部分函数的性质易得

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < n_k^{(1)} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 1,$$

$$(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} < n_k^{(1)} < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} + 1,$$

于是

$$\sin(n_k^{(1)}) > \cos 1, \quad \sin(n_k^{(2)}) < -\cos 1,$$

因此 $\{\sin(n_k^{(1)})\}$ 的极限不小于 $\cos 1$，而 $\{\sin(n_k^{(2)})\}$ 的极限不大于 $-\cos 1$，从而 $\{\sin n\}$ 的这两个子列不可能有相同的极限，因而此数列发散。

(2) 取

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}, \quad y_n = \frac{1}{2n\pi},$$

则 $f(x_n) = 1, f(y_n) = 0$，从而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0,$$

而 $x_n \to 0, y_n \to 0 (n \to \infty)$，因此由 Heine 归结原理知函数 $f(x)$ 在 0 的极限不存在。 ■

- Cauchy 收敛原理

(1) 数列的 Cauchy 收敛原理

(2) 函数的 Cauchy 收敛原理

例 2.6 设

$$x_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2},$$

证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛。

证 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，对任意正整数 p，成立

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，因而收敛。 ■

例 2.7 设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=x_n^2+\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)x_n+\frac{1}{n},\quad n\geqslant 1.$$

试讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性。

解 数列的递推关系可改写为

$$x_{n+1}-x_n=\left(x_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

由于等式右端大于 0，因此数列 $\{x_n\}$ 单调增加。若数列 $\{x_n\}$ 收敛，在上式中令 $n\to\infty$ 得到(利用极限的运算法则)

$$0=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)^2,$$

即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; 再利用数列的单调性知 $x_n\leqslant 0(\forall n)$，从而有

$$x_{n+1}-x_n=\left(x_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\geqslant\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{n},\quad n\geqslant 1.$$

于是容易得到

$$\begin{aligned} x_{2n+1} - x_n &= (x_{2n+1} - x_{2n}) + (x_{2n} - x_{2n-1}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n) \\ &\geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

这个不等式与 Cauchy 收敛原理矛盾。这个矛盾表明数列 $\{x_n\}$ 发散。 ■

- 压缩性与极限—压缩映像原理

1. 数列的压缩性条件

(1) 若存在常数 $r \in (0,1)$，使得

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant r\,|x_n - x_{n-1}|, \quad n \geqslant 2,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是**压缩的**，称 r 为**压缩比**。

(2) 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 为常数，若存在常数 $r \in (0,1)$，使得

$$|x_{n+1} - a| \leqslant r\,|x_n - a|, \quad n \geqslant 1,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是**向点 a 压缩的**，称 r 为**压缩比**。

2. 函数的 Hölder 条件、Lipschitz 条件和压缩性条件

(1) 设 $f(x)$ 在区间 I 上定义，若

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in I,$$

其中 $L > 0$ 为常数，$\alpha \in (0,1]$，则称 f 满足 Hölder **条件**，或 α **阶的** Lipschitz **条件**，记为 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$。当 $\alpha = 1$ 时称 f 满足 Lipschitz **条件**，其中 L 称为 Lipschitz **常数**。当 Lipschitz 常数 $L < 1$ 时，满足对应 Lipschitz 条件的函数称为是**压缩的**，此时 $L \in (0,1)$ 称为函数 $f(x)$ 的**压缩比**。

(2) 设 f 在点 x_0 的一个邻域 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 上有定义，$\rho > 0$，且存在 $r \in (0,1)$，使得

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant r\,|x - x_0|, \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho),$$

则称 f 在 x_0 **处是压缩的**。特别地，若 $f(x_0)=x_0$(称 x_0 是 f 的一个不动点)，则称 f 是**向不动点 x_0 压缩的**。

例 2.8 (压缩数列的收敛性) (1) 设数列 $\{x_n\}$ 是向点 a 压缩的，则该数列收敛于 a；
(2) 设数列 $\{x_n\}$ 是压缩的，r 为其压缩比，则该数列必收敛。

证 (1) 由于数列 $\{x_n\}$ 是向点 a 压缩的，因此

$$|x_n-a|\leqslant r|x_{n-1}-a|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-1}|x_1-a|,$$

注意到 $r\in(0,1)$，$r^{n-1}\to 0(n\to\infty)$，由上式易知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

(2) 方法一，用 Cauchy 收敛原理。由条件有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-1}|x_2-x_1|,\quad n\geqslant 1,$$

从而对任意正整数 $p>1,n>1$

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant r^{n+p-2}|x_2-x_1|+r^{n+p-3}|x_2-x_1|+\cdots+r^{n-1}|x_2-x_1|\\&=\left(r^{n+p-2}+r^{n+p-3}+\cdots+r^{n-1}\right)|x_2-x_1|\\&=\frac{r^{n-1}(1-r^p)}{1-r}\cdot|x_2-x_1|\\&\leqslant\frac{r^{n-1}}{1-r}\cdot|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

由于 $0<r<1$, $r^{n-1}\to 0(n\to\infty)$, 因此, $\forall\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时 $\frac{r^{n-1}}{1-r}\cdot|x_2-x_1|<\varepsilon$, 于是

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant\frac{r^{n-1}}{1-r}\cdot|x_2-x_1|<\varepsilon,$$

即数列 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列，因而收敛。得证。

方法二，利用数列与级数收敛的关系。记

$$u_1 = x_1, u_2 = x_2 - x_1, \cdots, u_n = x_n - x_{n-1}, \cdots,$$

则数列 $\{x_n\}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列，因而有相同的收敛性。下面证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，因而收敛，从而数列 $\{x_n\}$ 收敛。

注意，由题设有

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} \leqslant r < 1,$$

因此由正项级数的比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。得证。 ■

例 2.9 (压缩映像原理) (1) 设函数 f 在点 x_0 的一个邻域 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 上是向不动点 x_0 压缩的。$\forall x_1 \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$，令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geqslant 1,$$

则数列 $\{x_n\}$ 必收敛于 f 的不动点 x_0；

(2) 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 到其自身的一个压缩映射，则 f 有唯一的不动点，即存在唯一的 $c \in [a, b]$，使得 $f(c) = c$。

证 (1) 由于 $f(x_0) = x_0$，因此由压缩性条件可得

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant r\,|x_n - x_0|,$$

从而数列 $\{x_n\}$ 是向点 x_0 压缩的，从而由前一个定理的结论知数列 $\{x_n\}$ 必收敛于 x_0。

(2) $\forall x_1 \in [a, b]$，令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geqslant 1,$$

由压缩性条件可得

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| \leqslant r\,|x_n - x_{n-1}|,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是压缩的，从而收敛。设 $x_n \to c$，由压缩性条件可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边令 $n\to\infty$ 得到 $c=f(c)$，因此 c 是 f 的一个不动点。

下面证明 f 的不动点是唯一的。设 $d\in[a,b]$ 也是 f 的不动点，即 $f(d)=d\in[a,b]$，则由压缩性条件有

$$|c-d| = |f(c)-f(d)| \leqslant r\,|c-d|,$$

而 $0<r<1$，因此必然有 $|c-d|=0$，即 $d=c$。唯一性得证。■

例 2.10 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2+\dfrac{1}{a_n}(n\geqslant 1)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

解 方法一，利用单调性。利用归纳法容易证明: $1\leqslant a_n\leqslant 3$。又因为

$$a_{n+1}-a_n = \left(2+\frac{1}{a_n}\right)-\left(2+\frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{a_{n-1}-a_n}{a_n a_{n-1}},$$

因此 $a_{n+1}-a_n$ 与 a_n-a_{n-1} 异号，从而 $\{a_n\}$ 不单调，但是子列 $\{a_{2n}\}$ 与 a_{2n-1} 都单调且有界，从而它们都收敛。

设

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a \geqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n} = b \geqslant 1.$$

由递推关系可得

$$a_{2n+1} = 2+\frac{1}{a_{2n}}, \quad a_{2n} = 2+\frac{1}{a_{2n-1}},$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$a = 2+\frac{1}{b}, \quad b = 2+\frac{1}{a},$$

解之可得 (注意 $a,b\geqslant 1$)$a=b=1+\sqrt{2}$。因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}.$$

方法二，利用压缩性。利用归纳法容易证明: $2\leqslant a_n\leqslant 3(n\geqslant 2)$。于是

$$|a_{n+1}-a_n| = \left|\frac{a_{n-1}-a_n}{a_na_{n-1}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|a_n-a_{n-1}|,$$

即数列 $\{a_n\}$ 是压缩的，从而收敛，设其极限为 a，由递推关系可得

$$a = 2+\frac{1}{a},$$

于是 $a=1+\sqrt{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}.$$

方法三，利用向一点的压缩性。首先，易见 $a_n\geqslant 1(\forall n)$。其次，观察知数列 $\{a_n\}$ 的极限 a 满足

$$a = 2+\frac{1}{a},$$

于是 $a=1+\sqrt{2}$。令 $b_n=a_n-(1+\sqrt{2})$，则

$$\begin{aligned}
|b_{n+1}| &= \left|a_{n+1}-(1+\sqrt{2})\right| = \left|\frac{1}{a_n}-(\sqrt{2}-1)\right| \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)}{a_n}\left|a_n-(1+\sqrt{2})\right| = \frac{(\sqrt{2}-1)}{a_n}\,|b_n| \\
&\leqslant (\sqrt{2}-1)\,|b_n|,
\end{aligned}$$

从而数列 $\{a_n\}$ 是向点 $1+\sqrt{2}$ 压缩的，且由上面的关系可得

$$b_n\leqslant(\sqrt{2}-1)^{n-1}b_1\to 0,\quad n\to\infty,$$

因此 $b_n\to 0(n\to\infty)$，即有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}.$$

■

- 有界数列和无界数列的刻画

1. 有界数列的特性

(1) 具有正常的上、下极限；

(2) 至少有一个极限点，即必然存在收敛的子列 (Bolzano-Weierstrass 定理，或致密性定理)；

(3) 有界数列收敛的充分必要条件

(i) 极限点唯一；

(ii) 上极限等于下极限。

2. 有界数列上、下极限的两种定义方式

(1) 上极限是所有极限点中的最大数，下极限是最小数，其中极限点构成一个有界闭集 (即紧集)；

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant n} x_k, \qquad \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n} x_k.$

3. 有界数列上、下极限的等价描述：

$H = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，s.t. $x_n<H+\varepsilon, \quad \forall n>N$；(2) $\forall\varepsilon>0$，存在无穷多个 n，使得 $x_n>H-\varepsilon$。

$h = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，s.t. $x_n>h-\varepsilon, \quad \forall n>N$；(2) $\forall\varepsilon>0$，存在无穷多个 n，使得 $x_n<h+\varepsilon$。

4. 上、下极限的运算规律：

§2. 极限的存在性

(1) 数列和的上、下极限

$$
\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \\
&\leqslant \begin{cases} \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \\[2ex] \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \end{cases} \\
&\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \\
&\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.
\end{aligned}
$$

特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，则有

$$
\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.
$$

(2) 乘积的上、下极限：若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是非负数列，则有

$$
\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \leqslant \begin{cases} \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \\[2ex] \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \end{cases}
$$

$$
\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n.
$$

特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，则有

$$
\varliminf_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.
$$

(3) 数列数乘运算的上、下极限

$$
\varliminf_{n\to\infty}(cx_n) = \begin{cases} c\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, & c \geqslant 0, \\[2ex] c\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, & c \leqslant 0, \end{cases}
$$

$$
\varlimsup_{n\to\infty}(cx_n) = \begin{cases} c\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, & c \geqslant 0, \\[2ex] c\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, & c \leqslant 0. \end{cases}
$$

(4) 若 $\{x_n\}$ 是正数列，则

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n},\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n}.$$

例 2.11 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是两个数列，其中 $\{y_n\}$ 收敛，且满足

$$x_{n+1}=\lambda x_n+y_n,\quad n\geqslant 1,$$

$|\lambda|<1$ 为常数。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

解 首先证明数列 $\{x_n\}$ 有界。

因为 $\{y_n\}$ 收敛，因而有界，即存在 $M>0$，使得 $|y_n|\leqslant M(\forall n)$。于是

$$|x_{n+1}|=|\lambda x_n+u_n|\leqslant|\lambda|\cdot|x_n|+|y_n|\leqslant|\lambda|\cdot|x_n|+M.$$

令 $|x_n|=z_n,|\lambda|=a$，则有

$$z_{n+1}\leqslant az_n+M,$$

则有

$$a^{i-1}z_{n-i+1}\leqslant a^iz_{n-i}+a^{i-1}M,\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

求和得到

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(a^{i-1}z_{n-i+1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\left(a^iz_{n-i}+a^{i-1}M\right),$$

抵消公共部分得到

$$\begin{aligned}z_n&\leqslant a^{n-1}z_1+M\sum_{i=1}^{n-1}a^{i-1}\\&=\alpha^{n-1}z_1+\frac{1-a^{n-1}}{1-a}M\\&<\alpha^{n-1}z_1+\frac{M}{1-a}.\end{aligned}$$

由于 $a = |\lambda| < 1$，因此

$$|x_n| = z_n < z_1 + \frac{M}{1-a} = |x_1| + \frac{M}{1-|\lambda|},$$

于是 $\{x_n\}$ 有界。

若 $\lambda \geqslant 0$，在等式 $x_{n+1} = \lambda x_n + y_n$ 两边取上极限和下极限分别得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lambda \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lambda \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

由此可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

因此 $\{x_{\}}$ 收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

若 $\lambda < 0$，则相应地有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lambda \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lambda \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

由此方程组可得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

■

例 2.12 设 $x_1 > 0$，$x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{x_n + 1}$。证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

解 由于

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1},$$

利用归纳法容易证明：$1 \leqslant x_n \leqslant 2$，$\forall n \geqslant 2$，即数列 $\{x_n\}$ 有界。在递推关系式两边取上极限得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1 + \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + 1\right)^{-1},$$

同理，取下极限得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1 + \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + 1\right)^{-1},$$

联立两式可得（利用极限的保号性知极限都是正的）

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sqrt{2}.$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\sqrt{2}$。 ■

注 利用前面的单调性的定理容易看出，这里的数列并不是单调的，而是奇数列和偶数列分别单调，再利用有界性可以得出奇数列和偶数列都收敛，设极限分别是 a 和 b，则必有

$$a = 1 + \frac{1}{1+b}, \quad b = 1 + \frac{1}{1+a},$$

从而得到 $a = b = \sqrt{2}$，因而数列极限为 $\sqrt{2}$。这提供了本题的另一种解法。显然，本例的解法更为简洁。

例 2.13 设 $\{x_n\}$ 是有界数列。证明：或者该数列收敛，或者该数列具有两个不同的子列，它们具有不同的极限。

证 若 $\{x_n\}$ 是收敛的，则结论已经成立。

设数列 $\{x_n\}$ 发散。由数列有界，根据 Bolzano-Weierstrass 定理，数列 $\{x_n\}$ 有一个收敛的子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$，记其极限为 a。由假设，a 不是数列 $\{x_n\}$ 的极限，因而存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对任意的正整数 N，总存在 $n > N$，使得 $|x_n - a| \geqslant \varepsilon_0$。分别取 $N = k = 1, 2, \cdots$，对应的 n 记为 $n_k^{(2)}$，则有

$$\left|x_{n_k^{(2)}} - a\right| \geqslant \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由极限的定义可见，子列 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 不以 a 为极限，但同时，这个子列仍是有界的因而也有收敛的子列，不妨设就是这个子列本身，即有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}} = b.$$

由前面不等式可见 $|b-a| \geqslant \varepsilon_0$，因而 $b \neq a$。得证。 ■

习题 4 设数列 $\{x_n\}$ 无界，则或者它是无穷大，或者它有两个子列，其一为无穷大，其一是收敛数列。

提示　若数列不是无穷大，则必有有界子列。

例 2.14 设 $\{x_n\}$ 是发散的有界数列，且满足

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0.$$

证明：数列 $\{x_n\}$ 的所有极限点构成实数轴上的一个闭区间。

证　由于数列 $\{x_n\}$ 发散且有界，因此它具有有限的下确界 A 和上确界 B，且 $A<B$，即

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = A, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = B, \quad A<B.$$

由于上、下极限总可由子列极限达到，因此为了证明极限点构成实数轴上的一个闭区间，只需证明：$\forall \xi \in (A,B)$，存在 $\{x_n\}$ 的子列收敛于 ξ。

采用反证法。若不然，存在 $\xi \in (A,B)$，使得 ξ 不是 $\{x_n\}$ 极限点，从而存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得区间 $(\xi-\varepsilon_0, \xi+\varepsilon_0)$ 中只含有 $\{x_n\}$ 的有限项，也就是说，存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，$x_n \notin (\xi-\varepsilon_0, \xi+\varepsilon_0)$，或

$$|x_n - \xi| \geqslant \varepsilon_0, \quad n > N_1.$$

必要时缩小 ε_0 的值，不妨设

$$A < \xi-\varepsilon_0 < \xi+\varepsilon_0 < B.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ 知，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon_0.$$

令 $N=N_1+N_2$，则当 $n>N$ 时，成立

$$|x_n-\xi|\geqslant\varepsilon_0,\quad |x_{n+1}-x_n|<\varepsilon_0. \tag{1.2}$$

最后，利用 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 知 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点，因此存在 $n_0>N$，使得

$$|x_n-A|<\varepsilon_0,$$

即

$$x_{n_0}<A+\varepsilon_0<\xi,$$

从而由(1.2)知 $x_{n_0}\leqslant\xi-\varepsilon_0$ 以及

$$x_{n_0+1}<x_{n_0}+\varepsilon_0\leqslant\xi,$$

因而仍有 $x_{n_0+1}<\xi-\varepsilon_0$。重复上面的讨论，利用归纳法可以证明：当 $n>n_0$ 时必然成立 $x_n<\xi-\varepsilon_0$，这表明

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n\leqslant\xi-\varepsilon_0<B,$$

与上极限为 B 的假设矛盾。这个矛盾表明每个 $\xi\in(A,B)$ 都是 $\{x_n\}$ 的极限点。得证。 ■

例 2.15 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个无界数列。证明：存在无穷多组正整数 (m,n)，使得

$$|x_m-x_n|>1,\quad |y_m-y_n|>1.$$

证 分以下情况讨论：

(1) $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是无穷大，则任意固定 m，$\{x_m - x_n\}$ 和 $\{y_m - y_n\}$ 仍是无穷大，从而存在 N_1, N_2 为正整数，使得

$$|x_m - x_n| > 1, \qquad n > N_1,$$

$$|y_m - y_n| > 1, \qquad n > N_2,$$

因此只要 $n > \max(N_1, N_2)$，则 (m, n) 是满足题目需要的数对。显然，这样的数对有无穷多。

(2) $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中一个是无穷大，另一个不是无穷大。不妨设 $\{x_n\}$ 是无穷大，而 $\{y_n\}$ 无界，但不是无穷大。由上例的结论 (单独解答本题时需要证明)，存在 $\{y_n\}$ 的一个子列 $\{y_{n_k}\}$ 是无穷大，此时 $\{x_{n_k}\}$ 作为无穷大的子列也是无穷大，从而把这种情况归结为 (1) 讨论的情形，结论也成立。

(3) 最后一种情况：$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都无界但都不是无穷大。首先从 $\{x_n\}$ 中取子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 使得它是无穷大，如果对应的 $\{y_n\}$ 子列 $\{y_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大或无界的，则可分别归结为 (1) 或 (2) 的情况。因此不失一般性设 $\{y_{n_k^{(1)}}\}$ 是有界的。类似地，可从 $\{y_n\}$ 中取子列 $\{y_{n_k^{(2)}}\}$ 为无穷大，而对应的 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是有界的。于是必有

$$\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k^{(1)}} - x_{n_k^{(2)}}\right) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty}\left(y_{n_k^{(1)}} - y_{n_k^{(2)}}\right) = \infty,$$

从而存在 K，当 $k > K$ 时成立

$$\left|x_{n_k^{(1)}} - x_{n_k^{(2)}}\right| > 1, \quad \left|x_{n_k^{(1)}} - x_{n_k^{(2)}}\right| > 1,$$

取 $m = n_k^{(1)}, n = n_k^{(2)}$ 即可得到

$$|x_m - x_n| > 1, \quad |y_m - y_n| > 1.$$

由 k 的无限性可得数对 (m, n) 的无限性。

■

§3. 极限的计算

- **利用初等变形和已知的简单结果求极限**

1. 利用初等变形化简

2. 利用初等变形求通项的解析表达式

例 3.1 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right).$$

解 利用平方差公式有

$$\begin{aligned}&1\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdots 2^{2^n}\\=&(2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)\\=&2^{2^{n+1}}-1,\end{aligned}$$

而利用等比数列求和公式有

$$\begin{aligned}&2\cdot 4\cdot 16\cdot 2^{2^n}=2^1\cdot 2^{2^1}\cdot 2^{2^2}\cdots 2^{2^n}\\=&2^{1+2^1+2^2+\cdots+2^n}=2^{2^{n+1}-1},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)=2.\end{aligned}$$

■

例 3.2 设 $a_1=1$,

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\frac{1}{n!}a_n},\quad n\geqslant 1.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

解 在递推关系两边取倒数得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+\frac{1}{n!}a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n!},$$

令 $u_n = \dfrac{1}{a_n}$，则有 $u_1 = 1$ 以及

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n!},$$

从而

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}.$$

■

- **利用已知的极限式结合极限运算规律求极限**

1. 两个重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. 与 Euler 常数相关的结论 (其中 C 是 Euler 常数)：

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + o(1),$$

3. Sterling 公式：

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

4. 利用 Cauchy 命题：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

例 3.3 求极限

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解 (1) 记

$$x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

$$y_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

则有 $y_n=\ln n+C+o(1)$，其中 C 为 Euler 常数，于是 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}x_{2n}=&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\=&\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\\&-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n}\right)\\=&y_{2n}-y_n\\=&(\ln(2n+C+o(1))-(\ln n+C+o(1))\\=&\ln 2+o(1),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+o(1))=\ln 2.$$

又因为

$$x_{2n+1}=x_{2n}+\frac{1}{2n+1},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\ln 2.$$

结合前面两个极限式得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}x_n=\ln 2.$$

(2) 记

$$z_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

由前面推导可见

$$z_n=y_{2n}-y_n=x_{2n},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\ln 2.$$

■

例 3.4 (Wallis 公式) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^2.$$

解 因为

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{(2\cdot 4\cdots(2n))^2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

利用 Sterling 公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}(n/\mathrm{e})^n(n\to\infty)$ 得到

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\sim\frac{\sqrt{4n\pi}\,(2n/\mathrm{e})^{2n}}{2^{2n}\,(2n\pi)\,(n/\mathrm{e})^{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}},$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)^2\right)=\frac{1}{\pi}.$$

■

- **利用夹逼性求极限**

1. 观察项的数字特征
2. 利用不等式

例 3.5 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n > 0(\forall n)$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$$

证 由题设有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a},$$

从而由 Cauchy 命题得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{a}.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = a.$$

由平均值不等式有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

当 $n \to \infty$ 时，上式两端的极限都是 a，因而由极限的夹逼性得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$$

得证。 ∎

例 3.6 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

解 当 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时，成立

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} < \frac{1}{n},$$

于是

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

因此由极限的夹逼性得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

■

例 3.7 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}.$$

解 当 $n > 2$ 时，成立

$$1! < (n-2)!, 2! < (n-2)!, \cdots, (n-3)! < (n-2)!,$$

因此

$$\begin{aligned}
&1!+2!+\cdots+(n-2)! \\
<&(n-2)\cdot(n-2)! \\
<&(n-1)\cdot(n-2)! \\
=&(n-1)!,
\end{aligned}$$

于是

$$1 < \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} < \frac{2(n-1)!+n!}{n!} = 1+\frac{2}{n},$$

不等式两端的极限都是 1，因此由极限的夹逼性知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} = 1.$$

■

例 3.8 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 m 个正数，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n}.$$

解 记 $a=\max(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, 则存在 $k: 1\leqslant k\leqslant m$ 使得 $x_k=a$, 于是有

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n > x_k^n = a^n$$

以及

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n \leqslant ma^n,$$

因此

$$a < \sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n} \leqslant a\sqrt[n]{m},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$ 和极限的夹逼性可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n} = a = \max(x_1,x_2,\cdots,x_m).$$

■

例 3.9 设

$$x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 利用平方差公式有

$$(2k-1)(2k+1)=4k^2-1<4k^2=(2k)^2,\quad k=1,2,\ldots,n-1,$$

从而有

$$\begin{aligned}
x_n^2&=\frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}\\
&=\frac{(1\cdot 3)(3\cdot 5)(5\cdot 7)\cdots((2n-3)(2n-1))(2n-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}\\
&=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdots\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{2n-1}{(2n)^2}\\
&<\frac{2n-1}{(2n)^2}<\frac{1}{2n},
\end{aligned}$$

由此得到

$$0<x_n<\sqrt{\frac{1}{2n}},$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

■

*例 3.10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}$。

解 考虑函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{-\dfrac{x}{1-x}-x\ln(1-x)}{x^2}=-\frac{1+(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)},$$

再令 $g(x)=1+x\ln x$，则

$$g'(x)=1+\ln x.$$

$g(x)$ 在 $x = \mathrm{e}^{-1}$ 达到最小值 $1 - \mathrm{e}^{-1} > 0$，因此 $f'(x) < 0$，即 $f(x)$ 单调减少，因此 $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ 单调减少（$0 < x < 1$）。对每个固定的正整数 k，由于

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \left(\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^k,$$

因此当 $n > k$ 时，$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$ 关于 n 单调增加。而当 $n \to \infty$ 时，$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-k}$。因此 $n > k$ 时

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n < \mathrm{e}^{-k}.$$

记 $x_n = \dfrac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^n}$，则有

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^n} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-k} < \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}. \end{aligned}$$

由上面的推导还可得到：任意固定 K，当 $n > K$ 时

$$x_n > 1 + \sum_{k=1}^{K}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n,$$

注意当 $n \to \infty$ 时上式右端有极限 $1 + \sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{e}^{-k}$。$\forall \varepsilon > 0$，由

$$\lim_{K\to\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{K}\mathrm{e}^{-k}\right) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},$$

可取足够大的 K，使得

$$1 + \sum_{k=1}^{K}\mathrm{e}^{-k} > \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定这个 K，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$1 + \sum_{k=1}^{K}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n > 1 + \sum_{k=1}^{K}\mathrm{e}^{-k} - \frac{\varepsilon}{2},$$

从而当 $n > N$ 时

$$
\begin{aligned}
x_n &> 1 + \sum_{k=1}^{K}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \\
&> 1 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{e}^{-k} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon,
\end{aligned}
$$

于是

$$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon < x_n < \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \quad \Rightarrow \quad \left|x_n - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right| < \varepsilon.$$

由极限定义知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^n} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

■

注 本题求解过程比较复杂，涉及内容较多，包括：(1) 利用导数符号确定单调性；(2) 利用单调有界数列收敛定理确定极限与通项的大小关系：(3) 原数列的变形与极限的猜测；(4) 最后才是证明猜测。请仔细体会本题的思想方法，仿照本题的过程完成下面的同类题目的完整解答。另外，本题用上、下极限相等求解更简洁一些。

- 利用等价替换求极限

1. 当 $x \to 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\
&\sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x, \\
&\sec x - 1 \sim 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \\
&(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0).
\end{aligned}
$$

2. Sterling 公式：$n\to\infty$ 时

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

例 3.11 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right);\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin(x^2)(\mathrm{e}^x-1)}.$$

解 (1) 当 $n\to\infty$ 时，$1/n\to 0, \ln/n\to 0$，因而

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n},\qquad \sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n},$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right)\\ =&\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{\ln n}{n}\right)\\ =&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{2n}\right)\\ =&\,0.\end{aligned}$$

(2) $x\to 0$ 时，

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{2},$$

$$\sin(x^2)\sim x^2,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin(x^2)(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

■

例 3.12 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}\,n^3\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n};$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0)$.

解 (1) 因为 $n\to\infty$ 时，$\sqrt[n]{2}\to 1$，且

$$1-\cos\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{2n^4},$$
$$\sqrt{n^2+1}-n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\sim n\cdot\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2n},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\dfrac{1}{2n^4}}{\dfrac{1}{2n}}=1.$$

(2) 记 $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，则

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\right).$$

由于 $a_i^x-1=x\ln a_i+o(x)$，$1\leqslant i\leqslant n$, 因此

$$\begin{aligned}&\ln\left(1+\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\right)\\ \sim&\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\\ =&\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}x+o(x)\\ =&x\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+o(x),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+o(x)}{x}\\ &=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.\end{aligned}$$

最后得到

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to 0} f(x)=\exp\Big(\lim_{x\to 0}\ln f(x)\Big)\\
=&\exp\big(\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\big)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.
\end{aligned}
$$

(3) 令 $A=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则当 $x>1$ 时，成立

$$
A^x<a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x\leqslant nA^x,
$$

从而有

$$
\frac{A}{n^{1/x}}<\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant A,
$$

注意到 $n^{1/x}\to 1(x\to+\infty)$，因此由极限的夹逼性可得

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=A=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n).
$$

■

注 利用本例 (3) 可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\\
\overset{x=-t}{=}&\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{(a_1^{-1})^t+(a_2^{-1})^t+\cdots+(a_n^{-1})^t}{n}\right)^{-\frac{1}{t}}\\
=&\left[\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{(a_1^{-1})^t+(a_2^{-1})^t+\cdots+(a_n^{-1})^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1}\\
=&\left[\max(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1})\right]^{-1}\\
=&\min(a_1,a_2,\cdots,a_n).
\end{aligned}
$$

■

- **利用 O'Stolz 公式求极限**

1. 分母的单调性
2. 适用不定型 “$\frac{0}{0}$” 或 “$\frac{*}{\infty}$” 型

例 3.13 设 $p>-1$。证明无穷大的等价关系

$$1^p+2^p+\cdots+n^p\sim\frac{1}{p+1}n^{p+1},\quad n\to\infty.$$

证 由 Stolz 公式和无穷小的等价替换有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-(1-\frac{1}{n+1})^{p+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\frac{p+1}{n+1}}\right)=\frac{1}{p+1},$$

因此

$$1^p+2^p+\cdots+n^p\sim\frac{1}{p+1}n^{p+1},\quad n\to\infty.$$

■

例 3.14 证明：对任意固定的实数 α 以及 $a>1$，成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0.$$

证 不妨设 $\alpha>0$，取 $k=[\alpha]+1$，利用 k 次 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k-n^k}{a^{n+1}-a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k((1+\frac{1}{n})^k-1)}{a^n(a-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\cdot\frac{k}{n}}{a^n(a-1)}=\frac{k}{a-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}}{a^n}$$

$$=\cdots=\frac{k!}{(a-1)^k}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0,$$

注意到

$$0 \leqslant \frac{n^\alpha}{a^n} \leqslant \frac{n^k}{a^n},$$

由极限的夹逼性可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

■

例 3.15 设 $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln C_n^k$，求 $\lim_{n\to\infty} S_n$。

解 利用两次 Stolz 公式得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^{n} \ln C_n^k}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{n+1}{n+1-k}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(n+1) - \ln(n!)}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+2) - n\ln(n+1) - \ln(n+1)}{(2n+3)-(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1)[\ln(n+2) - \ln(n+1)]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} [(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = \frac{1}{2}.$$

■

注 组合数 $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ 的算术平均和几何平均分别为

$$A_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k, \quad G_n = \sqrt[n+1]{C_n^0 C_n^1 \cdots C_n^n},$$

由此知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}}\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}\right)^{-1}\\&=2\cdot1=2,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}&=\lim_{n\to\infty}(C_n^0C_n^1\cdots C_n^n)^{\frac{1}{n(n+1)}}\\&=\exp\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k\Big)\\&=\exp\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}S_n\Big)\\&=\exp\Big(1\cdot\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

例 3.16 设数列 $\{x_n\}$ 由递推关系

$$x_{n+1}=\sin x_n,\quad n\geqslant1$$

确定，证明渐进关系

$$x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}},\quad n\to\infty.$$

证 因为

$$|x_2|=|\sin x_1|\leqslant1,$$

因此利用归纳法容易得到

$$|x_{n+1}|=|\sin x_n|\leqslant|x_n|\leqslant\sin1,\quad n\geqslant3.$$

且有

$$|x_{n+1}|=|\sin x_n|<|x_n|,\quad n\geqslant3.$$

于是 $\{|x_n|\}$ 单调有界因而收敛。设 $|x_n| \to a \geqslant 0(n \to \infty)$，则由 $|x_{n+1}| = |\sin x_n| = \sin|x_n|\,(n \geqslant 3)$，令 $n \to \infty$ 得到 $a = \sin a$，从而必有 $a = 0$。因此 $\{x_n^2\}$ 单调减少趋于 0，$\left\{\dfrac{1}{x_n^2}\right\}$ 单调增加趋于 $+\infty$。由 Taylor 公式可得

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \sin x_n = x_n - \frac{1}{6}x_n^3 + o(x_n^3), \\ x_{n+1}^2 &= x_n^2 - \frac{1}{3}x_n^4 + o(x_n^4), \end{aligned}\right. \qquad n \to \infty,$$

利用 Stolz 公式和 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(nx_n^2) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(x_n^2-\frac{1}{3}x_n^4+o(x_n^4))}{x_n^2-(x_n^2-\frac{1}{3}x_n^4+o(x_n^4))} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4+o(x_n^4)}{\frac{1}{3}x_n^4+o(x_n^4)} = 3. \end{aligned}$$

因此

$$x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}, \quad n \to \infty.$$

■

*例 3.17 设 $\{a_n\}$ 是正数列，满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right) = 1.$$

证明：$\{a_n\}$ 具有渐进估计

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}, \quad n \to \infty.$$

证 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$，则 $\{S_n\}$ 是单调增加的，因此若此数列收敛，则有 $S_n - S_{n-1} = a_n^2 \to 0(n\to\infty)$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = 0,$$

矛盾于题设。因而必然有 $S_n \to +\infty(n\to\infty)$，进一步有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_nS_n)/S_n = 0.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_nS_{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} a_n(S_n - a_n^2)\\ &= \lim_{n\to\infty}(a_nS_n) - \lim_{n\to\infty} a_n^3\\ &= 1 - 0 = 1,\end{aligned}$$

由 Stolz 公式有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3}{n} &= \lim_{n\to\infty}(S_n^3 - S_{n-1}^3)\\ &= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2)\\ &= \lim_{n\to\infty} a_n^2(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2)\\ &= \lim_{n\to\infty}(a_nS_n)^2 + \lim_{n\to\infty}(a_nS_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_nS_{n-1}) + \lim_{n\to\infty}(a_nS_{n-1})^2\\ &= 1 + 1\cdot 1 + 1 = 3.\end{aligned}$$

因而成立

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(na_n^3) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{S_n^3}\cdot(a_n^3S_n^3)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^3}\cdot\lim_{n\to\infty}(a_nS_n)^3\\ &= \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

即有

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}, \quad n \to \infty.$$

得证。 ■

*例 3.18 设正数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2\ln n}}.$$

解 (1) 首先证明 $\{x_n\}$ 趋于 $+\infty$。由递推关系知 $\{x_n\}$ 单调增加，从而存在广义极限。若此极限是正常的，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a < +\infty,$$

则由单调性知 $x_n < a$，从而

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} > x_n + \frac{1}{na},$$

因而成立

$$x_{2n} - x_n = \sum_{k=n}^{2n-1} (x_{k+1} - x_k) > \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{ka} > n \cdot \frac{1}{2na} = \frac{1}{2a},$$

由 Cauchy 收敛原理知 $\{x_n\}$ 发散，矛盾。于是必有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

(2) 由 (1) 知

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = 0,$$

从而 $x_{n+1}\sim x_n(n\to\infty)$。

(3) 利用 (1) 和 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0.$$

(4) 最后，结合前面的结论，再利用等价关系 $\ln(n+1)-\ln n\sim\frac{1}{n}$，由 Stolz 公式有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{2(\ln(n+1)-\ln n)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n)}{2}\\
&=\lim_{n\to\infty}n(x_{n+1}-x_n)x_n\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\\
&\overset{stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x_{n+1}-nx_n}{x_{n+1}}\\
&=1+\lim_{n\to\infty}\frac{n(x_{n+1}-x_n)}{x_{n+1}}\\
&=1+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\\
&=1+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n+1}}\\
&=1+0\cdot 0=1,
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{2\ln n}}=1.$$

■

注 本例的解法还可如下简化：首先，由 $\{x_n\}$ 单调增加知其广义极限存在，从而存在正常极限 $\frac{1}{x_n}$，且利用 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=0,$$

因此 $x_{n+1}/x_n\to 1(n\to\infty)$。最后，利用 (4) 的计算可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2\ln n}=1+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\right)^2,$$

因而 x_n 与 $\sqrt{2\ln n}$ 同阶，由此得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$，进一步得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2\ln n}=1.$$

例 3.19 设 $\lim\limits_{n\to\infty}n(A_n-A_{n-1})=0$。证明：当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$ 存在时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}=\lim_{n\to\infty}A_n.$$

证 令 $a_1=A_1$，$a_n=A_n-A_{n-1}(n\geqslant 2)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)=0$。于是由 Stolz 公式有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot na_n\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(na_n)=0.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}\\=&\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n}{n}\\=&a_1+a_2+\cdots+a_n-\frac{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n}{n}\\=&A_n-\frac{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n}{n}.\end{aligned}$$

因而由前面的结果可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}=\lim_{n\to\infty}A_n.$$

得证。 ■

注 这里变形的过程其实就是 Abel **引理**的应用，它是求解本题的关键。

- **利用 L'Hospital 法则求极限**

适用不定型：“$\dfrac{0}{0}$ 型” 或 “$\dfrac{\star}{\infty}$ 型”

例 3.20 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,dt}.$$

解 由 L'Hospital 法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\,e^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

■

例 3.21 设 $f\in C^1(\mathbf{R})$，且存在 $M>0$ 使得

$$\sup\left|e^{-x^2}f'(x)\right|\leqslant M.$$

试证明：

$$\sup\left|x\,e^{-x^2}f(x)\right|<+\infty.$$

证 由微积分基本公式可得 $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(x)\,dx$，从而

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x |f'(x)| \,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x \mathrm{e}^{x^2} \left|\mathrm{e}^{-x^2} f'(x)\right| \,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x \mathrm{e}^{x^2} M \,\mathrm{d}x\right| \\
&= |f(0)| + M\left|\int_0^x \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x\right|,
\end{aligned}$$

于是

$$\left|x\,\mathrm{e}^{-x^2} f(x)\right| \leqslant \left|x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right| \cdot |f(0)| + M \cdot \left|x\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x\right|. \tag{1.3}$$

由 L'Hospital 法则，

$$\lim_{x\to\infty}(x\,\mathrm{e}^{-x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x\mathrm{e}^{x^2}} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{x^2} + \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x}{2x\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+2)\,\mathrm{e}^{x^2}}{(4x^2+2)\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

因此由(4.1)可得

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|x\,\mathrm{e}^{-x^2} f(x)\right| \leqslant \frac{M}{2}.$$

注意，函数 $x\,\mathrm{e}^{-x^2} f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，从而在任意有限区间上有界，结合上式知此函数在 $\mathbf{R}$ 上有界，因而成立

$$\sup\left|x\,\mathrm{e}^{-x^2} f(x)\right| < +\infty.$$

得证。 ■

例 3.22 证明方程 $x^n = 1 - x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一根 x_n，且数列 $\{x_n\}$ 收敛，具有渐近展开式：

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big), \quad n \to \infty.$$

证 (1) 令 $f_n(x) = x^n + x - 1$，则 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 内严格单调增加。又 $f_n(0) = -1, f_n(1) = 1$，因此由连续性知 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一零点 x_n。

(2) $\forall\, x \in (0,1)$，成立 $f_n(x) > f_{n+1}(x)$，因此 $f_{n+1}(x_n) < f_n(x_n) = 0$，而 $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$，因此 $x_n < x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 严格单调增加。由单调有界数列收敛定理知数列 $\{x_n\}$ 收敛于某个 a，$a > x_n \geqslant x_1 = \dfrac{1}{2}$。若 $a < 1$，则 $x_n < a < 1$，从而 $x_n^n \to 0 (n \to \infty)$。在等式 $0 = f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1$ 两边取极限得 $0 = 0 + a - 1$，因此 $a = 1$。矛盾。这个矛盾表明 $a = 1$，即有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

(3) 令 $t(n) = 1 - x_n$，则 $t = t(n)$ 是由方程 $\phi(t,n) = (1-t)^n - t = 0$ 确定的隐函数。注意 $\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = (1-t)^n \ln(1-t) < 0$，因此有逆映射 $n = n(t) = \dfrac{\ln t}{\ln(1-t)}$。注意，当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to 1 - 0$，因此 $t(n) \to 0+$，于是

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0+} \frac{\ln n(t)}{t n(t)} &= \lim_{t\to 0+} \frac{\ln \dfrac{\ln t}{\ln(1-t)}}{\dfrac{t\ln t}{\ln(1-t)}} = \lim_{t\to 0+} \frac{\ln \dfrac{\ln t}{\ln(1-t)}}{-\ln t} \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{\dfrac{1}{t\ln t} - \dfrac{-1}{(1-t)\ln(1-t)}}{-\dfrac{1}{t}} \quad \text{(L'Hospital)} \\
&= -\lim_{t\to 0+} \frac{t\ln t + (1-t)\ln(1-t)}{(1-t)\ln t \ln(1-t)} \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{t\ln t + (1-t)\ln(1-t)}{t\ln t} \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{\ln t - \ln(1-t)}{1 + \ln t} \quad \text{(L'Hospital)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0+} \frac{1/t + 1/(1-t)}{1/t} \\
&= \lim_{t\to 0+} \left(1 + \frac{t}{1-t}\right) = 1.
\end{aligned}
$$

即有 $\dfrac{\ln n(t)}{n(t)} \sim t$，或等价地有

$$
t(n) = 1 - x_n \sim \frac{\ln n}{n}, \quad n \to \infty,
$$

于是

$$
x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big).
$$

■

§4. 极限综合

- 连续性与极限

(1) 函数在连续点处极限等于函数值

(2) 初等函数在定义域包含的区间上连续

例 4.1 设 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 3$，求 a, b 的值。

解 如果 $a \neq 1$，则极限号下的函数在 $x = 0$ 处连续，从而极限是 0，矛盾于假设。因此必然有 $a = 1$，于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}(\cos x - b) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} \cdot \lim_{x\to 0}(\cos x - b) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \cdot (1 - b) \\
&= 1 - b = 3,
\end{aligned}
$$

因此 $b = -2$。上面利用了等价替换和初等函数的连续性。 ■

§4. 极限综合

- 可微性与极限

(1) 导数的定义

(2) 有限增量公式

例 4.2 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0, f'(0)=a$。求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

解 由导数定义有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a,$$

因此 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，成立

$$\left|\frac{f(x)}{x}-a\right|<\varepsilon,$$

从而得到

$$|f(x)-ax|<\varepsilon\cdot|x|.$$

令 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$，则当 $n>N$ 时

$$\frac{k}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}<\delta,\quad k=1,2,\cdots,n$$

从而

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-a\cdot\frac{k}{n^2}\right|<\varepsilon\cdot\frac{k}{n^2},\quad k=1,2,\cdots,n$$

因此当 $n>N$ 时

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)-a\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2},$$

即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)-\frac{n+1}{2n}a\right|<\frac{n+1}{2n}\varepsilon,$$

令 $n \to \infty$ 易得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{a}{2} = \frac{f'(0)}{2}.$$

■

- **定积分与极限**

(1) Riemann 和 (积分和) 的极限是定积分

(2) 积分估值与极限

例 4.3 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

解 记

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n},$$

则 S_n 是 Riemann 和，因此

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

然而

$$\frac{n}{n+1}S_n < \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} < S_n,$$

因此由极限的夹逼性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{\pi}.$$

■

例 4.4 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续的正值函数。求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}.$$

解 记

$$x_n=\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}.$$

由连续函数的性质知，存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$。于是

$$x_n\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b M^n\,\mathrm{d}x}=M\sqrt[n]{b-a},$$

从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\leqslant M.$$

另一方面，再由连续性，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得函数 $f(x)$ 在 x_0 的半邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 或 $(x_0-\delta,x_0]$ 内满足 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$，不妨设这个半邻域是 $[x_0,x_0+\delta)$。于是

$$x_n\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}f^n(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}(M-\varepsilon)^n\,\mathrm{d}x}=(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\delta},$$

取下极限得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\geqslant M-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\geqslant M.$$

结合前面关于上、下极限的不等式得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}x_n=M.$$

■

- 广义积分与极限

(1) 被积函数单调

(2) 广义 Riemann 和极限收敛到广义积分

例 4.5 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调，$x=0$ 为它的唯一奇点，且反常积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\varepsilon_n+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\dfrac{\theta}{n}<\varepsilon_n<\dfrac{1}{n}$，$\theta\in(0,1)$ 为常数.

证 不妨设 $f(x)$ 单调减少 (否则可考虑 $-f(x)$)，且当 $x>1$ 时定义 $f(x)=f(1)$。于是

$$\frac{1}{n}\cdot f\left(\varepsilon_n+\frac{i+1}{n}\right)\leqslant\int_{\varepsilon_n+\frac{i}{n}}^{\varepsilon_n+\frac{i+1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\cdot f\left(\varepsilon_n+\frac{i}{n}\right),$$

其中 $0\leqslant i\leqslant n-1$，因此对上式关于 i 求和得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\varepsilon_n+\frac{i+1}{n}\right)\leqslant\int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\varepsilon_n+\frac{i}{n}\right),$$

由此可得

$$\int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\varepsilon_n+\frac{i}{n}\right)\leqslant\int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_n+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\Big(f\big(\varepsilon_n\big)-f\big(\varepsilon_n+1\big)\Big),$$

令 $n\to\infty$，由极限的夹逼性可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\varepsilon_n+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

注 需要结论 $xf(x)\to 0(x\to 0+)$.

- 级数与极限

(1) 级数的和是部分和的极限；

(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛；

(3) 收敛级数通项趋于 0.

例 4.6 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$$

解 令 $x_n=\dfrac{2^n n!}{n^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)^n/n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1,$$

因此由 D'Alembert 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，从而通项趋于 0，即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

■

注 本题还可通过如下方法求解：首先，由二项式定理知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2,$$

从而 $\{x_n\}$ 单调减少：

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<1,$$

且有下界 0，因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，从而有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{\mathrm{e}}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n,$$

由此得到

$$\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

因而成立

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

例 4.7 设 $a_1 = a > 2$，数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系：$a_{n+1} = a_n^2 - 2(n \geqslant 1)$。求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\right).$$

解 设 $a_1 = x + \dfrac{1}{x}$，即 $x = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$。因此

$$a_2 = a_1^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

用归纳法可以得到：$a_n = x^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{x^{2^{n-1}}}(n \geqslant 1)$。由此有 (利用平方差公式)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1\cdots a_n} &= \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+\frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right)} \\
&= \frac{x-\frac{1}{x}}{x^{2^n}-\frac{1}{x^{2^n}}} = \frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} \\
&= \frac{x^2-1}{x}\left(\frac{1}{x^{2^n}-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\right) \\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{x^2-1}{x}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right) \\
=&\frac{1}{x} = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}.
\end{aligned}$$

■

注 事实上，上面的极限可以改写为一个级数求和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$，因此要用级数求和的方法，这里的方法称为**连锁消去法**或**裂项消去法**。

本章小结

极限题是各种考试中出现最多的题目。在一定程度上来说，学好了极限，基本上就学好了数学分析。对于极限题，我们应该有一个总体的认识。

首先，我们应该确定的是，这是否是一个单纯的极限题，也就是说，在教材中都可以直接放到极限出现的章节里，还是它是由别的分析概念衍生的，这对于方法的选择上是至关重要的。如果其它分析概念（如导数，积分等）出现在题目中，我们要弄清楚这些概念是为考虑极限服务的，即它们往往给出单调性，有界限，或者项的增长规律等，还是它只是借用极限的定义来为那些分析概念服务的，例如，这个极限定义了一个积分（Riemann 和），或者它可以通过反常积分收敛的 Cauchy 收敛原理来得到极限，等等。

其次，在上面一点已经确定的情况下，我们要确定解题的方法。极限的解题方法需要从极限的三种题型出发来确定。第一类题目是计算类题目，包括用极限的定义证明极限式，用等价替换、Stolz 公式、L'Hospital 法则、夹逼性、Taylor 公式、上下极限等计算极限，或者用极限的存在准则先证明极限存在，然后再求极限—注意，证明题也可能其实可以通过计算得到，因此归结为计算题。第二类题目直接就是证明或问极限的存在性，则用极限的收敛准则是唯一的选择，这些准则包括：(1) 数列极限与子列极限相等；(2) 单调有界收敛准则；(3) Cauchy 数列原理；(4) 上、下极限相等（需注意有界性）(5) 夹逼准则（此时可算出极限）。第三类题目是考察数列或函数的性质的，它包括数列的极限点的构成，有界性等。

最后一点，就是要确定解题的技巧，这在很大程度上是由前面两点考虑所决定的。这些技巧包括适当放大法、拟合法、适当变形、变量替换、Abel 变换等等，视题目情况而定。

第二章　一元函数连续性理论

§1. 函数的连续与间断

- 连续与间断

1. 函数连续性的定义

2. 函数的间断点分类

3. 函数连续性的等价描述

(1) 开区间上函数连续的充分必要条件是每个开区间的原像是开集，即一些开区间的并集；

(2) 闭区间上函数连续的充分必要条件是每个闭区间的原像是闭集，即某个开集的补集。

例 1.1 若 $x \neq 0$ 时

$$f(x) = \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}},$$

问：$f(0)$ 取何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，当且仅当 (利用 Taylor 公式)

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{x\to 0} f(x) = \exp\Big(\lim_{x\to 0}\ln f(x)\Big) \\
&= \exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\Big) \\
&= \exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2}\Big) \\
&= \exp(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.
\end{aligned}
$$

■

例 1.2 试构造一个初等函数，使得该函数以 $0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 和 $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\cdots$ 为其所有间断点，即该函数除在这些点处间断外，在其他点处都连续。

解 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2(\pi x)}+\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{x}}$ 满足题目要求。■

习题 5 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求 $f(x)$ 得间断点并指出其类型。

例 1.3 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数，满足

(1) 介值性：若 $f(x_1)<\eta<f(x_2)$，则存在 x_1,x_2 之间的点 ξ，使得 $f(\xi)=\eta$;

(2) 对每个有理数 r，其原像集 $f^{-1}(r)=\{x:f(x)=r\}$ 是闭集，即其所有聚点都在此集合内。

证明：$f\in C(\mathbf{R})$。

证 需要证明：$\forall x_0\in\mathbf{R}$，成立

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

$\forall\varepsilon>0$，固定一个有理数 $r_1\in(f(x_0),f(x_0)+\varepsilon)$，则 $f(x_0)<r_1<f(x_0)+\varepsilon$，于是 $x_0\notin f^{-1}(r_1)$。由于 $f^{-1}(r_1)$ 是闭集，因此

$$\delta_1=\operatorname{dist}(x_0,f^{-1}(r_1))=\min\{|x-x_0|:x\in f^{-1}(r_1)\}>0.$$

我们断定：当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，必然有 $f(x)<r_1$。若不然，存在这样的 x 使得 $f(x)\geqslant r_1$：(1) 若 $f(x)=r_1$，则有 $x\in f^{-1}(r_1)$，从而 $|x-x_0|\geqslant \operatorname{dist}(x_0,f^{-1}(r_1))=\delta_1$，这矛盾于 $|x-x_0|<\delta_1$；(2) 若 $f(x)>r_1$，则 $f(x_0)<r_1<f(x)$，从而由介值性假设，在 x_0 和 x 之间存在 ξ，使得 $f(\xi)=r_1$，注意此时 $|\xi-x_0|<|x-x_0|<\delta_1$，因此由 (1) 的讨论知仍有矛盾。这样就证明了我们的断言。

同理，取有理数 $r_2\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0))$，则存在 $\delta_2>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，成立 $f(x)>r_2$。

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$f(x_0)-\varepsilon<r_2<f(x)<r_1<f(x_0)+\varepsilon,$$

于是

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由极限的定义知

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

即 f 在 x_0 连续。

证毕。 ■

例 1.4 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调，$x_0\in(a,b)$。证明：$f(x)$ 在 x_0 连续的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，存在 $a<x_1<x_0<x_2<b$，使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

证 必要性. 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此只要 $a < x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon < b$ 就有

$$\begin{aligned}|f(x_2) - f(x_1)| &\leqslant |f(x_2) - f(x_0)| + |f(x_1) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

必要性得证。

充分性. 设 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$，使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

令 $\delta = \min(x_2 - x_0, x_0 - x_1) > 0$，则当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，必有 $x_0 < x < x_2$，从而由 $f(x)$ 的单调性有

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

同理可得，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时也有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

因此，只要 $|x - x_0| < \delta$，则必有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

有函数连续性的定义知 $f(x)$ 在 x_0 连续。充分性得证。 ■

例 1.5 设 $I \subset \mathbf{R}$ 为一个区间，f 是 I 上的函数。若对任意 $x, y \in I$，以及 $t \in [0, 1]$，总成立

$$f((1-t)\,x + t\,y)) \leqslant (1-t)\,f(x) + t\,f(y),$$

则称 $f(x)$ 是 I 上的一个**凸函数**。

证明：开区间 (a, b) 上的凸函数必定连续。

证 首先证明如下的**三弦定理**: 设 f 是区间 I 上的一个凸函数，$x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$，记 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2 f(x_2)), C(x_3, f(x_3))$，则三条弦 AB, AC, BC 的斜率 k_{AB}, k_{AC}, k_{BC} 满足

$$k_{AB} \leqslant k_{AC} \leqslant k_{BC}.$$[1]

令 $t = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$，则有

$$x_2 = x_1 + t(x_3 - x_1) = (1-t)\,x_1 + t\,x_3.$$

于是利用 f 的凸性可得

$$f(x_2) \leqslant (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_3). \tag{2.1}$$

(1) 在(2.1)两边同时减 $f(x_1)$ 得到

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant t[f(x_3 - f(x_1)],$$

从而有

$$\begin{aligned} k_{AB} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &\leqslant \frac{t}{x_2 - x_1}[f(x_3) - f(x_1)] \\ &= \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \\ &= k_{AC}. \end{aligned}$$

(2) 类似地，用 $f(x_3)$ 去减(2.1)的两端容易得到

$$k_{AC} \leqslant k_{BC}.$$

因此三弦定理结论成立。

下面证明本题结论。为此只需证明：$\forall x_0 \in (a,b)$，成立

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

[1]事实上，三弦定理的结论与函数的凸性是等价的。

固定 x_1, x_2 使得 $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$。当 $x_1 < x < x_2$ 且 $x \neq x_0$ 时，利用三弦定理有

$$\begin{aligned}
k_1 &\equiv \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \\
&\leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&\leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \\
&\equiv k_2.
\end{aligned}$$

令 $K = \max(|k_1|, |k_2|)$，则有

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant K |x - x_0|.$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon / K$，则当 $x \in (a, b)$ 且 $|x - x_0| < \delta$ 时成立

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant K |x - x_0| < K\delta = \varepsilon,$$

因此由极限定义知

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

得证。 ■

§2. 连续函数的性质和应用

- 连续函数的性质

1. **有界性原理**：闭区间上的连续函数有界。

2. **最大、最小值原理**：闭区间上的连续函数必取到最大、最小值。

3. **介值定理**：若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，$f(a) \neq f(b)$ ，对 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意实数 η ，存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = \eta$。

4. **零点定理**：设 $f \in C[a, b]$，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则 $\exists c \in (a, b)$，使得 $f(c) = 0$ 。

5. Cantor **定理 — 一致连续性定理**：闭区间上的连续函数必然一致连续。

- 连续函数的性质的应用

1. **利用函数连续性讨论其他性质**

例 2.1 证明: $\mathbf{R}$ 上连续的非常数周期函数 $f(x)$ 必有最小正周期。

证 反证法。若不然，存在连续函数 f，它有一列收敛于 0 的正周期 $\{T_n\}$: $T_n \to 0(n \to \infty)$。于是 $\forall x \neq 0$，由带余除法，$x = k_nT_n + r_n$，其中 $k_n \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant r_n < T_n$，由此得到 $r_n \to 0(n \to \infty)$(极限的夹逼性)。因此利用函数周期性得到

$$f(x) = f(k_nT_n + r_n) = f(r_n),$$

再利用 f 连续可得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(0),$$

于是 $f(x) \equiv f(0)$ 为常值函数，矛盾于题设。证毕。 ■

例 2.2 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，它在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 连续，且满足

$$f(x^2) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

证明：$f(x)$ 是常函数。

证 由 $f(x) = f(x^2)$ 知 f 是偶函数，因此只需考虑 $x \geqslant 0$ 上函数的情况即可。当 $x > 0$ 时，由题设有 $f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x}^2) = f(x)$，因此归纳地有

$$f(\sqrt[2^n]{x}) = f(x),$$

但 $\sqrt[2^n]{x} \to 1(n \to \infty)$，因此结合 f 连续可得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{x}) = f(1).$$

再利用函数 f 在 $x=0$ 连续可得

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(1).$$

因此 $f(x)\equiv f(1)$，即 f 是常函数。得证。 ■

例 2.3 证明：若 $f(x)$ 是区间 I 上的连续单射，则 $f(x)$ 是严格单调的。

证　要证明 f 是严格单调的，只需证明下面两种情况不可能出现：(1) 存在 $a,b,c\in I$，$a<b<c$，使得 $f(a)>f(b),f(c)>f(b)$；(2) 存在 $a,b,c\in I$，$a<b<c$，使得 $f(a)<f(b),f(c)<f(b)$。我们只证明第一种情况不可能；第二种情况可类似讨论。

若不然，设情况 (1) 出现，由于 f 是单射，因此 $f(a)\neq f(c)$。当 $f(a)<f(c)$ 时有 $f(b)<f(a)<f(c)$，从而由连续函数的介值性，存在 $d\in(b,c)$，使得 $f(d)=f(a)$，矛盾于 f 是单射；同理当 $f(a)>f(c)$ 时也存在 $d\in(a,b)$ 使得 $f(d)=f(b)$，因而也有矛盾。因此 (1) 不可能成立。得证。 ■

例 2.4 是否存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $f(x)$，使得对 $\forall x\in\mathbf{R}$，成立 $f[f(x)]=-x$?

解　首先证明：若满足条件的连续函数 f 存在，则 f 是单射。这是因为，若有 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则

$$f[f(x_1)]=f(f(x_2)],$$

但这表明 $-x_1=-x_2$ 即 $x_1=x_2$，矛盾。因此 f 是单射。

利用上例的结果知 f 必然严格单调，从而 $f\circ f$ 严格单调增加，但 $-x$ 是严格单调减少的，因而出现矛盾。

因此满足条件的连续函数不存在。 ■

习题 6 利用函数在 $\pm\infty$ 的极限的情况证明上例的结论。

提示　首先证明函数在无穷远的极限必为无穷，再对无穷的符号加以讨论得矛盾。

例 2.5 问：是否存在 **R** 上的连续函数 $f(x)$，满足 $f(x)+f(x^2)=x+x^2$?

解 记 $g(x)=f(x)-x$，则问题等价于满足条件 $g(x)=-g(x^2)$ 的连续函数的存在性。设 $g(x)$ 是一个解，则显然它是一个偶函数。设 $x>0$，则容易得出

$$g(x)=-g(\sqrt{x})=\cdots=(-1)^n g(x^{1/2^n}),$$

由于 $x^{1/2^n}\to 1(n\to\infty)$，因此由上式左边在 $n\to\infty$ 时的极限存在和 g 连续可以得出 $g(1)=0$，且 $g(x)\equiv g(1)=0$。最后利用连续性可得

$$g(0)=\lim_{x\to 0+0}g(x)=0,$$

从而利用奇偶性知 $g(x)=0$ 是唯一解，因而原函数方程有唯一解 $f(x)=x$。 ■

2. **利用零点定理讨论方程根的情况**

例 2.6 设 $f\in C(\mathbf{R})$，且满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。证明：存在 $\xi\in\mathbf{R}$，使得 $f(\xi)+\xi=0$。

证 令 $g(x)=f(x)+x$，则 $g(x)$ 连续，且有

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)+x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}+1=1.$$

因此由极限地局部保号性知，存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，成立

$$\frac{g(x)}{x}>0,$$

即有

$$g(x)>0,\quad x>X,$$

$$g(x)<0,\quad x<-X.$$

因此由零点定理知 $\xi\in\mathbf{R}$，使得 $f(\xi)+\xi=0$。

得证。 ■

例 2.7 设 $f(x) \in C[0,1]$，且 $f(x) < 1$。证明：方程 $2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的根。

证 令

$$F(x) = 2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 1,$$

易见 $F(x) \in C[0,1]$，且有 $F(0) = -1 < 0$，以及

$$F(1) = 1 - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - f(\xi)\cdot(1-0) = 1 - f(\xi) > 0,$$

这里利用了积分中值定理，$\xi \in [0,1]$。于是由零点定理知存在 $c \in (0,1)$ 使得 $F(c) = 0$，即 $x = c$ 是方程 $2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ 在 $(0,1)$ 内地一个根。

最后，由于 $F'(x) = 2 - f(x) > 0$，因此 $F(x)$ 严格单调增加，从而其零点不超过一个，即如上方程地根存在且唯一。

得证。 ■

例 2.8 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二次可微，且 $f(0) < 0, f'(0) > 0$，又当 $x > 0$ 时 $f''(x) > 0$。证明：方程 $f(x) = 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有且仅有一个实根。

证 由 $f''(x) > 0$ 知 $f'(x)$ 严格单调增加，从而当 $x > 0$ 时 $f'(x) > f'(0) > 0$，因此 $f(x)$ 严格单调增加，从而方程 $f(x) = 0$ 至多有一个根。

令 $a = -f(0)/f'(0)$，则 $a > 0$。由微分中值定理，

$$f(a) - f(0) = f'(\xi)\cdot a > f'(0)\cdot a = -f(0), \quad 0 < \xi < a,$$

因此 $f(a) > 0$。由零点定理，存在 $c \in (0,a)$，使得 $f(c) = 0$.

综合前面讨论知方程 $f(x) = 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有且仅有一个实根。得证。 ■

*例 2.9 设 $f \in C[0,ma], a > 0$，且 $f(0) = f(ma), m \geqslant 2$ 为正整数。证明：方程 $f(y) - f(x) = 0$ 满足 $y - x > 0$ 是 a 的正整数倍的解 (x,y) 至少有 $m-1$ 组。

证 采用归纳法。记 $g(x)=f(x+a)-f(x)$。于是

$$
\begin{aligned}
&g(0)+g(a)+\cdots+g((m-1)a)\\
&=[f(a)-f(0)]+[f(2a)-f(a)]+\cdots+[f(ma)-f((m-1)a)]\\
&=f(ma)-f(0)=0.
\end{aligned}
$$

若 $g(ka)=0$，则取 $\xi=ka$。若 $g(ka)\neq 0, k=1,2\ldots,m-1$，则由上式知存在 $0\leqslant i<j\leqslant m-1$，使得 $g(ia)$ 与 $g(ja)$ 有相反地符号，从而由零点定理知存在 $\xi\in(ia,ja)$，使得 $g(\xi)=0$。于是 $m=2$ 时结论已成立。

若当 m 时地结论已经成立，对 $m+1$ 时由前面讨论，存在 ξ 使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$。令

$$
\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ f(x+a), & \xi<x\leqslant(m+1)a.\end{cases}
$$

由于 $\tilde{f}(\xi-0)=f(\xi)$，$\tilde{f}(\xi+0)=f(\xi+a)$，因此 $\tilde{f}$ 在 $x=\xi$ 连续，而它在其他点地连续性显然。于是 $\tilde{f}\in C[0,ma]$。

最后，$\tilde{f}(ma)=f((m+1)a)=f(0)$(归纳假设)，因此由 m 时结论成立知，对函数 $\tilde{f}$，方程 $\tilde{f}(y)-\tilde{f}(x)=0$ 满足 $y-x>0$ 是 a 的整数倍的解 (x,y) 至少有 $m-1$ 组。注意，设 (x,y) 是满足 $\tilde{f}(y)-\tilde{f}(x)=0$ 一组解，则：当 $y<\xi$ 时它也是方程 $f(y)-f(x)=0$ 的解；当 $x>\xi$ 时亦然；若 $x\leqslant\xi<y$，则 $\tilde{f}(y)-\tilde{f}(x)=0$ 表明 $f(y+a)-f(x)=0$，因此 $(x,y+a)$ 是方程 $f(y)-f(x)=0$ 的解。由于 $y-x$ 是 a 的正整数倍，因此对应于 $\tilde{f}$ 的这 $m-1$ 组解得到 f 的 $m-1$ 组解，且它们都不是 f 的解 $(\xi,\xi+a)$。于是得到 f 对应的 m 组解。即结论在 $m+1$ 时也成立。

由归纳法原理知本题结论对一切 $m\geqslant 2$ 都成立。

证毕。 ■

例 2.10 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$。证明：

(1) 方程 $f_n(x)=1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一的实根 $x=x_n$；

(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

证 (1) 显然，$f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且严格单调增加，由 $f_n(0)=0, f_n(1)=n$ 知存在唯一的 $x_n>0$ 使得 $f_n(x_n)=1$，即方程 $f_n(x)=1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一的实根 $x=x_n$，满足 $0<x_n<1$。

(2) 由于 $f_{n+1}(x_n)=f_n(x_n)+x_n^{n+1}=1+x_n^{n+1}>1$ 而 $f_{n+1}(x_{n+1})=1$，因此必有 $x_{n+1}<x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调减少。而显然 0 是此数列的下界，因此此数列单调有界，从而收敛。

设 $x_n\to a(n\to\infty)$，则由数列收敛的性质知 $0\leqslant a\leqslant x_2<1$。由于

$$1=f_n(x_n)=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n},$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$1=\frac{a}{1-a},$$

从而 $a=\dfrac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

■

3. **一致连续性的证明方法**

(i) 用定义直接证明；

(ii) 利用 Lipschitz 条件或 Hölder 条件；

(iii) 利用导数有界证明。

例 2.11 证明函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是一致连续的。

证 方法一，利用定义证明。注意到，当 $0\leqslant x_1<x_2$ 时，成立

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|\leqslant\sqrt{x_2}$$

以及

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| = \frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \leqslant \frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_2}}.$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^2$，则当 $0\leqslant x_1<x_2<\delta$ 时，自然有

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| \leqslant \sqrt{x_2} < \sqrt{\delta} = \varepsilon;$$

当 $|x_1-x_2|<\delta$ 且 $x_2\geqslant\delta$ 时，成立

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| \leqslant \frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_2}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \varepsilon.$$

因此，只要 $0\leqslant x_1<x_2$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 就有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon.$$

因而按照一致连续的定义知，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是一致连续的。

方法二，适当放大法。$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^2$，则当 $x_1,x_2\geqslant0$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，成立

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| \leqslant \sqrt{|x_1-x_2|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon,$$

因而按照一致连续的定义知，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是一致连续的。 ■

例 2.12 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都一致连续，证明它也在 $[a,c]$ 上一致连续。

证 $\forall\varepsilon>0$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都一致连续，分别存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2, x_1,x_2\in[a,b],\ |x_1-x_2|<\delta_1,$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2, x_1,x_2\in[b,c],\ |x_1-x_2|<\delta_1.$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $x_1,x_2\in[a,c]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，不妨设 $x_1<x_2$，分以下三种情况讨论：

(1) $x_1,x_2\in[a,b]$，此时

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2<\varepsilon;$$

(2) $x_1, x_2 \in [b, c]$，此时仍有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2 < \varepsilon;$$

(3) $x_1 \leqslant b \leqslant x_2$，此时 $|c - x_1| < |x_2 - x_1| < \delta <\leqslant \delta_1, |x_2 - b| < |x_2 - x_1| < \delta < \delta_2$，从而有

$$|f(x_1) - f(x_2| \leqslant |f(x_1) - f(b)| + |f(x_2) - f(b)| \quad < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

因此总成立

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

由定义知函数 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上一致连续。 ■

例 2.13 若 $f(x)$ 在区间 I 上满足以下两组条件之一，则 $f(x)$ 一致连续：

(1) $f(x)$ 满足 Hölder 条件：存在 $L > 0, \alpha \in (0, 1]$，使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in I.$$

(2) $f(x)$ 在 I 上可导且 $|f'(x)| \leqslant M$。

证 (1) 取 $\delta = (\varepsilon/L)^{1/\alpha}$ 即可；(2) 取 $\delta = \varepsilon/M$ 即可。详细过程略。

习题 7 补全上例的证明过程。

例 2.14 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是：对于项的值在区间 I 中的任意两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，只要 $x_n - y_n \to 0 (n \to \infty)$，则必有 $f(x_n) - f(y_n) \to 0 (n \to \infty)$。

证 (1) 必要性。设 $f(x)$ 在 I 上一致连续，且 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是取值在区间 I 中的两个数列，满足 $x_n - y_n \to 0 (n \to \infty)$。由一致连续性，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $x, y \in I$ 且 $|x - y| < \delta$ 则有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

由 $x_n-y_n\to 0(n\to\infty)$，存在 N 为正整数，使得当 $n>N$ 时，成立 $|x_n-y_n|<\delta$，从而有

$$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$$

由极限的定义有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

必要性得证。

(2) 充分性。反证法。若 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 $\delta>0$，存在 I 中的 x,y，满足 $|x-y|<\delta$，但

$$|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon_0.$$

分别取 $\delta=\dfrac{1}{n}$，对应的 x,y 取为 x_n,y_n，$n=1,2,\cdots$，则有 $|x_n|<\dfrac{1}{n}$，且 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$。但是，条件 $|x_n|<\dfrac{1}{n}$ 意味着 $x_n-y_n\to 0(n\to\infty)$，而 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$ 意味着 $f(x_n)-f(y_n)$ 不趋于 0，这与假设矛盾。因此 f 必然在 I 上一致连续。

充分性得证。 ■

注 本题的结论可以称为“**函数一致收敛的 Heine 归结原理**”。它更多地被用来说说明函数不一致连续，其方法是：取区间 I 中地两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，使得 $x_n-y_n\to 0$ 但 $f(x_n)-f(y_n)$ 不趋于 0，$n\to\infty$，从而 f 不一致连续。见下面地例题。

例 2.15 证明函数 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不一致连续。

证 取 $x_n=\sqrt{2n\pi}$，$y_n=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则有

$$x_n-y_n=\sqrt{2n\pi}-\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}\to 0(n\to\infty),$$

但

$$f(x_n)-f(y_n)=-1.$$

因此 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不一致连续。 ■

例 2.16 设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$，$a$ 为常数。证明：$f(x)$ 在 $(0,a]$ 内非一致连续，而在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证　(1) 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则易见 $x_n\to 0, y_n\to 0(n\to\infty)$，从而 $x_n-y_n\to\infty$，但

$$f(x_n)-f(y_n)>1,$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 内非一致连续。

(2) 由于

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\sin\frac{1}{x}-\frac{x+2}{x^2(x+1)}\cos\frac{1}{x},$$

因此当 $x\geqslant a$ 时

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+2}{x^2(x+1)}\leqslant 1+\frac{2}{a^2},$$

即 $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，因此 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。 ■

例 2.17 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\varphi(x)\in C[a,+\infty)$，且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0.$$

证明：$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证　$\forall\varepsilon>0$，由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，存在 $\delta_1\in(0,1)$，使得当 $x,y\in[a,+\infty)$ 且 $|x-y|<\delta_1$ 时，成立

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/3.$$

又由题设知存在 $X>a$，使得当 $x>X$ 时成立

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon/3.$$

于是当 $x,y>X$ 且 $|x-y|<\delta_1$ 时有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)| &\leqslant |\varphi(x)-f(x)|+|\varphi(y)-f(y)|+|f(x)-f(y)| \\ &< \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.2}$$

再由 $\varphi(x)\in C[a,X+1]$ 知 $\varphi(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上一致连续，从而存在 $\delta_2\in(0,1)$，使得当 $x,y\in[a,X+1]$ 且 $|x-y|<\delta_2$ 时成立

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon. \tag{2.3}$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $x,y\in[a,+\infty)$ 且 $|x-y|<\delta$ 时，不妨设 $x\leqslant y$，分两种情况讨论：

(1) $x>X$ 从而 $y>X$，此时 $|x-y|<\delta\leqslant\delta_1$，从而(2.2)成立。

(2) $x\leqslant X$ 此时

$$y<|x-y|+x<\delta+X<X+1,$$

从而仍(2.3)成立。

因此由定义知 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。 ■

*例 2.18 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一致连续函数，证明：存在 $a,b>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant a\cdot|x|+b.$$

证 由 f 一致连续，对 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|x-y|\leqslant\delta$，就有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon=1.$$

于是当 $0\leqslant x<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(0)|\leqslant 1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(0)|+1.$$

$\forall x>0$，由带余除法，$x=k\delta+r_x$，其中 $k\geqslant 0$ 为整数，$0\leqslant r_x<\delta$。于是有

$$|f(r_x)|\leqslant|f(0)|+1,$$

以及

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(r_x)| &= |f(k\delta+r_x)-f(r_x)| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{k-1}[f((i+1)\delta+r_x)-f(i\delta+r_x)]\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k-1}|f((i+1)\delta+r_x)-f(i\delta+r_x)| \\
&\leqslant k,
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant |f(x)-f(r_x)|+|f(r_x)| \\
&\leqslant k+|f(0)|+1 \\
&= \frac{x-r_x}{\delta}+|f(0)|+1 \\
&\leqslant \frac{1}{\delta}x+|f(0)|+1.
\end{aligned}
$$

取 $a=\dfrac{1}{\delta}, b=|f(0)|+1$，则有

$$
|f(x)| \leqslant a\cdot|x|+b.
$$

当 $x\leqslant 0$ 时可类似讨论得到上面的不等式（也可以通过作变换 $x=-t$ 来得出）。

得证。■

例 2.19 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对任意固定的 $x>0$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$。证明

$$
\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.
$$

证 $\forall\varepsilon>0$，由一致连续性，$\exists\delta>0$，当 $x,y\geqslant 0$ 且 $|x-y|<\delta$ 时

$$
|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2.
$$

取正整数 k，使得 $\frac{1}{k} < \delta$，记 $x_j = \frac{j}{k}, j = 0, 1, \cdots, k$。由 $\lim_{n\to\infty} f(x_j + n) = 0$，$\exists N_j$，当 $n > N_j$ 时，$|f(x_j + n)| < \varepsilon/2$，$j = 0, 1, \cdots, k$。令 $X = N_0 + N_1 + \cdots + N_k + 1$，当 $x > X$ 时，令 $m = [x]$，则 $m > N_j(\forall j)$，此时 x 的小数部分 (x) 必然在某个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 中，从而成立

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(m + (x))| \\
&\leqslant |f(x_j + m)| + |f(x_j + m) - f(m + (x))| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此由极限定义知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

■

例 2.20 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$ 且在 $(0, +\infty)$ 内可导。若广义极限 $\lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = A$ 存在，证明：$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续 $\Leftrightarrow A$ 有限。

证 (1) 充分性。若 A 有限，则存在 $X > 0$，当 $x > X$ 时 $|f'(x)| < A + 1$。因此 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上一致连续。再利用 $f(x)$ 在 $[0, X + 1]$ 上一致连续，$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。

(2) 必要性。若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，则 A 有限。若不然，对 $\varepsilon = 1$，$\forall \delta > 0$，由 $\lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = +\infty$，存在 $X > 0$，当 $x > X$ 时 $|f'(x)| > \frac{2}{\delta}$，从而由微分中值定理有

$$\left| f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) \right| = |f'(\xi)| \cdot \frac{\delta}{2} > 1 = \varepsilon, \quad \forall x > X,$$

这与 f 在 $[0, +\infty$ 上一致连续矛盾。因此 $A < +\infty$。 ■

例 2.21 若 $f \in C(a, b)$。

(1) 无论 a, b 是否有限，当单侧极限 $f(a + 0), f(b - 0)$ 存在时，f 一致连续。

(2) 若 a, b 有限，则 (1) 中的条件还是必要的。

证 (1) 用定义证明。首先设 a,b 都是有限数。

$\forall \varepsilon > 0$，由单侧极限 $f(a+0), f(b-0)$ 存在知，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $a < x < a+2\delta_1$ 时，成立

$$|f(x) - f(a+0)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

存在 $\delta_2 > 0$，当 $b - 2\delta_2 < x < b$ 时，成立

$$|f(x) - f(b-0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $x, y \in (a, a+2\delta_1)$ 时成立

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f(a+0)| + |f(y) - f(a+0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

同理，当 $x, y \in (b - 2\delta_2, b)$ 时也有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

这里不妨假设 $a + 2\delta_1 < b - 2\delta_2$。最后，由于 $f(x)$ 在 $[a+\delta_1, a+\delta_2$ 上连续，因而一致连续，从而存在 $\delta_3 > 0$，使得当 $x, y \in [a+\delta_1, b-\delta_2]$ 且 $|x-y| < \delta_3$ 时，成立

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$，则当 $x, y \in (a,b)$ 且 $|x-y| < \delta$ 时，分三种情况讨论：

(i) $x < a+\delta_1$ 或 $y < a+\delta_1$. 不妨设是前者，此时

$$y < |x-y| + x < \delta + a + \delta_1 \leqslant a + 2\delta_1,$$

由前面讨论知必有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(ii) 同理，若 $x > b - \delta_2$ 或者 $y > b - \delta_2$，则也有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(iii) $a + \delta_1 < x, y < b - \delta_2$，此时 $|x - y| < \delta \leqslant \delta_3$，因而仍有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

综合上述讨论知 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续。

当 $b = +\infty$ 时，只要把前面证明中的 δ_2 换为某个 $X_2 > 0$ 即可，对 $a = -\infty$ 可类似处理。

(2) 只需证明必要性。即证明当 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续时，单侧极限 $f(a + 0)$ 和 $f(b - 0)$ 都存在。

$\forall \varepsilon > 0$，由 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续，存在 $\delta > 0$，使得当 $x, y \in (a, b)$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，成立

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

特别地，当 $x, y \in (a, a + \delta)$ 时，不妨设 $x \geqslant y$，于是 $0 < x - y < (a + \delta) - a = \delta$，从而有前一个不等式成立。由 Cauchy 收敛原理知单侧极限 $f(a + 0)$ 存在。同理有 $f(b - 0)$ 存在。

得证。 ■

- 函数的上半连续和下半连续的定义和性质

定义 2.1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义。若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时成立

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (f(x) < f(x_0) - \varepsilon, resp)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 是上半连续的 (或下半连续的，resp)。

若 $f(x)$ 在区间 I 上每点处都是上半连续的 (或下半连续的)，则称 $f(x)$ 是 I 上**上半连续的** (**或下半连续的**)。

(1) $f(x)$ 在点 x_0 是上半连续的 (或下半连续的，resp) $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0)$ ($\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0)$, resp).

(2) $f(x)$ 在点 x_0 是连续的 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 既上半连续，也下半连续。

例 2.22 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上上半连续。证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值。

证 $\forall x \in [a,b]$，由上半连续的定义，存在 $\delta > 0$，使得当 $y \in [a,b]$ 且 $|y-x| < \delta$ 时，成立

$$f(y) < f(x_0) + 1,$$

即函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \equiv U_x$ 上有上界 $M_x \equiv f(x)+1$。注意 $\{U_x : x \in [a,b]\}$ 构成闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，因而存在有限的子覆盖 $\{U_{x_i} : i = 1, 2, \cdots, m\}$。令 $B = \max\{M_{x_i} : 1 \leqslant i \leqslant m\}$，则 B 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界。

由确界存在原理，$H = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} < +\infty$。但由确界的性质知，存在 $x_n \in [a,b]$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = H.$$

由于 $\{x_n\}$ 有界，因此有收敛的子列，不妨设就是这个数列本身，即有 $x_n \to \xi \in [a,b]$ $(n\to\infty)$。下面证明 $f(\xi) = H$。

由于 H 是上确界，因此 $f(\xi) \leqslant H$。下证：$\forall \varepsilon > 0$，$f(\xi) \geqslant H - \varepsilon$，从而由 ε 的任意性知 $f(\xi) \geqslant H$，进而完成证明。

由 f 的上半连续性，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x-\xi| < \delta$ 时 $f(x) < f(\xi) + \varepsilon$。而由 $x_n \to \xi$ 知存在 N，当 $n > N$ 时 $|x_n \xi| < \delta$，从而 $f(x_n) < f(\xi) + \varepsilon$，令 $n \to \infty$ 得到

$$H = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(\xi) + \varepsilon,$$

即有 $f(\xi) > H - \varepsilon$。得证。 ■

第三章　一元函数微分学及其应用

§1. 导数的定义与计算

1.1　导数的定义和性质

- 导数与左、右导数的定义
- 可导条件

(1) 左右导数相等；

(2) 有限增量公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

或

$$f(x) = f(x_0) + \omega(x)(x - x_0),$$

其中 $\omega(x)$ 在 x_0 连续，且 $\omega(x_0) = f'(x_0)$。

(3) $f(x)$ 在点 x_0 可微，且

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

例 1.1　设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2018)$，求 $f'(0)$。

解 由定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\big[(x+1)(x+2)\cdots(x+2018)\big]$$

$$=2018!.$$

■

例 1.2 设 $f(x)\sim x(x\to 0)$，$f(x),g(x)$ 都在 $x=0$ 连续。证明：$f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 可导，且其导数为 $g(0)$。

证 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续且 $f(x)\sim x(x\to 0)$ 知 $f(x)=x+o(x)$，从而 $f(0)=0$。因此

$$(fg)'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}g(x)$$

$$=1\cdot g(0)=g(0).$$

■

例 1.3 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且当 $|x|<\delta$ 时 $f(x)\geqslant|x|$ 。证明：$f(0)>0$ 。

证 由题设知 $f(0)\geqslant 0$，因此只需证明 $f(0)\neq 0$ 即可。反证法。

若不然 $f(0)=0$，于是

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)}{x}\leqslant\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)}{x}\geqslant\lim_{x\to 0-0}\frac{x}{x}=1.$$

这与 $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)$ 矛盾。因此必有 $f(0)>0$。 ■

例 1.4 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=A,$$

证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导并求 $f'(0)$。

解 $\forall\varepsilon>0$，由极限的定义，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x|<\delta$ 时，成立

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}<A+\varepsilon,$$

因此当 $0<x<\delta$ 时

$$(A-\varepsilon)\,x<f(x)-f(\frac{x}{2})<(A+\varepsilon)\,x,$$

$$(A-\varepsilon)\,\frac{x}{2}<f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2^2})<(A+\varepsilon)\,\frac{x}{2},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$(A-\varepsilon)\,\frac{x}{2^{n-1}}<f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})<(A+\varepsilon)\,\frac{x}{2^{n-1}},$$

各式相加得

$$(A-\varepsilon)\,(2-\frac{1}{2^{n-1}})\,x<f(x)-f(\frac{x}{2^n})<(A+\varepsilon)\,(2-\frac{1}{2^{n-1}})\,x.$$

固定 x，在上式中令 $n\to\infty$，由极限的保序性得

$$2(A-\varepsilon)\,x\leqslant f(x)-f(0)\leqslant 2(A+\varepsilon)\,x,$$

因而成立

$$-2\varepsilon\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-2A<2\varepsilon.$$

类似地，当 $-\delta<x<0$ 时可得

$$2(A+\varepsilon)\,x\leqslant f(x)-f(0)\leqslant 2(A-\varepsilon)\,x,$$

从而仍有

$$-2\varepsilon \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 2A < 2\varepsilon.$$

于是当 $0<|x|<\delta$ 时，成立

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 2A\right| < 2\varepsilon,$$

由极限的定义知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2A,$$

即 $f'(0)=2A$。 ■

例 1.5 讨论下列条件与 $f'(a)$ 存在的等价性：

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)-f(a)\right]$ 存在；

(2) 极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在；

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 存在；

(4) 极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在。

解 (1) 条件给出 $f'_+(a)$；(2) 条件给出 “对称导数”，与导数 $f'(a)$ 没关系；(3) 与导数 $f'(a)$ 没关系，在 $f(x)$ 在点 a 连续的条件下给出 $f'(a)$(为什么？)；(4) 与 $f'(a)$ 等价。 ■

1.2 导数的计算

- **求导法则**

(1) 四则运算：

$$(f+g)' = f'+g', \quad (cf)' = cf',$$

$$(fg)' = f'g+fg', \quad (f/g)' = (f'g-fg')/g^2.$$

(2) 复合函数求导法则

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

(3) 隐函数求导法则：设 $F(x,y)=0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}, \quad F_y \neq 0.$$

(4) 由参数方程确定的函数的求导法则：设 $x=x(t), y=y(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad x'(t) \neq 0.$$

(5) 积分上、下限含有变量以及含参变量积分确定的函数的求导法则：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t\right) =& f(v(x),x)\cdot v'(x) - f(u(x).x)\cdot u'(x) \\ &+ \int_{u(x)}^{v(x)} f'_x(t,x)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(6) 反函数求导法则：设 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}.$$

(7) 高阶导数与高阶微分

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]', \qquad \mathrm{d}^n y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y).$$

(i) 当 x 是自变量时，$\mathrm{d}^n y = y^{(n)}\,\mathrm{d}x^n$。当 x 是中间变量时，这个关系式不成立。

(ii) 高阶导数求导有 Leibniz 公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

(iii) 求高阶导数还有拆项，递推等方法，参看后面例题。

例 1.6 设函数 $f(t)$ 具有二阶导数，$f''(t) \neq 0$。证明：参数方程

$$x = f'(t), \quad y = tf'(t) - f(t)$$

确定了一个二阶可导函数 $y = y(x)$，并求其二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

证 因为 $f''(t) \neq 0$ 存在，因此 $f'(t)$ 连续且严格单调，因而由 $x = f'(t)$ 唯一确定了一个反函数 $t = (f')^{-1}(x)$，从而确定了一个函数 $y = y(x) = y((f^{-1}(x))$。且有

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= y'(t) \cdot \frac{1}{x'(t)} \\
&= \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} \\
&= t, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= \frac{d}{dt}(t) \cdot \frac{1}{f''(t)} \\
&= \frac{1}{f''(t)}.
\end{aligned}$$

■

注 由于 $x''(t), y''(t)$ 未必存在，因此不能套用公式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(y)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}.$$

一般地，由参数方程确定的函数求高阶导数可以用如下递推过程：设

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = f_1(t),$$

则有

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f_1'(t)}{x'(t)} = f_2(t),$$

于是若

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f_n(t),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} y}{\mathrm{d}x^{n+1}} = \frac{f_n'(t)}{x'(t)} = f_{n+1}(t), \cdots.$$

例 1.7 设 $y = y(x)$ 二阶可导且 $y'(x) \neq 0$，证明：若 $y = y(x)$ 满足方程 $y''(x) + [y'(x)]^3 = 0$，则反函数 $x = x(y)$ 满足 $x''(y) = 1$。

进一步，若 $y = y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，在 $(0, +\infty)$ 内二阶可导，$y(0) = 1, y(2) = 2$，求 $y(x)$。

解 因为

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}, \quad x''(y) = -\frac{y''(x)}{(y'(x))^2} \cdot x'(y) = -\frac{y''(x)}{(y'(x))^3},$$

从而方程 $y''(x) + [y'(x)]^3 = 0$ 变成 $x''(y) = 1$。

最后，求解 $x''(y) = 1$ 得

$$x(y) = \frac{y^2}{2} + ay + b,$$

再由 $y(0) = 1, y(2) = 2$ 得到 $x(1) = 0, x(2) = 2$，即

$$\frac{1}{2} + a + b = 0, \quad 2 + 2a + b = 2,$$

解之得 $a = \frac{1}{2}, b = -1$，从而 $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y - 1$，因此

$$y = y(x) = \frac{-1 + \sqrt{9 + 8x}}{2}.$$

注意，另一根不满足题意。 ■

例 1.8 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\dfrac{2x+1}{x^2-x-2}$，　　(2) $y=\sin x\sin 2x$。

解　(1) 因为

$$y=\frac{2x+1}{x^2-x-2}=\frac{5/3}{x-2}+\frac{1/3}{x+1},$$

因此

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\\&=\frac{n!\cdot(-1)^n}{3}\left[\frac{5}{(x-2)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].\end{aligned}$$

(2) 由于

$$y=\frac{\cos x-\cos 3x}{2},$$

因此

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\frac{1}{2}\left[(\cos x)^{(n)}-(\cos 3x)^{(n)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-3^n\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{2}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

■

例 1.9 设 $f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^x$，求 $f^{(n)}(-1)$。

解　利用 Leibniz 公式易得

$$f^{(n)}(x)=[n!+(x+1)p(x)]\,\mathrm{e}^x,$$

其中 $p(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式。因此

$$f^{(n)}(-1)=n!\,\mathrm{e}^{-1}.$$

■

例 1.10 设

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\left(\ln|x|\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $n\geqslant 2$。证明：当 $k\leqslant n-1$ 时，

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases} x^{n-k}\left[a_k\sin\left(\ln|x|\right)+b_k\cos\left(\ln|x|\right)\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $a_k,b_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 为常数；$f(x)$ 除 $x=0$ 外存在 n 阶导数。

证 采用归纳法。$k=0$ 时显然成立，且有 $a_0=1,b_0=0$。

设 $0\leqslant k\leqslant m\leqslant n-2$ 时成立，则当 $x\neq 0$ 时

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(m)}(x)\right]\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{n-m}\big(a_m\sin\left(\ln|x|\right)+b_m\cos\left(\ln|x|\right)\big)\right]\\ &=(n-m)x^{n-m-1}\left[x^{n-m}\big(a_m\sin\left(\ln|x|\right)+b_m\cos\left(\ln|x|\right)\big)\right]\\ &\quad+x^{n-m}\big(a_m\cos\left(\ln|x|\right)-b_m\sin\left(\ln|x|\right)\big)\cdot\frac{1}{x}\\ &=x^{n-m-1}\left[a_{m+1}\sin\left(\ln|x|\right)+b_{m+1}\cos\left(\ln|x|\right)\right], \end{aligned}$$

其中

$$a_{m+1}=(n-m)a_m-b_m,\quad b_{m+1}=a_m+(n-m)b_m,$$

或

$$\begin{pmatrix} a_{m+1}\\ b_{m+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n-m & -1\\ 1 & n-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_m\\ b_m\end{pmatrix}.$$

又因为 $m \leqslant n-2$，因而 $n-m-1 \geqslant 1$, 于是

$$
\begin{aligned}
f^{(m+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(m)}(x) - f^{(m)}(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0} x^{n-m-1}\big(a_m \sin(\ln|x|) + b_m \cos(\ln|x|)\big) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

因此结论对 $n = m+1$ 也成立。

由归纳法原理知当 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 时结论成立。

类似于上面推导可见，当 $x \neq 0$ 时，$f(x)$ 的 n 阶导数存在，但形式上，

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0} \big[a_{n-1} \sin(\ln|x|) + b_{n-1} \cos(\ln|x|)\big],
\end{aligned}
$$

此极限存在当且仅当 $a_{n-1} = b_{n-1} = 0$。利用上面系数向量 $(a_k, b_k)^T$ 的递推关系中过渡矩阵非退化，归纳地可得，这个条件等价于 $a_0 = b_0 = 0$。矛盾。因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 不存在 n 阶导数。

■

例 1.11 设 $y = (\arcsin x)^2$。证明：

$$(1-x^2)\, y^{(n+2)} - (2n+1)\, x\, y^{(n+1)} - n^2\, y^{(n)} = 0.$$

并由此求 $y^{(n)}(0)$。

解 因为

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \\
y'' &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}},
\end{aligned}
$$

因此

$$(1-x^2)y'' = 2 + x\,y',$$

对上式两边关于 x 同时求 n 阶导数 ($n \geqslant 1$)，利用 Leibniz 公式得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2n\,x\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)},$$

整理得到

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} - n^2\,y^{(n)} = 0, \quad n \geqslant 1.$$

在上式中令 $x=0$ 可得

$$y^{(n+2)}(0) = n^2\,y^{(n)}(0), \quad n \geqslant 1.$$

再注意到 $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=2$，递推可得

$$y^{(2n-1)}(0)=0, \quad y^{(2n)}(0) = 2^{2n-1}\,[(n-1)!]^2.$$

■

例 1.12 证明：Legendre(勒让德) 多项式

$$y = p_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

满足方程

$$(1-x^2)y'' + 2\,x\,y' - n\,(n+1)\,y = 0.$$

证 令 $u=u(x)=(x^2-1)^n$，则

$$u' = 2\,n\,x\,(x^2-1)^{n-1},$$

从而

$$(x^2-1)u' = 2\,n\,x\,(x^2-1)^n = 2\,n\,x\,u.$$

两边对 x 求 $n+1$ 阶导数得

$$
\begin{aligned}
&(x^2-1)u^{(n+2)}+(n+1)\cdot 2x\cdot u^{(n+1)}+\frac{(n+1)n}{2}\cdot 2\cdot u^{(n)}\\
=&(n+1)\cdot 2n\cdot u^{(n)}+2\,n\,x\,u^{(n+1)},
\end{aligned}
$$

整理得到

$$(x^2-1)\,u^{(n+2)}+2\,x\,u^{(n+1)}-n\,(n+1)\,u^{(n)}=0.$$

注意到 $y=\dfrac{1}{2^n\,n!}\,u^{(n)}$，因而由上式可得

$$(x^2-1)\,y''+2\,x\,y'-n\,(n+1)\,y=0.$$

得证。 ■

§2. 微分中值定理及其应用

- **微分中值定理**

1. Fermat 引理
2. Rolle 中值定理
3. Lagrange 中值定理
4. Cauchy 中值定理

解题要点：先做适当变形，再利用微分方程等手段构造辅助函数，最后选择要利用的中值定理。

例 2.1 (Rolle 定理推广 1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f(a+0)=f(b-0)=A$，其中 a,b 可以是有限数或无穷，A 可以是有限数或 $\pm\infty$。证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证 令 $g(t)=\arctan[f(\tan t)]$，$\alpha=\arctan a,\beta=\arctan b$，当 $a=-\infty$ 时取 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，当 $b=+\infty$ 时取 $\beta=\dfrac{\pi}{2}$。利用复合函数的可导性知 $g(t)$ 在 $(\alpha,\beta)\subset\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上可导，从而连

续。注意

$$\lim_{t\to\alpha+0} g(t) = \lim_{x\to a+0} \arctan(f(x)) = \arctan A,$$

以及

$$\lim_{t\to\beta-0} g(t) = \lim_{x\to b-0} \arctan(f(x)) = \arctan A,$$

当 $A = \pm\infty$ 时取 $\arctan A = \pm\frac{\pi}{2}$。因此，补充定义 $g(\alpha) = g(\alpha+0) = \arctan A$，和 $g(\beta) = g(\beta-0) = \arctan A$，则 $g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $g(\alpha) = g(\beta)$。因此利用 Rolle 定理知，存在 $\tau \in (\alpha,\beta)$，使得 $g'(\tau) = 0$，即

$$\frac{f'(\tan\tau)}{1+f^2(\tan\tau)} \cdot \sec^2\tau = 0,$$

从而 $f'(\tan\tau) = 0$。令 $\xi = \tan\tau$, 则有 $\xi \in (a,b)$，且 $f'(\xi) = 0$。得证。 ■

例 2.2 (Rolle 定理推广 2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内具有 n 阶导数，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有 $n+1$ 个零点，$n \geqslant 2$。证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$。

证 对 n 作归纳。当 $n = 2$ 时，命题结论就是 Rolle 定理，因此结论成立。

设命题当 n 时成立，即若一个函数有 $k+1$ 个零点，则其 k 阶导数至少有一个零点。设 f 具有 $k+2$ 个零点 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+2}$，则由 Rolle 定理，在 (x_i, x_{i+1}) 中至少有 $f'(x)$ 的一个零点 y_i，$i = 1,2,\cdots,k+1$。于是对函数 f' 而言，它至少有 $k+1$ 个零点，因而由归纳假设知其 k 阶导数至少有一个零点，即存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $(f')^{(k)}(\xi) = 0$，也即 $f^{(k+1)}(\xi) = 0$。因此命题结论对 $n = k+1$ 成立。

由归纳法原理知命题对一切正整数 $n \geqslant 2$ 成立。证毕。 ■

定义 2.1 设 $f(x)$ 在 x_0 有 n 阶导数，$f(x_0) = 0$。若 $f'(x_0) \neq 0$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**简单零点**或方程 $f(x) = 0$ 的**单根**。若 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$，但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的 n **重零点**或方程 $f(x) = 0$ 的 n **重根**，$n \geqslant 2$。简单零点也可称为是一重零点，方程的根也是如此。

例 2.3 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有直到 n 阶的导数，$n \geqslant 1$。若 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 的零点，重数分别是 $r_1, r_2, \cdots, r_m$，且

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n + 1.$$

证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

证　对 n 用归纳法。

当 $n = 1$ 时，分两种情况：(1) x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个不同零点，此时由 Rolle 定理知存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$，命题结论成立；(2) 存在 $x_0 \in (a,b)$ 是 f 的 2 重零点，即 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$，此时取 $\xi = x_0$ 即可。

设命题结论对 $n = k$ 成立，即当一个函数的零点个数 (计重数) 是 $k+1$ 个时，$f^{(k)}(x)$ 至少有一个零点。现设 $f(x)$ 有 m 个零点，其重数之和为 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = k+2$，于是在 (x_i, x_{i+1}) 中存在 y_i，使得 $f'(y_i) = 0$，$1 \leqslant i \leqslant m-1$，即 $f'(x)$ 有不同于 x_i 的零点至少 $m-1$ 个。由重数定义，x_i 是函数 $f'(x)$ 的 $r_i - 1$ 重零点，于是 $f'(x)$ 总的零点个数 (包括重数) 至少是

$$\begin{aligned} & m - 1 + (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \cdots + (r_m - 1) \\ & = r_1 + r_2 + \cdots + r_m - 1 = k + 1, \end{aligned}$$

因此由归纳假设知 $f'(x)$ 的 k 阶导数至少存在一个零点，即 $f^{(k+1)}(x)$ 至少存在一个零点，也即存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f^{(k+1)}(\xi) = 0$。因此命题对 $n = k+1$ 成立。

由归纳法原理知命题对一切 $n \geqslant 1$ 成立。 ■

例 2.4 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

证 令 $\phi(x) = [f(x) - f(a)][g(x) - g(b)]$，则由题设知 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$\phi(a) = \phi(b) = 0,$$

因此由 Rolle 定理知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\phi'(\xi) = 0$，即

$$f'(\xi)[g(\xi) - g(b)] + [f(\xi) - f(a)]g'(\xi) = 0,$$

由于 $g'(x) \neq 0$，因此 $g(x)$ 严格单调，从而 $g(\xi) - g(b) \neq 0$，于是上式可改写为

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

得证。 ■

例 2.5 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a,b))$。证明：$f(x)$ 的两个零点之间一定有 $g(x)$ 的零点。

证 首先，当 $f(x) = 0$ 时，必有 $g(x) \neq 0$，否则 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$，与题设矛盾。下面证明本题结论。用反证法。

若不然，存在 $f(x)$ 的两个零点 $x_1 < x_2$，使得函数 $g(x)$ 在 (x_1, x_2) 中没有零点，由于 $f(x_1) = f(x_2) = 0$，因而由题设知 $g(x_1) \neq 0, g(x_2) \neq 0$，从而在 $[x_1, x_2]$ 上 $g(x) \neq 0$。令 $h(x) = f(x)/g(x)$，则由题设知 $h(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上可导，且 $h(x_1) = h(x_2) = 0$，因此由 Rolle 定理，存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$，使得 $h'(\xi) = 0$，即

$$\frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0,$$

因而 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$，矛盾于题设。因此题目结论成立。 ■

例 2.6 (Darboux 定理—导函数的介值性) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，$a < \alpha < \beta < b$。若 η 是介于 $f'(\alpha)$ 和 $f'(\beta)$ 之间的一个实数，证明：存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$，使得 $f'(\xi) = \eta$。

证 不妨设 $f'(\alpha)<\eta<f'(\beta)$。令 $g(x)=f(x)-\eta x$，则 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $g'(\alpha)=f'(\alpha)-\eta<0, g'(\beta)=f'(\beta)-\eta>0$。由导数定义有

$$\lim_{x\to\alpha+0}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}<0,\quad \lim_{x\to\beta-0}\frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}>0,$$

因而由极限的局部保号性，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，使得 $\alpha<x<\alpha+\delta_1$ 时

$$f(x)-f(\alpha)<0\Rightarrow f(x)<f(\alpha);$$

当 $\beta-\delta_2<x<\beta$ 时，

$$f(x)-f(\beta)<0\Rightarrow f(x)<f(\beta).$$

但 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，因而必然达到最小值。由上面讨论知这个最小值必然在 (α,β) 内取到，即 $g(x)$ 的最大值点是一个极大值点，设该点为 $\xi\in(\alpha,\beta)$，则有 $g'(\xi)=0$(Fermat 引理)，即 $f'(\xi)-\eta=0$，也即

$$f'(\xi)=\eta.$$

得证。 ■

例 2.7 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则导函数 $f'(x)$ 只有第二类间断点。

证 只需证明：若 x_0 是区间 I 的一个内点，且导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左、右极限 $f'(x_0-0)$ 与 $f'(x_0+0)$ 都存在，则有 $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$(这表明导函数 $f'(x)$ 没有第一类间断点)。

利用 L'Hospital 法则可得

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-0}f'(x)=f'(x_0-0),$$

同理有

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0+0),$$

因此 $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$。得证。 ■

注 这两个例题表明导函数具有如下相关性质：

(1) 介值性；

(2) 只有第二类间断点；

(3) 导函数单调，则必连续 (因为单调函数在内点处左右极限存在)；

(4) 若导函数没有零点，则由介值性知其不变号，从而函数必严格单调。

例 2.8 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)=o(x)(x\to+\infty)$。证明：

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

证 由于 $|f'(x)|\geqslant 0$，因而自然有 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|\geqslant 0$。因此只需排除大于 0 的可能性。采用反证法。

若不然，必有 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=A>0$。由下极限的定义，对 $\varepsilon_0=A/2$，存在 $X>a$，使得当 $x\geqslant X$ 时，成立

$$|f'(x)|>A-\varepsilon_0=A/2.$$

进一步，对 $x>X$，由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(X,x)$，使得

$$|f(x)-f(X)|=|f'(\xi)(x-X)|>A/2\,(x-X),$$

因而

$$|f(x)|>A/2\,(x-X)-|f(X)|\,.$$

于是

$$\frac{|f(x)|}{x}>\frac{A(x-X)/2-|f(X)|}{x}=A/2-\frac{AX/2+|f(X)|}{x},$$

这与 $f(x)=o(x)(x\to+\infty)$ 矛盾：

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\geqslant\lim_{x\to+\infty}\left[A/2-\frac{AX/2+|f(X)|}{x}\right]=A/2\neq 0.$$

因此应有

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

得证。 ■

例 2.9 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。

证 方法一，利用 L'Hospital 法则。由题设可得

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} f'(x),$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。

方法二，利用 Lagrange 中值定理。由

$$0 = \lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x\to+\infty} [f'(\xi)\cdot 1] = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

可得结论。 ■

注 从方法二可见，只要 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，则利用函数得 Stolz 公式和上面得推导有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x\to+\infty} f'(x).$$

例 2.10 (Cauchy 中值定理的推广) 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微, 它们在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 都有有限的极限，且 $g'(x) \neq 0$。证明：$\exists \xi \in (-\infty,+\infty)$，使得

$$\frac{f(+\infty) - f(-\infty)}{g(+\infty) - g(-\infty)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 方法一，利用广义 Rolle 定理。令

$$\begin{aligned} h(x) = &[f(x) - f(-\infty)][g(+\infty) - g(-\infty)] \\ &- [f(+\infty) - f(-\infty)][g(x) - g(-\infty)], \end{aligned}$$

则 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可微且 $h(+\infty)=h(-\infty)=0$。因此 $\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $h'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)[g(+\infty)-g(-\infty)]-[f(+\infty)-f(-\infty)]g'(\xi)=0,$$

由于 $g'(x)\neq 0$，因此 $g(x)$ 严格单调，从而 $g(+\infty)-g(-\infty)\neq 0$，于是上式可变形得到

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

得证。

方法二、定义新函数并利用 Cauchy 中值定理。记

$$F(t)=f(\tan t),G(t)=g(\tan t),\quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),$$

且定义 $F(\pm\frac{\pi}{2})=f(\pm\infty),G(\pm\frac{\pi}{2})=g(\pm\infty)$，容易验证，这样定义的 F,G 满足：在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内可导，且

$$G'(t)=g'(\tan t)\cdot\sec^2 t\neq 0,$$

因此由 Cauchy 中值定理知，存在 $\tau\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，使得

$$\frac{F(\frac{\pi}{2})-F(-\frac{\pi}{2})}{G(\frac{\pi}{2})-G(-\frac{\pi}{2})}=\frac{F'(\tau)}{G'(\tau)},$$

即

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\tan\tau)\cdot\sec^2\tau}{g'(\tan\tau)\cdot\sec^2\tau}=\frac{f'(\tan\tau)}{g'(\tan\tau)},$$

令 $\xi=\tan\tau$，则有

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

得证。 ■

例 2.11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$b>a>0$。证明：存在 $x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(b^2+a^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}x_3f'(x_3).$$

证　利用 Cauchy 中值定理容易得到

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_1)}{2x_1},$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{b^4-a^4}=\frac{f'(x_2)}{4x_2^3},$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(x_3)}{\frac{1}{x_3}},$$

于是

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(b^2+a^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}x_3 f'(x_3).$$

得证。 ■

例 2.12 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}x f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明：$\exists x\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

证　由积分中值定理有

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}x f(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot c\,f(c)\cdot\frac{1}{2}=cf(c),\quad c\in[0,1/2].$$

于是 $f(1)=c\,f(c)$。令 $g(x)=x\,f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[c,1]$ 上连续，且 $g(c)=g(1)$。因此由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，于是

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

■

例 2.13 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}},\quad\forall c\in(0,+\infty),$$

证明：$\exists \xi \in (0, +\infty)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{2}{2\xi + 1} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}}.$$

证　在题目所给不等式两边令 $x \to 0$，利用极限的夹逼性得到 $f(0) = 0$，令 $x \to +\infty$ 得到 $f(+\infty) = 0$。令

$$\phi(x) = f(x) - \ln \frac{2x + 1}{x + \sqrt{1 + x^2}},$$

则 $\phi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微，且 $\phi(0) = \phi(+\infty) = 0$, 因此利用推广的 Rolle 定理知，存在 $\xi \in (0, +\infty)$，使得 $\phi'(\xi) = 0$，即

$$f'(\xi) = \frac{2}{2\xi + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

■

注 由于 $\phi(x) \leqslant 0$，因此其最小值必可在内部取到，于是可用 Fermat 引理证明本题结论。

例 2.14 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 n 次实系数多项式,$n \geqslant 2$,且 $a_k = 0 (1 \leqslant k \leqslant n-1)$，而当 $i \neq k$ 时 $a_i \neq 0$。证明：若 $f(x)$ 有 n 个不同的实零点，则必有 $a_{k-1} a_{k+1} < 0$。

证　用归纳法。

当 $n = 2$ 时 $f(x) = a_2 x^2 + a_0$，于是它有两个实零点仅当 $a_0 a_2 < 0$。命题成立。

设 $n - 1$ 时命题成立，则由 $f(x)$ 有 n 个实零点，利用 Rolle 定理知 $f'(x)$ 有 $n - 1$ 个实零点，且 $f'(x)$ 的系数的符号与 $f(x)$ 的系数符号相同。因此，只要 $f'(x)$ 还满足其余条件，即 a_k 不是 $f'(x)$ 的常数项，则由归纳假设必有 $a_{k-1} a_{k+1} < 0$。

当 $k = 1$ 时令 $g(x) = x^n f(1/x)$，则转化为 $k = n - 1$ 的情况，从而可用归纳假设。因此命题在水平 n 时成立。

由归纳法原理知命题对一切 $n \geqslant 2$ 成立。■

例 2.15 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，$a < b < c$。证明：存在 $\xi \in (a, c)$，使得

$$\frac{f(a)}{(a - b)(a - c)} + \frac{f(b)}{(b - a)(b - c)} + \frac{f(c)}{(c - a)(c - b)} = \frac{1}{2} f''(\xi).$$

证 方法一，待定常数法。记

$$A=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)},$$

则有

$$A(b-a)(c-a)(c-b)=f(a)(c-b)-f(b)(c-a)+f(c)(b-a).$$

令

$$g(x)=f(a)(c-x)-f(x)(c-a)+f(c)(x-a)-A(x-a)(c-a)(c-x),$$

则有

$$g(a)=g(b)=g(c)=0,$$

因此由推广的 Rolle 定理知存在 $\xi\in(a,c)$，使得 $g''(\xi)=0$，即

$$-f''(\xi)(c-a)+2A(c-a)=0,$$

于是 $A=\frac{1}{2}f''(\xi)$。得证。 ■

§3. Taylor 公式及其应用

3.1 具有各种余项的 Taylor 公式

- **带各种余项的 Taylor 公式**

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x).$$

(1) Lagrange 型余项：$f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数，此时

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\\&=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

ξ 在 x_0 和 x 之间。

(2) Peano 型余项：$f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

(3) Cauchy 型余项：$f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数，

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

(4) 积分型余项：$f(x)$ 有连续的 $n+1$ 阶导函数，

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

注 (1) 最常用的是带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式；

(2) 带有 Peano 型余项的 Taylor 公式多用于求极限；

(3) 积分型余项公式蕴涵其他几个公式。

- Taylor 公式的证明

例 3.1 证明带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式。

证 方法一，利用 Cauchy 中值定理。注意

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

因此 $R_n(x)$ 具有直到 $n+1$ 阶导数，且有

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

记 $h(x) = (x - x_0)^{n+1}$，于是反复应用 Cauchy 中值定理有

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{h(x)} &= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{R_n'(x_1)}{h(x_1)} \\ &= \frac{R_n'(x_1) - R_n'(x_0)}{h(x_1) - h'(x_0)} = \cdots \\ &= \frac{R_n^{(n)}(x_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{h^{(n)}(x_n) - h^{(n)}(x_0)} \\ &= \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{h^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\end{aligned}$$

其中 x_1 在 x_0 与 x 之间，x_2 在 x_1 与 x_0 之间，$\ldots$，ξ 在 x_n 与 x_0 之间，从而 ξ 在 x_0 与 x 之间。此时可设 $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$，$0 < \theta < 1$。得证。

方法二，利用待定常数法。固定 $x \neq x_0$，记

$$C = \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}},$$

则有

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - C(x - x_0)^{n+1} = 0.$$

令

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k - C(t - x_0)^{n+1},$$

则有

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = g(x) = 0,$$

于是由广义 Rolle 定理知，存在 ξ 处于 x_0 和 x 之间，使得 $g^{(n+1)}(\xi) = 0$，即有

$$f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \cdot C = 0,$$

于是 $C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, 得证。 ∎

例 3.2 证明带 Cauchy 型余项的 Taylor 公式。

证 令

$$\phi(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

则有 $\phi(x)=0, \phi(x_0)=R_n(x)$，从而利用 Lagrange 中值定理有

$$R_n(x)=\phi(x_0)-\phi(x)=\phi'(\xi)(x_0-x),$$

即

$$R_n(x)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\cdot(x_0-x),$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间。取 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，$0<\theta<1$，则有

$$R_n(x)=-\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

得证。 ■

例 3.3 证明积分型余项公式。

证 利用 Newton-Leibniz 公式和分部积分公式可得

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=f(x_0)-\left[(x-t)f'(t)\right]_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\\
&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t,\\
&=\cdots\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \left[\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t,$$

即有

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

■

注 严格来说，应该采用归纳法。

例 3.4 用积分型余项公式证明 Lagrange 余项公式和 Cauchy 余项公式。

证 (1) 证明 Lagrange 余项公式。利用积分中值定理可得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

(2) 证明 Cauchy 余项公式。利用积分中值定理可得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-\xi)^n}{n!} \cdot (x-x_0) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

其中 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$，$0 < \theta < 1$。 ■

例 3.5 证明 Peano 余项公式 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)\ (x \to x_0)$。

证 由于

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n-1)}(x_0)=0,$$

$$R_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0),$$

因此利用 L'Hospital 法则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}\qquad(\text{连续 } n-1 \text{ 次 L'H 法则})$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\left[\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}-f^{(n)}(x_0)\right]$$

$$=0,$$

最后一步利用导数得定义。得证。 ■

3.2 Taylor 公式的应用

- **利用 Taylor 公式解题的一般方法**

(1) 利用函数在一点 (例如 x_0) 的 Taylor 公式，带入一个或多个变量 x_1,x_2，等；

(2) 利用多点的 Taylor 公式带入一点函数值；

(3) 待定常数法；

(4) 用插值多项式拟合法；

(5) 构造一个或两个辅助函数，使用微分中值定理 (Rolle 和 Cauchy 中值定理居多)；

(6) 利用 Newton-Leibniz 公式。

例 3.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三次可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f'''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

证 令 $c=\dfrac{a+b}{2}$，$h=\dfrac{b-a}{2}$，则目标等式可变形为

$$\Phi(h)=f(c+h)-f(c-h)-2f'(c)h=\frac{f'''(\xi)}{3}h^3.$$

方法一. 注意到 $\Phi(0)=\Phi'(0)=\Phi''(0)=0$，对 $\dfrac{\Phi(h)}{h^3}$ 应用两次 Cauchy 中值定理有

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(h)}{h^3}&=\frac{\Phi(h)-\Phi(0)}{h^3-0^3}\\&=\frac{\Phi'(h_1)}{3h_1^2}=\frac{\Phi''(h_2)}{6h_2}\\&=\frac{f''(c+h_2)-f''(c-h_2)}{6h_2},\end{aligned}$$

其中 $0<h_2<h_1<h$。最后由 Lagrange 中值定理可得

$$\frac{\Phi(h)}{h^3}=\frac{f''(c+h_2)-f''(c-h_2)}{6h_2}=\frac{f'''(\xi)}{3}h^3.$$

最后利用导数得介值性。

方法二. 令 $C=\dfrac{\Phi(h)}{h^3}$，则 $\Phi(h)-Ch^3=0$。作辅助函数 $F(x)=\Phi(x)-Cx^3$，则 $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$，$F(h)=0$。

对 F，由于 $F(0)=F(h)=0$，应用 Rolle 定理，存在 $h_1\in(0,h)$，使得 $F'(h_1)=0$。再对 F' 应用 Rolle 定理，存在 $h_2\in(0,h_1)$，使得 $F''(h_2)=0$，即

$$F''(c+h_2)-f''(c-h_2)-6Ch_2=0,$$

由此得到（应用 Lagrange 中值定理）

$$C=\frac{F''(c+h_2)-f''(c-h_2)}{6h_2}=\frac{f'''(\xi)}{3}.$$

得证。这里的方法称为**待定常数法**。

方法三. 分别把 $f(c+h)$ 和 $f(c-h)$ 在 c 点作 Taylor 展开得

$$f(c+h)=f(c)+f'(c)h+\frac{f''(h)}{2}h^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3,$$

$$f(c-h)=f(c)-f'(c)h+\frac{f''(h)}{2}h^2-\frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3,$$

其中 $\xi_1 \in (c, c+h)$, $\xi_2 \in (c-h, c)$。两式相减得

$$f(c+h) - f(c-h) - 2f'(c)h = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6} h^3.$$

由 Darboux 定理有

$$\Phi(h) = f(c+h) - f(c-h) - 2f'(c)h = \frac{f'''(\xi)}{3} h^3,$$

其中 $\xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (c-h, c+h) = (a, b)$。得证。 ■

例 3.7 设

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k (x-k)^n, \quad -\infty < x < +\infty,$$

试证明 $P(x) \equiv 0$。

证 因为 $P(x)$ 是不超过 n 次的多项式，因此其 n 阶的麦克劳林公式恰为它自身，从而只需证明 $P^{(n-m)}(0) = 0 (m = 0, 1, \ldots, n)$ 即可。记

$$f(x) = (1-x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k x^k,$$

归纳地定义函数：

$$g_0(x) = f(x), \quad g_m(x) = x g'_{m-1}(x), \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

归纳地可得

$$g_m(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k k^m x^k = (1-x)^{n+1-m} h_m(x),$$

其中 $h_m(x)$ 是某个 m 次多项式，$0 \leqslant m \leqslant n$。于是成立

$$g_m(1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k k^m = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant n. \tag{3.1}$$

另一方面，成立

$$P^{(n-m)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k n(n-1)\cdots(m+1)(x-k)^m$$

$$= n(n-1)\cdots(m+1) \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k (x-k)^m,$$

于是

$$P^{(n-m)}(0) = n(n-1)\cdots(m+1) \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k (-k)^m.$$

比较(3.1)可得

$$P^{(n-m)}(0) = (-1)^m n(n-1)\cdots(m+1)\, g_m(1) = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

得证。 ■

§4. 一元微分学综合应用

- 函数与导函数值的估计

例 4.1 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶导数，且满足 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$。证明：存在 $\xi \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$。

证 方法一. 利用函数在一点的 Taylor 公式。

由题设知成立 Taylor 公式：

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3,$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间（注意 $f'(0)=0$）。于是

$$f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6}, \quad \xi_1 \in (0,1);$$
$$f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6}, \quad \xi_2 \in (-1,0).$$

两式相减得

$$1 = f(1) - f(-1) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6}.$$

由导函数的介值性，存在 ξ 介于 ξ_1 和 ξ_2 之间，使得

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3.$$

显然，$\xi \in (-1,1)$。证毕。

方法二. 令 $g(x) = f(x) - f(-x)$，则 $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$，$g(1) = 1$。利用 Cauchy 中值定理有（$x \neq 0$）

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x^3} &= \frac{g(x) - g(0)}{x^3 - 0^3} = \frac{g'(\xi_1)}{3\xi_1^2} \\ &= \frac{g'(\xi_1) - g'(0)}{3(\xi_1^2 - 0^2)} = \frac{g''(\xi_2)}{6\xi_2} \\ &= \frac{f''(\xi_2) - f''(-\xi_2)}{6\xi_2} = \frac{f'''(\xi)}{3}.\end{aligned}$$

最后一步用 Lagrange 中值定理，其中 ξ_1, ξ_2, ξ 都在 0 和 x 之间。特别地，取 $x = 1$ 得到

$$1 = \frac{f'''(\xi)}{3} \Rightarrow f'''(\xi) = 3.$$

得证。

方法三. 利用插值法与拟合法.

在题设条件下，$f(x)$ 的插值多项式为

$$p(x) = \frac{x^3 + 1}{2} - \left[f(0) - \frac{1}{2}\right](x^2 - 1),$$

即 $f(\pm 1) = p(\pm 1), f(0) = p(0)$，$f'(0) = p'(0) = 0$。注意，$p'''(x) \equiv 3$。

若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 的任意一个子区间上恒等于 $p(x)$，则得证。否则，令 $F(x) = f(x) - p(x)$，则 $F(\pm 1) = F(0) = 0$，$F'(0) = 0$。分别在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上应用 Rolle 中值定理，则存在 $\xi_1 \in (-1,0), \xi_2 \in (0,1)$，使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$，但 $F'(0) = 0$。于是反复应用 Rolle 定理知，存在 $\xi \in (-1,1)$，使得 $F'''(\xi) = 0$，即 $f'''(\xi) = 3$。得证。

方法四. 构造辅助函数法并利用 Rolle 定理。

构造函数

$$g(x) = f(x) - f(-x) - x^3,$$

则

$$g'(x) = f'(x) + f'(-x) - 3x^2,$$

$$g''(x) = f''(x) - f''(-x) - 6x,$$

$$g'''(x) = f'''(x) + f'''(-x) - 6.$$

于是

$$g(0) = f(0) - f(0) - 0 = 0,$$

$$g'(0) = 2f'(0) - 0 = 0,$$

$$g''(0) = f''(0) - f''(0) = 0,$$

$$g(1) = f(1) - f(-1) - 1 = 0.$$

由于 $g(0) = g(1) = 0$，由 Rolle 定理，存在 $x_1 \in (0,1)$，使得 $g'(x_1) = 0$。从而由 $g'(0) = g'(x_1) = 0$，存在 $x_2 \in (0,x_1)$，使得 $g''(x_2) = 0$。最后由 $g''(x_2) = g''(0) = 0$，存在 $x_3 \in (0,x_2)$，使得 $g'''(x_3) = 0$，即

$$f'''(x_3) + f'''(-x_3) - 6 = 0.$$

由导函数的介值性，存在 $\xi \in (-x_3, x_3) \subset (-1,1)$，使得

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(x_3) + f'''(-x_3)}{2} = 3.$$

得证。 ■

例 4.2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，若有

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |f''(x)| \leqslant B,$$

则 $|f'(x)| \leqslant 2A + \dfrac{B}{2}$。

证　$\forall x, t \in [0,1]$，成立

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2,$$

从而（分别取 $t = 0, 1$ 并相减）有

$$f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}x^2,$$

因此

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leqslant |f(1) - f(0)| + \frac{|f''(\xi_1)|}{2}(1-x)^2 + \frac{|f''(\xi_2)|}{2}x^2 \\ &\leqslant 2A + \frac{B}{2}\left[(1-x)^2 + x^2\right] \\ &\leqslant 2A + \frac{B}{2}.\end{aligned}$$

这里应用 $(1-x)^2 + x^2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 1。 ■

例 4.3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，若有 $f(0) = f(1) = 0$，$\min f(x) = -1$，则

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8.$$

证　方法一，利用 Taylor 公式。

由题设知存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0) = \min f(x) = -1$，且由 Fermat 引理知 $f'(x_0) = 0$。于是由 Taylor 公式有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2, \quad x \in [0,1].$$

特别地，分别取 $x = 0$ 和 $x = 1$ 得到

$$\begin{aligned}0 = f(0) = f(x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2, \\ 0 = f(1) = f(x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2,\end{aligned}$$

其中 $0<\xi_1<x_0<\xi_2<1$。因此

$$f''(\xi_1)=-\frac{2f(x_0)}{x_0^2}=\frac{2}{x_0^2},$$

$$f''(\xi_2)=-\frac{2f(x_0)}{(1-x_0)^2}=\frac{2}{(1-x_0)^2},$$

若 $x_0\leqslant\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1)\geqslant 8$；若 $x_0\geqslant\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_2)\geqslant 8$。总之，必然成立 $\max f''(x)\geqslant 8$。

方法二，利用插值多项式拟合函数 $f(x)$。

同上，设 $f(x_0)=\min f(x)=-1$，$x_0\in(0,1)$。构造二次多项式 $p(x)=\frac{x(x-1)}{x_0(1-x_0)}$，则 $p(0)=p(1)=0$，$p(x_0)=-1$。再令 $g(x)=f(x)-p(x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $g(0)=g(x_0)=g(1)=0$。由 Rolle 定理，存在 $\xi_1\in(0,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。进一步对 $g'(x)$ 应用 Rolle 定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使得 $g''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)-\frac{2}{x_0(1-x_0)}=0$，因此

$$f''(\xi)=\frac{2}{x_0(1-x_0)}\geqslant\frac{2}{(\frac{x_0+(1-x_0)}{2})^2}=8.$$

得证。 ■

例 4.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，若有 $f'(\frac{a+b}{2})=0$，则

$$\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 令 $c=\frac{a+b}{2},h=\frac{b-a}{2}$，则由 Taylor 公式有

$$f(x)=f(c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2,\quad x\in[a,b].$$

特别地有

$$f(a)=f(c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2,$$

$$f(b)=f(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2,$$

其中 $a<\xi_1<c<\xi_2<b$。于是

$$f(b)-f(a)=\frac{h^2}{2}\left[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right],$$

因此

$$|f(b)-f(a)|\leqslant h^2\cdot\max|f''(x)|,$$

即有

$$\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\geqslant\frac{|f(b)-f(a)|}{h^2}=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

■

例 4.5 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上二次可导，且

$$|f(x)|\leqslant M_0,\quad |f''(x)|\leqslant M_2.$$

则 $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$。

证 设 $h>0$。由

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2,$$

两式相减，整理可得

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{4}h,$$

因此

$$|f'(x)|\leqslant\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h,$$

取 $h=\sqrt{2M_0/M_2}$ 得到

$$|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}.$$

■

- 恒等式与归零问题

例 4.6 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有二阶连续导函数，满足 $f(0)=f'(0)=0$，$|f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|\,(\forall x\in(-1,1))$。证明：存在 $\delta>0$，使得 $f(x)\equiv 0$，当 $|x|<\delta$。

证　方法一. 利用 Newton-Leibniz 公式与积分估计.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=-(x-t)f'(t)\big|_0^x+\int_0^x(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^x(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

因此

$$|f(x)|\leqslant\left|\int_0^x|x-t|\,|f''(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_0^x|x-t|\,[|f(t)|+|f'(t)|]\,\mathrm{d}t\right|$$

类似地，

$$|f'(x)|=\left|\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_0^x[|f(t)|+|f'(t)|]\,\mathrm{d}t\right|,$$

两式求和得

$$|f(x)|+|f'(x)|\leqslant\left|\int_0^x(|x-t|+1)\,[|f(t)|+|f'(t)|]\,\mathrm{d}t\right|,$$

当 $|x|<1$ 时，上式表明

$$|f(x)|+|f'(x)|\leqslant 2\left|\int_0^x[|f(t)|+|f'(t)|]\,\mathrm{d}t\right|.$$

先设 $0\leqslant x<1$。令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x[|f(t)|+|f'(t)|]\,\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=|f(x)|+|f'(x)|\leqslant 2F(x),$$

于是

$$0\geqslant \mathrm{e}^{-2x}\,[F'(x)-2F(x)]=\left[\mathrm{e}^{-2x}F(x)\right]',$$

从 0 到 x 积分得

$$e^{-2x}F(x) - F(0) \leqslant 0 \Rightarrow F(x) \leqslant F(0)e^{2x} = 0.$$

因此 $F(x) \equiv 0, x \in (0,1)$。于是由上述不等式得 $f(x) \equiv 0$。

当 $-1 < x < 0$ 时，类似讨论可得 $f(x) \equiv 0$。得证。

方法二. 利用 Taylor 公式.

利用函数在 $x = 0$ 的 Taylor 公式有

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2, \quad f'(x) = f''(\eta)x.$$

令 $F(x) = |f(x)| + |f'(x)|$，$\delta = \dfrac{1}{4}$。设 $F(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上的最大值 M 在点 x_0 达到，即 $F(x_0) = M$，则（$x_0^2, |x_0| \leqslant \delta$）

$$\begin{aligned}
M = F(x_0) &= \frac{x_0^2}{2}|f''(\xi)| + |x_0| \cdot |f''(\eta)| \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left[|f''(\xi)| + |f''(\eta)|\right] \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left[|f(\xi)| + |f'(\xi)| + |f(\eta)| + |f'(\eta)|\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[F(\xi) + F(\eta)\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2}M.
\end{aligned}$$

因此 $M = 0$，于是 $F(x) \equiv 0$，因而 $f(x) \equiv 0$，当 $|x| \leqslant \delta$。 ■

习题 8 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意次可微，且成立 $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M(\forall n)$，进一步设 $f(x)$ 有一列收敛的零点 $\{x_n\} \to x_0 \in (a,b)$。证明：$f(x) \equiv 0$。

提示：首先，反复利用 Rolle 定理证明 $f^{(n)}(x_0) = 0, \forall n$。其次，把 f 在 x_0 作 n 阶 Taylor 展开得 $f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \to 0 (n \to \infty)$, $\forall x$，注意要用到 $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$。因此 $f(x) \equiv 0$。

类题：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数。若有

$$f''(x)=\mathrm{e}^x f(x),\quad f(a)=f(b)=0,$$

则 $f(x)\equiv 0$。

提示：方法一. 反证法，若不然，f 在 (a,b) 内取到正的最大值或负的最小值，此时在最值点处 $f''(x)$ 的符号会出问题。

方法二. 考虑函数 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $F'(x)=[f'(x)]^2+\mathrm{e}^x[f(x)]^2\geqslant 0$，因此 $F(x)$ 单调增加，但 $F(a)=F(b)=0$，因此 $F(x)\equiv 0$，从而 $f^2(x)$ 为常函数，即 $f(x)\equiv 0$。 ■

- 不等式的证明(通常要先对不等式作适当变形)

1. 利用单调性；
2. 利用极值；
3. 利用凹凸性；
4. 从局部到整体的方法。

例 4.7 证明不等式 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

证 方法一. 令 $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}-x^3$，则

$$f'(x)=(2+\cos 2x)\tan^2 x-3x^2,$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}\sec^3 x\,(10\sin x+3\sin 3x+\sin 5x)-6x,$$

$$f'''(x)=2\tan^4 x\,(5+2\cos 2x)\,.$$

显然，$f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，且当 $x\in(0,\pi/2]$ 时 $f'''(x)>0$，进而 $f''(x)>0, f'(x)>0$。由此得 $f(x)>f(0)=0$。得证。

方法二. 令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$，则 $f(0) = 0$，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(2\sqrt[3]{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\right) - 1 \\ &\geqslant \sqrt[3]{\sqrt[3]{\cos^2 x}\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}} - 1 = 0. \end{aligned}$$

这里利用了平均值不等式，注意等号成立仅当 $\cos x = 1$ 即 $x = 0$，从而 $f(x)$ 严格单调增加。得证。 ■

习题 9 证明：$\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leqslant x^x (x > 0)$。

例 4.8 设 $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ 且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$，$x_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$。证明

$$\frac{1}{\dfrac{p_1}{x_1} + \dfrac{p_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{p_n}{x_n}} \leqslant x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leqslant p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n,$$

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

证 令 $f(x) = \ln x$，则 $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$，因此函数 $f(x)$ 的图像是严格上凸的，从而有

$$f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \geqslant p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n),$$

即

$$\ln(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \geqslant p_1 \ln x_1 + \cdots + p_n \ln x_n,$$

由此得到

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leqslant p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n.$$

用 $\dfrac{1}{x_i}$ 代替 x_i，由上式可得

$$\frac{1}{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}} \leqslant \frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \cdots + \frac{p_n}{x_n},$$

从而有

$$\frac{1}{\dfrac{p_1}{x_1}+\dfrac{p_2}{x_2}+\cdots+\dfrac{p_n}{x_n}} \leqslant x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}.$$

显然，由函数严格凸知上面不等式取等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$。 ■

例 4.9 求最小的实数 k，使得如下不等式成立：

$$\sin x \leqslant kx(\pi-x), \quad x\in[0,\pi].$$

解 令 $f_k(x)=\sin x-kx(\pi-x)$，则 $f_k(x)=f_k(\pi-x)$，即函数 $y=f_k(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称。为了使得不等式成立，必须使得 $f_k(\frac{\pi}{2})\leqslant 0$，即 $k\geqslant\dfrac{4}{\pi^2}$。下面在假设这个前提成立的条件下求 k 的最小值。

由于

$$f_k'(x)=\cos x-k(\pi-2x), \quad f_k''(x)=-\sin x+2k, \quad f_k'''(x)=-\cos x,$$

$f_k'''(x)$ 在 $[0,\pi]$ 内有唯一零点，因而 $f_k''(x)$ 至多在 $[0,\pi]$ 内有两个零点，从而 $f_k'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 内至多有三个零点。由于 $f_k'(\frac{\pi}{2})=0$，因此由函数 $y=f_k(x)$ 的轴对称性，$f_k'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 内分别至多有一个零点。

由于 $f_k'(x)$ 连续且 $f'(0)=1-k\pi<1-\frac{4}{\pi}<0$，因此在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上使得 $f_k'(x)=0$ 的点必然不是 $f_k(x)$ 的极大值点。同理，在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 内使得 $f_k'(x)=0$ 的点也必然不是 $f_k(x)$ 的极大值点。归纳起来，函数 $f_k(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值必然在 $0,\dfrac{\pi}{2},\pi$ 这三个点之一取到，从而为了使得不等式成立，只需 $f_k(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值不超过 0，即只需 $f_k(\frac{\pi}{2})\leqslant 0$（注意 $f_k(0)=f_k(\pi)=0$），于是 k 的最小值为 $k=\dfrac{4}{\pi^2}$。 ■

- 函数的零点与曲线交点

例 4.10 证明：函数

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\ln x-\ln 2+\ln(1+x)$$

在 $(0,1)$ 内恰有一个零点。

证 因为

$$f'(x) = \left(\frac{2}{\pi} - 1\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{\pi x(1+x)}\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right),$$

因此 $f'(x) = 0$ 有唯一解 $x = \frac{\pi}{2} - 1$，它对应 f 的最小值点，且函数在此点左侧严格单调减少，在其右侧严格单调增加。

注意 $f(0+0) = +\infty$，$f(1-0) = 0$，因此 $f\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) < 0$。于是利用零点定理和单调性得结论。 ■

类题：问当 a, b 取何值时，函数 $f(x) = \ln x + ax + b$ 在 $(0, +\infty)$ 内：（1）没有零点；（2）恰有一个零点；（3）恰有两个零点？

提示：把 f 的零点看做曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = -ax - b$ 的交点。先找出相切条件和横截条件，再确定交点个数。

- **函数综合**

1. 满足某些可微性条件的函数的存在性
2. 函数的单调性，周期性，有界性等
3. 函数方程求解

例 4.11 是否存在 $\mathbf{R}$ 上可微的函数 $f(x)$，使得 $f(f(x)) = x^2 + x - 1$?

解 $f \circ f$ 恰两个不动点 ± 1:

$$f \circ f(x) = x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

因而或 $f(\pm 1) = \pm 1$，或 $f(-1) = 1, f(1) = -1$。从而

(1) 若 $f'(f(-1)) \cdot f'(-1) = [f'(-1)]^2 = (2x+1)\big|_{x=-1} = -1$，不可能；

(2) 若 $f'(f(\pm 1)) \cdot f'(\pm 1) = f'(\mp 1) \cdot f'(\pm 1) = (2x+1)\big|_{x=\pm 1} = 3 \text{ and } -1$，仍不可能。

因此答案不存在这样的函数。 ■

例 4.12 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$。若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，则函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x>0,\\ \\ f'(0), & x=0.\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。

证 首先，$f(x)$ 单调增加因而 $f(x)\geqslant 0$。其次，当 $0<x_1<x_2$ 时，由 Lagrange 中值定理

$$f'(0)\leqslant f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=\frac{f(x_1)}{x_1}\leqslant f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

其中 $0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2$。由此可得 $F(0)\leqslant F(x_1)\leqslant F(x_2)$，因此 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。 ■

注意，题中 $F(x)$ 的几何意义是：它是点 $(x,f(x))$ 与原点连线的斜率。

习题 10 设 α 与 β 是有理无关的，即不存在整数 m,n 使得 $m\alpha+n\beta=0$（α 与 β 之比不是有理数）。证明：函数 $f(x)=\sin(\alpha x)+\sin(\beta x)$ 不是周期函数。

例 4.13 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上二次可导。若存在非负函数 $g(x)$，使得 $f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x)$，则 $f(x)$ 有界。

证 记 $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$，则 $F'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]=-xg(x)[f'(x)]^2$，从而当 $x>0$ 时，$F'(x)\leqslant 0$，当 $x<0$ 时，$F'(x)\geqslant 0$。这表明 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值，从而 $F(x)\leqslant F(0)$，因而 $[f(x)]^2\leqslant F(0)$，即 $f(x)$ 有界。 ■

注 本题利用导数满足的条件来证明函数的有界性。此类题型的基本的方法有：（1）利用所有极值有总体的界；（2）构造辅助函数，证明辅助函数有界，从而导致考察的函数有界。本题采用的是第二种方法。

类题：设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上二次可导，且满足 $[f(x)]^2 \leqslant a$，$[f'(x)]^2 + [f''(x)]^2 \leqslant b$ $(\forall x \in \mathbf{R})$。证明：

$$[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 \leqslant \max\left(a, b\right).$$

提示：令 $F(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2, M = \max\left(a, b\right)$，则 $F'(x) = 2f'(x)[f(x) + F''(x)]$。若 $f'(x) = 0$，则 $F(x) = [f(x)]^2 \leqslant M$。若 $f(x) + f''(x) = 0$，则 $f(x) = -f''(x)$，此时 $F(x) = [f'(x)]^2 + [f''(x)]^2 \leqslant b \leqslant M$。因此 F 在其极值点处都满足 $F(x) \leqslant M$。

还需考虑 $F(x)$ 的极值点有限的情形。设 $F(x)$ 在区间 $[A, B]$ 外满足 $f'(x)[f(x)+f''(x)] \neq 0$，于是 $f'(x) \neq 0$，因而 f 单调有界，再由 $[f'(x)]^2 \leqslant M$，$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$。注意此时 $F(x)$ 也单调有界，且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)]^2 \leqslant a \leqslant M$。证毕。

例 4.14 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$f'(0) = 1$，且满足

$$f(x + y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

求 $f(x)$ 的解析不表达式。

解　由题设 $f(0 + 0) = f(0) = [f(0)]^2$，因此或者 $f(0) = 0$，或者 $f(0) = 1$。

若 $f(0) = 0$，则 $\forall x$，成立

$$f(x) = f(x + 0) = f(0)f(x) = 0,$$

从而 $f(x) \equiv 0$，矛盾于 $f'(0) = 1$。因此必有 $f(0) = 1$。

再由题设条件，

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(x + y) - f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{f(x)f(y) - f(x)}{y} \\
&= f(x) \cdot \lim_{y\to 0} \frac{f(y) - 1}{y} \\
&= f(x)f'(0) = f(x).
\end{aligned}$$

于是

$$e^{-x}[f'(x)-f(x)]=[e^{-x}f(x)]'=0,$$

即 $e^{-x}f(x)=C$，于是 $f(x)=Ce^x$，其中 C 为任意常数。由 $f'(0)=1$ 得 $C=1$，从而 $f(x)=e^x$。

■

注 涉及可导性的函数方程的求解的关键是从条件推导出导数满足的微分方程，然后变形或用微分方程求解的方法得到解。

例 4.15 设 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 具有连续的三阶导数，且满足

$$f(x+2h)-f(x)=2hf'(x+h),\quad \forall x,h.$$

证明 $f(x)$ 是不超过二次的多项式。

证 方法一. 只要证明 $f'''(x)\equiv 0$。

把题设中 h 看成变量，求导得到

$$2f'(x+2h)=2f'(x+h)+2hf''(x+h),$$

再把题设条件中的 x 看成变量，求导得：

$$f'(x+2h)-f'(x)=2hf''(x+h).$$

两式结合，消去 $2hf''(x+h)$ 得

$$f'(x+2h)-2f'(x+h)+f'(x)=0.$$

利用 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+2h)-2f'(x+h)+f'(x)}{h^2}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f''(x+2h)-f''(x+h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}[2f'''(x+2h)-f'''(x+h)]\\&=f'''(x),\end{aligned}$$

于是 $f'''(x)=0$，由此得 $f(x)=ax^2+bx+c$。

方法二. 证明 $f''(x)$ 为常函数.

把题目条件改写为

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x),$$

两边对 h 求导得

$$h[f'(x+h)+f'(x-h)]-[f(x+h)-f(x-h)]=0,$$

再对 h 求导得

$$h[f''(x+h)-f''(x-h)]=0,$$

由此得 $f''(x+h)=f''(x-h)$，由 x,h 的任意性知 $f''(x)$ 为常数。得证。 ■

注 从方法二证明过程可见，这种方法只需用 $f(x)$ 具有二阶导数，即题目条件可以减弱为 $f(x)$ 具有二阶导数。

习题 11 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且满足

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=0,\quad \forall x,h.$$

证明 f 是线性函数。

提示：由条件对 h 求导。

第四章　一元函数积分学

§1. 原函数与可积性

- **要点**

1. 原函数与不定积分

2. 定积分与可积性

3. 可积的充要条件

例 1.1 试问：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数，$f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上可积？

解 不一定。例如：函数

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

有原函数

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

但它在 $x=0$ 附近无界，因而不可积。

当 $f(x)$ 连续时，它有原函数并且可积。 ■

例 1.2 试解答下列问题：

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，且有原函数，则 $f \in C[a,b]$；

（2）奇函数的原函数一定是偶函数吗？偶函数的原函数一定是奇函数吗？

（3）周期函数的原函数一定是周期函数吗？添加什么条件可以使得一个周期函数的原函数还是周期函数？

（4）设 $f(x)$ 定义于 (a,b) 上，$a<c<b$。若 $F_1'(x)=f(x)$，$a<x<c$；$F_2'(x)=f(x)$，$c<x<b$，且 $F_1(c-0)=A$，$F_2(c+0)=B$，且 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续。证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上存在原函数。

解 （1）f 单调意味着它只有第一类间断点，而有原函数则表明它没有第一类间断点，从而 f 连续。

（2）设 f 是对称区间 I 上的奇函数，$F(x)$ 是它的任意一个原函数，定义偶函数

$$\tilde{F}(x)=\begin{cases} F(x), & x\in I\text{且}x\geqslant 0,\\ F(-x), & x\in I\text{且}x\leqslant 0. \end{cases}$$

由原函数的定义，$x\geqslant 0$ 且 $x\in I$ 时，$\tilde{F}'(x)=F'(x)=f(x)$；当 $x\leqslant 0$ 且 $x\in I$ 时，$\tilde{F}'(x)=-F'(-x)=-f(-x)=f(x)$。因此 $\tilde{F}(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。由于两个原函数之间只相差一个常数，因此 $\tilde{F}(x)-F(x)$ 为常数。但 $x>0$ 且 $x\in I$ 时 $\tilde{F}(x)-F(x)=0$，因此 $\tilde{F}(x)\equiv F(x)$，即 $F(x)$ 本身就是偶函数。于是奇函数的原函数必是偶函数。

偶函数 $3x^2$ 具有形如 x^3+C 的原函数，仅当 $C=0$ 时，原函数才是奇函数。因此偶函数的原函数不一定是奇函数。一般地，若 $f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 是它的一个原函数，则 $F(x)-F(0)$ 也是 $f(x)$ 的原函数，且用类似的方法可以证明，此时 $F(x)-F(0)$ 必然是奇函数。由于奇函数加上非零常数都不是奇函数，因此偶函数的原函数中有且仅有一个原函数是奇函数。

（3）周期函数的原函数未必是周期函数，例如 $f(x)=4\sin^2 x=2-2\cos 2x$ 是 2π 周期函数，但其原函数为 $2x-\sin 2x+C$，它不是周期函数。

若周期函数可积，且在一个周期上的积分为 0（等价地，其在一个周期上的平均值为 0），则它的任意一个原函数都是周期函数。证明如下：设 $f(x)$ 是 $T(>0)$ 周期函数，且

$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 都是 T 周期函数。这是因为：成立

$$F(x+T)-F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int_x^0 + \int_0^T + \int_T^{x+T}\right] f(t)\,\mathrm{d}t.$$

注意

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t+T)\mathrm{d}(t+T) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\begin{aligned} F(x+T)-F(x) &= \left[\int_x^0 + \int_0^T + \int_0^x\right] f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 是 T 周期函数。

（4）令

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x)+B, & x\in(a,c), \\ F_2(x)+A, & x\in(c,b) \\ A+B, & x=c. \end{cases}$$

于是 $F(x)$ 在 (a,b) 上连续，且当 $x\neq c$ 时 $F'(x)=f(x)$。

注意 f 在 c 处连续，利用 L'Hospital 法则得

$$F'_{\pm}(c) = \lim_{h\to0\pm}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \lim_{h\to0\pm}F'(c+h) = \lim_{h\to0\pm}f(c+h) = f(c),$$

于是 $F'(c)=f(c)$。

综合起来有 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$，即 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$。 ■

注 本题澄清了原函数的概念，它基本包括了我们关心的有关原函数的一些结论。这里就不再给出类题了。

例 1.3 试求 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $F(x)$，它满足：（i）$F'(x)=[x], x\in(k,k+1), k\in\mathbf{Z}$；（ii）$F(x)=C_0, x\in[0,1)$。

解 我们归纳地讨论 $F(x)$ 在各区间 $I_k=(k,k+1)$ 上的表达式，$k\in\mathbf{Z}$。注意，在 I_k 上，$[x]=k$，因此可假设 $F(x)=kx+C_k, x\in I_k$。为了使得 $F(x)$ 连续，必须使

$$F(k+0)=F(k-0),\quad k\in\mathbf{Z},$$

即

$$k^2+C_k=(k-1)k+C_{k-1}\Rightarrow C_k=C_{k-1}-k.$$

由此可得：

$$C_k=C_0-1-2-\cdots-k=C_0-\frac{k(k+1)}{2},$$

因此

$$F(x)=kx+C_0-\frac{k(k+1)}{2},\quad x\in[k,k+1),\ k\in\mathbf{Z}.$$

■

注 本题相当于求整数部分函数 $[x]$ 的原函数，它是求分段函数原函数的典型，即要求在分点处连续，因此各段上的任意常数之间必须协调。

类题：设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ \mathrm{e}^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的原函数。

提示：设 $F(x)$ 为原函数，它在 $(-\infty,0)$ 上的表达式为 $x+C$，而在 $[0,+\infty)$ 上的表达式为 e^x+C'，则为使 F 在 $x=0$ 处连续，必须 $C=1+C'$，即 $C'=C-1$。因此用一个任意常数表示得到

$$F(x)=\begin{cases} x+C, & 0\leqslant x<1, \\ \\ \mathrm{e}^x+C-1, & x\geqslant 1. \end{cases}$$

例 1.4 在区间 $[a,b]$ 上讨论下列函数的可积性：

(1) $f(x)$ 单调；

(2) $f(x)$ 有有限的间断点；

(3) $f(x)$ 具有原函数 $F(x)$；

(4) $f(x)$ 是有界变差函数，即存在 $M>0$，使得对区间 $[a,b]$ 的任意划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，一致的成立：

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant M.$$

解 (1) $f(x)$ 可积，这是因为：对任意划分，成立

$$\left|\sum_k \omega_k\Delta x_k\right|\leqslant \max\left\{\Delta x_k\right\}\cdot\sum_k \omega_k=|f(b)-f(a)|\cdot\max\left\{\Delta x_k\right\}\to 0,$$

当 $\lambda=\max\left\{\Delta x_k\right\}\to 0$。

(2) $f(x)$ 不一定可积。若 $f(x)$ 有界，则可积，否则不可积。

(3) 不一定，见例 1.1。

(4) $f(x)$ 可积，这是因为：对任意划分，成立

$$\left|\sum_k \omega_k\Delta x_k\right|\leqslant \max\left\{\Delta x_k\right\}\cdot\sum_k |\omega_k|=M\cdot\max\left\{\Delta x_k\right\}\to 0.$$

■

注 本题讨论什么样的函数可积。结论有：(1) 单调函数可积；(2) 连续函数可积；(3) 有有限间断点的函数可积；(4) 有界变差函数可积。

可积性判据有如下几个：

(1) Darboux 大和与 Darboux 小和的差趋于 0，即 $\bar{S}(P)-\underline{S}(P)\to 0$，它等价于 $\sum\limits_k \omega_k\Delta x_k\to 0$，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta_k\to 0$。

(2) $\forall\varepsilon>0$，存在**一个**划分 P，使得 $\sum\limits_k \omega_k\Delta x_k<\varepsilon$。

(3) $\forall\sigma,\lambda>0$，存在**一个**划分 P，使得振幅大于 σ 的小区间的总长度不超过 λ。

例 1.5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且它仅有可列的间断点 $\{x_n\}$。证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

证 $\forall\sigma,\lambda>0$。取 x_n 的长度为 $\dfrac{\lambda}{2^{n+1}}$ 的邻域 N_n，则这些邻域总长度为

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda}{2^{n+1}}=\lambda/2.$$

现在 $f(x)$ 在紧集 $S=[a,b]\backslash\cup N_i$ 上连续，因而一致连续。取 S 的一个有限开区间覆盖，使得在每个小区间上，函数 $f(x)$ 的振幅不超过 σ。现 S 的覆盖连同 $\cup N_i$ 构成 $[a,b]$ 的覆盖，因而存在有限子覆盖。取这个有限覆盖的小区间的端点和 a,b 两点就构成 $[a,b]$ 的划分。相对于这个划分，振幅大于 σ 的那些小区间都落在某个 N_i 中，因而这种小区间的长度总和不超过 λ。得证。 ■

注 本题采用前面给的第三个可积性判据，对本题而言，用它是比较方便的。

例 1.6 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 可积 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的间断点的集合是零测集。

证 $\Leftarrow$ 设 $f(x)$ 的间断点的集合为 S，它是零测集。设 $M>0$ 是 $|F(x)|$ 的上界，即 $|f(x)|\leqslant M(\forall x\in[a,b])$。$\forall\varepsilon>0$，取一列开区间 $\{(\alpha_n,\beta_n)\}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)<\frac{\varepsilon}{4M},\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)\supset S.$$

$\forall x \in [a,b]\backslash S$，$x$ 是 f 的连续性点，因此存在 $\delta_x > 0$，使得

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall t \in N(x,\delta_x),$$

于是当 $t_1, t_2 \in N(x,\delta_x)$ 时，

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant |f(t_1) - f(x)| + |f(t_2) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

即 $f(x)$ 在 $N(x,\delta_x)$ 内的振幅不超过 $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$。

注意，开区间族

$$\big\{(\alpha_n,\beta_n) : n \geqslant 1\big\} \bigcup \big\{N(x,\delta_x) : x \in [a,b]\backslash S\big\}$$

构成 $[a,b]$ 的开覆盖，因而存在有限的子覆盖

$$\mathscr{C} = \big\{(\alpha_i,\beta_i) : 1 \leqslant i \leqslant p\big\} \bigcup \big\{N(x_i,\delta_{x_i}) : 1 \leqslant i \leqslant q\big\}.$$

由 a, b 以及 $\mathscr{C}$ 中所有开区间的端点一起构成区间 $[a,b]$ 的一个划分 P。

把划分 P 分割出的 $[a,b]$ 的子区间分为两类：其中的一类的内部包含在形如 $N(x_i,\delta_{x_i})$ 的区间中，f 在其上的振幅不超过 $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$，这种区间总长度不超过 $b-a$；另一类的内部包含在形如 (α_i,β_i) 的邻域内，其振幅不超过 $2M$，这样的区间总长不超过 S 的覆盖的长度 $\dfrac{\varepsilon}{4M}$。因此对应于这个划分，所有的振幅与区间长度的乘积之和不超过

$$(b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \varepsilon.$$

于是由函数可积的定理知 f 在 $[a,b]$ 上可积。

$\Rightarrow$ 设 f 在 $[a,b]$ 上可积。$\forall \varepsilon > 0$，存在区间 $[a,b]$ 的划分，使得对应于振幅大于 $\dfrac{1}{n}$ 的那些小区间的总长度不超过 $\dfrac{\varepsilon}{2^n}$，记这种小区间的并集为 S_n。对 $n = 1, 2, \cdots$，重复这个过程。由于 f 的不连续点一定出现在某个 S_n 中，从而

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n,$$

注意，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ 的总长度和不超过

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon,$$

因此由 ε 的任意性知 S 的测度为 0. ■

习题 12 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且它仅有一列间断点 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

提示：这是 45 题的特殊情形，可采用特殊的证明方法。$\forall\sigma,\lambda>0$，先挖去 x_0 的小邻域，这个邻域包含无穷多 x_n，其外仅余有限个 x_n（利用极限定义），再挖去每个这种 x_n 的小邻域，使得前面挖去的所有小邻域的总长度不超过 λ，而在 $[a,b]$ 剩余的部分中插入分点，使得在由这些分点构成的小区间上 f 的振幅不超过 σ（这可由连续性得以保证）。

例 1.7 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$。求证：对任何 $\varepsilon>0$，存在只取 $0,1$ 的分段常值函数 $g(x)$，使得 $\forall[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$，

$$\left|\int_\alpha^\beta[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

证 $\forall\varepsilon>0$，取正整数 n，使得 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，定义

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}\Big[\dfrac{i}{n},\dfrac{i}{n}+\displaystyle\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\Big],\\[2ex] 0, & 其他.\end{cases}$$

$\forall[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$，存在 i,j 满足：$0\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$，$\dfrac{i}{n}\leqslant\alpha<\dfrac{i+1}{n}$, $\dfrac{j}{n}\leqslant\beta<\dfrac{j+1}{n}$。于是由 $|f(x)-g(x)|\leqslant 1(\forall x\in[0,1])$ 得

$$\left|\int_\alpha^\beta[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|=\left|\int_\alpha^{\frac{i+1}{n}}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{j}{n}}^\beta[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

证毕。 ■

例 1.8 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$，$f(0)=f(1)$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，且 $f'(x)\neq 1(\forall x\in[0,1])$。求证：对任意正整数 n，有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

证 由 Rolle 定理，$f'(x)$ 有零点，因此再由 $f'(x)\neq 1$ 以及导函数的介值性知道，$f'(x)<1$。令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g'(x)<0$，因此 $g(x)$ 严格单调减少，于是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)<\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right),$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{n+1}{2n}<-\frac{1}{2}<\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{n-1}{2n},$$

化简得到

$$-\frac{1}{2}<\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)<\frac{1}{2},$$

即

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

■

例 1.9 设 $f\in R[a,b]$ 且有原函数 $F(x)$，则成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证 对任意划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，由 Lagrange 中值定理，

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$。令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$，则由定积分的定义有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}[F(x_n) - F(x_0)] = F(b) - F(a).$$

■

例 1.10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，证明：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall\, x \in [a,b].$$

（第三届全国大学生数学竞赛决赛试题）

证 首先对 $f''(x)$ 的积分证明 Newton-Leibniz 公式成立，即要把上例的结果当做引理重新证明一遍，再按以下方法证明。

方法一。利用 Newton-Leibniz 公式，

$$\begin{aligned}
&f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\\
&= \int_a^x (f'(t) - f'(a))\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^x \mathrm{d}t \int_a^t f''(s)\mathrm{d}s\\
&= \int_a^x \mathrm{d}s \int_s^x f''(s)\mathrm{d}t\\
&= \int_a^x (x-s)f''(s)\mathrm{d}s\\
&= \int_a^x (x-t)f''(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

注意，从第二个等式到第三个等式用了累次积分交换次序。

方法二。利用分部积分公式，

$$\int_a^x (x-t)f''(t)\mathrm{d}t = (x-t)f'(t)\Big|_a^x + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

$$= -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a).$$

■

§2. 积分法

2.1 不定积分的方法

1. 公式表方法
2. 换元法
3. 分部积分法

2.2 定积分的计算方法

§3. 定积分理论的应用

3.1 积分与极限

例 3.1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，在 $x=1$ 可导，$f(1)=0, f'(1)=a$。证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = -a.$$

证 记 $g(x)=a(x-1)$，则对 $n\geqslant 1$，成立

$$\begin{aligned} n^2\int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x &= n^2\frac{x^{n+1}}{n+1}g(x)\Big|_0^1 - n^2\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}g'(x)\mathrm{d}x \\ &= -n^2a\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}x = -\frac{n^2a}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x = -a,$$

从而只需证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n h(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

其中 $h(x)=f(x)-g(x)$.

$\forall\varepsilon>0$，注意到 $h(1)=h'(1)=0$，因此存在 $\delta>0$，当 $1-\delta\leqslant x\leqslant 1$ 时，成立

$$|h(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(1-x).$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|n^2\int_{1-\delta}^1 x^n h(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&n^2\int_{1-\delta}^1 x^n\cdot\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\,\mathrm{d}x\\ <&n^2\int_0^1 x^n\cdot\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\,\mathrm{d}x\\ =&\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

显然，$h(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，因而有界，即存在 $M>0$，使得 $|h(x)|\leqslant M(\forall x\in[0,1])$。于是

$$\left|n^2\int_0^{1-\delta} x^n h(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant n^2M\int_0^{1-\delta}x^n\mathrm{d}x\leqslant n^2M(1-\delta)^{n+1}.$$

由于 $n^2M(1-\delta)^{n+1}\to 0(n\to\infty)$，因此存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$n^2M(1-\delta)^{n+1}<\varepsilon/2$，从而有

$$\left|n^2\int_0^{1-\delta} x^n h(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\left|n^2\int_0^1 x^n h(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\left|n^2\int_0^{1-\delta} x^n h(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|n^2\int_{1-\delta}^1 x^n h(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

得证。 ■

例 3.2 求最小的正数 C，使得对于所有满足条件 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 $f(x)$，都成立

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \leqslant C.$$

分析 这个问题等价于求

$$C \triangleq \sup\left\{\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \,\middle|\, f \in C[0,1],\ \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1\right\}.$$

由于

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \overset{x=t^2}{=} \int_0^1 2t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2x\,f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 2x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

因此为了使 $\int_0^1 2x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ 尽可能大，必须使 $f(x) \geqslant 0$，即

$$C \triangleq \sup\left\{\int_0^1 2x\,f(x)\,\mathrm{d}x \,\middle|\, f \in C[0,1],\ f(x) \geqslant 0, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1\right\}.$$

下面把 $f(x)$ 看成物体的线密度，该物体占有区间 $[0,1]$，质量为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$，则积分 $\int_0^1 2x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示物体的质心坐标的 2 倍，因此，为了使得它尽可能大，必须使得质量尽量集中在 $x=1$ 附近，从而质心尽可能靠近 $x=1$，从而 $C=2$。

解 因为

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 2x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 2,$$

因此 $C \leqslant 2$。

另外，对函数 $f_n(x) = (n+1)x^n$，成立 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$，以及

$$\int_0^1 2x\,f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2(n+1)x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

因此

$$C \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x\,f_n(x)\,\mathrm{d}x = 2,$$

综合前面讨论知 $C=2$。 ■

例 3.3 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 按如下定义给出：$a_1 = a > 0,\ b_1 = b > 0$，且当 $n \geqslant 1$ 时，

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad ,b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\right)^{-1}.$$

证 (1) 不妨设 $a \geqslant b > 0$，归纳地证明 $\{a_n\}$ 单调减少，$\{b_n\}$ 单调增加，且它们都满足 $0 < b \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant a$: 注意，按定义，显然 $a_n \geqslant b_n$。

显然 $n = 1$ 时结论成立。

设结论当 $n = k$ 时成立，即有 $b \leqslant b_k \leqslant a_k \leqslant a$，于是

$$a_{k+1} = a_k + \frac{b_k - a_k}{2} \leqslant a_k,$$

$$b_{k+1} = b_k\sqrt{a_k/b_k} \geqslant b_k,$$

且有

$$\begin{aligned} 0 < b = \sqrt{b\cdot b} \leqslant \sqrt{a_k b_k} = b_{k+1} \\ \leqslant a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} \leqslant \frac{a + a}{2} = a, \end{aligned}$$

即 $b \leqslant b_{k+1} \leqslant a_{k+1} \leqslant a$。因此结论对 $n = k + 1$ 也成立。

利用归纳法知结论对一切正整数 n 成立。

由单调有界收敛定理知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛。下面证明它们有相同的极限。

设 $a_n \to A, b_n \to B$，在递推关系 $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ 两边取极限得

$$A = \frac{A + B}{2}, \quad B = \sqrt{AB},$$

从而必然有 $A = B$，即数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 有相同的极限。

(事实上，由于 $b \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant a$，因此极限 A 满足 $b \leqslant A \leqslant a$.)

(2) 不妨设 $a>b>0$。记

$$f(a,b)=\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\right)^{-1},$$

容易看出 $f(a,b)$ 是 a 和 b 的单调增函数，满足

$$b=f(b,b)\leqslant f(a,b)\leqslant f(a,a)=a.$$

做积分变换

$$\sin\theta=\phi(t)=\frac{2a\sin t}{(a+b)+(a-b)\sin^2 t},\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

由于当 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时

$$\begin{aligned}\phi'(t)&=\frac{2a\cos t\left[(a+b)+(a-b)\sin^2 t\right]-2a\sin t\cdot 2(a-b)\sin t\cos t}{\left[(a+b)+(a-b)\sin^2 t\right]^2}\\&=\frac{2a\cos t\left[(a+b)-(a-b)\sin^2 t\right]}{\left[(a+b)+(a-b)\sin^2 t\right]^2}>0,\end{aligned}$$

因此 $\phi(t)$ 严格单调增加且 $\phi(0)=0,\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，因而定义这个变换是合理的。对应于这个变换，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\sqrt{1-\sin^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{2a\sin t}{(a+b)+(a-b)\sin^2 t}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2\sin^4 t-2(a^2+b^2)\ \sin^2 t}}{(a+b)+(a-b)\sin^2 t}\\&=\frac{\sqrt{(1-\sin^2 t)((a+b)^2-(a-b)^2\sin^2 t)}}{(a+b)+(a-b)\sin^2 t}\\&=\frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2 t}}{(a+b)+(a-b)\sin^2 t}\cos t\end{aligned}$$

以及

$$
\begin{aligned}
& a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta \\
=& a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta \\
=& a^2-(a^2-b^2)\left(\frac{2a\sin t}{(a+b)+(a-b)\sin^2 t}\right)^2 \\
=& a^2\cdot\frac{\big[(a+b)+(a-b)\sin^2 t\big]^2-4(a^2-b^2)\ \sin^2 t}{\big[(a+b)+(a-b)\sin^2 t\big]^2} \\
=& \frac{a^2\big[(a+b)-(a-b)\sin^2 t\big]^2}{\big[(a+b)+(a-b)\sin^2 t\big]^2},
\end{aligned}
$$

即有

$$
\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2 t}{(a+b)+(a-b)\sin^2 t}\,a,
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} \\
=& \frac{\phi'(t)\,\mathrm{d}t}{\cos\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} \\
=& \frac{2\mathrm{d}t}{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2 t}} \\
=& \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\big(\frac{a+b}{2}\big)^2-\big(\frac{a-b}{2}\big)^2\sin^2 t}} \\
=& \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\big(\frac{a+b}{2}\big)^2\cos^2 t+\left[\big(\frac{a+b}{2}\big)^2-\big(\frac{a-b}{2}\big)^2\right]\sin^2 t}} \\
=& \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\big(\frac{a+b}{2}\big)^2\cos^2 t+\big(\sqrt{ab}\big)^2\sin^2 t}}.
\end{aligned}
$$

注意，当 $t=0$ 时取 $\theta=0$，$t=\frac{\pi}{2}$ 时取 $\theta=\frac{\pi}{2}$，因此

$$f(a,b)=\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2 t+\left(\sqrt{ab}\right)^2\sin^2 t}}\right)^{-1}=f\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right).$$

利用数列 a_n,b_n 的定义，上式可重新记为

$$f(a,b)=f(a_1,b_1)=f(a_2,b_2),$$

从而归纳地可得

$$f(a,b)=f(a_n,b_n),\quad \forall n\geqslant 1.$$

最后，由于 $f(a,b)$ 是 a,b 的二元连续函数，而 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 有相同的极限，设它为 A，在上式两边令 $n\to\infty$ 得到

$$f(a,b)=f(A,A)=A=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

得证。 ■

注 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 有相同极限，此极限称为 a,b 的**算数-几何平均数**或**高斯平均数**，记为 $AGM(a,b)$，即

$$AGM(a,b)=\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\right)^{-1}.$$

容易验证，算数-几何平均数具有如下性质：

(1) 非负性：$AGM(a,b)>0$；

(2) 对称性：$AGM(a,b)=AGM(b,a)$；

(3) 齐次性：对任意正数 $k>0$，成立 $AGM(ka,kb)=k\cdot AGM(a,b)$；

(4) 不变性：$AGM(a,b)=AGM\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)$.

例 3.4 设 $F(x), G(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上两个非负单调递减函数，

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(F(x)+G(x)\right)=0.$$

(i) 证明：$\forall \varepsilon>0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{+\infty} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t=0$。

(ii) 若进一步有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(F(t)-G(t)\right)\cos\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t=0,$$

证明：

$$\lim_{x\to0}\int_0^{+\infty}\left(F(t)-G(t)\right)\cos(xt)\,\mathrm{d}t=0.$$

（第三届全国大学生数学竞赛决赛试题）

证 注意到，利用 Dirichlet 判别法知，固定 $x\neq0$，积分

$$\int_0^{+\infty} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty} F(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty} G(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

都收敛。因此后面将要讨论的积分都存在。

(i) 固定 $\varepsilon>0$，对任意 $A>\varepsilon$，对 $x>0$，由第二积分中值定理有

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{A} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t =&x\left[F(x\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{\xi}\cos t\,\mathrm{d}t+F(xA)\int_{\xi}^{A}\cos t\,\mathrm{d}t\right]\\ =&x\big[F(x\varepsilon)(\cos\varepsilon-\cos\xi)\\ &+F(xA)(\cos\xi-\cos A)\big],\end{aligned}$$

因而由 F 的单调性有

$$\left|\int_{\varepsilon}^{A} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2xF(x\varepsilon)\to0(x\to+\infty),$$

对 A 一致成立，因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{+\infty} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=\lim_{x\to+\infty}\lim_{A\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{A} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=\lim_{A\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{A} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=0.
\end{aligned}$$

(ii) 只需考虑 $x\to 0+$ 的情形，这等价于证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} x\left(F(xt)-G(xt)\right)\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$

由 (i) 的结论，只需证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\varepsilon_0} x\left(F(xt)-G(xt)\right)\cos t\,\mathrm{d}t=0,$$

其中 $0<\varepsilon_0\leqslant\dfrac{\pi}{2}$。

下面先证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon_0} n[G(nt)-G((n+1)t)]\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$

由于

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varepsilon_0} n[G(nt)-G((n+1)t)]\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n}\,\mathrm{d}u-\frac{n}{n+1}\int_0^{(n+1)\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n+1}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{n+1}\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n}\,\mathrm{d}u+\frac{n}{n+1}\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\left[\cos\frac{u}{n}-\cos\frac{u}{n+1}\right]\,\mathrm{d}u\\
&\quad-\frac{n}{n+1}\int_{n\varepsilon_0}^{(n+1)\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n+1}\,\mathrm{d}u\\
&=I_1+I_2-I_3,
\end{aligned}$$

由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=0$，因而有

$$\begin{aligned}
|I_1| =&\frac{1}{n+1}\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\varepsilon_0} G(nu)\cos u\,\mathrm{d}u\\
=&\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} G(nu)\cos u\,\mathrm{d}u+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon_0} G(nu)\cos u\,\mathrm{d}u\\
\leqslant&\frac{G(0)}{\sqrt{n}}+G(\sqrt{n})\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon_0}\cos u\,\mathrm{d}u\to 0,\ n\to\infty;\\
|I_2| =&\frac{n}{n+1}\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\left[\cos\frac{u}{n}-\cos\frac{u}{n+1}\right]\mathrm{d}u\\
\leqslant&\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n} G((k-1)\varepsilon_0)\int_{(k-1)\varepsilon_0}^{k\varepsilon_0}\frac{u}{n(n+1)}\,\mathrm{d}u\\
=&\frac{\varepsilon_0}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\varepsilon_0 G((k-1)\varepsilon_0)+\frac{n\varepsilon_0^2G(0)}{2(n+1)^2}\to 0,\ n\to\infty;\\
|I_3| =&\frac{n}{n+1}\int_{n\varepsilon_0}^{(n+1)\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n+1}\,\mathrm{d}u\\
=&n\int_{\frac{n\varepsilon_0}{n+1}}^{\varepsilon_0} G(u)\cos u\,\mathrm{d}u\leqslant nG(n\varepsilon_0)\int_{\frac{n\varepsilon_0}{n+1}}^{\varepsilon_0}\cos u\,\mathrm{d}u\\
\leqslant&\frac{n\varepsilon_0 G(n\varepsilon_0)}{n+1}\to 0,\ n\to\infty,
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon_0} n[G(nt)-G((n+1)t)]\cos t\,\mathrm{d}t=0. \tag{4.1}$$

类似于估计 I_1 可得

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\varepsilon_0}[F(xt)-G(xt)]\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$

从而只需证明

$$\lim_{x\to\infty}[x]\int_0^{\varepsilon_0}[F(xt)-G(xt)]\cos t\,\mathrm{d}t=0,$$

其中 $[x]$ 是 x 的整数部分。记 $[x]=n$，当 $n\leqslant x<n+1$ 时有

$$
\begin{aligned}
&n\int_0^{\varepsilon_0}[F(xt)-G(xt)]\cos t\,\mathrm{d}t\\
\leqslant &n\int_0^{\varepsilon_0}[F(nt)-G(nt)]\cos t\,\mathrm{d}t\\
&+n\int_0^{\varepsilon_0}[G(nt)-G((n+1)t)]\cos t\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&n\int_0^{\varepsilon_0}[F(xt)-G(xt)]\cos t\,\mathrm{d}t\\
\geqslant &n\int_0^{\varepsilon_0}[F((n+1)t)-G((n+1)t)]\cos t\,\mathrm{d}t\\
&-n\int_0^{\varepsilon_0}[G(nt)-G((n+1)t)]\cos t\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

最后，由题设知

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{+\infty}[F(nt)-G(nt)]\cos t\,\mathrm{d}t=0,$$

再由 (i) 可得

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\varepsilon_0}[F(nt)-G(nt)]\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$

结合(4.1)和极限的夹逼性得

$$\lim_{x\to\infty}n\int_0^{\varepsilon_0}[F(xt)-G(xt)]\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$

得证。 ■

例 3.5 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t=0.$$

证明：(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=0$，(ii) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=0$.（第三届全国大学生数学竞赛预赛试题）

证 (i) 由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t$ 收敛 $(\forall n)$。注意，由 F 的单调性，

$$\begin{aligned}
&\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt)\sin t\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi} F(nt+2nk\pi)\sin t\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}\big(F(nt+2nk\pi)-F(2nk\pi+2n\pi-nt)\big)\sin t\mathrm{d}t\\
&\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(F(nt+2nk\pi)-F(2nk\pi+2n\pi-nt)\big)\sin t\mathrm{d}t\\
&\geqslant\Big[F\big(\frac{n\pi}{2}+2nk\pi\big)-F\big(\frac{3n\pi}{2}+2nk\pi\big)\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t\\
&=F\big(\frac{n\pi}{2}+2nk\pi\big)-F\big(\frac{3n\pi}{2}+2nk\pi\big)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t&=n\int_0^{+\infty}F(nt)\sin t\mathrm{d}t\\
&=n\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}F(nt)\sin t\mathrm{d}t\\
&\geqslant n\int_0^{2\pi}F(nt)\sin t\mathrm{d}t\\
&\geqslant n\Big[F\big(\frac{n\pi}{2}\big)-F\big(\frac{3n\pi}{2}\big)\Big]\geqslant 0,
\end{aligned}$$

由假设知

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big[F\big(\frac{n\pi}{2}\big)-F\big(\frac{3n\pi}{2}\big)\Big]=0,\quad \lim_{k\to+\infty} nF\big(\frac{3^k n\pi}{2}\big)=0.$$

$\forall\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时

$$\left|n\Big[F\big(\frac{n\pi}{2}\big)-F\big(\frac{3n\pi}{2}\big)\Big]\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

对每个固定的 $n>N$，取 k 充分大，使得

$$\left|nF\big(\frac{3^k n\pi}{2}\big)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而由

$$n\left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right)\right]=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{3^i}(3^i n)\left[F\left(\frac{3^i n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3^{i+1}n\pi}{2}\right)\right]$$

得到

$$\begin{aligned}\left|nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{3^i}\left|(3^i n)\left[F\left(\frac{3^i n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3^{i+1}n\pi}{2}\right)\right]\right|+\left|nF\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right)\right|\\ &<\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{3^i}\cdot\frac{\varepsilon}{4}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &<\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0.$$

对任意充分大地 x，取 n 使得 $\frac{n\pi}{2}\leqslant x<\frac{(n+1)\pi}{2}$，利用 F 的性质有

$$0\leqslant xF(x)\leqslant\frac{(n+1)\pi}{2}F\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

因而当 $x>X=\frac{N\pi}{2}$ 时，相应的 $n>N$，从而有

$$0\leqslant xF(x)\leqslant\frac{(n+1)\pi}{2n}\cdot nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)<\pi\varepsilon,$$

即有 $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=0$。

（ii）首先，由 (i) 知 $xF(x)$ 有界，设 $0\leqslant xF(x)\leqslant M$。其次，利用 F 的单调性，类似前面

的讨论, 当 $x>0$ 时，对任意 $\delta\in(0,\pi)$ 有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} F(t/x)\sin t\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F(t/x)\sin t\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\delta} \frac{t}{x}F(t/x)\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \int_\delta^{\pi} \frac{t}{x}F(t/x)\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \\
&\leqslant M\delta + \sup_{t\geqslant\delta/x}\big(tF(t)\big)\int_\delta^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \\
&< M\delta + \pi\cdot\sup_{t\geqslant\delta/x}\big(tF(t)\big).
\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，取定 $\delta\in(0,\pi)$，使得 $M\delta<\varepsilon/2$。最后，由 $tF(t)\to 0(t\to+\infty)$ 知，存在 $X>0$，当 $t>X$ 时，$0\leqslant tF(t)<\dfrac{\varepsilon}{2\pi}$。令 $\rho=\dfrac{\delta}{X}$，则当 $0<x<\rho$ 时，

$$0\leqslant \sup_{t\geqslant\delta/x}\big(tF(t)\big)<\frac{\varepsilon}{2\pi},$$

于是

$$0\leqslant\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=0.$$

■

例 3.6 设

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^x z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z,\quad x\in[0,+\infty)$$

求 $f(x)$.

解 (1) 计算 $f(\pi/2)$ 的值如下：

$$\begin{aligned}
f(\pi/2) &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\pi/2} z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z \quad (\tan z = t)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2/\varepsilon}\,\mathrm{d}t \quad (t = u\sqrt{\varepsilon})\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(u\sqrt{\varepsilon})}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\
&= 0,
\end{aligned}$$

最后一个等式的证明如下：

$\forall\rho>0$，由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ 收敛，存在 $A>0$，使得

$$0<\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u<\frac{\rho}{\pi},$$

从而对 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}
0 &< \int_A^{+\infty}\frac{\arctan(\sqrt{\varepsilon}u)}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\
&< \frac{\pi}{2}\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\
&< \frac{\rho}{2}.
\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0+$ 时，函数 $\dfrac{\arctan(\sqrt{\varepsilon}u)}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}$ 在 $u\in[0,A]$ 上一致收敛于 0，因此存在 $\delta>0$，使得当 $0<\varepsilon<\delta$ 时，

$$0<\int_0^A\frac{\arctan(\sqrt{\varepsilon}u)}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u<\frac{\rho}{2}.$$

综合前面的讨论知，当 $0<\varepsilon<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(\sqrt{\varepsilon}u)}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{A}\frac{\arctan(\sqrt{\varepsilon}u)}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\int_A^{+\infty}\frac{\arctan(\sqrt{\varepsilon}u)}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\
&< \frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}=\rho,
\end{aligned}$$

因此由极限的定义知前面的极限式成立。再由单调性知，当 $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ 时 $f(x) = 0$。

(2) 计算 $f(n\pi)$ 的值，$n = 1, 2, \cdots$。

此时，

$$\int_0^{n\pi} z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} I_k,$$

这里

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{k\pi}^{(k+1/2)\pi} z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_{(k+1/2)\pi}^{(k+1)\pi} z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

对上面第一个积分作变换 $z = k\pi + t$，对第二个积分作变换 $z = (k+1)\pi - t$，则

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\pi/2} (k\pi + t)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \big[(k+1)\pi - t\big]\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= (2k+1)\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t \quad (\tan t = \sqrt{\varepsilon}\,u) \\ &= (2k+1)\pi\sqrt{\varepsilon}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

由此可见

$$\begin{aligned} f(n\pi) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{n-1} I_k \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} n^2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= n^2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{n^2}{2}\pi^{3/2}. \end{aligned}$$

这里由

$$0 < \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{1+\varepsilon u^2} < \mathrm{e}^{-u^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ 收敛，因此 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{d}u$ 对 $\varepsilon \in [0,1]$ 一致收敛，从而成立

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(3) 设 $n\pi < x \leqslant (n+1/2)\pi$。此时，

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(n\pi) + \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{n\pi}^{x} z\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 z}\,\mathrm{d}z \\
&= f(n\pi) + \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{x-n\pi} (n\pi+t)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= f(n\pi) + f(x-n\pi) + n\pi\cdot \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{x-n\pi} \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n^2}{2}\pi^{3/2} + n\pi\cdot \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{x-n\pi} \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

记 $y = x - n\pi$，则 $y \in (0, \pi/2]$。此时

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{y} \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{\frac{\tan y}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{1+\varepsilon u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

其证明类似于 (1) 的过程。因此我们得到

$$f(x) = \frac{n(n+1)}{2}\pi^{3/2}.$$

同理，当 $(n+1/2)\pi < x < (n+1)\pi$ 时，容易得到

$$\begin{aligned}
f(x) =& f((n+1)\pi) + f((n+1)\pi - x) \\
&- (n+1)\pi\cdot \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{x-n\pi} \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1}\tan^2 t}\,\mathrm{d}t \\
=& \frac{(n+1)^2}{2}\pi^{3/2} - (n+1)\pi\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
=& \frac{n(n+1)}{2}\pi^{3/2}.
\end{aligned}$$

综合以上结果得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{2}\pi^{3/2}, & x=n\pi,\\ \dfrac{n(n+1)}{2}\pi^{3/2}, & n\pi<x<(n+1)\pi,\end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

■

3.2 函数正交性与积分估值

例 3.7 令 $\mathbf{R}$ 为实数域，n 为给定的正整数，A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的集合。证明：

$$\inf_{b\in\mathbf{R},c>0,P(x)\in A}\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x>0.$$

证　方法一. 由

$$\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}\left|\frac{2^n}{c^n}P\Big(\frac{c}{2}t+b+\frac{c}{2}\Big)\right|\mathrm{d}t,$$

而 $\dfrac{2^n}{c^n}P\Big(\dfrac{c}{2}t+b+\dfrac{c}{2}\Big)$ 仍为首一多项式，因此

$$\inf_{b\in\mathbf{R},c>0,P(x)\in A}\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x=\inf_{P(x)\in A}\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}|P(x)|\,\mathrm{d}x\triangleq K.$$

下面证明 $K>0$。记

$$q_n(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,$$

则 $q_n(x)$ 有界：$|q_n(x)| \leqslant M_n$，$\forall x \in [-1,1]$，且当 $0 \leqslant k < n$ 时，成立

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^k q_n(x)\mathrm{d}x = &\ x^k \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} \\
&- k\int_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x \\
=&-k\int_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x \\
=&\ \cdots \\
=&\ (-1)^k k!\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x \\
=&\ (-1)^k k!\ \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} \\
=&\ 0,
\end{aligned}$$

因此对 $P(x) \in A$，有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(x)q_n(x)\mathrm{d}x &= (-1)^n\int_{-1}^{1} P^{(n)}(x)(x^2-1)^n\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n n!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x \\
&= n!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x \\
&\triangleq C_n > 0,
\end{aligned}$$

这里 C_n 是仅依赖于 n 的正常数。最后我们得到

$$\int_{-1}^{1}|P(x)|\,M_n\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1} P(x)q_n(x)\mathrm{d}x = C_n,$$

从而

$$\int_{-1}^{1}|P(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{C_n}{M_n} > 0,$$

即

$$K \geqslant \frac{C_n}{2^{n+1}M_n} > 0.$$

方法二. 由上面讨论有

$$\inf_{b\in\mathbf{R},c>0,P(x)\in A}\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x=\inf_{P(x)\in A}\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}|P(x)|\,\mathrm{d}x,$$

但

$$\int_{-1}^{1}|P(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|P(\cos x)|\sin x\mathrm{d}x,$$

因此

$$\begin{aligned}&\inf_{b\in\mathbf{R},c>0,P(x)\in A}\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x\\&=\inf_{P(x)\in A}\int_0^{\pi}|P(\cos x)|\sin x\mathrm{d}x\triangleq K.\end{aligned}$$

注意到 ($i=\sqrt{-1}$)

$$\cos^k x=\Big(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\Big)^k=\frac{1}{2^{k-1}}\cos kx+\sum_{j=0}^{k-1}c_j\cos jx,$$

对某些常数 c_j 成立。因此，$\forall P(x)\in A$，成立

$$P(\cos x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx+\sum_{j=0}^{n-1}d_j\cos jx,$$

对某些常数 d_j 成立。而当 $0\leqslant j\leqslant n-1$ 时，成立

$$\int_0^{\pi}\cos jx\sin x\sin(n+1)x\mathrm{d}x=0,$$

因此 $\forall P(x)\in A$，成立

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}P(\cos x)\sin x\sin(n+1)x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx\sin x\sin(n+1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

从而成立

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}|P(\cos x)|\sin x\mathrm{d}x&\geqslant\int_0^{\pi}P(\cos x)\sin x\sin(n+1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

于是

$$K = \inf_{P(x)\in A} \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{\pi} |P(\cos x)| \sin x dx \geqslant \frac{\pi}{2^{2n+2}}.$$

■

注 事实上，方法一中的 C_n 可用 B 函数表示出来，但由于 M_n 未知，因此意义不大。

例 3.8 设 $T_n(x)$ 是 n 阶三角多项式，即

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

且其中 $b_{n-1} = 1$。试证明：

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |T_n(x)| \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

证 因

$$b_{n-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x) \sin(n-1)x \, dx = 1,$$

因此

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_0^{2\pi} T_n(x) \sin(n-1)x \, dx \\
&= \frac{1}{n-1} \int_0^{2(n-1)\pi} T_n(\frac{t}{n-1}) \sin t \, dt \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} T_n(\frac{t}{n-1}) \sin t \, dt,
\end{aligned}$$

因此至少存在一个 $k : 1 \leqslant k \leqslant n-1$，使得

$$\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} T_n(\frac{t}{n-1}) \sin t \, dt \geqslant \pi.$$

若题目结论不成立，则 $|T_n(x)| < \frac{\pi}{4} (\forall x)$，从而

$$\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} T_n(\frac{t}{n-1}) \sin t \, dt < \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\pi}{4} |\sin t| \, dt = \pi,$$

矛盾。因此必然有

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |T_n(x)| \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

■

3.3 定积分与一元函数的性质

例 3.9 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点。

证 方法一. 利用分部积分。

记 $F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，且 $F(0) = F(\pi) = 0$。因此由 Rolle 定理，存在 $\xi_1 \in (0,\pi)$，使得 $F'(\xi_1) = 0$，即 $f(\xi_1) = 0$。

由于

$$0 = \int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = [F(x)\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x,$$

因此同上知 $F(x)\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内有零点 ξ_2。再由 Rolle 定理，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点。

方法二. 同上，先证 $f(x)$ 至少有一个零点 $x_0 \in (0,\pi)$。再反证。

若必然，设 x_0 是 f 的唯一零点，则函数 $f(x)(\cos x - \cos x_0)$ 不变号，这与如下事实矛盾：

$$\int_0^\pi f(x)(\cos x - \cos x_0)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x - \cos x_0 \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点。 ■

例 3.10 设 $f \in C^1[a,b]$。证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证 由 f 连续，可设 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)\right| = |f(x_0)|, x_0 \in [a,b]$。由积分中值定理，存在 $c \in [a,b]$，使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此由 Newton-Leibniz 公式

$$f(x_0) - f(c) = \int_c^{x_0} f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)\right| &= |f(x_0)| \leqslant |f(c)| + \left|\int_c^{x_0} |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant |f(c)| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证毕。 ■

注 这一类型的题目，找准关键点使用 Newton-Leibniz 公式是至关重要的。

例 3.11 设 $f \in C^1[a,b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$。证明：

$$f^2(t) \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

提示：$f(t) - f(a) = \displaystyle\int_a^t f'(x)\,\mathrm{d}x$，$f(t) - f(b) = \displaystyle\int_b^t f'(x)\,\mathrm{d}x$。于是

$$\begin{aligned}2\,|f(t)| &= \left|\int_a^t f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^t f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^t |f'(x)|\,\mathrm{d}x + \int_t^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}4f^2(t) &\leqslant \left(\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant \int_a^b \mathrm{d}x \cdot \int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\\&= (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

得证。

例 3.12 设 $f \in C^2[a,b]$ 且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)>0(\forall x \in (0,1))$。证明：

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant 4.$$

证 把分母放大为 $f(x)$ 的最大值 $M=f(x_0)$。记

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} = \frac{M}{x_0} = f'(\xi_1),\\k_2 &= \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1} = \frac{M}{x_0-1} = f'(\xi_2).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x &\geqslant \frac{1}{M}\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x\\&\geqslant \frac{1}{M}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&= \frac{1}{M}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|\\&= \frac{1}{x_0}+\frac{1}{1-x_0} \geqslant 4.\end{aligned}$$

最后的不等式中等号成立仅当 $x_0=\dfrac{1}{2}$。 ■

例 3.13 设 $f \in R[a,b]$，$g(x)\geqslant 0$ 以 $T>0$ 为周期，在 $[0,T]$ 上可积。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

提示：把区间 $[a,b]$ 作分割，使得每个小区间长度为 $\frac{T}{n}$，再利用 Riemann 和的极限是定积分。

例 3.14 设 f 是 $[0,1]$ 上连续的正值函数，找出满足条件

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1,\ \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = a,\ \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a^2$$

的所有 f，其中 a 为给定实数。

提示：f 不存在。利用 Cauchy-Schwarz 不等式。

3.4 积分不等式

例 3.15 设 f,g 是 $[0,1]$ 上的两个单调不增的函数。

(1) 证明：

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)g(1-x)\mathrm{d}x.$$

(2) 证明：如果 (1) 中的一个不等式成为等式，则另一个不等式也成为等式。找出这种情形下 f,g 的特点。

证 (1) 记 $D=[0,1]\times[0,1]$。由 f,g 的单调性知，在 D 上成立

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geqslant 0,$$

从而有

$$\iint\limits_D (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0,$$

即

$$\int_0^1\int_0^1 (f(x)g(x)+f(y)g(y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_0^1\int_0^1 (f(x)g(y)+f(y)g(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

也就是

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 g(y)\mathrm{d}y.$$

同理，利用 $g(1-x)$ 与 $f(x)$ 有相反的单调性可得

$$(f(x)-f(y))(g(1-x)-g(1-y)) \leqslant 0,$$

因而类似于上面的讨论可得

$$\int_0^1 f(x)g(1-x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 g(1-y)\mathrm{d}y.$$

最后，注意

$$\int_0^1 g(1-y)\mathrm{d}y = \int_0^1 g(y)\mathrm{d}y,$$

由前一个不等式得到

$$\int_0^1 f(x)g(1-x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 g(y)\mathrm{d}y.$$

结合前面两段最后的不等式就得到我们所要的结果。

(2) 由 (1) 的证明过程可见，要使其中任一不等式成为等式，当且仅当 $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))=0$ 或 $(f(x)-f(y))(g(1-x)-g(1-y))=0$ 恒成立，这相当于 f 或 g 是常函数，此时相应地另一个不等式也成为等式。 ■

例 3.16 设 f 定义于 $[0,+\infty)$ 上且 $0<f(x)<1$。若积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛，证明：

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

证 记 $a=\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $a>0$，从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \\
&> \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x + a\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x + a\left[a-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x + a\int_0^a [1-f(x)]\,\mathrm{d}x \\
&> \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a x[1-f(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a^2,
\end{aligned}$$

得证。 ■

注 当 f 连续时，令

$$\phi(x)=\int_0^x xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

则

$$\phi'(x)=f(x)\left[x-\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right]\geqslant 0,\quad \forall x>0.$$

再由 $\phi(0)=0$ 知 $\phi(x)\geqslant 0(\forall x>0)$，令 $x\to+\infty$ 即可。此时，更简单的做法是：(注意 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant x$)

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{+\infty} f(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

一般地，当 f 不连续时，可用连续函数逼近它，使得逼近函数与 f 的积分的误差任意小。也可对上面的 $\phi(x)$ 采用 Riemann 和再用 Abel 变换后取极限证明。

例 3.17 设 $\varphi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数，满足 $\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x) = +\infty$。若

$$\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x = a < +\infty,$$

其中 φ^{-1} 是 φ 的反函数。证明：

$$\int_0^{+\infty}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}a^{3/2}.$$

证 方法一. 由于 φ 单调下降，因此 $\forall x > 0$，

$$a = \int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant x\varphi(x),$$

于是 $0 < \varphi(x) \leqslant \dfrac{a}{x}$。同理有 $0 < \varphi^{-1}(x) \leqslant \dfrac{a}{x}$。

由 φ 的非负连续性，可取 $c > 0$，使得

$$\int_0^{c}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{2}.$$

由于 $\varphi^{-1}(c) \leqslant \dfrac{a}{c}$，因此

$$\int_{\frac{a}{c}}^{+\infty}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varphi^{-1}(c)}^{+\infty}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{c}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

令 $f(x) = \displaystyle\int_{a/x}^{+\infty}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x - \int_x^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$，则由上式，

$$f(c) < 0, f(+\infty) = a > 0.$$

因此存在 $p > c$ 使得 $f(p) = 0$。注意 $p > c$，

$$\int_{a/p}^{+\infty}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x = \int_p^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x < \int_c^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{2},$$

从而令 $q = a/p$，则

$$\int_0^{p}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{q}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{a+I}{2},$$

其中 $I>0$ 为某个常数。注意 $pq=a$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(x)]^2\mathrm{d}x\\
\geqslant&\int_0^{p}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x+\int_0^{q}[\varphi^{-1}(x)]^2\mathrm{d}x\\
\geqslant&\frac{1}{p}\left(\int_0^p\varphi(x)\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{q}\left(\int_0^q\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
\geqslant&2\frac{1}{\sqrt{pq}}\int_0^p\varphi(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^q\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{\sqrt{a}}\left(\frac{a+I}{2}\right)^2>\frac{1}{2}a^{3/2}.
\end{aligned}$$

方法二. 由 φ 的非负连续性，$\varphi^{-1}(x)$ 非负连续。因此存在 $p>0,q>0$，使得

$$\int_p^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_q^{+\infty}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x+p^2\varphi(p)+q^2\varphi^{-1}(q)<\frac{1}{9}a.$$

记 D 是由直线 $x=0,y=0,x=p,y=q$ 以及曲线 $y=\varphi(x)$ 围成的有界闭区域，其边界逆时针定向。由积分的几何意义知，区域 D 的面积 $A(D)>\dfrac{8}{9}a$。

注意，由 φ 单调下降，

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x&=\left\{\int_0^{\varphi^{-1}(q)}+\int_{\varphi^{-1}(q)}^{p}+\int_p^{+\infty}\right\}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x\\
&\geqslant\int_0^{\varphi^{-1}(q)}q^2\mathrm{d}x+\int_{\varphi^{-1}(q)}^{p}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x\\
&=-\oint_{\partial D}y^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\oint_{\partial D}x^2\mathrm{d}y.$$

记 D_1 是由两坐标轴以及直线 $x+y=t(t>0)$ 围成的区域，其中 t 为待定正常数，由

Green 公式得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(x)]^2\mathrm{d}x\\
\geqslant&\oint_{\partial D}x^2\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x=2\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\geqslant&2\iint_{D\setminus D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 2t\iint_{D\setminus D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\geqslant&2t(A(D)-A(D_1))\geqslant 2t\left(\frac{8}{9}a-\frac{1}{2}t^2\right),
\end{aligned}
$$

其中 $A(D_1)$ 是 D_1 的面积。取 $t=\dfrac{2}{3}\sqrt{a}$，则

$$
\int_0^{+\infty}[\varphi(x)]^2\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{8}{9}a^{3/2}.
$$

证毕。 ■

注 当 p,q 充分大时，$A(D)$ 无限接近于 a，此时最佳的 t 任意接近 $\sqrt{2a/3}$，因而上面估计式右边可任意接近于 $2\sqrt{2a/3}\cdot\dfrac{2}{3}a=\dfrac{4}{9}\sqrt{6}a^{\frac{3}{2}}$。

例 3.18 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数。求证：存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$
\prod_{k=1}^n f_k(\xi)\leqslant\prod_{k=1}^n\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.
$$

（第三届全国大学生数学竞赛预赛试题）

证 若某个 f_k 取到 0，则取 ξ 为此零点即可，因此不妨设 $f_k(x)>0(\forall x,k)$。令

$$
g_k(x)=\frac{f_k(x)}{\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x},\quad h(x)=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n g_k(x)},
$$

则

$$
\int_0^1 g_k(x)\mathrm{d}x=1,\qquad k=1,2,\cdots,n,
$$

且有

$$\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{n}\mathrm{d}x = 1,$$

因此存在 $\xi \in [0,1]$，使得 $h(\xi) \leqslant 1$，即

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.$$

■

注 这是归一法的一个应用。

例 3.19 (归一法的又一应用) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续，正数 p,q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。证明：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\right)^{1/p}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{1/q}.$$

证 不妨设 f,g 不恒为 0，否则结论显然成立。记

$$u(x)=\frac{f(x)}{\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{1/p}},\quad v(x)=\frac{g(x)}{\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{1/q}},$$

利用 Young 不等式 $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geqslant ab(a,b>0)$ 得

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b \left[\frac{u^p(x)}{p}+\frac{v^q(x)}{q}\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{p}\int_a^b u^p(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{q}\int_a^b v^q(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

变形可得需证不等式。 ■

例 3.20 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数，$f(0)=0$，$f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$。假设 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。求证：对任意 $\alpha>1$，$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛，并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^\beta,\quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

证 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^{\beta}-\int_0^x f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned}F'(x)&=\beta f(x)\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^{\beta-1}-f^{\alpha}(x)\\&=f(x)\left[\beta\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^{\beta-1}-f^{\alpha-1}(x)\right]\\&=f(x)\left[\beta\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^{\beta-1}-[f(x)]^{2(\beta-1)}\right].\end{aligned}$$

再令

$$g(x)=\beta^{\frac{1}{\beta-1}}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x-f^2(x),$$

则

$$g'(x)=f(x)\left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}}-2f'(x)\right]\geqslant 0,$$

注意 $f'(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$ 及 $\beta^{\frac{1}{\beta-1}}>1$。因此当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=0$，从而 $F'(x)\geqslant 0$。最后我们得到

$$F(x)\geqslant F(0)=0,$$

即

$$\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^{\beta}\geqslant\int_0^x f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x,$$

令 $x\to+\infty$ 得结论。注意，这里同时还证明了收敛性。 ■

例 3.21 设实函数 $f\in C^2[a,b]$ 满足 $f(0)=f(1)=0$ 和 $|f''(x)|\leqslant 1,\forall x\in[0,1]$。

(1) 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{12}.$$

(2) 求出所有使得上面的不等式成为等式的函数 f。

解 (1) 对任意固定 $x \in (0,1)$，令

$$C = \frac{f(x)}{x(1-x)}, \quad \phi(t) = f(t) - Ct(1-t),$$

则

$$\phi(0) = \phi(x) = \phi(1) = 0,$$

从而利用两次 Rolle 定理知，存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $\phi''(\xi) = 0$，即

$$f''(\xi) + 2C = 0,$$

因而有

$$|C| = \left| -\frac{1}{2} f''(\xi) \right| \leqslant \frac{1}{2},$$

即

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2} x(1-x).$$

最后我们得到

$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2} x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

(2) 由积分的性质，从而上面最后一个不等式可以看出，要使等式成立，当且仅当 $f(x)$ 不变号且

$$|f(x)| = \frac{1}{2} x(1-x),$$

即

$$f(x) = \pm \frac{1}{2} x(1-x).$$

■

§4. 反常积分

一、反常积分的计算与估值

1. 利用定义计算反常积分

例 4.1 (Frulanni 积分) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$a>b>0$。记

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(1) 若 $f(0+)$ 和 $f(+\infty)$ 都存在，则

$$I=\big[f(+\infty)-f(0+)\big]\ln\frac{a}{b};$$

(2) 若 $f(0+)$ 存在，且对任意 $\varepsilon>0$，反常积分 $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$I=-f(0+)\ln\frac{a}{b};$$

(3) 若 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，且对任意 $A>0$，反常积分 $\displaystyle\int_0^A\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$I=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

证 利用定义有

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\A\to+\infty}}\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\A\to+\infty}}\left[\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\varepsilon^A\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\A\to+\infty}}\left[\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\A\to+\infty}}\left[\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}$$

§4. 反常积分

(1) 若 $f(0+)$ 和 $f(+\infty)$ 都存在，则利用积分中值定理可得

$$\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(\xi_1)\int_{bA}^{aA}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=f(\xi_1)\ln\frac{a}{b};$$

$$\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(\xi_2)\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=f(\xi_2)\ln\frac{a}{b},$$

其中 $\xi_1\in[bA,aA]$，$\xi_2\in[b\varepsilon,a\varepsilon]$，从而当 $\varepsilon\to0+$ 时 $\xi_2\to0+$，$f(\xi_2)\to f(0+)$，当 $A\to+\infty$ 时 $\xi_1\to+\infty$，$f(\xi_1)\to f(+\infty)$，因而成立

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\A\to+\infty}}\left[f(\xi_1)\ln\frac{a}{b}-f(\xi_2)\ln\frac{a}{b}\right]=[f(+\infty)-f(0+)]\ln\frac{a}{b}.$$

(2) 由于对任意 $\varepsilon>0$，反常积分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\displaystyle\int_{A}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\to0(A\to+\infty)$，从而

$$\begin{aligned}\lim_{A\to+\infty}\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x&=\lim_{A\to+\infty}\int_{bA}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=0-0=0.\end{aligned}$$

再因为 $f(0+)$ 存在，于是利用积分中值定理可得

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0+}\left[-f(\xi_2)\ln\frac{a}{b}\right]=-f(0+)\ln\frac{a}{b},$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\A\to+\infty}}\left[\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\&=\lim_{A\to+\infty}\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=-f(0+)\ln\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

(3) 类似于 (2) 可得：由反常积分 $\displaystyle\int_{0}^{A}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛知

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0,$$

再由 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在可得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

从而

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\A\to+\infty}}\left[\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right]=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

■

二、反常积分的收敛性

例 4.2 设 $f\in C^1[0,\infty)$, $f(0)>0$, $f'(x)\geqslant1$, 对任意 $x\in[0,\infty)$, 若 $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}<+\infty$, 求证: $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}<+\infty$。

证 由题设知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，且 $f(x)$ 恒大于 0。因此

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}+\int_0^\infty\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)(f(x)+f'(x))}\\&\leqslant\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}+\int_0^\infty\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f^2(x)}\\&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}+\frac{1}{f(0)}<+\infty.\end{aligned}$$

■

注 本题的方法称为类比法。它是通过分析形式上相近的两个量的差来获得两个量的同类性质的重要方法。

例 4.3 讨论反常积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$$

的收敛性。

解 比较积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$，这个积分在 $p\in(0,1]$ 时条件收敛，在 $p>1$ 时绝对收敛，其余情形发散。由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x-\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x=-\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\,\mathrm{d}x=-I,$$

因此原积分与 I 同敛散。

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，对任意正整数 n，

$$\begin{aligned}&\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{(x^p+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ \geqslant&\frac{1}{((2n\pi)^p+1)^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x\\ =&\frac{n\pi}{2((2n\pi)^p+1)^2}\geqslant\frac{n\pi}{2(\sqrt{2n\pi}+1)^2}>\frac{1}{32},\end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛原理知 I 发散，从而原积分发散。

当 $p>1$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|<\frac{1}{x^p-1}$，而积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p-1}\,\mathrm{d}x$ 收敛，因而原积分绝对收敛。

下设 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$。类似于上一步的讨论知 I 绝对收敛，从而原积分与 I 一样是条件收敛的。 ∎

例 4.4 证明反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x\ln|x|)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

证 由于被积函数是连续偶函数，因此只需证明积分 $I=\int_1^{+\infty}\cos(x\ln x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。对任意 $A>0$，有

$$\begin{aligned}\int_1^A\cos(x\ln x)\,\mathrm{d}x&=\int_1^A\frac{1}{1+\ln x}\mathrm{d}\sin(x\ln x)\\&=\left[\frac{\sin(x\ln x)}{1+\ln x}\right]_1^A+\int_1^A\frac{\sin(x\ln x)}{x(1+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin(A\ln A)}{1+\ln A}+\int_1^A\frac{\sin(x\ln x)}{x(1+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \cos(x\ln x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{\sin(A\ln A)}{1+\ln A}+\int_1^A \frac{\sin(x\ln x)}{x(1+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x\ln x)}{x(1+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \equiv J, \end{aligned}$$

因此 I 收敛当且仅当 J 收敛。对 J，由于

$$\left|\frac{\sin(x\ln x)}{x(1+\ln x)^2}\right| \leqslant \frac{1}{x(1+\ln x)^2},$$

而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^2}$ 收敛，因此 J 绝对收敛，从而 I 收敛。证毕。

■

三、综合题

例 4.5 设 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上单调减少且 $f(0+)=+\infty$，反常积分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。证明：$\displaystyle\lim_{x\to0+}(xf(x))=0$。

证 利用极限的局部保号性，存在 $\delta\in(0,a)$，使得当 $0<x<\delta$ 时 $f(x)>0$。由于反常积分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理知

$$\lim_{x\to0+}\int_{x/2}^x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

但是，当 $0<x<\delta$ 时，由 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上单调减少可得

$$\int_{x/2}^x f(x)\,\mathrm{d}x > f(x)\int_{x/2}^x \mathrm{d}x = \frac{x}{2}f(x) > 0,$$

根据极限的夹逼性可得

$$\lim_{x\to0+}(xf(x)) = 0.$$

■

§4. 反常积分

注 一般地，若 $f(x)$ 满足:

(i) 在 $(a,b]$ 上单调，$f(a+0)=\infty$；

(ii) 积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

则 $\lim\limits_{x\to a+0}\big[(x-a)\,f(x)\big]=0$。在点 $x=a$ 的左侧也有类似的结论。

例 4.6 (单调函数广义 Riemann 和的极限是反常积分) 设 $f:\ (a,b]\to\mathbf{R}$(或 $f:\ [a,b)\to\mathbf{R}$) 为单调实函数，$x=a$ 是 $f(x)$ 的唯一奇点，且反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right).$$

(或

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right).\quad)$$

证 只证明括号外的情形。不妨设 f 单调增加。

记 $h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_i=a+i\,h$，$0\leqslant i\leqslant n$，由 f 单调增加知

$$f(x_i)h\leqslant\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(x_{i+1})h,$$

i 从 1 到 $n-1$ 求和得

$$h\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\leqslant\int_{x_1}^{x_n}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant h\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{i+1}),$$

注意 $x_n = b$，因此由上式可得

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

$$= \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) - h\,f(b)\right|$$

$$\leqslant \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_i)\right| + |hf(b)|$$

$$\leqslant \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |h(f(b) - f(x_1)| + |hf(b)|$$

$$\leqslant \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |hf(x_1)| + 2\,|hf(b)|\,.$$

由于 $n\to\infty$ 时 $x_1\to a$，$h\to 0$，而积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 单调，从而由上例结论知 $n\to\infty$ 时，

$$\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0,\quad hf(x_1) = (x_1-a)f(x_1)\to 0,\quad hf(b)\to 0,$$

因此

$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |hf(x_1)| + 2\,|hf(b)| \to 0,\quad n\to\infty,$$

从而成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right).$$

得证。 ■

注 由证明过程可见，广义 Riemann 和中差值节点 x_2 到 x_n 可取为 $[x_1,x_2],\cdots[x_{n-1},b]$ 中的任意点，但第一个插值节点却必须是 x_1—否则，若把 x_1 改为 $(a,x_1]$ 中的不确定点 ξ_1，则当 $\xi_1\to a$ 时 $f(\xi_1)h\to\infty$，从而造成错误。