用有理数构造实数及确界原理的证明

设$\mathbb{Q}$为所有有理数组成的集合，假设大家对$\mathbb{Q}$中的四则运算及大小关系是非常熟悉的。

下面我们用有理数的子集来构造实数。

<u>定义</u>：设α是有理数集$\mathbb{Q}$的一个子集且满足下述四条性质：

(1) $\alpha \neq \phi$；(2) $\alpha \neq \mathbb{Q}$；

(3) 任取α中的一个元素x，若有理数y满足$y<x$，则$y\in\alpha$；

(此即比α中的有理数小的其它所有有理数均在α中)

(4) 若$x\in\alpha$，则$\exists\, y\in\alpha$使得$y>x$ (此即α中无最大元)，

则称α是一个实数，从而记

实数集 $\mathbb{R}=\{\alpha \mid \alpha$是上述定义中四个性质都满足的有理数集之子集$\}$.

<u>定义</u>：$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha<\beta$ 定义为 $\alpha\subset\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$.

<u>定义</u>：$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha\leq\beta$ 定义为 $\alpha<\beta$ 或 $\alpha=\beta$.

<u>定义</u>：设A是$\mathbb{R}$的一个非空子集，若$\exists\,\gamma\in\mathbb{R}$，使得

$\forall\,\alpha\in A$ 均成立 $\alpha\leq\gamma$，

则称A是有上界的，γ是A的一个上界.

<u>定义</u>：设A是$\mathbb{R}$的一个非空子集，若$\exists\,\eta\in\mathbb{R}$满足：

① $\forall\,\alpha\in A$，有$\alpha\leq\eta$；

② 若γ是A的一个上界，则有$\eta\leq\gamma$，

则称η是A的上确界(最小上界)，记$\eta=\sup A$.

(注：可以证明上确界若存在则必唯一)

定理：(确界原理). 设A是$\mathbb{R}$的一个非空子集且A是有上界的，则A必存在上确界.

证：设 $\eta = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \alpha$，则 $\eta \subset \mathbb{Q}$. 下面证 $\eta \in \mathbb{R}$，即还需证η满足四条性质：

(1) $\because A \neq \phi$，$\therefore \exists\, \alpha \in A$，由于$A \subset \mathbb{R}$ 故 $\alpha \in \mathbb{R}$，由实数之定义知 $\alpha \neq \phi$，故 $\eta \neq \phi$；

(2) $\because$ A是有上界的，$\therefore \exists\, \gamma \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \alpha \in A$，$\alpha \leq \gamma$，由于γ是个实数，故 $\gamma \neq \mathbb{Q}$，即 $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ 且 $x \notin \gamma$，又 $\alpha \leq \gamma$，即 $\alpha \subset \gamma$，从而 $x \notin \alpha$，由α之任意性知 $x \notin \eta$，即 $\eta \neq \mathbb{Q}$；

(3) 设 $x \in \eta$ 且 $y < x$，$y \in \mathbb{Q}$，由η之定义知，$\exists\, \alpha \in A$ 使得 $x \in \alpha$，又 $\alpha \in \mathbb{R}$，故 $y \in \alpha$，从而 $y \in \eta$；

(4) 设 $x \in \eta$，则 $\exists\, \alpha \in A$ 使得 $x \in \alpha$，又$\because \alpha \in \mathbb{R}$，$\therefore \alpha$中无最大元，即 $\exists\, y \in \alpha$ 使得 $y > x$，又由η之定义知 $y \in \eta$，从而得η无最大元，

于是由实数之定义知 $\eta \in \mathbb{R}$. 下面证η是A的上确界：

① 由η之定义知，$\forall \alpha \in A$，$\alpha \subset \eta$，即 $\alpha \leq \eta$；

② 若γ是A的一个上界，则由上界之定义知 $\forall \alpha \in A$，$\alpha \leq \gamma$，即 $\alpha \subset \gamma$，又由η之定义知 $\eta \subset \gamma$，即 $\eta \leq \gamma$.

由上确界之定义知 $\eta = \sup A$.

证毕. ▨