第 11 章 反常积分

BY 江心庐

2018,5,24

1 非负函数无穷积分的收敛判别法

和正项级数相比，就差测度.

定理 11.1 若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛的充要条件是 $\int_a^A f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

定理 11.2(比值) 设对于充分大的 x, 函数 f 和 g 满足不等式

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

那么

1. 若$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，

常用的比较对象:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}(a>0)\begin{cases} p>1\text{时收敛} \\ p\leqslant 1\text{时发散} \end{cases}$$

定理 11.3 (比值的极限形式) 设 f 和 g 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

那么

1. 当 $0<l<+\infty$ 时，积分同敛散

2. 当 $l=0$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)$ 收敛.

3. 当 $l=+\infty$ 时， 如果 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)$ 发散.

无穷积分与无穷级数的关系

定理 11.4 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的**非负函数**，如果存在一个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1=a)$, 使得级数

$$\sum_{n=1}^{n} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,dx$$

收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，并且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\, dx$$

注: $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. 但 $\int_a^{+\infty} f(x)$

测度??

2 无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法

和无穷级数一样，无穷积分也有相应的 Cauchy 收敛原理.

定理 11.5 (Cauchy 收敛原理) 积分 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 只要 $A', A'' > A_0$, 便有

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

这个定理说明，要想使反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,必须而且只需在充分远、不管多长的区间上，积分值可以任意小。

根据定理 11.5 可以得出

定理 11.6 (如果黎曼积分存在)如果积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

仿照无穷积分的说法，如果积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛。

定理 11.7 (第二积分中值定理) 若函数 f 在$[a, b]$ 上可积，g 在 $[a, b]$ 上非负且递减，则必存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$$

要学会证明

证:

因为 f 在$[a, b]$ 上可积，g 是 $[a, b]$ 上非负减函数，也是可积函数，因而 fg 在 $[a, b]$ 上可积. 用分割

$$\pi\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

定理 11.8(推广的第二积分平均值定理) 设 f 在 $[a, b]$ 中可积，g 在 $[a, b]$ 中单调，则比存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

借助第二中值平均值定理，我们可以得到 Dirchlet 和 Abel 判别法.

定理 11.9 (Dirichlet 判别法) 如果 f 和 g 满足下面两个条件:

1. $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ 在 $(\alpha, +\infty)$ 上有界

2. g 在 $[a,+\infty]$ 上单调， 且 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$;

那么积分，

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)$$

收敛.

定理 11.10 (Abel 判别法) 如果 f 和 满足下面两个条件

1. 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

2. g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界.

3 瑕积分的收敛判别法

如果函数 f 定义在区间 $(a,b]$ 上，当 $x\to a^+$时，f 无界，则称 a 为 f 的瑕点。这时 f 在 $(a,b]$ 上按 Riemann 积分的意义不可积的。但若对任意 $\varepsilon>0$, f 在$[a+\varepsilon,b]$ 上可积，而且

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

有有限的极限，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，并把上面的极限定义为瑕积分的值。

常用的比较对象

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$$

对于瑕积分，存在许多和反常积分平行的性质。为例方便起见，下面的定理中都假定积分下限 a 是瑕点，f 和 g 都在 $[a+\varepsilon,b]$ 中可积。

定理 11.2’（比较判别法 ） 对于充分接近 a 的 $x(x>a)$, f 和 g 满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$

那么

1. 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛， 则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛。

2. 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散， 则 $\int_a^b g(x)dx$ 也发散。

定理 11.3’ 设 f 和 g 是 $(a,b]$ 上的非负函数，且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

那么

1. 当 $0<l<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b g(x)$ 同敛散;

2. 当 $l=0$ 时，若$\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

3. 当 $l=+\infty$时， 若 $\int_a^b g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

（要学着把反常积分.。。）

定理 11.5'(Cauchy 收敛原理) 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$，只要$0 < \eta < \delta$, $0 < \eta' < \delta$, 就有

$$|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)dx| < \varepsilon.$$