§10 函数列与函数项级数

BY 江心庐

2018,4,26

1 问题的提出

设

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

是定义在区间 $[a,b]$ 上的一列函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

是 $[a,b]$ 上的一个**函数项级数**.（一个立体的数项级数)

设 $[a,b]$ 是 (1) 的收敛点集. 对于 $[a,b]$ 中的没一点 x, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 都有一个确定的和，记为 $S(x)$, 那么

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in [a,b]$$

是确定在 $[a,b]$ 上的一个函数, 称为 (1) 的和函数.

接着我们将会讨论函数项级数的连续性，积分号可否与求和号可交换，可否逐项求导.

2 一致收敛

定理 10.1 设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I 上逐点收敛与 f ,若 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists$ 与 x 无关的 $N(\varepsilon)$, s.t. 当 $n > N$ 时，对一切 $x \in I$, 都有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 称$\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f.

(共同的)

从几何上看，$y = f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 表示一系列曲线. 所谓 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 就是从某个足标 $N(\varepsilon)$ 之后，所有的曲线

$$y = f_n(x), n = N + 1, N + 2, \cdots$$

全部落到条形区域 $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$.

如果记 $\beta = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$, 那么从几何上可观察到

定理 10.1 $\{f_n\}$在 I 一致收敛于 $f \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$

定理 10.2 (Cauchy 收敛原理) 设$\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列，那么 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$时，

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 及正整数 p 成立.

定理 10.3 (Cauchy 收敛原理) 定义在区间 I 上的**函数项级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|u_{n+p}(x)+\cdots+u_{n+1}(x)|<\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 及任意正整数 p 成立.

令 $p=1$, 可得到如下推论

推论 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是它的通项在 I 上一致收敛于 0.

定理 10.4(Weierstrass 判别法) 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)|\leqslant a_n, n=1,2,\cdots,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

3 极限函数与和函数的性质

4 由幂级数确定的函数

5 函数的幂级数展开式

6 幂级数在组合数学中的应用