§20 含参变量积分

BY 江心庐(整理)

2018,6,19

1 含参变量的常义积分

二元函数 $f(x,u)$ 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续，我们将讨论含参变量的常义积分所确定的函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

的连续性，积分运算，极限运算的性质. 首先有

定理 20.1 如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么 $\varphi(u)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. $\varphi(u)$ 在 u_0 处连续意味着

$$\lim_{n\to n_0}\varphi(u)=\varphi(u_0)\text{ 及 }\lim_{n\to n_0}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b\lim_{n\to n_0}f(x,u)\,dx$$

也就是 f 上积分运算和极限运算能交换次序.

根据前面的研究，我们知道上次计算中积分号能交换次序.

定理 20.2 如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)du=\int_a^\beta\left(\int_a^b f(x,u)dx\right)du=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\right)dx$$

我们接着研究含参变量积分的可微性.

定理 20.3 如果函数 f 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且

$$\frac{d}{du}\varphi(u)=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right)dx.$$

也就是在 f 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 连续的条件下，微分运算和积分运算可以交换次序.

实际问题中，不仅被积函数有参变量，积分项中也含有参数项. 这时积分可写为

$$\psi(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\,dx$$

对于这样的含参变量积分，我们有

定理 20.4 设函数 f 在闭矩行 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，函数 $p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，而且当 $a\leqslant u\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant p(u)\leqslant b$, $a\leqslant q(u)\leqslant b$, 那么由 (5) 所确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

关于 ψ 的微分性质有(一定条件下),

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u).$$

2 含参变量反常积分的一致收敛

设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，如果对 $[\alpha,\beta]$中任意 u, 反常积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$$

都收敛，那么它就确定了 $[\alpha,\beta]$ 上的一个函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\,dx.$$

如果 $\int_a^{+\infty}f(x,\,u)dx$ 的收敛性与参变量 u 相关，则称之按点收敛. 如果与参变量无关，则称为一致收敛. 下面引出类似于函数项级数的一致收敛概念。

定义 20.1: 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 总能找到仅与 ε 有关的 $A_0(>a)$, 当 $A>A_0$ 时，不等式

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|<\varepsilon$$

对于 $[\alpha,\beta]$ 上的所有 u 都成立，就说反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上**一致收敛**。

对瑕积分也有类似的定义。 接下来，我们以无穷积分为例，讨论与无穷级数类似的一系列判别法。

记

$$\eta(A)=\sup_{a\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|$$

定理 20.6 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是（上确界）

$$\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0$$

定理 20.7 (Cauchy 收敛原理) 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是，对于任意 $\varepsilon>0$, 存在仅于 ε 有关的A_0, 当$A',A''\geqslant A_0$, 使得

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)dx\right|<\varepsilon$$

对于所有在 $[\alpha,\beta]$ 上的 u 都成立。由此可推断，如果反常积分分别在参变量的不同区间上分别一致收敛，那么在这些区间的并集上都一致收敛.

定理 20.8 (Weierstrass 判别法) 设 $f(x,u)$ 对 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果存在 $[a,+\infty)$ 上的连续函数 F, 使得$\int_a^{+\infty}F(x)dx$ 收敛, 而且对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u, 都有

$$|f(x,u)|\leqslant F(x),$$

那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x,\,u)$ 在 $[\alpha,\,\beta]$ 上一致收敛. (只要优级数存在且其积分收敛, 则原积分一致收敛, 也是绝对一致收敛)

例 1. 证明积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-(a+u^2)t}\sin t\,du, a>0$$

在 $[0,+\infty)$ 中一致收敛. 根据定义可推断, 如果反常积分

更细致的判别法有

定理 20.9 (Dirichlet 判别法) 如果 f,g 满足下面两个条件:

1. 当 $A\to+\infty$ 时, 积分 $\int_a^A f(x,u)dx$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界, 即存在常数 M, 使得当 A 充分大时, 对于每个 $u\in[\alpha,\beta]$有
$$\left|\int_a^A f(x,u)dx\right|\leqslant M;$$
(一致有界指的是界与参变量 u 无关)

2. $g(x,u)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x\to+\infty$ 时关于 u 一致地趋于 0. 那么积分
$$\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)dx$$
在 $[\alpha,\beta]$上一致收敛.

证明. 因为 $g(x,u)$关于 x 是单调的, 故可用推广的第二积分中值平均值定理:

$$\int_{A'}^{A''}f(x,u)g(x,u)\,dx=g(A',u)\int_A^{\xi}f(x,u)dx+g(A'',u)\int_{\xi}^{A''}f(x,u)dx,$$

其中 $\xi\in[A',A'']$. 由条件 1, 对任意的

□

定理 20.10 (Abel 判别法) 如果 f,g 满足下面两个条件:

1. 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛;

2. $g(x,u)$ 对于 x 单调, 且关于 u 一致有界.

那么积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

定理 2. 设函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,+\infty)$ 上收敛与 f. 如果

1. *对任意* $A>a$, $\{f_n\}$ *在* $[a,A]$ *上一致收敛;*
2. *积分* $\int_a^{+\infty} f_n(x)dx$ *对于* n *一致收敛.*

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*收敛, 且*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

3 含参变量反常积分的性质

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$$

积分的一致收敛性保证了 φ 的连续性, 有以下定理:

定理 3. *如果函数* $f(x,u)$ *在* $[a,+\infty]\times[\alpha,\beta]$ *上连续, 而且积分* $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ *在* $[\alpha,\beta]$ *上一致收敛, 那么* $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ *在* $[\alpha,\beta]$ *上连续.*

证明. 由于 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0>a$, 使得不等式

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,u)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对 $[\alpha,\ \beta]$中所有的 u 成立. 可以发现 $\int_a^{A_0} f(x,\ u)dx$ 是 $[\alpha,\beta]$ 中的连续函数, 因而对任意 $u_0\in[\alpha,\beta]$, 任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $u\in[\alpha,\beta]$且 $|u-u_0|<\delta$ 时,

$$\left|\int_a^{A_0} f(x,u)dx - \int_a^{A_0} f\,(x,u_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当 $u\in[\alpha,\beta]$ 且 $|u-u_0|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned} |\varphi(u)-\varphi(u_0)| &= \left|\int_a^{+\infty} f(x,u)dx - \int_a^{+\infty} f(x,u_0)\right| \\ &\leqslant || \end{aligned}$$

$\square$

一致收敛是充分的而非必要的.

定理 4. *(Dini) 设* $f(x,u)$ *在* $[a,+\infty]\times[\alpha,\beta]$ *上连续且非负. 如果* φ *在* $[\alpha,\beta]$ *上连续, 那么积分* $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ *在* $[\alpha,\beta]$ *上一致连续.*

定理 5. *设* $[\alpha,\beta]$ *是***一有限***区间, 那么在定理3 的条件(一致收敛),* φ *在* $[\alpha,\beta]$ *上可积, 而且*

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du = \int_a^{+\infty}\left(\int_a^\beta (x,u)du\right)dx$$

也就是说，对 x 与 u 的积分次序可以交换：

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right)du=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right)dx$$

下面我们将讨论两个无穷区间是否可以收敛.

定理 6. 如果 f 满足下列条件：

1. f 在 $[a,+\infty]\times[\alpha,+\infty]$ 上连续；
2. 积分
$$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx,\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)du$$
分别关于 u 在任何区间 $[\alpha,\beta]$ 上，关于 x 在任何区间 $[a,b]$ 上一致收敛；
3. 积分
$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|du\right)dx,\int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|dx\right)du$$
中至少有一个存在，那么积分
$$\int_a^{+\infty}()$$

例 7. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.