19. Field

BY YUEJAIN MO

2018,4,24

1 数量场的梯度

$$\mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{p})$$

2 向量场的散度—→数量场

设 $D \subset \boldsymbol{R}^3$ 为区域，在 D 上定义着一个向量场 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$. 又设曲面

$$\int\int_{\Sigma}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int\int_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}}{\Delta V}$$

表明流速场产生流量的能力

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdot$$

规则:

i.

ii.

iii. 设 φ 是数量场，那么

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi \boldsymbol{F} = \varphi \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot$$

3 向量场的旋度

设 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$$

物理意义：通过 Γ 张成的曲面的通量。

性质:

i.

ii.

iii. 设 φ 是数量函数，$\boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\boldsymbol{F})=\boldsymbol{\nabla}\varphi\times\boldsymbol{F}+\varphi\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}$

iv. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{F_1}\times\boldsymbol{F_2})=(\nabla\times F_1)\cdot F_2-$

v.

4 有势场和势函数

定义 19. 1 向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 定义在区域 $D\subset R^3$ 上，如果存在 D 上的一个数量场 φ, 满足

$$\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \tag{1}$$

对于$\forall\boldsymbol{p}\subset D$成立，则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 是**有势场**，数量场 φ 是 F 的一个势函数.
另一种表述是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q,\frac{\partial\varphi}{\partial x}=R$$

定义 19.2 设 F 是定义在区域 $D\subset R^3$ 上的向量场。如果对含于 D 中的任何一条封闭曲线。

定理 19.1 设 F 是定义在区域 $D\subset R^3$ 上的一个向量场，那么可以从下面任意一条推导出其他两条。(单连通)

i. F 是有势场

ii. F 是无旋场

iii. F 是保守场

证明:

(iii)-> (i)

定理 19.2

设

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)$$

是定义在开集 $D\subset R^3$ 上的微分形式，如果存在 D 上的一个 $0-$形式 φ 使得

$$d\varphi=P(x,y,z)dx+Q(x,y,x)dy+R(x,y,x)dz$$

在 D 上处处成立，那么这个 $1-$形式 $Pdx+Qdy+Rdz$ 称为 D 上的一个**恰当微分形式**或简称**恰当微分**。

恰当微分