数学分析 III

2017 年秋季学期期中考试试题

1. (10 pts) 计算曲线积分 $\int_\Gamma xyds$，其中，Γ：$x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

2. (10 pts) 计算曲线积分 $\oint_C \dfrac{(x-1)dy-ydx}{x^2-2x+y^2+1}$，其中 C 逆时针方向,

   C：(1) $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$. (2) $x^2+y^2=4.\cdot$

3. (10 pts) 计算曲线积分 $\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$，其中，Γ：$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=xy, \end{cases}$

   从 z 轴正向往下看是逆时针方向.

4. (10 pts)计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma z\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，

其中，Σ：$x=u\cos v, y=u\sin v, z=v,\quad 0\le u\le 1,\quad 0\le v\le 2\pi.$

5. (10 pts) 设空间区域 $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1, 0\le x\le 1, 0\le x\le 1\}$, Σ：V 的表面外侧，计算积分

$$\iint\limits_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

6. (15 pts) 设空间向量场 $\vec{F}=\left(\dfrac{a}{z},\dfrac{b}{z},-\dfrac{x+2y}{z^2}\right)$ 是有势场，

   (1) 确定常数 a,b 的值.

   (2) 设 Γ 是空间任何一条不经过 xy 坐标面的简单光滑的闭曲线，求 $\vec{F}$ 在 Γ 上的环流量.

   (3) 计算积分 $\displaystyle\int_{(0,0,1)}^{(2,3,4)} \frac{a}{z}dx+\frac{b}{z}dy-\frac{x+2y}{z^2}dz\cdot$

7. (10 pts) 证明：

   (1) 若向量场 $\vec{F}$ 的分量函数均有连续的二阶偏导数，则 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0\cdot$

   (2) 若数量场 f 有连续的二阶偏导数，则 $\nabla\times(\nabla f)=\vec{0}.$

8.(10 pts). 判断级数的敛散性，并说明理由.

   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{3n+1}\right)^n.$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\frac{1}{n^q}$

9. (15 pts)

   (1) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛.

   (2) 举例说明（1）的逆命题不成立.

   (3) 若正项数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.