§18. 曲面积分

BY YUEJIAN MO

2018,4,24

1 曲面的积分

曲面 Σ 被 u 曲线和 v 曲线分成小块。

定义 18.1 设正则曲面 Σ 有参数向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,$(u,v)\in\Delta$, 我们称

$$\sigma(\Sigma)=\int\int_{\Delta}\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|dudv=\int\int_{\Delta}\left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{1/2}dudv$$

为曲面 Σ 的面积，并且记

$$d\sigma=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|dudv=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

为曲面的面积元素，简称面元。

2 第一型曲面积分

如果 Σ 是正则曲面，它的参数方程为 $r=r(u,v)$, $(u,v)\in\Delta$; 函数 f 在 Σ 上连续，那么

$$\int_{\Sigma}fd\sigma=\int\int_{\boldsymbol{\Delta}}f\circ\boldsymbol{r}\|\boldsymbol{r_u}\times\boldsymbol{r_v}\|dudv$$

求解第一型曲面积分

1. 为曲面 Σ 求得一个符合要求的参数表示 $\boldsymbol{r}$ 或者显表示 φ, 定出它们的定义域 Δ 或 D;

2. 计算面元 $d\sigma=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|dudv$ 或者

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}dxdy;$$

3. 计算二重积分

3 第二型曲面积分

$$\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{\sigma}=\int_{\Sigma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})d\boldsymbol{\sigma}$$

4 Gauss 公式和 Stokes 公式

定理 18.1(Gauss 公式) 设 Ω 是 R^3 中的**有界闭域**，它可以同时拆成有限个甲类区域、乙类区域和丙类区域的并，同一类中任何两个区域至多只有公共的边界，如果函数 P, Q和R都在Ω 上连续可微，那么便有

$$\int\int_{\partial\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\int_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

这里 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，$\partial\Omega$ 按外法线方向来定向。

定理 18.2(Stockes 公式) 设 Σ 是由有限块二阶连续可微的正则曲面拼接而成的定向曲面，如果 P, Q和R 是定义在 Σ 上的连续可微函数，那么

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz \\
=&\int\int_{\Sigma} \pm \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
=&\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{p} =
\end{aligned}$$

复习多重积分