§10 函数列与函数项级数

BY 江心庐

2018,5,17

我想知道无穷是多少,我想找到这种感觉

1 问题的提出

设

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

是定义在区间 $[a,b]$ 上的一列函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

是 $[a,b]$ 上的一个**函数项级数**.（一个立体的数项级数)

3

设 $[a,b]$ 是 (1) 的收敛点集. 对于 $[a,b]$ 中的每一点 x, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 都有一个确定的和，记为 $S(x)$, 那么

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in [a,b]$$

是确定在 $[a,b]$ 上的一个函数, 称为 (1) 的和函数.

接着我们将会讨论函数项级数的连续性，积分号可否与求和号可交换，可否逐项求导.

2 一致收敛

定理 10.1 设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I 上逐点收敛与 f ,若 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists$ 与 x 无关的 $N(\varepsilon)$, s.t. 当 $n > N$ 时，对一切 $x \in I$, 都有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 称$\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f.

(共同的)

从几何上看，$y = f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 表示一系列曲线. 所谓 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 就是从某个足标 $N(\varepsilon)$ 之后，所有的曲线

$$y = f_n(x), n = N+1, N+2, \cdots$$

全部落到条形区域 $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$.

如果记 $\beta = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$, 那么从几何上可观察到

定理 10.2 $\{f_n\}$在 I 一致收敛于 $f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$

定理 10.2 (Cauchy 收敛原理) 设$\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列，那么 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$时，

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 及正整数 p 成立.

定理 10.3 (Cauchy 收敛原理) 定义在区间 I 上的**函数项级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|u_{n+p}(x)+\cdots+u_{n+1}(x)|<\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 及任意正整数 p 成立.

令 $p=1$, 可得到如下推论

推论 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是它的通项在 I 上一致收敛于 0.

定理 10.4(Weierstrass 判别法) 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)|\leqslant a_n, n=1,2,\ 3\ ,\ \cdots,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

满足 Weiestrass 判别法的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上的一个**优级数**.（本质上还是逐项比较？）下面介绍了更精细的 Dirichlet 和 Abel 判别法.

首先，我们先引入一致有界的概念. 设 $f(_n)$ 是定义在区间 I 上的函数列，如果对于每一个 $x\in I$,都有正数 $M(x)$, 使得 $\{f_n(x\}\leqslant M(x)$ 对 $n=1,2,\cdots$成立，我们称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上**逐点有界**. 如果我们能找到一个常数 M, 使得

$$|f_n(x)|\leqslant M, n=1,2,\cdots$$

对于一切 $x\in I$ 成立，就称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上**一致有界**.

定理 10.5 (Dirichlet 判别法) 若 $\sum$ 当 $x_0=0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

定理 10.6 (Abel 判别法)

期末考试：Cauchy 收敛原原理，例 12, 如果函数列在不同的区间内一致收敛，那也在连起来的区间里一致收敛.

3 极限函数与和函数的性质

4 由幂级数确定的函数

单变量的幂级数形式为

$$f(x)=\sum_{n01}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

These power series arise primarily in analysis, but also accur in combinatorics (as generating functions, a kind of formal power series) and in electrical enginerring (under the name of *Z-transform*). The familiar decimal notation for real numbers can also be viewed as an example of a power series, with integer coefficients, but with the argument x fixed at $1/10$.

A power series will converge for some values of the variable x and may diverge for others. All power series $f(x)$ in powers of $(x-c)$. will converge at $x=c$. If c is not the only convergent point, then there is always a number r with $0<r\leqslant\infty$ such that the series converges whenever $|x-c|>r$. The number r is called the redius of convergence of the power series; in general it is given as

$$r=\lim_{n\to\infty}\inf|a_n|^{-\frac{1}{n}}$$

A fast way to compute it is, if this limit exists.

$$r^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Ablel 引理：给定一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 如果对实数 $r_0>0$, 数列 $(|a_n|r_0^n)_{n\geqslant 0}$ 有界，那么对任意复数 $|x<r_0|$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛.

定理 10.15 设 $\sum_0^{\infty}k$

以下是一下常见函数的幂级数展开.

1. Genometric series formula, which is valid for $|x|<1$.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$$

2. Exponential function formula

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

3. The sine formula

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

These power series are also examples of Taylor series. Negative powers are not perimitted in a power series. The coefficients a_n are not allowed to depend on x.

4.1 Operations on power series

When two functions f and g are decomposed into power series around the same center c, the power series of the **sum or difference** of the functions can be obtained by termwise addition and subtration. It is not true that if two power series has not same radius of convergence.

The power series of the product and quotient of the functions can be obtaned as follows:

$$f(x)g(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_i\,b_j(x-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_i\,b_{n-i}(x-c)^n$$

The sequence $m_n=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\,b_{n-i}$ is known as the convolution of sequences a_n and b_n.

可以证明，幂级数函数 f 在收敛区间上无穷次可导，并且可积.收敛半径不变，但端点可能变.

定理 10.16 (Abel 第二定理) 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}$, 幂级数是在收敛域内连续.

有时数项级数的和可以转化为幂级数求和.

定理 10.18 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径都是 R, 则当 $x \in (-R, R)$ 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

存在同样的收敛半径.

5 函数的幂级数展开式

设$f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有任意阶可导，则 $f(x)$ 能展开成 Talyor 级数的充分必要条件是对任意 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, Taylor 公式中 Largrange 余项或 Cauchy 余项

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{或} \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0 s)$$

(其中 ξ 和 η 是介于 x_0 和 x 之间的数)故

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

当 $x_0 = 0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

称为 f 的 Maclaurin 级数.

展开函数成泰勒级数时，可以先求出系数，写出泰勒级数，再证明 $\lim_{n\to\infty} R_{(n)}(x) = 0$. 通过幂级数的微分,积分以及代数运算也能做出其他函数的幂级数展开式.

$f(x) = (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. 当 $\alpha \leqslant -1$时，只在 $x(-1,1)$ 成立；当 $-1 < \alpha < 0$ 时，在 $(-1,1]$ 中成立；当 $a > 0$ 时，在 $x \in [-1,1]$ 上成立.

6 幂级数在组合数学中的应用

7 参考

a) https://en.wikipedia.org/wiki/Power_series

b) https://blog.csdn.net/sunbobosun56801/article/details/78853877