9. 数项级数

BY 江心庐

2018,4,26

1 无穷级数的基本性质

定义：称

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

为无穷级数。若 $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} a_n = S$,称级数收敛；否则发散。称 S 是级数的和。

一些收敛的无穷级数：

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1-q^n}{1-q}, |q|<1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha>1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$

定理 9.1：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

定理 9.2: 线性性质. 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，那么级数

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \mu b_k)\right) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

定理 9.3: 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是一收敛级数，如果把级数的项任意归组而不改变起先后的次序，得到新级数

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_{1+1}} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots$$

这里正整数 $k_j, j=1,2,\cdots$, 满足 $k_1 < k_2 < \cdots$, 那么新级数也收敛，且与原级数有相同的和。

定理 9.4: 如果在上面的同一个括号中的一项都有相同的符号，那么

定理 9.5: 在级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项，不影响级数的敛散性。

2 正项级数的比较判别法

如果对 $n=1,2,\cdots$, 都有 $a \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是**正项级数**。由定理9.5 知，只含有限个的负数的级数也可以视为正项级数。

定理 9.6 数列 $\{S_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow$ 正项级数收敛。

定理 9.7 (比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, 如果从第 N 项开始有

$$a_n \leqslant b_n,$$

那么

i. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

ii. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散， 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

定理 9.8 (比较判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两个正项级数。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

那么

i. 若 $0 < l < +\infty$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散；

ii. 若 $l = 0$，则当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

iii. 若 $l = +\infty$, 则当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也发散；

证明:

i. 设 $0 < l < +\infty$, 则对 $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, 存在 N, 当$n > N$时，有$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \frac{l}{2}$, 即

$$\frac{1}{2} l b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n$$

定理 9.9 (Cauchy 积分判别法) 设 $x \geqslant 1$时，$f(x) \geqslant 0$且递减, 则无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散.

常用与比较的级数:$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{nln}(n)^p}$

$\ln(1+x) \sim x$

$\sin(x) \sim \frac{1}{x}$

$(2k-1) = \frac{(2k-2)+2k}{2} \geqslant \sqrt{(2k-2)(2k)}$

3 正项级数的其他判别法

定理 9.10 (Cauchy 判别法、根值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数,

i. 如果存在正数 $q < 1$, 使得对充分大的 n 都有

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1.$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

ii. 如果对于无穷多个 n 都有

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1.$$

那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

对两边 n 次方后，由正项级数的比较判别法可证 i，有正项级数性质可证 ii

定理 9.11 (Cauchy 判别法的极限形式) 设 $a_n \geqslant 0$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} = q,$$

i. 当 $q<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

ii. 但 $q>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

iii. 当 q=1 时， 不能判断。

Cauchy 只能与等比级数比较，比较粗糙；不能与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$比较。

引理 9.1 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个正数列，如果当 $n>n_0$ 时有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么

i. 当 $\sum_{n=1}^{\infty}$

ii.

定理 9.12 (D'Alembert 判别法) 设 $a_n>0$, $n=1,2,\cdots$.

i. 如果存在正数 $q<1$, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时有

定理 9.13 (D'Alembert 判别法的极限形式) 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$.

i. 如果 $\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$;

ii. 如果 $\lim_{n\to+\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}=q'>1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$；

iii. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, 失效， 无法判别。

更适合于通项里带有阶乘的级数。

定理 9.14 设 $a_n>0, n=1,2,\ldots$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{a_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

要学会证明。

定理 9.15 (Raabe 判别法) 设 $a_n>0$, $n=1,2,\ldots$

i. 如果存在 $r>1$, 使得当 n_0时,$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant r>1$, 则收敛。

ii. 如果对充分大的 n 都有 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

定理 9.16 (Raabe 判别法的极限形式) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$

那么，当$l > 1$ 时，$\sum a_n$ 收敛，若 $l < 1$ 时，$\sum a_n$ 发散。

定理 9.17 (Gauss 判别法) 设正项数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), n \to \infty,$$

那么当 $\beta > 1$ 时，$\sum a_n$收敛；当 $\beta < 1$ 时，$\sum a_n$ 发散。

总能构造能判断收敛速度更慢的数列的判据。

$$n, (\mathrm{In}\, n)^p, n\, \mathrm{In}\, n (\mathrm{In}\, \mathrm{In}\, n)^p$$

4 一般级数

定理 9.18(Cauchy 收敛准则): 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是，对于任意 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N ，当 $n > N$ 时，

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对于一切正整数 p 成立。

定理 9.19 (Leibniz 判别法) 如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 那么交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) a_n$ 收敛.

引理 9.3 (Abel 引理) 设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 记 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, 如果$|S_k| \leqslant M$, $k = 1, \cdots, n$,那么

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|) \right|$$

定理 9.20 (Dirichlet判别法) 设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两个数列，$S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$. 如果它们满足如下两个条件:

i. $\{b_k\}$ 单调趋于 0;

ii. $\{S_k\}$ 有界,

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

定理 9.21 (Abel 判别法) 如果 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 满足下面两个条件:

i. $\{b_k\}$ 单调有界；

ii. $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

积化和差

5 绝对收敛和条件收敛

定理 9.22 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，那么 $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

$\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|$ 同时收敛，则称级数绝对收敛；若 $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称条件收敛。**定理 9.18(Cauchy 收敛准则)**: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是，对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N ，当 $n>N$ 时，

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

对于一切正整数 p 成立。

定理 9.19 (Leibniz 判别法) 如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 那么交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)a_n$ 收敛.

引理 9.3 (Abel 引理) 设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 或 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$, 记 $S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$ ，如果$|S_k|\leqslant M$, $k=1,\cdots,n$,那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant M(|b_1|+2|b_n|)\right|$$

定理 9.20 (Dirichlet判别法) 设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是两个数列，$S_k=\sum_{l=1}^{k}a_l$. 如果它们满足如下两个条件:

i. $\{b_k\}$ 单调趋于 0;

ii. $\{S_k\}$ 有界,

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛.

定理 9.21 (Abel 判别法) 如果 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足下面两个条件:

i. $\{b_k\}$ 单调有界;

ii. $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

积化和差

6 绝对收敛和条件收敛

定理 9.22 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，那么 $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

$\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|$ 同时收敛，则称级数绝对收敛；若 $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称条件收敛。

定理 9.23 交换绝对收敛级数中无穷多项的次序，所得的新级数仍然绝对收敛，其和也不变。

意味着交换律依然生效。

定理 9.24(Riemann) 若级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则适当交换各项的次序，可使其收敛到任一事先指定的实数 S, 也可使其发散到$+\infty$ 或$-\infty$

例子可见交错调和级数:

$$A_h=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

它收敛到定值: ln2. 而它的每项绝对值构成的正项级数却是发散的。

7 级数的乘法

柯西乘积是指两组数列 a_n, b_n 的离散卷积。

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

定理 9.25 (Cauchy) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，其和分别为 A, B ,那么把

$$a_i b_j \qquad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

按任意方式相加所得到的级数都是绝对收敛的，且其和就等于 AB.

定理 9.26 (Mertens) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，其和分别为 A 和 B. 如果至少有一个绝对收敛，那么它们的 Cauchy 乘积有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \mathrm{AB},$$

其中 $c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$.

8 无穷乘积

给定数列

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$$

称

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

为一个无穷乘积。

定理 9.27 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 1.$$

定理 9.28 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数

$$\prod_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

收敛。在收敛的情况下，如果 (1) 的和是 S, 那么

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = e^S.$$

定理 9.29 如果从某个 n 起都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$), 那么 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时收散。

定理 9.30 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, 那么 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 同敛散。

定理 9.31 如果 $-1 < a_n < 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，那么 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 发散到 0.

定理 9.32 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，那么 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 发散到 0.

与级数相对应，如果 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛，就称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛。

定理 9.33 绝对收敛的无穷乘积一定收敛。

定理 9.34 任意改变绝对收敛的无穷乘积因子的次序，所得新无穷乘积仍然绝对收敛，且其积不变.

9 参考

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9D%A1%E4%BB%B6%E6%94%B6%E6%95%9B