by 陳宏賓

1 System of Distinct Representatives

在委員會推派代表的問題裏, 某個團體中的一群人, 組成若干性質不一的委員會, 每個人可能參加幾個不同的委員會, 視個人意願而定; 問題是, 能否每個委員會各推派一位代表出來共同議事; 前題是, 不同委員會推派系出來的代表要相異, 這一些代表就是所謂的相異代表系。舉例來說, 下面是四個委員會所組成的集合族:

$$A_1 = \{\text{張三、李四、王五}\},$$
$$A_2 = \{\text{李四、趙六}\},$$
$$A_3 = \{\text{王五、趙六}\},$$
$$A_4 = \{\text{王五、趙六}\},$$

在這個集合族中, 我們可以選張三代表A_1, 李四代表A_2, 王五代表A_3, 趙六代表A_4; 或者說, 這個集合族有一個相異代表系是 (張三, 李四, 王五, 趙六)。

Let Y be a finite set and let $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ be a family of n subsets of Y. Then $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ is a system of representatives of A if $a_i \in A_i$ for each i. If $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ are all distinct (全都相異), then $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ is a **system of distinct representatives** (SDR, 相異代表系).

並不是所有集合族都一定有相異代表系, 下面這個例子就很明顯沒有相異代表系, 因爲只有a可以代表A_1, 只有b可以代表A_2, 結果A_3就找不到代表了。

$$A_1 = \{a\},$$
$$A_2 = \{b\},$$
$$A_3 = \{a, b\},$$
$$A_4 = \{a, b, c, d\}.$$

下面這個引理敘述了 SDR 存在的必要條件, 稱爲**Marriage Condition**.

Lemma 1 (9.3.1) *If $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ has an SDR, then the following condition holds: For each $k = 1, 2, \cdots, n$ and each choice of k distinct indices $i_1, i_2, \cdots, i_k$ from $\{1, 2, \cdots, n\}$, $|\cup_{i=1}^{k} A_{i_k}| \geq k$.*

事實上, 上述的必要條件也會是充分條件哦!

Theorem 1 (9.3.2) *$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ has an SDR if and only if the Marriage Condition holds.*

你再仔細給它瞧瞧, 是不是很眼熟呢? 沒錯! 其實很容易可以將 SDR 轉化成爲二分圖的完美配對問題。

Theorem 2 (P. Hall (1935)) *Let G be a bipartite graph with partite sets X and Y. Then G has an X-saturated matching if and only if, for all $S \subseteq X, |N(S)| \geq S$.*

Extreme Proof. 不妨假設 G 是滿足 Hall 條件的最小圖, 也就是說, 在 G 中去掉任何一條邊都會導致 Hall 條件不滿足。如果 G 不是這樣的圖, 我們就逐一把邊去掉直到它滿足這個性質爲止。

在這種前提下, 我們只需證明 X 的每一點的度數都是 1(可知必定大於 0) 即可; 因爲, 這麼一來根據 Hall 條件有$|N(X)| = |X|$, 即X中每一點的鄰居都不相同, 那麼立刻就得到了一個 X-完美配對。

假設有一點$x \in X$有兩個鄰居$y_1, y_2 \in Y$, 則考慮$G_i = G - xy_i$ for $i = 1, 2$這兩個圖。根據我們的假設,G 滿足 Hall 條件但 G_1,G_2並不滿足, 所以存在$S_1, S_2 \subseteq X$使得

$$|N_G(S_i)| \geq |S_i| > |N_{G_i}(S_i)| \geq |N_G(S_i) - 1|,$$

for $i = 1, 2$. 所以得到$|N_G(S_i)| = |S_i|$且$|N_{G_i}(S_i)| = |N_G(S_i)| - 1 = |S_i| - 1$. 更精確地說, 可以看出 $x \in S_i, y_i \in N_G(S_i)$ 且 $N_{G_i}(S_i) = N_G(S_i) - \{y_i\}$. 因此,

$$\begin{aligned}
|S_1| - 1 + |S_2| - 1 &= |N_{G_1}(S_1)| + |N_{G_2}(S_2)| \\
&= |N_{G_1}(S_1) \cup N_{G_2}(S_2)| + |N_{G_1}(S_1) \cap N_{G_2}(S_2)| \\
&\geq |N_G(S_1 \cup S_2)| + |N_G(S_1 \cap S_2 - \{x\})| \\
&\geq |S_1 \cup S_2| + |S_1 \cap S_2 - \{x\}| \\
&= |S_1| + |S_2| - 1,
\end{aligned}$$

這樣就得到了矛盾。 ∎

若 Marriage Condition 不成立, 則 SDR 不存在。這時若退而求其次, 想知道包含最多元素的 SDR 呢? 我們可以利用下面的定理9.3.3.

Example. Let $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ be defined by

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a, b, c\} \\ A_2 &= \{b, c\} \\ A_3 &= \{b, c\} \\ A_4 &= \{b, c\} \\ A_5 &= \{c\} \\ A_6 &= \{a, b, c, d\}. \end{aligned}$$

由於$|A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |\{b, c\}| = 2$, 所以最多只能由$A$中挑出4 sets 來讓它們有 SDR, 因爲$A_2, A_3, A_4, A_5$最多只能貢獻2個。再加上,$(a, b, c, d)$是$(A_1, A_2, A_5, A_6)$的 SDR, 所以我們知道$A$中最大的 SDR 頂多只有4個。

Theorem 3 (9.3.3) *Let $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ be a family of subsets of a set Y. Then the largest number p of sets of A which can be chosen so that they have an SDR equals the smallest value taken by*

$$|\cup_{i=1}^{k} A_{i_k}| + n - k$$

over all choices of $k = 1, 2, \cdots, n$ and all choices of k distinct indices $i_1, i_2, \cdots, i_k$ from $\{1, 2, \cdots, n\}$.