11510060 ①

1. (i) $x\in B\setminus A \Leftrightarrow x\in B$ 且 $x\notin A \Leftrightarrow x\in B$ 且 $x\in A^c$

$\Leftrightarrow x\in B\cap A^c$.

(ii) 由(i), $(A\setminus B)\cap C = (A\cap B^c)\cap C = A\cap B^c\cap C$

$x\in A\cap B^c\cap C \Leftrightarrow x\in A\cap C$ 且 $x\in B^c\cap C$

$\Leftrightarrow x\in A\cap C$ 且 $x\notin (B\cap C)\cup C^c$

$\Leftrightarrow x\in A\cap C$ 且 $x\notin B\cap C$

$\Leftrightarrow x\in (A\cap C)\setminus B\cap C$

(iii) $x\in (\bigcup_{k\geq 1}^{\infty} A_k)^c \Leftrightarrow x\notin \bigcup_{k\geq 1}^{\infty} A_k$

$\Leftrightarrow \forall k\geq 1, x\notin A_k$

$\Leftrightarrow \forall k\geq 1, x\in A_k^c$

$\Leftrightarrow x\in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$

(ix) ① $x\in A\cup(\bigcap_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow x\in A$ 或 $x\in \bigcap_{i\in I} B_i$

若 $x\in A$. 则 $\forall i\in I$, $x\in A\cup B_i$. 则 $x\in \bigcap_{i\in I} A\cup B_i$

若 $x\in \bigcap_{i\in I} B_i$, 则 $\forall i\in I$, $x\in B_i$. ~~则 $x\in A$~~ $\Rightarrow \forall i\in I$, $x\in A\cup B_i$

$\Rightarrow x\in \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$

即 $A\cup(\bigcap_{i\in I} B_i)\subset \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$.

② $x\in \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i) \Leftrightarrow \forall i\in I$, $x\in A$ 或 $x\in B_i$

若 $\exists i\in I$, s.t. $x\in A$. 则 $x\in A\cup(\bigcap_{i\in I} B_i)$

若 $\forall i\in I$, $x\in B_i$ 则 $x\in \bigcap_{i\in I} B_i \Rightarrow x\in A\cup(\bigcap_{i\in I} B_i)$

即 $\bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)\subset A\cup(\bigcap_{i\in I} B_i)$. 证毕.

2. (i) 若 $x\in\bigcup_{k=1}^{n}A_k$，则 $\exists\ 1\le k\le n$, s.t. $x\in A_k$.

由于 $A_k\subset A_n$. 则 $x\in A_n$.

若 $x\in A_n$. 则 $x\in A_n\cup\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\right)=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$,

所以 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_n$.

$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(ii) 同理.

3. 当 $n=2$, 固定 $a_2\in A_2$, $\{(a_1,a_2);a_1\in A_1\}$ 可列,

则 $A_1\times A_2=\bigcup_{a_2\in A_2}\{(a_1,a_2);a_1\in A_1\}$ 可列.

设 $n=k$, $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ 可列.

当 $n=k+1$, 固定 $a_{k+1}\in A_{k+1}$, $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times\{a_{k+1}\}$ 可列

则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_{k+1}=\bigcup_{a_{k+1}\in A_{k+1}}A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times\{a_{k+1}\}$ 可列.

4. $A\subset B\subset C$, 则 $\mathrm{Card}(A)\le\mathrm{Card}(B)\le\mathrm{Card}(C)$

由 $\mathrm{Card}(A)=\mathrm{Card}(C)$. 得 $\mathrm{Card}(A)=\mathrm{Card}(B)=\mathrm{Card}(C)$.

5. 证 $[0,1)$ 不可列. 若不然, 则 $[0,1)=$ ~~[illegible]~~ $(a_k)_{k\ge1}$

a_k 用二进制表示为 $a_k=0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$, 其中, $\forall j\ge1$, $a_{kj}=0$ 或 1.

$\forall j\ge1$, 若 $a_{jj}=0$, 则记 $c_j=1$, 否则 $c_j=0$, 则 $0.c_1c_2c_3\cdots$ 与任一 a_k 不等.

与 $[0,1)$ 可列矛盾

从而 $[0,1]\supset[0,1)$ 也不可列.

6. $f(x)=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$ 定义了 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的1-1映射. 所以 $\mathrm{Card}(\mathbb{R})=\mathrm{Card}((0,1))$.

7 (i). $\forall$ ~~$m \geq n \geq 1$~~ $n > m \geq 1$ $B_m = A_m \setminus A_{m-1}$ $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ ~~设 $m<n$~~

则 $B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$, $\Rightarrow$ $B_m \cap B_n \subset A_{n-1} \cap B_n = \phi$.

即 $\{B_n; n \geq 1\}$ 不交

(ii). $B_1 \cup B_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) = A_2$, 归纳得 $\bigcup_{n=1}^{k} B_n = A_k$.

(iii). $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

8. S 与 $[0,1)$ 中的二进制小数有自然映射

即 S 不可列.