CHINESE JOURNAL OF SENSORS AND ACTUATORS

Vol. 32 No. 12

Dec. 2019

Design of Attitude Measurement Algorithm Based on Two-Stage Complementary Filtering*

GAO Ning LI Jie* FENG Kaiqiang XU Tingjin GAO Shiyao LI Bingzhen

(North University of China Science and Technology on Electronic Test & Measurement Laboratory Taiyuan 030051 China)

Abstract: The drift of the gyroscope the linear acceleration of the vehicle and the interference of the magnetic field are the main reasons affecting the accuracy of the attitude measurement using the MARG sensor. Aiming at the problem that the traditional attitude measurement algorithm reduces the accuracy of horizontal angle measurement in the magnetic distortion environment and the linear acceleration affects the horizontal angle accuracy, a two-stage complementary filtering attitude fusion algorithm based on quaternion was designed. The algorithm uses the accelerometer and magnetometer measurement data to compensate the estimated quaternion separately which avoids the influence of the heading angle error on the horizontal attitude measurement under the magnetic interference environment. Meanwhile linear acceleration error and magnetic interference error adaptive compensation scheme are introduced to reduce the influence of linear acceleration and magnetic interference. In order to verify the effectiveness of the algorithm static and dynamic experiments are carried out. The experimental results show that the attitude measurement algorithm can significantly improve the attitude measurement accuracy and anti-interference ability. Compared with the traditional Mahony algorithm, the measurement accuracy of the pitch/roll angle is completely immune to magnetic disturbances, and the performance is significantly improved.

Key words: attitude measurement; MARG(Magnetic ,Angular Rate ,and Gravity); quaternion; magnetic distortion; complementary filtering

EEACC: 7320E doi: 10.3969/j.issn.1004-1699.2019.12.010

基于双级互补滤波的姿态测量算法设计*

高 宁 孝 杰 冯凯强 许廷金 高诗尧 李炳臻

(中北大学电子测试技术重点实验室,太原 030051)

摘 要: 陀螺仪的漂移、载体的线性加速度和磁场的干扰是影响 MARG 传感器姿态测量精度的主要原因。针对传统姿态测量算法在磁干扰环境下由于航向角误差导致水平角测量精度降低以及载体线性加速度影响水平角精度的问题 提出了一种基于四元数的双级互补滤波姿态融合算法。该算法利用加速度计和磁力计测量数据分别对估计四元数进行补偿修正 避免了磁干扰环境下航向角误差对水平姿态测量的影响。同时引入线性加速度误差和磁干扰误差自适应补偿方案 以降低线性加速度与磁干扰的影响。为了验证算法的有效性 进行了静态与动态实验 实验结果表明该姿态测量算法能显著提高姿态测量精度和抗干扰能力。与传统的 Mahony 算法相比 俯仰/滚动角的测量精度完全不受磁干扰的影响 性能得到了明显的提升。

关键词: 姿态测量; MARG; 四元数; 磁干扰; 互补滤波。

中图分类号: U666.1 文献标识码: A 文章编号: 1004-1699(2019) 12-1824-06

在广泛的导航应用领域中,精确的姿态估计是必不可少的,如无人机导航、车辆导航、室内导航、人体姿态控制等^[1-4]。由于体积小、成本低、功耗小等优点,MEMS 器件被广泛应用于姿态测量领域^[5]。

然而,由于 MEMS 陀螺仪存在漂移,长时间工作有累积误差;利用加速度计和磁力计来估计姿态角会受载体线性加速度和磁场干扰的影响^[6-7]。因此,单独使用某一种传感器不能获得精确可靠的姿态信

项目来源: 国家自然科学基金项目(51575500) 收稿日期: 2019-08-15 修改日期: 2019-10-12 息 必须利用姿态融合算法对不同传感器的数据进行融合 以提高系统的精度和抗干扰能力^[8-10]。

至今,已有许多国内外学者相继研究出了不同 的数据融合算法用干姿态测量领域。Sabatini 等[11] 人提出了一种基于四元数的扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 将旋转四元数以及加速度计和磁力计误差 作为状态矢量 同时引入了一种自适应测量噪声协 方差矩阵构造方法,以减小载体线性加速度和磁场 干扰的影响。但是 EKF 存在观测方程在线性化时 会引入线性误差等缺点。为此,Yun 等[12]人提出了 一种基于 Gauss-Newton 的外部观测方法,有效解决 了观测方程的线性化问题。但其计算量大,低成本 处理器难以实现。为了降低计算量 ,Mahony 等[13] 人提出了一种用于无人机姿态估计的显式互补滤波 器(ECF)。Madgwick 等[14]人使用梯度下降算法优 化提出了固定增益互补滤波器。这些互补滤波算法 利用加速度计和磁力计的测量数据来补偿陀螺仪的 累积误差 但是由于磁力计的测量值极易受周围磁 场干扰的影响 给航向角估计带来误差的同时也会 给水平角带来不确定的影响。

针对上述问题,本文提出了一种双级互补滤波姿态融合算法。该算法利用加速度计和磁力计的测量值分步对 MEMS 陀螺仪估计的四元数进行补偿,避免了磁场干扰情况下航向角误差对水平角测量的影响,同时引入了载体非重力加速度误差和磁干扰误差自适应补偿方案,提高了姿态测量精度。并且算法实现过程简单,计算量小,降低了对处理器运算速度的要求。最后,基于现有的惯性测量系统对所提算法进行了实验评估。

1 基于四元数的姿态确定分析

取载体的重心为坐标系原点 3 个坐标轴分别与载体的纵轴、横轴和竖轴相重合 定义为载体坐标系 b 与之相对应的绝对坐标系通常称为导航坐标系 n。导航坐标系 n 向载体坐标系 b 的转换可以通过四元数法或 Euler 角法实现 ,四元数法由于可以避免 Euler 角的奇异问题而得到了广泛的应用 [15]。

载体坐标系和导航坐标系之间的转换关系可以 表示为:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_h \end{bmatrix} = C_n^b(q) \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$
 (1)

用四元数 $\mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$ 表示坐标系的转换 则旋转矩阵可表示为:

$$C_n^b(q) =$$

$$\begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ 2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$(2)$$

当旋转四元数确定后,由上式可唯一确定 $C_n^b(q)$ 中的各元素,从而求取姿态角。旋转四元数可以通过四元数微分方程来求取,四元数微分方程可以表示为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}(\omega)\mathbf{q} \tag{3}$$

式中: $\Omega(\omega)$ 表示载体坐标系相对于导航坐标系角速度在载体坐标系上分量的四元数。矩阵形式可以表示为:

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$
(4)

通常假设在时间间隔(t $t+\Delta T$) 内,角速度 ω 是一个固定值,其中 ΔT 是旋转四元数更新时间间隔。 因此可以获得式(3) 对应的离散时间模型:

$$\begin{cases}
\mathbf{q}_{k+1} = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega\Delta T\right)\mathbf{q}_k, & k = 0, 1, 2, \dots \\
\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)
\end{cases} \tag{5}$$

利用陀螺仪输出的角速度数据,结合式(5)对四元数进行更新,从而获得旋转矩阵。

2 双级互补滤波姿态融合算法

首先 利用上述更新的四元数获得重力矢量和 磁场矢量在载体坐标系下的计算值:

$$\begin{cases}
\hat{\mathbf{v}}_{g} = \frac{\hat{\mathbf{g}}^{b}}{\|\hat{\mathbf{g}}^{b}\|} \\
\hat{\mathbf{v}}_{m} = \frac{\hat{\mathbf{m}}^{b}}{\|\hat{\mathbf{m}}^{b}\|}
\end{cases}, \begin{cases}
\hat{\mathbf{g}}^{b} = C_{n}^{b}(\mathbf{q}) \mathbf{g}^{n} \\
\hat{\mathbf{m}}^{b} = C_{n}^{b}(\mathbf{q}) \mathbf{m}^{n} \\
\mathbf{g}^{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} \\
\mathbf{m}^{n} = \begin{bmatrix} 0 & m_{N} & m_{U} \end{bmatrix}^{T}
\end{cases}$$
(6)

式中: \hat{g}^b 和 \hat{m}^b 表示重力矢量和磁场矢量在载体坐标系下的计算值; g^n 和 m^n 表示重力场和磁场在导航坐标系下的投影。 $C_n^b(q)$ 为由式(5) 获得的旋转四元数代表的旋转矩阵。

而加速度计和磁力计的实际测量矢量为:

$$\begin{cases}
\mathbf{v}_{g} = \frac{\mathbf{g}^{b}}{\parallel \mathbf{g}^{b} \parallel} \\
\mathbf{v}_{m} = \frac{\mathbf{m}^{b}}{\parallel \mathbf{m}^{b} \parallel}
\end{cases}, \quad
\begin{cases}
\mathbf{g}^{b} = \begin{bmatrix} a_{x} & a_{y} & a_{z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\mathbf{m}^{b} = \begin{bmatrix} m_{x} & m_{y} & m_{z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\end{cases}$$
(7)

由于数值计算舍入误差的积累、MEMS 陀螺仪

存在漂移误差等各种原因,导致在计算矢量和测量 矢量之间存在偏差,即 $v_x \neq \hat{v}_x, v_m \neq \hat{v}_m$ 。

2.1 一级互补滤波算法设计

第一级互补滤波利用加速度计的测量数据对陀螺仪估计的四元数进行补偿修正,输出准确的水平姿态。如图 1 所示,通过将 k 时刻由式(5) 计算的四元数 q_k 绕向量 n_a 旋转角度 $\Delta\theta_a$ 来补偿水平角误差。因此 相应的误差四元数 q_{ae} 和修正四元数 q_a 可以由下式获得:

$$\begin{cases}
\boldsymbol{q}_{ae} = \cos\left(\frac{\mu_a \Delta \theta_a}{2}\right) + \frac{\boldsymbol{n}_a}{\parallel \boldsymbol{n}_a \parallel} \sin\left(\frac{\mu_a \Delta \theta_a}{2}\right) \\
\boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{q}_k \otimes \boldsymbol{q}_{ae}
\end{cases} (8)$$

式中: $\mathbf{n}_a = \hat{\mathbf{v}}_g \times \mathbf{v}_g \ \Delta \theta_a = \arccos(\hat{\mathbf{v}}_g \cdot \mathbf{v}_g)$ 。

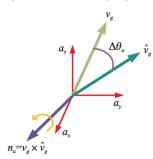


图 1 利用加速度计测量值补偿估计的重力矢量

在静止状态下,加速度计通过测量由于重力引起的加速度,可以准确地计算出载体的水平姿态角。但是,当载体存在线性加速度时,加速度计测得的加速度矢量的大小和方向与重力矢量存在偏差,利用加速度计输出值计算载体姿态角将会出现比较大的误差。然而,陀螺仪的测量值不会受线性加速度的影响,因此在这种情况下应当把陀螺仪数据作为估计的主要来源,用来进行相对准确的姿态估计。为了解决这一问题,本文在式(8)中引入自适应增益系数 μ_a 来减少载体非重力加速度误差对姿态测量精度的影响。

首先,定义载体非重力加速度误差 e_a 由下式获得:

$$e_a = \frac{| \parallel \mathbf{g}^b \parallel - g |}{g} \tag{9}$$

式中: $\|\mathbf{g}^b\|$ 为加速度计测得的加速度矢量模值 \mathbf{g} 为当地重力加速度。滤波增益系数 μ_a 与载体非重力加速度误差 \mathbf{e}_a 之间的关系由下式表示:

$$\mu_a = f(e_a) \tag{10}$$

式中: f 为分段连续函数 ,如图 2 所示。当载体线性加速度很小且非重力加速度误差不大于事先设定的阈值 x_a 滤波增益系数随着非重力加速度误差的增加而线性减小。如果载体存在较大的线性加速度 ,

非重力加速度误差大于阈值,那么滤波增益系数等于零。误差阈值的大小可通过衡量惯性器件各自的精度、载体的动态强度等条件,由试验获得最优值。

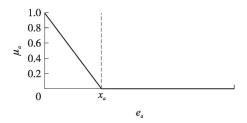


图 2 滤波增益系数与非重力加速度误差的关系

2.2 二级互补滤波算法设计

第二级互补滤波利用磁力计的测量数据对上一级获得的四元数进行补偿,来修正航向角。在第一级工作的基础上,利用磁力计测量值求得磁场在导航坐标系下的估计矢量:

$$\hat{\boldsymbol{m}}^n$$
 = $(0$ b_x b_y $b_z)$ = $\boldsymbol{q}_a \otimes \boldsymbol{m}^b \otimes (\boldsymbol{q}_a)^*$ (11) 忽略垂直分量 得

$$\hat{\boldsymbol{m}}^{n} = \begin{bmatrix} b_{x} & b_{y} & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

如图 3 所示,通过将 q_a 绕 n_m 旋转小角 $\Delta\theta_m$ 来补偿偏航角误差,因此,相应的误差四元数 q_{me} 和补偿四元数 q_m 可以由下式获得:

$$\begin{cases}
\mathbf{q}_{me} = \cos\left(\frac{\mu_{m}\Delta\theta_{m}}{2}\right) + \frac{\mathbf{n}_{m}}{\parallel \mathbf{n}_{m} \parallel} \sin\left(\frac{\mu_{m}\Delta\theta_{m}}{2}\right) \\
\mathbf{q}_{m} = \mathbf{q}_{a} \otimes \mathbf{q}_{me}
\end{cases} (13)$$

:中:

$$n_m = \hat{m}^n \times m^n$$
,
$$\Delta \theta_m = \arccos\left(\frac{\hat{m}^n}{\|\hat{m}^n\|} \cdot \frac{m^n}{\|m^n\|}\right)$$
,

 $m^n = (0 \ 1 \ 0)$ 为导航坐标系下忽略垂直分量的地磁参考矢量。滤波增益系数 μ_m 的获取办法与上述 μ_n 获取办法类似 在此不再赘述。

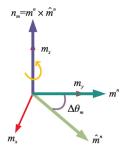


图 3 利用磁力计测量值补偿估计的磁场矢量

由上述可以看出,航向角误差四元数的旋转轴 n_m 与坐标轴 z 轴重合,也就是说第二级补偿的四元数为上一级获得的四元数仅绕 z 轴旋转获得,即使在磁场受到干扰的情况下也不会影响水平角的估计。

2.3 算法总体设计

根据上面的分析,设计的双级互补滤波算法流程图如图 4 所示。

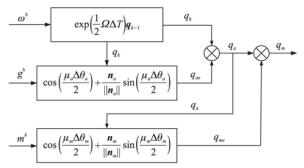


图 4 双级互补滤波姿态测量算法流程图

3 实验验证

利用实验室现有的惯性测量系统对算法进行验证。惯性测量单元包含三个单轴 CRM100 MEMS 陀螺仪、三个单轴 MS9000 MEMS 加速度计、一个三轴 HMC1043L AMR 磁力计和一个采集存储单元。内部微处理器实时采集并存储传感器测量的原始数据。本文采用 MATLAB 设计所提滤波器 ,并对原始数据进行处理 ,来获得载体的姿态信息。设计了 2种实验方式来验证算法的有效性: 磁干扰静态试验; 跑车动态试验。第一组试验用来验证算法能否有效避免磁干扰对水平姿态的影响; 第二组试验用来验证是否能有效消除载体线性加速度的影响。数据处理时算法中的误差阈值取为 $x_a = x_m = 0.2$ 。

3.1 磁干扰静态实验

将测量单元水平静止放置 拿一根铁棒在不同时间段内靠近测量单元 以此来模拟磁场受到干扰的情况。将采集的数据用不同算法处理结果如图 5 所示。

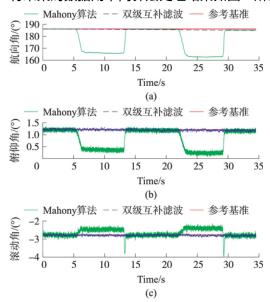


图 5 磁干扰实验姿态角对比图

在图 5 中可以看出 惯性测量单元分别在 5 s~13 s 和 22 s~29 s 两个时间段内受到了磁场的干扰。利用 Mahony 算法解算出来的航向角在磁干扰的情况下产生了 15°左右的误差 同时也给俯仰/滚动角带来了不同程度的影响。相比于 Mahony 算法 ,双级互补滤波姿态测量算法在磁场受到干扰的情况下 ,有效降低了磁干扰对航向角的影响 ,同时俯仰/滚动角完全不受航向角误差的影响 ,性能明显优于 Mahony 算法。在没有磁干扰的情况下 ,所提算法可以输出稳定可靠的三维姿态角信息 ,误差均小于 0.2°。

3.2 车载动态实验

为验证算法实时性以及能否有效消除载体线性加速度的影响,设计了跑车动态实验。采用加拿大NovAtel 公司高精度光纤组合导航系统 span-lei 为参考基准,考核算法的姿态精度。将系统与高精度母惯导捷联安装在与车体固联的测试工装上进行跑车实验,两套系统同时采集车体的运动信息。跑车现场图如图 6 所示。



图 6 跑车试验平台

采集到的加速度矢量的模值如图 7 所示 ,从图中可以看出 ,载体存在线性加速度。将融合滤波后输出的三轴姿态角信息与母惯导输出的姿态角相比较 ,对比图如图 8 所示。实验系统与母惯导之间的姿态角误差如图 9 所示。

从图 8 中可以看出,本文所提双级互补滤波融合算法得到的姿态角与高精度母惯导提供的姿态信息吻合度较高,并且具备对动态变化的实时跟踪性能。对比 Mahony 算法,本文所提算法由于引入的自适应滤波增益而有效得减小了载体线性加速度对姿态测量精度的影响,精度得到了明显的提升。从

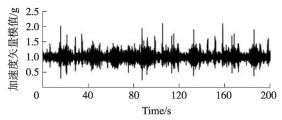


图 7 跑车试验加速度矢量模值

图 9 姿态角误差曲线可以看出,由于磁力计容易受到干扰,航向角误差在三维姿态角中误差最大,达到5°左右。俯仰角与滚动角误差相对较小,俯仰角误差小于 2°,滚动角误差小于 3°,误差曲线没有发散趋势。

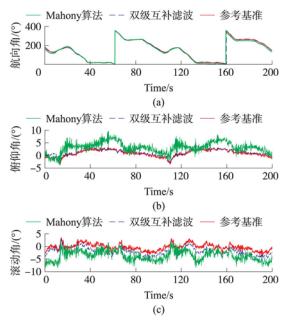


图 8 三维姿态角对比图

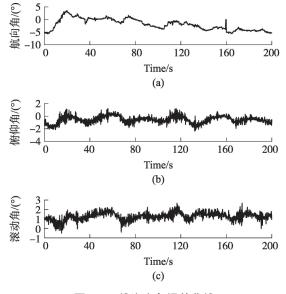


图 9 三维姿态角误差曲线

4 结论

本文采用双级互补滤波算法对 MARG 传感器的数据进行融合,实现了三自由度的姿态测量。与传统的 Mahony 互补滤波算法相比较,采用双级互补滤波融合算法将水平与航向姿态分级融合修正,消除了磁干扰情况下航向角误差对水平角测量的影响。同时,针对载体非重力加速度误差和磁干扰误

差引入两个独立的滤波增益系数,可分别由加速度计与磁力计不同频段的噪声自适应调节,大大提高了姿态角测量精度。基于惯性测量单元的静态、动态实验结果表明:本文所提算法能够有效的解决磁场干扰和载体线性加速度对姿态测量的影响,显著提高了三维姿态角的测量精度。

参考文献:

- [1] Coopmans C ,Jensen A M ,Chen Y Q. Fractional-Order Complementary Filters for Small Unmanned Aerial System Navigation [J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems ,2014 ,73 (1-4): 429-453
- [2] Fourati H ,Manamanni N ,Afilal L ,et al. Complementary Observer for Body Segments Motion Capturing by Inertial and Magnetic Sensors [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics ,2014 ,19 (1):149-157.
- [3] Hung T ,Suh Y. Inertial Sensor-Based Two Feet Motion Tracking for Gait Analysis [J]. Sensors 2013 ,13(5): 5614-5629.
- [4] Renaudin , Valérie , Combettes C. Magnetic , Acceleration Fields and Gyroscope Quaternion (MAGYQ) -Based Attitude Estimation with Smartphone Sensors for Indoor Pedestrian Navigation [J]. Sensors , 2014 ,14(12): 22864-22890.
- [5] Sheng H Zhang T. MEMS-Based Low-Cost Strap-Down AHRS Research [J]. Measurement 2015 59: 63-72.
- [6] Lee J K ,Choi M J. A Sequential Orientation Kalman Filter for AHRS Limiting Effects of Magnetic Disturbance to Heading Estimation [J]. Journal of Electrical Engineering and Technology , 2017 ,12(4): 1675-1682.
- [7] 王向军 涨朝阳 刘峰. 基于加速度分离算法的姿态测量方法 研究[J]. 传感技术学报 2018 31(12):1848-1852.
- [8] Fourati H ,Manamanni N ,Afilal L ,et al. A Nonlinear Filtering Approach for the Attitude and Dynamic Body Acceleration Estimation Based on Inertial and Magnetic Sensors: Bio-Logging Application [J]. IEEE Sensors Journal 2010 ,11(1): 233-244.
- [9] Bird J ,Arden D. Indoor Navigation with Foot-Mounted Strapdown Inertial Navigation and Magnetic Sensors [Emerging Opportunities for Localization and Tracking] [J]. Wireless Communications IEEE 2011 ,18(2): 28-35.
- [10] Wang L ,Zhang Z ,Sun P. Quaternion-Based Kalman Filter for AHRS Using an Adaptive-Step Gradient Descent Algorithm [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems 2015: 1.
- [11] Sabatini A M. Quaternion-Based Extended Kalman Filter for Determining Orientation by Inertial and Magnetic Sensing [J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2006, 53 (7): 1346 1356.
- [12] Yun X, Lizarraga M, Bachmann E R, et al. An Improved Quaternion-Based Kalman Filter for Real-Time Tracking of Rigid Body Orientation [C] //IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems. IEEE 2003.
- [13] Euston M ,Coote P ,Mahony R ,et al. A Complementary Filter for Attitude Estimation of a Fixed-Wing UAV [C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems. IEEE 2008.

[14] Madgwick S O H ,Harrison A J L ,Vaidyanathan A. Estimation of IMU and MARG Orientation Using a Gradient Descent Algorithm
[J]. IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics: [proceedings] 2011 2011: 5975346.

[15] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京: 科学出版社 2006: 327-330.



高 宁(1995-),男,汉族,山东德州人,现为中北大学在读研究生,研究方向为导航制导与控制,1581801985@qq.com;



李 杰(1976-) 男 山西省岚县人 教授 博士生导师 目前的主要研究方向为微系统集成理论与技术、惯性感知与控制技术、组合导航理论等 ,Lijie@nuc.edu.cn。

(上接第1794页)

- [8] 王伯年.有关层流流量计的理论分析 [J]. 江苏工学院学报, 1983(1):15-28.
- [9] 王伯年 汪荣杰 汪利民. 层流流量计设计参数的选择与确定 [J]. 仪器仪表学报 2000 21(5):474-476.
- [10] 魏少群 刘慧平 黄志凡. 基于层流流量计的多组分气体流量测量与补偿算法研究[J]. 计量与测试技术 2017(5):114-116.
- [11] 刘灿. 双毛细管测量高温气体粘度的研究[D]. 河北: 河北大学 2014: 10-18.
- [12] 李明慧 高晶敏. 基于单片机控制的毛细管流量特性研究[J]. 传感器世界 2018(6):13-16.
- [13] 石则强 师颖 叶松. 全流定容取样系统的原理和标定方法研究 [J]. 交通节能与环保 2014(3):48-53.
- [14] 陈雷 汤苑楠 刘刚 筹. 牛顿流体圆管内非稳态 Poiseuille 流动特性[J]. 中国石油大学学报(自然科学版) 2018 42(3):114-121.
- [15] Kanda H Shimomukai K. Numerical Study of Pressure Distribution in Entrance Pipe Flow [J]. Journal of Complexity ,2009 ,25: 253– 267.
- [16] Smith A M O. Remarks on Transition in a Round Tube [J]. Journal of Fluid Mechanics ,1960 ,7(4): 565-576.



王 剪(1995-) ,男 ,中国计量大学在 读硕士研究生 ,主要研究方向为流量 测量 ,1102645351@ qq.com;



张洪军(1969-),男,通讯作者,2001年获香港理工大学力学博士学位,现任中国计量大学教授,主要研究方向为流量、容量计量技术,能源计量技术,zhanghongjun@cjlu.edu.cn。