

捷联惯导系统姿态算法比较

孙 丽, 秦永元

(西北工业大学自动化学院, 西安 710072)

摘要: 姿态算法是捷联惯导系统算法中的一个重要组成部分, 解算姿态阵相当于建立起数学平台, 其精度对捷联惯导系统的精度影响很大。该文就实际应用, 对欧拉角法、方向余弦法、四元数算法、罗德利格参数法、优化旋转矢量算法及一种改进的递推旋转矢量算法做了分析, 并在典型圆锥运动输入下, 对后五种算法进行了仿真, 为姿态算法的研究提供了参考。

关键词: 捷联姿态算法; 精度; 圆锥运动; 比较

中图分类号: U666.1

文献标识码: A

Comparison of attitude algorithms of SINS

SUN Li, QIN Yong-yuan

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Attitude algorithm is an important part of SINS algorithm. The calculation of attitude algorithm is used for building the mathematic platform and its accuracy of attitude algorithm can enormously affect the accuracy of SINS. Based on the practical applying, this paper analyses Euler algorithm, direction cosine algorithm, quaternion algorithm, Rodrigues Parameters, optimal rotation vector attitude algorithm and an improved recursion rotation vector attitude algorithm. All algorithms, except the first one, are simulated in the classical coning motion. This paper can be used for reference for the study on attitude algorithm of SINS.

Key words: Strapdown attitude algorithm; accuracy; coning motion; comparison

0 引言

捷联惯导系统是陀螺和加速度计直接固连在运载体上的惯导系统, 它已成为惯性导航发展方向。陀螺和加速度计分别用来测量运载体的角运动信息和线运动信息, 机载计算机根据这些测量信息解算出运载体的航向、姿态、速度及位置, 解算姿态阵相当于建立起数学平台, 姿态更新就是根据惯性器件的输出实时计算姿态阵的。本文对几种姿态算法做了分析并进行了仿真, 仿真结果表明, 改进旋转矢量算法精度最好, 四元数毕卡解法在低动态运载体姿态解算中计算量和精度较理想。

1 欧拉角法

力学中常用欧拉角确定动坐标系相对参考坐标系的角位置关系, 运载体的航向角 ψ 、俯仰角 θ 及横

收稿日期: 2006-03-22

作者简介: 孙丽 (1981—), 女, 西北工业大学硕士生, 主要从事先进惯性仪表与系统研究。

电子邮箱: sunlii_ren@163.com

滚角 γ 实质上是一组欧拉角。这组欧拉角描述了机体坐标系相对地理坐标系的角位置关系, 取导航坐标系 n 为地理坐标系 g , 姿态速率为 ω_{nb} , 则得到欧拉角微分方程:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} \omega_{nbx}^b - \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \omega_{nbz}^b \\ \dot{\theta} = \cos \gamma \omega_{nbx}^b + \sin \gamma \omega_{nbz}^b \\ \dot{\gamma} = \sin \gamma \cdot \tan \theta \cdot \omega_{nbx}^b + \omega_{nby}^b - \cos \gamma \cdot \tan \theta \cdot \omega_{nbz}^b \end{cases} \quad (1)$$

其中姿态速率按下式确定:

$$\hat{\omega}_{nb}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - \hat{\omega}_{in}^b \quad (2)$$

式中, $\tilde{\omega}_{ib}^b$ 为陀螺组合对运载载体角速度的测量值, $\hat{\omega}_{in}^b$ 根据运载载体所在位置的纬度和速度解算出。

欧拉角算法通过求解欧拉角微分方程直接计算航向角、俯仰角及横滚角。欧拉角微分方程关系简单明了, 概念直观, 容易理解, 解算过程中无须作正交化处理, 但方程中包含三角运算, 给实时计算带来一定困难, 并且当俯仰角接近 90° 时方程出现退化现象, 这相当于平台惯导中惯性平台的锁定。所以这种方法只适用于水平姿态变换不大的情况, 而不适用于全姿态运载体的姿态确定。

2 方向余弦法

姿态更新的方向余弦法实质上就是直接求解姿态矩阵微分方程:

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \omega_{nb}^{bk} \quad (3)$$

式中, $\omega_{nb}^{bk} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbz}^b & \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b & 0 & -\omega_{nbx}^b \\ -\omega_{nby}^b & \omega_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix}$, 微分方程的求解可由四阶龙格库塔算法执行。

方向余弦法对姿态矩阵微分方程做求解, 避免了欧拉角法中的退化问题, 可全姿态工作, 但姿态矩阵微分方程实质上是包含九个未知量的线性微分方程组, 与四元数法相比, 计算量大, 实时计算困难, 所以工程上并不实用。

3 四元数微分方程的毕卡求解法

四元数微分方程为:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} Q \otimes \omega_{nb}^b = \frac{1}{2} M'(\omega_{nb}^b) Q \quad (4)$$

即:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbx}^b & -\omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b \\ \omega_{nbx}^b & 0 & \omega_{nbz}^b & -\omega_{nby}^b \\ \omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b & 0 & \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nbz}^b & \omega_{nby}^b & -\omega_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

捷联陀螺的输出一般情况下是采样间隔内的角增量。为避免噪声的微分放大, 应直接应用角增量来确定四元数, 而不必将角增量换算成角速度。毕卡算法是由角增量计算四元数的常用算法, 见下式:

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}) = \{\mathbf{I} \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\boldsymbol{\Theta}[(\sin \frac{\Delta\theta}{2})/\Delta\theta]\}\mathbf{Q}(t_k) \quad (6)$$

$$\text{式中, } \Delta\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix}。$$

四元数法只需求解四个未知量的线性微分方程组, 计算量比方向余弦小, 且算法简单, 易于操作, 是较实用的工程方法。但四元数实质上是旋转矢量算法中的单子样算法, 对有限转动引起的不可交换误差的补偿不够, 所以只适用于低动态运载体(如运输机等)的姿态解算, 而对高动态运载体, 姿态解算中的算法漂移会十分严重。

4 改进型罗德利格参数

四元数描述了刚体等效旋转的方向和转过角度, 而三维空间内角位置的确定只需三个独立的欧拉角, 因此四元数具有一个冗余度, 说明采用四元数解算姿态增加了额外的负担。可以用罗德利格参数将四维的四元数降低为三维的超平面投影参数。但由于存在旋转角有奇异值的缺陷限制了其在工程上的应用, 不过经过改进后, 罗德利格参数仍不失为解算姿态角的有效途径。由文献[3], 改进型罗德利格参数微分方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 & \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 & \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3 & 1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2 & \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2 & \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1 & 1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix} \quad (7)$$

改进型罗德利格参数与姿态阵关系:

$$\mathbf{C}_b^n = \frac{1}{(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^2} \begin{bmatrix} \Sigma^2 + 4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) & 8\sigma_1\sigma_2 - 4\Sigma\sigma_3 & 8\sigma_1\sigma_3 + 4\Sigma\sigma_2 \\ 8\sigma_1\sigma_2 + 4\Sigma\sigma_3 & \Sigma^2 + 4(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 - \sigma_3^2) & 8\sigma_2\sigma_3 - 4\Sigma\sigma_1 \\ 8\sigma_1\sigma_3 - 4\Sigma\sigma_2 & 8\sigma_2\sigma_3 + 4\Sigma\sigma_1 & \Sigma^2 + 4(\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, $\Sigma = 1 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$ 。改进型罗德利格参数影像:

$$\sigma_i^* = -\sigma_i / \|\boldsymbol{\sigma}\| \quad (9)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T$ 。

采用改进型罗德利格参数解算姿态阵时, $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^*$ ($\boldsymbol{\sigma}^* = [\sigma_1^* \ \sigma_2^* \ \sigma_3^*]^T$) 的切换点可选择在单位球面上, 即当 $\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} \leq 1$ 时姿态解算采用 $\boldsymbol{\sigma}$, 反之采用 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 。这样避免了刚体旋转角度 $\phi = \pm 360^\circ$ 时 $\boldsymbol{\sigma}$ 出现奇异值, $\phi = 0^\circ$ 时 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 出现奇异值。

5 优化旋转矢量算法

采用毕卡法求解四元数微分方程时使用了陀螺的角增量输出。角增量虽然微小, 但不可视作无穷小, 而刚体做有限转动时, 刚体的空间角位置与旋转次序有关, 即存在不可交换性误差。等效旋转矢量法在利用角增量计算等效旋转矢量时, 对这种不可交换误差作了适当补偿, 在姿态更新周期内包含的角增量子样越多, 补偿就越精确。对捷联惯导姿态更新来说, 锥运动是最恶劣的工作环境条件, 它诱发数学平

台的严重漂移, 所以以锥运动作为优化处理的环境条件。本文采用三子样优化算法。由文献[2]载体做圆锥运动时的角速度为:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{nb}}(t) = \begin{bmatrix} -2\omega \sin^2 \frac{a}{2} & -\omega \sin a \sin \omega t & \omega \sin a \cos \omega t \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

圆锥运动时载体坐标系相对地理坐标系的转动四元数为:

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} \cos \frac{a}{2} & 0 & \sin \frac{a}{2} \cos \omega t & \sin \frac{a}{2} \sin \omega t \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

设为姿态更新周期的三等份时间间隔内陀螺的角增量输出:

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_i = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\omega h \sin^2 \frac{a}{2} \\ -2 \sin a \sin \frac{\omega h}{6} \sin \omega(t + \frac{2i-1}{6}h) \\ 2 \sin a \sin \frac{\omega h}{6} \cos \omega(t + \frac{2i-1}{6}h) \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

优化三子样旋转矢量为:

$$\boldsymbol{\Phi}(h) = \Delta \boldsymbol{\theta}_1 + \Delta \boldsymbol{\theta}_2 + \Delta \boldsymbol{\theta}_3 + \frac{9}{20}(\Delta \boldsymbol{\theta}_1 \times \Delta \boldsymbol{\theta}_3) + \frac{27}{40} \Delta \boldsymbol{\theta}_2 \times (\Delta \boldsymbol{\theta}_3 - \Delta \boldsymbol{\theta}_1) \quad (13)$$

载体由 t 时刻到 $t+h$ 时刻的姿态变化四元数为:

$$\boldsymbol{q}(h) = \cos \frac{\|\boldsymbol{\Phi}\|}{2} + \frac{\boldsymbol{\Phi}}{\|\boldsymbol{\Phi}\|} \sin \frac{\|\boldsymbol{\Phi}\|}{2} \quad (14)$$

导航系由 t 时刻到 $t+h$ 时刻的姿态四元数为:

$$\boldsymbol{Q}(t+h) = \boldsymbol{Q}(t) \otimes \boldsymbol{q}(h) \quad (15)$$

旋转矢量法可采用多子样算法实现对不可交换误差的有效补偿, 算法关系简单, 易于操作, 并且通过优化处理使算法漂移在相同子样算法中达到最小, 因此特别适用于角机动频繁激烈或存在严重角振动的运载体的姿态更新。

6 改进递推旋转矢量算法

本文通过当前迭代周期内及前两个迭代周期内的角增量输出, 并根据在一个周期内对陀螺仪的三次采样值, 求出旋转矢量^[1]:

$$\boldsymbol{\Phi}(h) = \boldsymbol{\theta}_l + \frac{42647}{61600}(\Delta \boldsymbol{\theta}_1 \times \Delta \boldsymbol{\theta}_2) + \frac{19680}{46200}(\Delta \boldsymbol{\theta}_1 \times \Delta \boldsymbol{\theta}_3) + \frac{42646}{61600}(\Delta \boldsymbol{\theta}_2 \times \Delta \boldsymbol{\theta}_3) + \frac{19}{36960}(\boldsymbol{\theta}_{l-1} \times \boldsymbol{\theta}_l) - \frac{1}{92400}(\boldsymbol{\theta}_{l-2} \times \boldsymbol{\theta}_l) \quad (16)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}_l$ 、 $\boldsymbol{\theta}_{l-1}$ 、 $\boldsymbol{\theta}_{l-2}$ 分别是当前及前两个迭代周期内的角增量。

7 典型圆锥运动下的仿真结果

姿态更新周期 $h = 20 \text{ ms}$, 仿真时间 60 s 。

1) 锥运动频率
 $f = 15 \text{ Hz}$, 锥运动半
 锥角 $\alpha = 2^\circ$, 仿真结
 果见图 1~图 5。

2) 锥运动频率
 $f = 2 \text{ Hz}$, 锥运动半
 锥角 $\alpha = 1^\circ$, 仿真结
 果见图 6~图 7。

由仿真结果可
 见, 在角振动较剧烈
 情况下, 改进的旋转
 矢量算法精度高于优
 化旋转矢量算法, 两
 者的横滚角和航向角
 精度相近, 前者俯仰
 角精度要优于后者,
 这主要因为优化时仅
 考虑了旋转矢量的非
 零常数项。在角振动
 较低情况下, 四元数
 算法和优化三子样旋
 转矢量算法的横滚角
 和航向角精度较接
 近, 但前者俯仰角精
 度较差, 前者计算量
 要小。

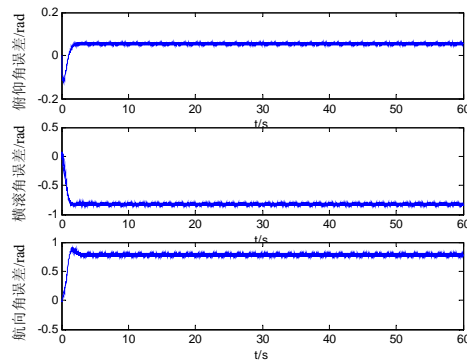


图 1 采用方向余弦法计算的载体姿态角误差

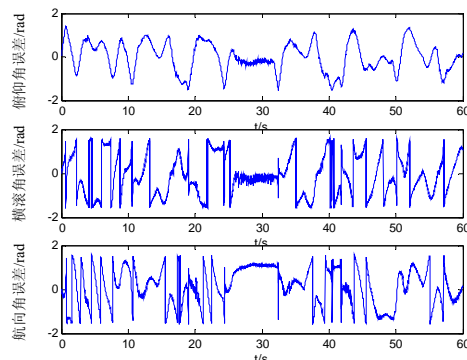


图 3 采用改进型罗德里格参数法计算的载体姿态角误差

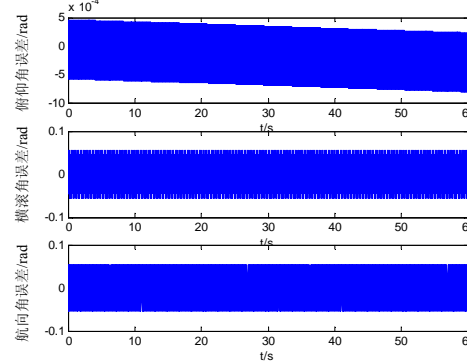


图 5 采用改进递推旋转矢量法计算的载体姿态角误差

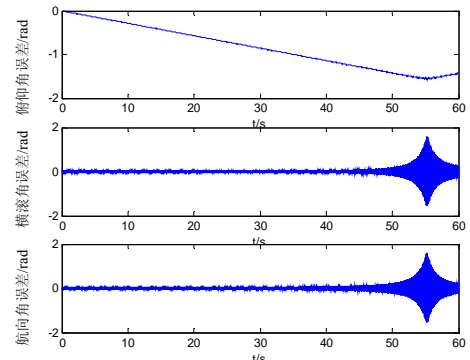


图 2 采用四元数毕卡算法计算的载体姿态角误差

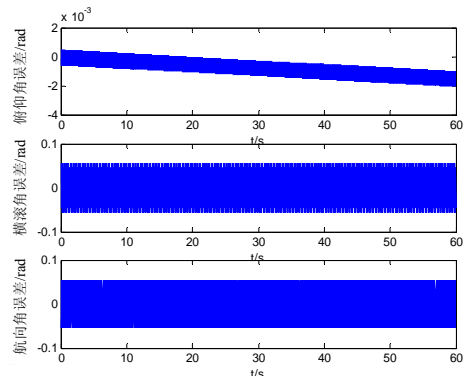


图 4 采用优化三子样旋转矢量法计算的载体姿态角误差

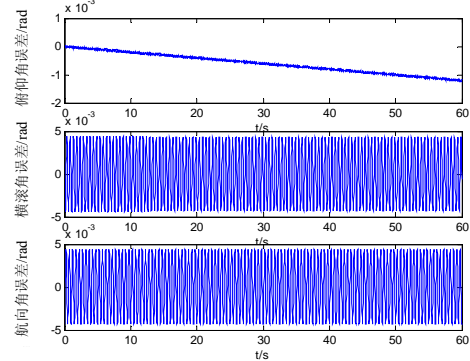


图 6 低频下采用四元数计算的载体姿态角误差

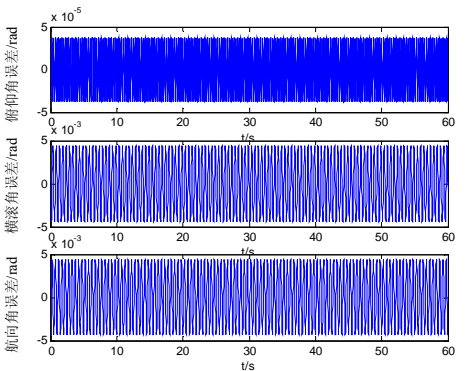


图 7 低频下采用优化三子样旋转矢量法计算的载体姿态角误差

参考文献:

- [1] LIN Xue-yuan, LIU Jian-ye, LIU Hong. An improved rotation vector attitude algorithm for laser Strapdown inertial navigation system[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2003, 20(1).
- [2] 柴卫华, 侯芸. 捷联惯导系统姿态算法研究[J]. 现代防御技术, 2001, 29(4).
- [3] Schaub H, Junkins J L. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the Rodrigues parameters[J]. Journal of Astronautical Sciences, 1996, 44(1): 1-19.
- [4] 陈哲. 捷联惯性导航系统原理[M]. 北京: 宇航出版社, 1986.