

一元二次方程在实数域上的求解

杨泽加

统计学 3190104662

2022 年 7 月 4 日

摘要

本文介绍了一维非线性方程求根的算法实现和技术要点,并结合了数值算例及相关分析。旨在清晰地为读者提供一个理解该算法的角度。

1 引言

对一维非线性方程的求根,算法库 gsl [1] 为我们提供了二分法、牛顿法及 Steffenson 加速收敛法。本文将结合二分法和牛顿法展开讨论。由于所有一维非线性方程

$$f(x) = b, b \in \mathbb{C} \Rightarrow g(x) = f(x) - b = 0 \quad (1)$$

也是一个一维非线性方程,所以一维非线性方程的解总是可以转化为一维线性方程的求根问题。

2 数学理论

2.1 二分法

对一个区间内单调的函数,若函数有实根,则函数曲线应当在根 x^* 这一点上与 x 轴有一个交点,并且由于函数是单调的,在根附近的左右区间内,函数值的符号应当相反。利用这一特点,可以通过不断将求根区间二分的方法,每次将求根区间缩小为原来的一半,在新的折半后的区间内继续搜索方程的根,对根所在区间继续二分,直到求出方程的根为止。

这个算法的合理性由中值定理保证：

定理 1 (中值定理). 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 内连续且在开区间 (a, b) 可微, 则存在一点 $c, a < c < b$, 使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

2.2 牛顿法

牛顿法的基本思想是利用迭代点 x_k 处的一阶导数 (梯度) 和二阶导数 (Hessen 矩阵) 对目标函数进行二次函数近似, 然后把二次模型的极小点作为新的迭代点, 并不断重复这一过程, 直至求得满足精度的近似极小值。牛顿法的速度相当快, 而且能高度逼近最优值。

将 $f(x)$ 在 x_0 点附近展开成 Taylor 级数

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots \quad (3)$$

取其线性部分作为非线性方程 $f(x) = 0$ 的近似方程, 则有

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \quad (4)$$

设 $f'(x_0) \neq 0$, 则其解为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (5)$$

如此得到了牛顿法的一个迭代序列

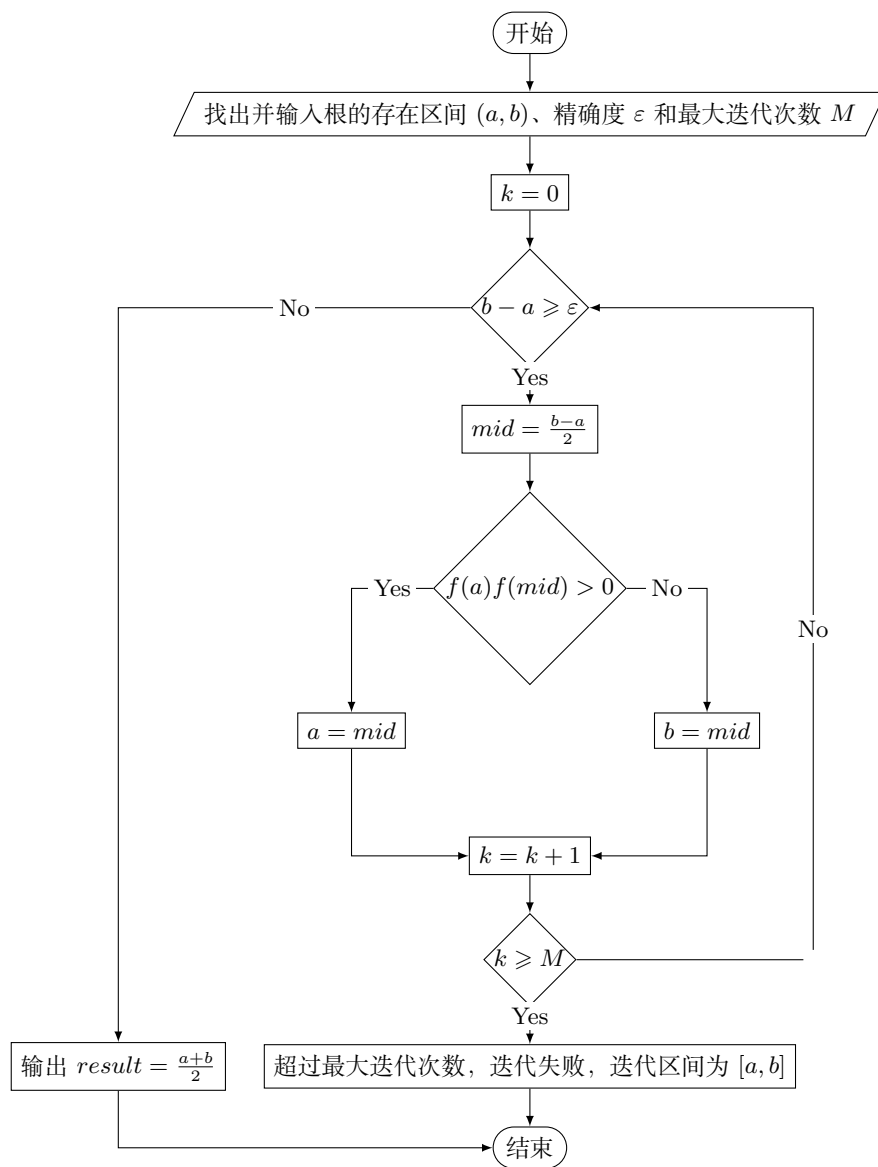
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6)$$

同时, 为了避免牛顿法计算导数带来的开销, 还可简化为:

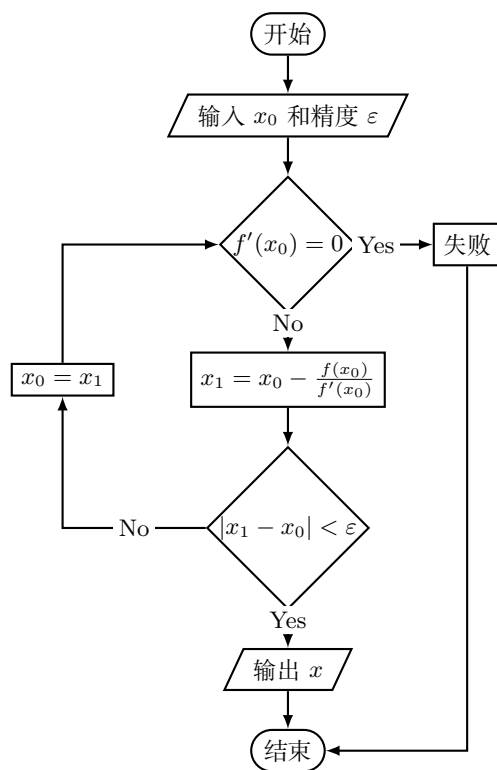
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \\ \text{or } x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1} \text{ (差商代替导数)}) \end{aligned} \quad (7)$$

3 算法介绍

3.1 二分法



3.2 牛顿法

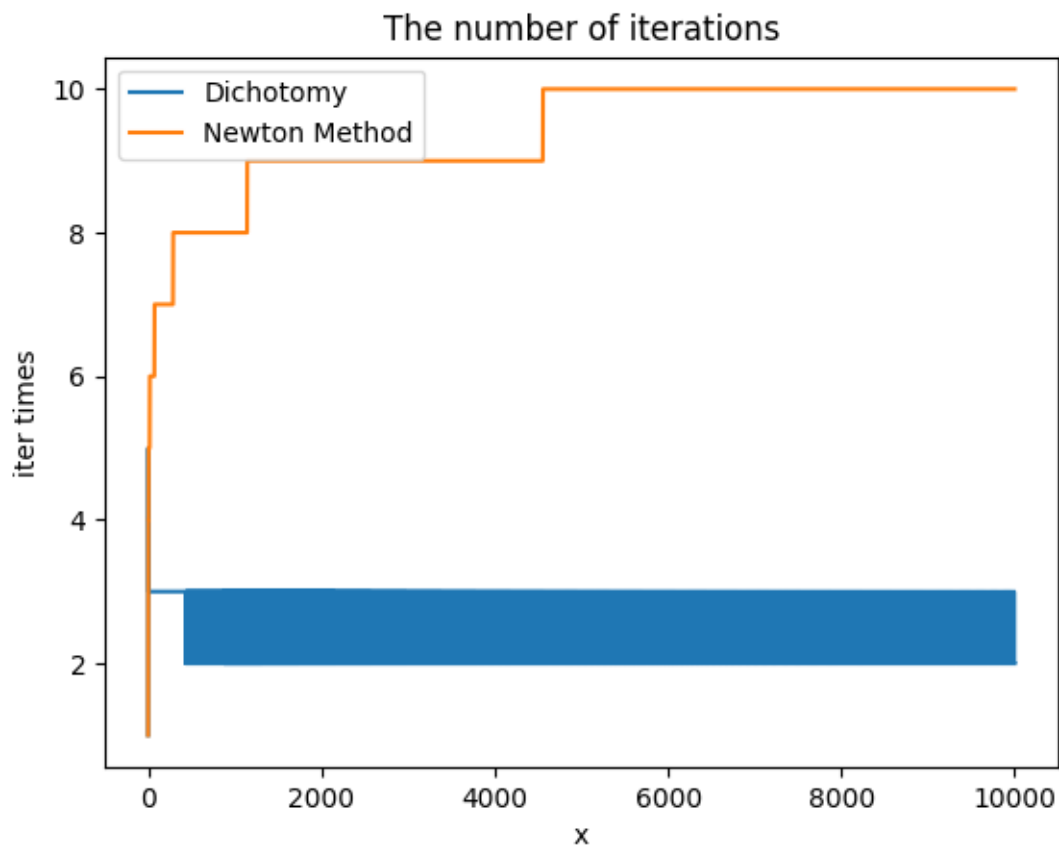


4 算法收敛性的比较

比较两种方法对 1——10000 的数字的求平方根结果如下：

- | | |
|---|----------------------|
| 1 | 10000次二分法迭代用时为850毫秒 |
| 2 | 10000次牛顿法迭代用时为1662毫秒 |

迭代次数的差异如下：



由于我迭代的起始区间均为迭代区域的最大值 $\max(a, b)$ 。牛顿法对初值较为敏感，故迭代次数较多。而在起初区间较小时，牛顿法的效果则好于二分法。因此我们在根的估计区间较小时使用牛顿法，否则建议使用二分法。

参考文献

- [1] M. G. J. D. J. T. B. G. G. J. P. A. M. B. F. R. R. Ulerich, “Gnu scientific library release 2.7,” p. 433 to 445. 1