一元二次方程在实数域上的求解

杨泽加
3190104662

2022 年 7 月 4 日

摘要

本文介绍了一维非线性方程求根的算法实现和技术要点，并结合了数值算例及相关分析。旨在清晰地为读者提供一个理解该算法的角度。

1 引言

对一维非线性方程的求根，算法库 gsl 为我们提供了二分法、牛顿法及 Steffenson 加速收敛法。本文将结合二分法和牛顿法展开讨论。
由于所有一维非线性方程

$$f(x) = b, b \in \mathbb{C} \Rightarrow g(x) = f(x) - b = 0 \tag{1}$$

也是一个一维非线性方程，所以一维非线性方程的解总是可以转化为一维线性方程的求根问题。

2 数学理论

2.1 二分法

对一个区间内单调的函数，若函数有实根，则函数曲线应当在根 $x*$ 这一点上与 x 轴有一个交点，并且由于函数是单调的，在根附近的左右区间内，函数值的符号应当相反。利用这一特点，可以通过不断将求根区间二分的方法，每次将求根区间缩小为原来的一半，在新的折半后的区间内继续搜索方程的根，对根所在区间继续二分，直到求出方程的根为止。

这个算法的合理性由中值定理保证:

定理 1 (中值定理) 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续且在开区间 (a,b) 可微，则存在一点 $c, a<c<b$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

2.2 牛顿法

牛顿法的基本思想是利用迭代点 x_k 处的一阶导数 (梯度) 和二阶导数 (Hessen 矩阵) 对目标函数进行二次函数近似，然后把二次模型的极小点作为新的迭代点，并不断重复这一过程，直至求得满足精度的近似极小值。牛顿法的速度相当快，而且能高度逼近最优值。
将 $f(x)$ 在 x_0 点附近展开成 Taylor 级数

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2\frac{f''(x_0)}{2!}+\cdots \tag{3}$$

取其线性部分作为非线性方程 $f(x)=0$ 的近似方程，则有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0 \tag{4}$$

设 $f'(x_0)\neq 0$，则其解为

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5}$$

如此得到了牛顿法的一个迭代序列

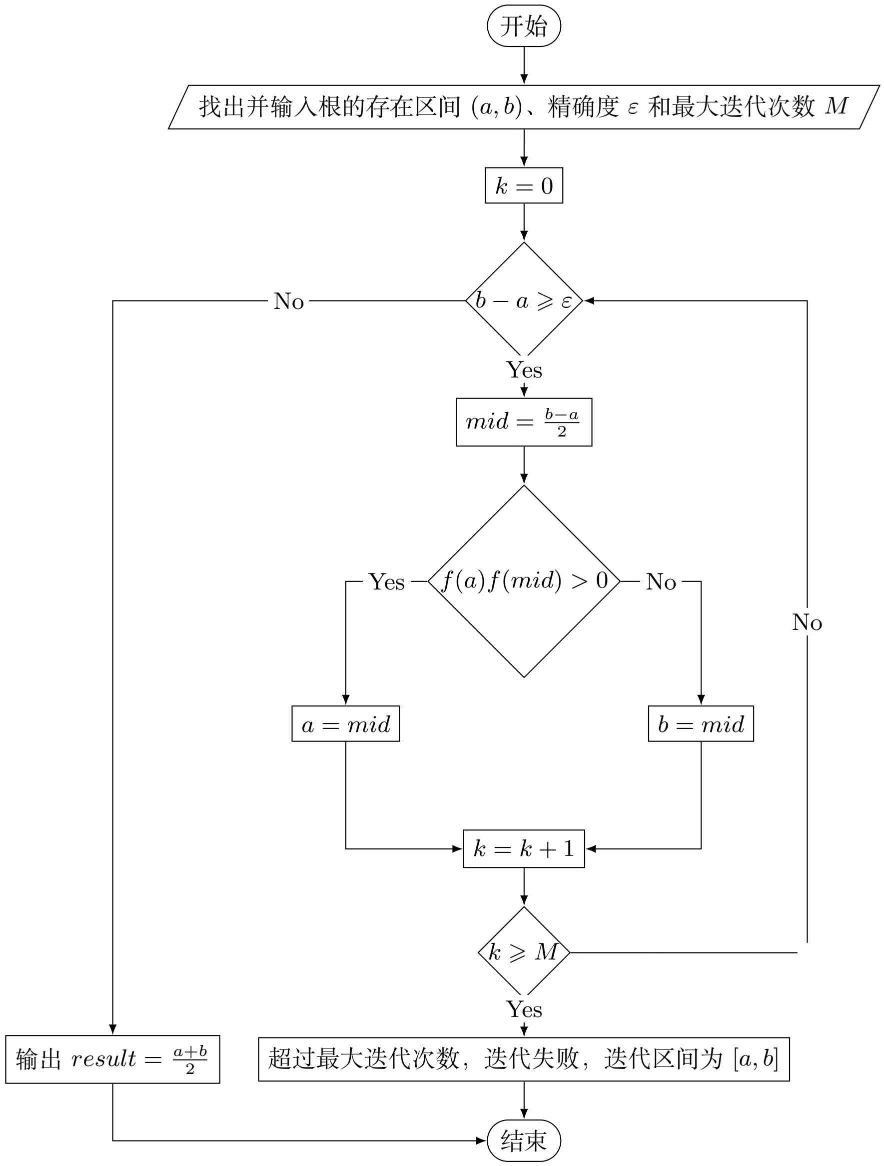
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6}$$

同时，为了避免牛顿法计算导数带来的开销，还可简化为:

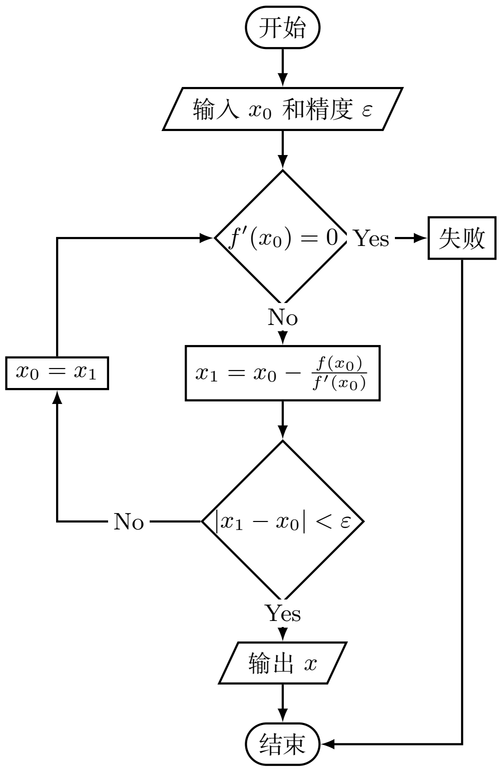
$$\begin{aligned} x_{n+1}&=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}\\ \text{or } x_{n+1}&=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}(x_n-x_{x-1}(\text{差商代替导数}) \end{aligned} \tag{7}$$

3 算法介绍

3.1 二分法


开始
找出并输入根的存在区间 (a,b)、精确度 ε 和最大迭代次数 M
$k=0$
$b-a \geqslant \varepsilon$
No
Yes
$mid=\frac{b-a}{2}$
$f(a)f(mid)>0$
Yes
No
No
$a=mid$
$b=mid$
$k=k+1$
$k \geqslant M$
Yes
输出 $result=\frac{a+b}{2}$
超过最大迭代次数，迭代失败，迭代区间为 $[a,b]$
结束

3.2 牛顿法


开始
输入 x_0 和精度 ε
$f'(x_0) = 0$
Yes
失败
No
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
$x_0 = x_1$
No
$|x_1 - x_0| < \varepsilon$
Yes
输出 x
结束