一维非线性方程的求根探讨

杨泽加
统计学 3190104662

ZJU
Statistics class 1901

2022 年 7 月 4 日

目录

目录:

导言

对一维非线性方程的求根，算法库 gsl 为我们提供了二分法、牛顿法及 Steffenson 加速收敛法等不同方法。接下来我们将结合二分法和牛顿法展开讨论。由于所有一维非线性方程

$$f(x) = b, b \in \mathbb{C} \Rightarrow g(x) = f(x) - b = 0 \tag{1}$$

也是一个一维非线性方程，所以一维非线性方程的解总是可以转化为一维线性方程的求根问题。

对一个区间内单调的函数，若函数有实根，则函数曲线应当在根 $x*$ 这一点上与 x 轴有一个交点，并且由于函数是单调的，在根附近的左右区间内，函数值的符号应当相反。利用这一特点，可以通过不断将求根区间二分的方法，每次将求根区间缩小为原来的一半，在新的折半后的区间内继续搜索方程的根，对根所在区间继续二分，直到求出方程的根为止。这个算法的合理性由中值定理保证：

定理（中值定理）

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续且在开区间 (a,b) 可微，则存在一点 $c, a<c<b$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

数学理论

牛顿法

牛顿法的基本思想是利用迭代点 x_k 处的一阶导数 (梯度) 和二阶导数 (Hessen 矩阵) 对目标函数进行二次函数近似，然后把二次模型的极小点作为新的迭代点，并不断重复这一过程，直至求得满足精度的近似极小值。牛顿法的速度相当快，而且能高度逼近最优值。

将 $f(x)$ 在 x_0 点附近展开成 Taylor 级数

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots \tag{3}$$

取其线性部分作为非线性方程 $f(x) = 0$ 的近似方程，则有

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \tag{4}$$

设 $f'(x_0) \neq 0$，则其解为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5}$$

算法介绍

3.1 二分法

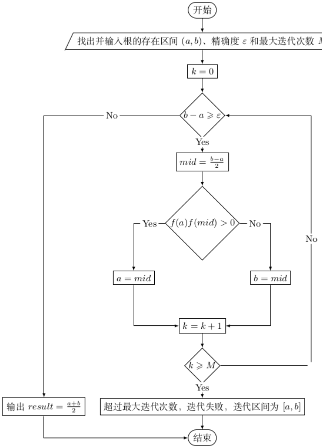


图: 二分法的算法流程图

算法介绍

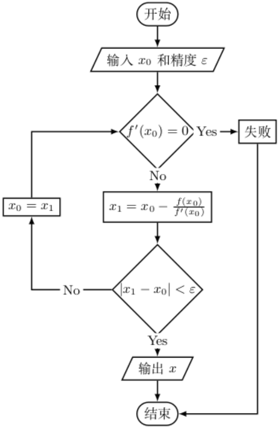


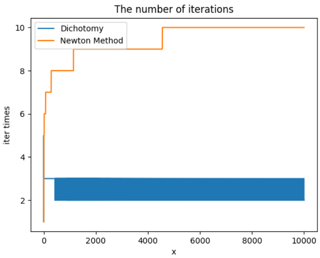
图: 牛顿的算法流程图

两种算法收敛性的比较

比较两种方法对 1——10000 的数字的求平方根结果如下:

```
10000次二分法迭代用时为850毫秒
10000次牛顿法迭代用时为1662毫秒
```

迭代次数的差异如下:



结果分析

由于迭代的起始区间均为迭代区域的最大值 $\max(a, b)$。牛顿法对初值较为敏感，故迭代次数较多。而在起初区间较小时，牛顿法的效果则好于二分法。

因此我们在根的估计区间较小时使用牛顿法，否则建议使用二分法。