1 sde 解的存在唯一性

给定 T 令 $b(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\sigma(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$ 是可测函数满足

$$|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leq C(1+|x|);\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad t\in[0,T] \tag{1}$$

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq D|x-y|;\quad x,y\in\mathbf{R}^n,t\in[0,T] \tag{2}$$

令 Z 是与 $\mathcal{F}_{+\infty}$ 独立的随机变量，这里 $\mathcal{F}_{+\infty}$ 是由 $B_s(\cdot),s\geq 0$，且 Z 满足 $E[|Z|^2]<\infty$ 则随机微分方程

$$dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t,0\leq t\leq T,X_0=Z \tag{3}$$

存在唯一解 $X_t(\omega)\in(M^2)^d$

1.1 证明

利用不动点定理证明设 $\Phi:(M^2)^d\to(M^2)^d$

$$\forall U\in(M^2)^d,\Phi(U)_t=X+\int_0^t f(s,U_s)ds+\int_0^t g(s,U_s)dB_s$$

由 (1)(2) 知 $\Phi(U)\in(M^2)^d$，定义范数 $\|U\|_\beta=\left(E\int_0^T e^{-\beta t}\left|X_t\right|^2 dt\right)^{1/2}$ 显然它与 $(M^2)^d$ 的原范数等价下证存在 β 使得 Φ 为严格压缩映射，设 $U,U'\in(M^2)^d$ 记

$$\bar{U}=U-U',\bar{f}_t=f\left(t,U_t\right)-f\left(t,U_t'\right),\bar{g}_t=g\left(t,U_t\right)-g\left(t,U_t'\right),\bar{\Phi}_t=\Phi(U)_t-\Phi\left(U'\right)_t$$

对 $\forall\beta\in R$，对 $e^{-\beta t}||^2$ 在 $[0,T]$ 上利用 ito 公式得

$$\begin{aligned}&e^{-\beta T}\left|\bar{\Phi}_T\right|^2+\beta\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt\\&=2\int_0^T e^{-\beta t}\left\langle\bar{\Phi}_t,\bar{f}_t\right\rangle dt+2\int_0^T e^{-\beta t}\left\langle\bar{\Phi}_t,\bar{g}_t dB_t\right\rangle+\int_0^T e^{-\beta t}\operatorname{Tr}\left[\bar{g}_t\bar{g}_t^*\right]dt\end{aligned} \tag{4}$$

对上式两边取期望

$$\beta E\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt 2E\int_0^T e^{-\beta t}\left\langle\bar{\Phi}_t,\bar{f}_t\right\rangle dt+E\int_0^T e^{-\beta t}\operatorname{Tr}\left[\bar{g}_t\bar{g}_t^*\right]dt$$

然后利用 (2)

$$\beta E\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt E\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Psi}_t\right|^2 dt + K^2 E\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{U}_t\right|^2 dt + K^2 E\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{U}_t\right|^2 dt$$

当 $\beta = 1+4K^2$ 时，便有

$$E\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt\frac{1}{2}E\int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{U}_t\right|^2 dt$$

这样即证 Φ 为严格的压缩映射

2 ito-Talor 展开

2.1 引入多重积分

考虑一维 sde

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a\left(X_s\right) ds + \int_{t_0}^t b\left(X_s\right) dW \tag{5}$$

这里 $t\in[t_0,T]$a，b 足够光滑且满足有界线性增长，则对任意二阶连续可微函数由 ito 公式可得

$$\begin{aligned} f\left(X_t\right) =& f\left(X_{t_0}\right) \\ &+ \int_{t_0}^t \left(a\left(X_s\right)\frac{\partial}{\partial x}f\left(X_s\right) + \frac{1}{2}b^2\left(X_s\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\left(X_s\right)\right) ds \\ &+ \int_{t_0}^t b\left(X_s\right)\frac{\partial}{\partial x}f\left(X_s\right) dW_s \\ =& f\left(X_{t_0}\right) + \int_{t_0}^t L^0 f\left(X_s\right) ds + \int_{t_0}^t L^1 f\left(X_s\right) dW_s \end{aligned} \tag{6}$$

这里 L^0 和 L^1 分别表示

$$L^0 = a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$L^1 = b\frac{\partial}{\partial x} \tag{8}$$

下面令 $f=X_t$，且对 a 和 b 继续使用 ito 公式可得

$$\begin{aligned}X_t=&X_{t_0}\\&+\int_{t_0}^{t}\left(a\left(X_{t_0}\right)+\int_{t_0}^{s}L^0a\left(X_z\right)dz+\int_{t_0}^{s}L^1a\left(X_z\right)dW_z\right)ds\\&+\int_{t_0}^{t}\left(b\left(X_{t_0}\right)+\int_{t_0}^{s}L^0b\left(X_z\right)dz+\int_{t_0}^{s}L^1b\left(X_z\right)dW_z\right)dW\\=&X_{t_0}+a\left(X_{t_0}\right)\int_{t_0}^{t}ds+b\left(X_{t_0}\right)\int_{t_0}^{t}dW_s+R\end{aligned}\tag{9}$$

这里 R 表示

$$\begin{aligned}R=&\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}L^0a\left(X_z\right)dzds+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}L^1a\left(X_z\right)dW_zds\\&+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}L^0b\left(X_z\right)dzdW_s+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}L^1b\left(X_z\right)dW_zdW_s\end{aligned}$$

也可以对 L^0a,L^1a,L^0b,L^1b 继续使用 ito 公式,这就是最简单的 $Ito-Taylor$ 展开。从上可知我们需要处理一个多重积分。

3 多重积分

3.1 Multi-indices

称行向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(j_1,j_2,\ldots,j_l)$$

其中

$$j_i\in\{0,1,\ldots,m\}$$

为 multi-indices，m 表示 Brown 运动的 m 个分量 j_i 用于表示积分顺序 L^{j_i} 算子的作用顺序。v 表示长度为 0 的 multi-indices。

3.2 积分定义

以下 f 均为右连续适应的随机过程。令 $\mathcal{H}_v$ 表示满足如下性质的 f 全体

$$|f(t,\omega)|<\infty,w.p.1,t\geq 0$$

类似的 $\mathcal{H}_0$ 表示满足如下性质的 f 全体

$$\int_0^t |f(s,\omega)|ds < \infty, w.p.1, t \geq 0$$

$\mathcal{H}_1$ 表示满足如下性质的函数全体

$$\int_0^t |f(s,\omega)|^2 ds < \infty, w.p.1, t \geq 0$$

对于 $j \geq 2, \mathcal{H}_j = \mathcal{H}_1$，接下来定义 $\mathcal{H}_\alpha$。
设 ρ 和 τ 是两个满足 $0 \leq \rho(\omega) \leq \tau(\omega) \leq T\ a.s.$ 的停时。则对于 $\boldsymbol{\alpha} = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$ 递归定义多重积分

$$I_\alpha[f(\cdot)]_{\rho,\tau} := \begin{cases} f(\tau) & : \quad l = 0 \\ \int_\rho^\tau I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho,s} ds & : \quad l \geq 1 \text{ and } j_l = 0 \\ \int_\rho^\tau I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho,s} dW_s^{j_l} & : l \geq 1 \text{ and } j_l \geq 1 \end{cases} \tag{10}$$

$\mathcal{H}_\alpha$ 的元素应满足 $I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho,} \in \mathcal{H}_{(j_l)}$

3.3 多重积分之间的关系

记号：令 $I_{\alpha,t} = I_\alpha[1]_{0,t}, W_t^0 = t, I_A$ 表示示性函数。
令 $j_1, \ldots, j_l \in \{0, 1, \ldots, m\}$，$\alpha = (j_1, \ldots, j_l) \in \mathcal{M}, l = 1, 2, 3, \ldots$ 则

$$\begin{aligned} W_t^j I_{\alpha,t} = & \sum_{i=0}^{l} I_{(j_1,\ldots,j_i,j,j_{i+1},\ldots,j_l),t} \\ & + \sum_{i=1}^{l} I_{\{j_i = j \neq 0\}} I_{(j_1,\ldots,j_{i-1},0,j_{i+1},\ldots,j_l),t} \end{aligned} \tag{11}$$

证明：对 $I_{(j),t} I_{\alpha,t}$ 应用 ito 公式：

$$\begin{aligned} W_t^j I_{\alpha,t} = & I_{(j),t} I_{\alpha,t} \\ = & \int_0^t I_{\alpha,s} dI_{(j),s} + \int_0^t I_{(j),s} I_{\alpha-,s} dW_s^{j_l} \\ & + I_{\{j_i = j \neq 0\}} \int_0^t I_{\alpha-,s} ds \end{aligned} \tag{12}$$

当 $l = 1$ 时命题得证，对于 $l > 1$ 继续对 $I_{(j),s} I_{\alpha-,s}$ 使用如上的展开。反复进行上述操作即可证明上述命题。

设 $\alpha = (j_1, \ldots, j_l)$,$j_1 = ... = j_l = j \in 0, ..., m$,$l2$ 则

$$I_{\alpha,t} = \begin{cases} \frac{1}{l!} t^l & : \quad j = 0 \\ \frac{1}{l}\left(W_i^j I_{\alpha-,t} - t I_{(\alpha-)-,t}\right) : & j \geq 1 \end{cases} \tag{13}$$

证明 $j = 0$ 的情况就是普通的重积分，对于 $j \in 1, ...m$

$$t I_{(\alpha-)-,t} = \sum_{i=0}^{l-2} I_{(j_1,\ldots,j_i,0,j_{i+1},\ldots,j_{l-2}),t} \tag{14}$$

$$W_t^j I_{\alpha-,t} = l I_{\alpha,t} + \sum_{i=1}^{l-1} I_{(j_1,\ldots,j_{i-1},0,j_{i+1},\ldots,j_{l-1}),t} \tag{15}$$

移项得证上述公式。