

1 sde 解的存在唯一性

给定 T 令 $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ 是可测函数满足

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathbf{R}^n, t \in [0, T] \quad (2)$$

令 Z 是与 $\mathcal{F}_{+\infty}$ 独立的随机变量, 这里 $\mathcal{F}_{+\infty}$ 是由 $B_s(\cdot), s \geq 0$, 且 Z 满足 $E[|Z|^2] < \infty$ 则随机微分方程

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, 0 \leq t \leq T, X_0 = Z \quad (3)$$

存在唯一连续解 $X_t(\omega)$ 满足以下性质:

$X_t(\omega)$ 关于 \mathcal{F}_t^Z 是适应的而且

$$E \left[\int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty \quad (4)$$

1.1 唯一性

这里的唯一性是指满足上述条件的连续解是唯一的, 接下来用到 *ito* 等距公式, $C-S$ 不等式证明唯一性, 不妨设 $X_t(\omega)$ 是方程关于 Z 的解, $\hat{X}_t(\omega)$ 是方程关于 \hat{Z} 的解令 $a(s, \omega) = b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s)$ $\gamma(s, \omega) = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)$ 则

$$\begin{aligned} \left[|X_t - \hat{X}_t|^2 \right] &= E \left[\left(Z - \hat{Z} + \int_0^t a ds + \int_0^t \gamma dB_s \right)^2 \right] \\ &\leq 3E \left[|Z - \hat{Z}|^2 \right] + 3E \left[\left(\int_0^t a ds \right)^2 \right] + 3E \left[\left(\int_0^t \gamma dB_s \right)^2 \right] \\ &\leq 3E \left[|Z - \hat{Z}|^2 \right] + 3tE \left[\int_0^t a^2 ds \right] + 3E \left[\int_0^t \gamma^2 ds \right] \\ &\leq 3E \left[|Z - \hat{Z}|^2 \right] + 3(1+t)D^2 \int_0^t E \left[|X_s - \hat{X}_s|^2 \right] ds \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$v(t) = E \left[|X_t - \hat{X}_t|^2 \right]; \quad 0 \leq t \leq T$$

则上式满足

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) ds, F = 3E \left[|Z - \hat{Z}|^2 \right], A = 3(1+T)D^2$$

(6)

根据 Gronwall 不等式得 $v(t) \leq \exp(At)$ 现在假设 $Z = \hat{Z}$ 则 $F=0$ 所以 $v(t) = 0$ 所以

$$P \left[\left| X_t - \hat{X}_t \right| = 0 \quad \text{for all } t \in \mathbf{Q} \cap [0, T] \right] = 1$$

由 $|X_t - \hat{X}|$ 的连续性知, sde 的解是唯一的

1.2 存在性

利用不动点定理证明设 $\Phi : (M^2)^d \rightarrow (M^2)^d$

$$\forall U \in (M^2)^d, \Phi(U)_t = X + \int_0^t f(s, U_s) ds + \int_0^t g(s, U_s) dB_s$$

由 (1)(2) 知 $\Phi(U) \in (M^2)^d$, 定义范数 $\|U\|_\beta = \left(E \int_0^T e^{-\beta t} |X_t|^2 dt \right)^{1/2}$ 显然它与 $(M^2)^d$ 的原范数等价下证存在 β 使得 Φ 为严格压缩映射, 设 $U, U' \in (M^2)^d$ 记

$$\bar{U} = U - U', \bar{f}_t = f(t, U_t) - f(t, U'_t), \bar{g}_t = g(t, U_t) - g(t, U'_t), \bar{\Phi}_t = \Phi(U)_t - \Phi(U')_t$$

对 $\forall \beta \in R$, 对 $e^{-\beta t} |\bar{\Phi}_T|^2$ 在 $[0, T]$ 上利用 ito 公式得

$$\begin{aligned} & e^{-\beta T} |\bar{\Phi}_T|^2 + \beta \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{\Phi}_t|^2 dt \\ &= 2 \int_0^T e^{-\beta t} \langle \bar{\Phi}_t, \bar{f}_t \rangle dt + 2 \int_0^T e^{-\beta t} \langle \bar{\Phi}_t, \bar{g}_t dB_t \rangle + \int_0^T e^{-\beta t} Tr [\bar{g}_t \bar{g}_t^*] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta E \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{\Phi}_t|^2 dt + 2 E \int_0^T e^{-\beta t} \langle \bar{\Phi}_t, \bar{f}_t \rangle dt + E \int_0^T e^{-\beta t} Tr [\bar{g}_t \bar{g}_t^*] dt \quad (2) \beta E \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{\Phi}_t|^2 dt + E \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{\Psi}_t|^2 dt - \\ & K^2 E \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{U}_t|^2 dt + K^2 E \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{U}_t|^2 dt \quad \beta = 1 + 4K^2 \text{ 时, 便有} \end{aligned}$$

$$E \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{\Phi}_t|^2 dt \leq \frac{1}{2} E \int_0^T e^{-\beta t} |\bar{U}_t|^2 dt$$

这样即证 Φ 为严格的压缩映射