1 sde 解的存在唯一性

给定 T 令 $b(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\sigma(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$ 是可测函数满足

$$|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leq C(1+|x|);\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad t\in[0,T] \tag{1}$$

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq D|x-y|;\quad x,y\in\mathbf{R}^n,t\in[0,T] \tag{2}$$

令 Z 是与 $\mathcal{F}_{+\infty}$ 独立的随机变量，这里 $\mathcal{F}_{+\infty}$ 是由 $B_s(\cdot),s\geq 0$，且 Z 满足 $E[|Z|^2]<\infty$ 则随机微分方程

$$dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t,0\leq t\leq T,X_0=Z \tag{3}$$

存在唯一连续解 $X_t(\omega)$ 满足以下性质：
$X_t(\omega)$ 关于 $\mathcal{F}_t^Z$ 是适应的而且

$$E\left[\int_0^T|X_t|^2\,dt\right]<\infty \tag{4}$$

1.1 唯一性

这里的唯一性是指满足上述条件的连续解是唯一的，接下来用到 ito 等距公式，$C-S$ 不等式证明唯一性，不妨设 $X_t(\omega)$ 是方程关于 Z 的解，$\widehat{X}_t(\omega)$ 是方程关于 $\widehat{Z}$ 的解令 $a(s,\omega)=b\left(s,X_s\right)-b\left(s,\hat{X}_s\right)$ $\gamma(s,\omega)=\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,\widehat{X}_s\right)$ 则

$$\begin{aligned}E\left[\left|X_t-\widehat{X}_t\right|^2\right]&=E\left[\left(Z-\widehat{Z}+\int_0^t a ds+\int_0^t\gamma dB_s\right)^2\right]\\&\leq 3E\left[|Z-\widehat{Z}|^2\right]+3E\left[\left(\int_0^t a ds\right)^2\right]+3E\left[\left(\int_0^t\gamma dB_s\right)^2\right]\\&\leq 3E\left[|Z-\widehat{Z}|^2\right]+3tE\left[\int_0^t a^2ds\right]+3E\left[\int_0^t\gamma^2ds\right]\\&\leq 3E\left[|Z-\widehat{Z}|^2\right]+3(1+t)D^2\int_0^t E\left[\left|X_s-\hat{X}_s\right|^2\right]ds\end{aligned} \tag{5}$$

令

$$v(t)=E\left[\left|X_t-\hat{X}_t\right|^2\right];\quad 0\leq t\leq T$$

则上式满足

$$v(t)\leq F+A\int_0^t v(s)dsF=3E\left[|Z-\widehat{Z}|^2\right],A=3(1+T)D^2 \tag{6}$$

根据 Gronwall 不等式得 $v(t) \leq exp(At)$ 现在假设 $Z = \widehat{Z}$ 则 F=0 所以 $v(t) = 0$ 所以

$$P\left[\left|X_t - \hat{X}_t\right| = 0 \quad forall t \in \mathbf{Q} \cap [0,T]\right] = 1$$

由 $|X_t - \widehat{X}|$ 的连续性知，sde 的解是唯一的

1.2 存在性

利用不动点定理证明设 $\Phi : (M^2)^d \to (M^2)^d$

$$\forall U \in (M^2)^d, \Phi(U)_t = X + \int_0^t f(s, U_s) ds + \int_0^t g(s, U_s) dB_s$$

由 (1)(2) 知 $\Phi(U) \in (M^2)^d$，定义范数 $\|U\|_\beta = \left(E \int_0^T e^{-\beta t} \left|X_t\right|^2 dt\right)^{1/2}$ 显然它与 $(M^2)^d$ 的原范数等价下证存在 β 使得 Φ 为严格压缩映射，设 $U, U' \in (M^2)^d$ 记

$\bar{U} = U - U', \bar{f}_t = f\left(t, U_t\right) - f\left(t, U_t'\right), \bar{g}_t = g\left(t, U_t\right) - g\left(t, U_t'\right), \bar{\Phi}_t = \Phi(U)_t - \Phi\left(U'\right)_t$

对 $\forall \beta \in R$，对 $e^{-\beta t} |\bar{\Phi_T}|^2$ 在 $[0, T]$ 上利用 ito 公式得

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{-\beta T}\left|\bar{\Phi}_T\right|^2 + \beta \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt \\ = & 2 \int_0^T e^{-\beta t}\left\langle\bar{\Phi}_t, \bar{f}_t\right\rangle dt + 2 \int_0^T e^{-\beta t}\left\langle\bar{\Phi}_t, \bar{g}_t dB_t\right\rangle + \int_0^T e^{-\beta t} Tr\left[\bar{g}_t \bar{g}_t^*\right] dt \end{aligned}$$

$\beta E \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt 2E \int_0^T e^{-\beta t}\left\langle\bar{\Phi}_t, \bar{f}_t\right\rangle dt + E \int_0^T e^{-\beta t} Tr\left[\bar{g}_t \bar{g}_t^*\right] dt \quad (2) \beta E \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt E \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Psi}_t\right|^2 dt-$ $K^2 E \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{U}_t\right|^2 dt + K^2 E \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{U}_t\right|^2 dt$ $\beta = 1 + 4K^2$ 时，便有

$$E \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{\Phi}_t\right|^2 dt \frac{1}{2} E \int_0^T e^{-\beta t}\left|\bar{U}_t\right|^2 dt$$

这样即证 Φ 为严格的压缩映射

2 adfaf