

# The Differential of a Function of Several Variables

Guoning Wu

March 28, 2019

## 1 偏導數與全微分

### 1.1 偏導數

**Definition 1.1.** 設  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ 。如果極限

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta x}$$

存在，那麼稱函數  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  關於  $x$  可偏導，並稱此極限為  $f(x, y)$  在點  $(x_0, y_0)$  關於  $x$  的偏導數，記為：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

如果函數  $f$  在  $D$  上的每一點關於  $x$  可偏導，則它稱為  $f$  關於  $x$  的偏導函數，記為

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$$

**Examples 1.** 設  $f(x, y) = x^4 + 2x^y + y^4$ ，求  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$ ,  $f_x(0, 1)$ ,  $f_y(0, 1)$

**Examples 2.** 設  $f(x, y, z) = \ln(x + y^2 + z^3)$ ，求  $f_x(x, y, z)$ ,  $f_y(x, y, z)$ ,  $f_z(x, y, z)$

**Examples 3.** 設

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

求  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$ .

## 1.2 方向導數

**Definition 1.2.** 設  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ 。如果極限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

存在，那麼稱函數  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  沿方向  $v(\cos \alpha, \sin \alpha)$  的方向導數，記為

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0).$$

**Remark.** 偏導數存在的充分必要條件為沿著  $x$  軸的正向和反向的方向導數存在，且為相反數。

**Examples 4.** 求函數  $f(x, y) = |x^2 - y^2|$  在  $(0, 0)$  點的方向導數。

## 1.3 全微分

**Definition 1.3.** 設  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ 。如果

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

, 則稱函數  $f$  在  $(x_0, y_0)$  點可微，稱  $A\Delta x + B\Delta y$  為  $f$  在  $(x_0, y_0)$  點處的全微分，記為

$$df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

**Examples 5.** 求函數  $z = e^{xy}$  在點  $(2, 1)$  處的全微分。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)t \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)t \sin \alpha + o(t)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \alpha \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) \end{aligned}$$

**Examples 6.** 求函數  $u = x - \cos \frac{y}{2} + \arctan \frac{z}{y}$  的全微分。

一個函數即使在某一點連續，且所有方向的方向導數存在，也不一定在該點可微。

**Examples 7.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

**Theorem 1.1.** 設函數  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  點的某鄰域上存在連續偏導數，則函數在  $(x_0, y_0)$  點可微分。

### 1.3.1 切平面與法向量

曲面  $z = f(x, y)$  在點  $(x_0, y_0)$  點的切平面和法線方程為：

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

### 1.3.2 誤差：Errors

對於一個二元函數  $z = f(x, y)$ ，如果自變量  $x, y$  的絕對誤差限為  $\delta_x, \delta_y$  即有

$$|\Delta x| \leq \delta_x, |\Delta y| \leq \delta_y$$

那麼

$$|\Delta z| \approx |dz| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y$$

從而有  $z$  的絕對誤差限為：

$$\delta_z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y$$

相對誤差限為：

$$\delta_z/z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} / z \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} / z \right| \delta_y$$

## 1.4 梯度: Gradient

**Definition 1.4.** 稱向量  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$  為函數  $z = f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  點的梯度，記為：

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

有以下基本性質

1. Suppose  $f \equiv C, \nabla f = 0$
2.  $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
3.  $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$
4.  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}, g \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f \cdot v$$

**Examples 8.** 設  $z = x^2 - xy + y^2$  求它在  $(1, 1)$  處的沿著  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  的方向導數，並指出：

1. 沿著那個方向的方向導數最大？
2. 沿著那個方向的方向導數最小？
3. 沿著那個方向的方向導數零？

## 1.5 高階偏導數

**Examples 9.** 設  $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ ，求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

**Examples 10.** 設

$$f(x) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

討論混合偏導數  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

**Theorem 1.2.** 如果函數  $z = f(x, y)$  的兩個混合偏導數連續則相等。

**Examples 11.** 設  $z = (x^2 + y^2)e^{x+y}$ ，計算  $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}$

## 1.6 高階微分

可以證明

$$d^k z = \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k z$$
$$d^k u = \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k z$$

## 1.7 向量值函數的導數

Suppose  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  is differential, and denotes the matrix

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{m \times n}$$

as the derivative of the function.

**Examples 12.** 求函數

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 + ze^y \\ y^3 + z \ln x \end{pmatrix}$$

在 $(1, 1, 1)$ 點的導數。

## 2 多元復合函數求導法則

**Theorem 2.1.** 設 $g$ 在 $(u_0, v_0)$ 點可導，即 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在 $(u_0, v_0)$ 點可偏導，記 $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$ ，如果 $f$ 在 $(x_0, y_0)$ 點可微，那麼

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$$

**Examples 13.** 設 $z = \arctan(xy), y = e^x$ 求， $\frac{dz}{dx}$

**Examples 14.** 設 $z = \frac{x^2}{y}, x = u - 2v, y = 2u + v$ 求， $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

**Examples 15.** 設  $w = f(x^2 + y^2 + z^2, xyz)$ ,  $f$  具有連續的二階偏導數，求  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}$

**Examples 16.** 已知  $u = u(x, y)$  為可微函數，試求  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$  在極坐標下的表達式。

**Examples 17.** 設向量值函數  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  的表示為  $\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \cos u \end{cases}$ ，且  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  的表示為  $\begin{cases} u = s + t \\ v = s - t \end{cases}$  求複合函數的導數。

## 2.1 一階微分的形式不變性

**Examples 18.** 設  $z = \sqrt[4]{\frac{x+y}{x-y}}$  求  $dz$

**Examples 19.** 設  $z = \ln(x+y)$  求  $d^k z$

## 3 中值定理與泰勒公式

**Definition 3.1.** 設  $D \subset \mathbb{R}^n$  是區域。若連結  $D$  中的任意兩點的線段都完全屬於  $D$ ，即對於任意兩點  $x_0, x_1 \in D$  和一切  $\lambda \in [0, 1]$ ，恆有

$$x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \in D$$

$D$  凸區域。

**Theorem 3.1.** 設二元函數  $f(x, y)$  在凸區域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上可微，則對於  $D$  內的任意兩點  $(x_0, y_0)$  和  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ，至少存在一個  $\theta (0 < \theta < 1)$  使得，

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + f_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y \end{aligned}$$

**Corollary 3.2.** 如果函數  $f(x, y)$  在區域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的偏導數恆為零，那麼它在  $D$  上必是常值函數。

**Theorem 3.3.** 設函數 $f(x, y)$ 在點 $(x_0, y_0)$ 的鄰域 $U = O((x_0, y_0), r)$ 具有 $n + 1$ 階連續的偏導數，那麼對於 $U$ 內的每一點 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 有

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) \\ & + \cdots + \frac{1}{n!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_n. \end{aligned}$$

其中，

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), (0 < \theta < 1)$$

**Examples 20.** 求 $f(x, y) = x^y$ 在點 $(1, 4)$ 的泰勒公式(到二階為止)，並用它計算 $(1.08)^{3.96}$

### 3.1 極值問題

**Theorem 3.4.** 若函數 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 點存在偏導數，且在 $P_0$ 點取得極值，則有

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

黑賽Hesse矩陣

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} \quad (1)$$

**Theorem 3.5.** 設二元函數 $f(x, y)$ 在點 $P_0(x_0, y_0)$ 的某鄰域內 $U(P_0)$ 上具有二階連續的偏導數，且 $P_0$ 點是 $f$ 的穩定點。則當 $H_f(P_0)$ 是正定矩陣時， $f(x, y)$ 在點 $P_0$ 取得極小值；當 $H_f(P_0)$ 是負定矩陣時， $f(x, y)$ 在點 $P_0$ 取得極大值；則當 $H_f(P_0)$ 是不定矩陣時， $f(x, y)$ 在點 $P_0$ 不取極值。

**Examples 21.** 求 $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$ 的極值。

**Examples 22.** 討論 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 在原點是否取得極值。

**Examples 23.** 設通過觀測點或者實驗得到點集合 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。它們大體在一條直線上，採用最小二乘原理求直線合。

## 4 隱函數

### 4.1 單個方程

**Theorem 4.1.** 若函數 $F(x, y)$ 滿足以下條件：

1.  $F$ 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 為內點的某一區域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上連續；
2.  $F(x_0, y_0) = 0$ ；
3.  $F$ 在 $D$ 內具有連續的偏導數 $F_x(x, y), F_y(x, y)$ ；
4.  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

則

1. 存在 $P_0$ 的某一鄰域 $U(P_0) \subset D$ ，在 $U(P_0)$ 上方程 $F(x, y) = 0$ 唯一決定了定義在某區間 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上的隱函數 $y = f(x)$ ，使得當 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 時， $(x, f(x)) \in U(P_0)$ ，且 $F(x, f(x)) \equiv 0, f(x_0) = y_0$ ；
2.  $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上連續；
3.  $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上可導，且有：

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

**Theorem 4.2.** 若函數 $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ 滿足以下條件：

1.  $F$ 在以 $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0)$ 為內點的某一區域 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上連續；
2.  $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) = 0$ ；
3.  $F$ 在 $D$ 內具有連續的偏導數；
4.  $F_y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) \neq 0$ .

則

1. 存在 $P_0$ 的某一鄰域 $U(P_0) \subset D$ ，在 $U(P_0)$ 上方程 $F(x, y) = 0$ 唯一決定了定義在某區間 $U(P_0, \delta)$ 上的隱函數 $y = f(x)$ ，使得當 $x \in U(P_0, \delta)$ 時， $(x, f(x)) \in U(P_0)$ ，且 $F(x, f(x)) \equiv 0, f(x_0) = y_0$ ；
2.  $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上連續；



3.  $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上可導，且有：

$$f_{x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}, i = 1, 2, \dots, n$$

**Examples 24.** 設方程

$$F(x, y) = y - x - \frac{1}{2} \sin y = 0$$

求函數在 $(0, 0)$ 點附近的導數。

**Examples 25.** 討論笛卡兒葉形線

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

所確定的隱函數 $y = f(x)$ 的一階，二階導數。

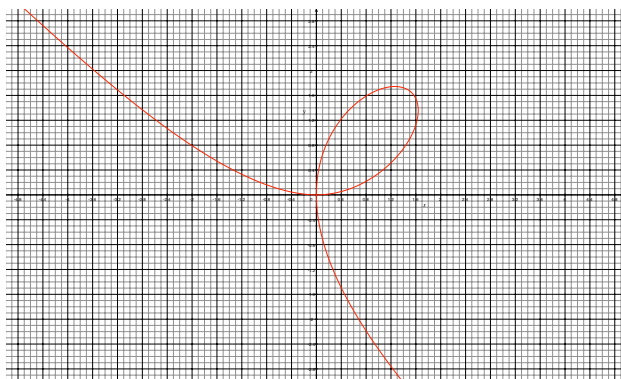


Figure 1: Descartes.

**Examples 26.** 求有方程

$$F(x, y, z) = xyz^3 + x^2 + y^2 - z = 0$$

在原點的附近所確定的二元函數 $z = f(x, y)$ 的偏導數及其在 $(0, 1, 1)$ 處的全微分。

## 4.2 隱式方程組

**Theorem 4.3.** 若

1.  $F(x, y, u, v)$ 與 $G(x, y, u, v)$ 在點以 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 為內點的區域 $V \subset \mathbb{R}^4$ 上連續；

$$2. F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0;$$

3. 在 $V$ 上 $F, G$ 具有連續的偏導數；

$$4. J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} \neq 0$$

則

1. 在 $P_0$ 的某一鄰域內確定了隱函數 $u = f(x, y), v = g(x, y)$ , 滿足

$$F(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0$$

$$G(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0$$

;

2.  $f(x, y), g(x, y)$ 具有連續的偏導數；

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \end{aligned}$$

**Examples 27.**

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0 \\ G(x, y, u, v) = -u + v - xy + 1 = 0 \end{cases}$$

在點 $P_0(2, 1, 1, 2)$ 附近確定了怎樣的隱函數，並求其導數。

**Examples 28.** 設 $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，其表示為

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

如果 $f$ 在 $D$ 上可導，求其逆影射的導數。驗證：

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

## 5 作業

1. 求下列函數的偏導數

(a)  $z = x^2y$

(b)  $z = y \cos x$

(c)  $z = \ln(x + y^2)$

(d)  $z = \arctan \frac{y}{x}$

(e)  $z = (xy)^z$

(f)  $z = x^{y^z}$

2. 設

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

考察函數在 $(0, 0)$ 點的偏導數。

3. 證明函數 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 點連續但偏導數不存在。

4. 考察函數

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 點的可微性。

5. 證明函數

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 點的連續，偏導數存在，但在該點不可微。

6. 驗證函數

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 點連續且可偏導，但在該點不可微。

7. 驗證函數

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

的偏導函數  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  在  $(0, 0)$  點不連續，但在該點可微。

8. 驗證函數

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在  $(0, 0)$  點沿著各個方向的方向導數存在，但它在該點不連續，故在該點不可微。

9. 計算下列函數的梯度

(a)  $z = x^2 + y^2 \sin(xy)$

(b)  $u = x^2 + 2y^2 + 3xy + 4yz + 6x - 2y - 5z$  在點  $(1, 1, 1)$

10. 計算下列函數的高階導數

(a)  $z = \arctan \frac{y}{x}$ ，求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

(b)  $z = xe^{xy}$ ，求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

(c)  $u = xyz e^{x+y+z}$ ，求  $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$

11. 計算下列函數的高階微分

(a)  $z = x \ln(xy)$ ，求  $d^2 z$

(b)  $z = \sin^2(ax + by)$ ，求  $d^3 z$

12. 利用鏈式法則求下列函數的極限

(a)  $z = u^2 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

(b)  $z = x^2 + y^2 + \cos(x + y), x = u + v, y = \arcsin v$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$

(c)  $u = f(xy, \frac{x}{y})$ ，求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

13.  $z = f(x, y)$  具有連續的二階偏導數，出  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  在座標變換

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

下的表達式。

14. 設向量值函數  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  的座標分量函數為：

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$$

向量值函數  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  的座標分量表示為：

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

求複合函數  $f \circ g$  的導數。

15. 設  $u = f(x, y)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ，證明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

16. 求函數  $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$  在點  $(1, -2)$  的泰勒公式

17. 求下列函數的極值點

(a)  $z = 3axy - x^3 - y^3 (a > 0)$

(b)  $z = x^2 - xy - 2x + y (a > 0)$

18. 求下列方程所確定的隱函數的導數或偏導數

(a)  $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ ，求  $\frac{dy}{dx}$

(b)  $x^y = y^x$ ，求  $\frac{dy}{dx}$

(c)  $e^z - xyz = 0$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

(d)  $f(x, x+y, x+y+z) = 0$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

19. 求下列方程組所確定的隱函數的導數或偏導數

(a)  $\begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4a^2 \end{cases}$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dx}$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2 z}{dx^2}$

$$(b) \begin{cases} xu + yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}, \text{求} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(c) \begin{cases} u = f(ux, v + y) \\ v = g(u - x, v^2 y) \end{cases}, \text{求} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$$

20. 通過變量替換  $\begin{cases} x = e^\xi \\ y = e^\eta \end{cases}$  變換方程

$$ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. (a, b, c \in \mathbb{R})$$