

# 作業

武國寧

## 1 解答題

按照定義證明下列函數在其定義域上連續：

1.  $f(x) = \frac{1}{x}$

2.  $f(x) = |x|$

## 2 解答題

指出下列函數的間斷點並說明其類型：

1.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2.  $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

3.  $f(x) = \lfloor |\cos x| \rfloor$

4.  $f(x) = \operatorname{sgn}|x|$

5.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$

6.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

## 3 解答題

延拓下列函數，使其在 $\mathbb{R}$ 上連續：

1.  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

$$2. f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$3. f(x) = x \cos \frac{1}{x}$$

## 4 證明題

設  $f, g$  在區間  $I$  上連續，記

$$F(x) = \max \{f(x), g(x)\}, G(x) = \min \{f(x), g(x)\}.$$

證明  $F, G$  在區間  $I$  上連續。

## 5 證明題

設  $f$  為  $\mathbb{R}$  上的連續函數，常數  $c > 0$ ，記

$$F(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c \\ f(x), & |f(x)| \leq c \\ c, & f(x) > c \end{cases}$$

證明  $F(x)$  在  $\mathbb{R}$  上連續。

## 6 證明題

若對於任何充分小的  $\epsilon > 0$ ， $f$  在  $[a + \epsilon, b - \epsilon]$  上連續，能否推出  $f$  在  $(a, b)$  內連續？

## 7 解答題

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\pi - x) \tan x;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{1+2x} - \sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

## 8 證明題

證明：任何一個實係數奇次方程至少有一個實根。

## 9 證明題

試用一致連續的定義證明：若 $f, g$ 在區間 $I$ 上一致連續，則 $f + g$ 也在 $I$ 上一致連續。

## 10 證明題

證明： $f(x) = x^2$ 在 $[a, b]$ 上一致連續，但在 $\mathbb{R}$ 上不一致連續。