

函数列与函数项级数

武国宁

1 一致收敛

1.1 函数列及其一致收敛性

很早人们就曾经把某些微分方程解形式的表示成一个函数项级数，例如在应用上很常见的贝塞尔方程的解

$$x^p - \frac{x^{2+p}}{2(2p+2)} + \frac{x^{4+p}}{2 \cdot 4(2p+2)(2p-4)} - \cdots \quad (1)$$

是这样的。它的通项为：

$$u_n(x) = \frac{x^{2(n-1)+p}}{2 \cdot 4 \cdots 2(n-1)(2p+2)(2p+4) \cdots [2p+2(n-1)]}$$

显然对于任意的实数 x 有，

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{x^2}{2n(2p+2n)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

假设该级数的和函数为 $S(x)$ ，现在我们来分析一下 $S(x)$ 的连续性问题。

$$\begin{aligned} & |S(x) - S(x_0)| \\ &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)| \\ &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| \end{aligned} \quad (2)$$

要想 $S(x)$ 在 x_0 点连续，我们自然对函数级数的收敛性加上这个条件：对于任意 $\epsilon > 0$ ，总可以找到一个自然数 N ，当 $n > N$ 时，有

$$S_n(x) - S(x) < \epsilon$$

对于所有的 $x \in [a, b]$ 成立。

设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \quad (3)$$

是一列定义在同一数集 E 上的函数，称为定义在 E 上的函数列，记为：

$$\{f_n\}$$

设 $x_0 \in E$ ，得到数列：

$$\{f(x_0)\} \quad (4)$$

收敛，则称数列(3)在 x_0 点收敛， x_0 称为数列(3)的收敛点。若数列(4)发散，则称函数列(3)在 x_0 点发散。若数列(3)在 $D \subset E$ 上的每一点都收敛，则称(3)在数集 D 上收敛。这是对于 $\forall x \in D$ ，都有数列 $\{f_n(x)\}$ 的一个极限值与之对应，由这个对应法则所确定的 D 上的函数，成为函数列(3)的极限函数。若把此极限函数记作 $f(x)$ ，则有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in D$$

注 1. 函数极限的 $\epsilon - N$ 定义是：对于每一个 $x \in D$ ， $\forall x \in D, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ 。

注 2. 使得函数 $\{f_n(x)\}$ 收敛的全体收敛点的集合，成为函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛域。

例子 1. 讨论函数列 $\{f_n(x) = x^n\}$ 的收敛域与极限函数。

例子 2. 讨论函数列 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ 的收敛域与极限函数。

定义 1. 设函数列 $f_n(x)$ 与函数 $f(x)$ 定义在同一数集 D 上，若对于任给的正数 $\epsilon > 0$ ，总存在某一个正整数 $N > 0$ ，使得当 $n > N$ 时，对于一切 $x \in D$ ，都有：

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上**一致收敛**于 $f(x)$ ，记作：

$$f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in D$$

注 3. 1. 处处收敛与一致收敛的区别。整体可能步调不一致。

2. 一致收敛的几何意义。

定理 1. 函数列一致收敛的柯西准则 函数列 $f_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充分必要条件为：对于任给的 $\epsilon > 0$ ，总存在正整数 $N > 0$ ，使得当 $n, m > N$ 时，对于一切 $x \in D$ 都有：

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \quad (5)$$

定理 2. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 f 的充分必要条件是：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (6)$$

推论 1. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上不一致收敛于 $f(x)$ 的充分且必要条件为： 存在 $\{x_n\} \subset D$ ，使得 $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ 不收敛于 0 。

例子 3. 讨论函数列 $\left\{f_n(x) = nxe^{-nx^2}\right\}, x \in (0, +\infty)$ 的一致敛散性。

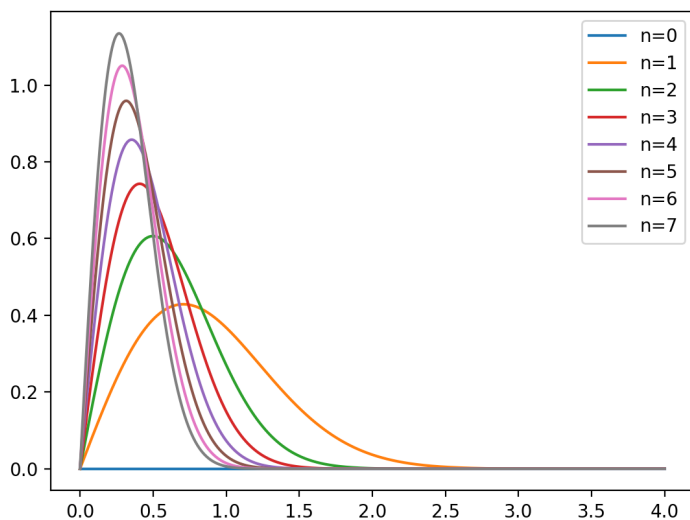


Figure 1: The functions.

定义 2. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 与 $f(x)$ 定义在区间 I 上，多对于任意闭区间 $[a, b] \subset I$ ， $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ ，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上内闭一致收敛于 f 。

1.2 函数项级数及其一致收敛性

设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 E 上的一个函数列，表达式：

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, x \in E \quad (7)$$

称为定义在 E 上的函数项级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，称

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), x \in E, n = 1, 2, \cdots, \quad (8)$$

为函数项级数(7)的部分和数列。若 $x_0 \in E$, 数项级数:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \quad (9)$$

收敛, 则称 x_0 为函数项级数(7)的收敛点。所有的收敛点形成收敛域。在收敛域上, 级数(7)对应和函数, 并写作:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = S(x), x \in D$$

例子 4. 讨论几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域。

定义 3. 设 $\{S_n(x)\}$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列。若 $\{S_n(x)\}$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在任意闭区间 $[a, b] \subset I$ 上一致收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上内闭一致收敛。

定理 3. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充分必要条件为: 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在某个正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对于一切 $x \in D$ 和一切正整数 q , 都有:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

推论 2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件为 函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零。

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上的和函数为 $S(x)$, 则称

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的余项。

定理 4. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S(x) - S_n(x)| = 0$$

例子 5. 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的一致收敛性。

1.3 函数项级数一致收敛性的判别方法

定理 5. (威尔斯特拉斯判别法) 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上, $\sum M_n$ 为收敛的正项级数, 若对于一切 $x \in D$, 有:

$$|u_n(x)| \leq M_n, n = 1, 2, \cdots, \quad (10)$$

则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

例子 6. 讨论函数项级数

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}, \sum \frac{\cos nx}{n^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 的一致收敛性。

注 4. 上述级数 $\sum M_n$ 称为函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的优级数。上述判别方法成为 **M** 判别法或优级数判别法。

下面讨论形如

$$\sum u_n(x)v_n(x) \quad (11)$$

定理 6. (阿贝尔判别法) 设

- (1) $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛;
- (2) 对于每一个 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的;
- (3) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 即存在正数 M , 对于一切 $x \in I$ 和正整数 n , 有

$$|v_n(x)| \leq M,$$

则级数(11)一致收敛。

定理 7. (狄利克雷判别法) 设

- (1) $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) (n = 1, 2, \cdots,)$$

在 I 上一致有界;

- (2) 对于每一个 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的;

(3) 在 I 上 $v_n(x) \Rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 则级数(11)一致收敛。

例子 7. 讨论函数项级数

$$\sum \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}}$$

在 $[0, 1]$ 上的一致敛散性。

例子 8. 若数列 $\{a_n\}$ 单调且收敛于零，则级数

$$\sum a_n \cos nx$$

在 $[\alpha, 2\pi - \alpha] (0 < \alpha < \pi)$ 上的一致敛散性。

1.4 作业

1.4.1 讨论下列函数列在所示区间上是否一致收敛或内闭一致收敛，说明理由

$$(1) f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, n=1, 2, \dots, D \in (-\infty, +\infty)$$

$$(2) f_n(x) = \begin{cases} -(n+1)x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1} < x < 1. \end{cases} \quad n=1, 2, \dots$$

$$(3) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, n=1, 2, \dots, D \in (-\infty, +\infty)$$

1.4.2 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性

$$(1) \sum \frac{x^n}{n+1}, x \in [-r, r]$$

$$(2) \sum \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \sum \frac{x^n}{n^2}, x \in [0, 1]$$

$$(4) \sum \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x \in (-\infty, +\infty)$$

1.4.3 证明题

证明： $f_n(x)$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f 的充分且必要条件是：对于任意 $x_0 \in I$ ，存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$ ，使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $U(x_0) \cap I$ 上一致收敛于 f 。

2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

定理 8. 设函数列 f_n 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 且对每一个 n , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 均存在且相等。

注 5. 上述定理说明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (12)$$

注 6. 类似的, 若函数 $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f_n(x)$ 存在, 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

注 7. 类似的, 若函数 $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛且 $\lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x)$ 存在, 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

定理 9. (连续性) 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致连续, 且每一项都连续, 则其极限函数 f 在 I 上连续。

例子 9. 例如函数列 $\{x^n\}$ 各项在 $(-1, 1]$ 上连续, 但是极限函数为:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

说明该函数列在 $(-1, 1]$ 上不一致收敛。

推论 3. 若连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f , 则 f 在 I 上连续。

例子 10. 例如函数列 $\{x^n\}$ 各项在 $(-1, 1)$ 上连续, 内闭一致收敛于 f , 则 f 在 I 上连续。

定理 10. (可积性) 若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则有:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (13)$$

例子 11. 讨论函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n\alpha_n x, & 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ 2\alpha_n - 2n\alpha_n x, & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

的一致收敛及其极限函数的可积性。

定理 11. (可微性) 设 $\{f_n\}$ 定义在 $[a, b]$ 上的函数列, 若 $x_0 \in [a, b]$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点, $\{f_n\}$ 的每一项在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $\{f'_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则:

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad (14)$$

Proof. 对于 $x \in [a, b]$, 总有:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

□

推论 4. 设函数列 $\{f_n\}$ 定义在区间 I 上, 若 $x_0 \in I$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点, 且 $\{f'_n(x)\}$ 在 I 上内闭一致收敛, 则 f 在 I 上可导, 且有:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

例子 12. 讨论函数列

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} \ln(1 + n^2 x^2), n = 1, 2, \dots$$

与

$$f'_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, n = 1, 2, \dots$$

导函数列 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛, 但是交换极限与导数法则成立。说明: 一致收敛是极限运算与求导运算交换的充分条件, 不是必要条件。

现在来讨论定义在区间 $[a, b]$ 上的函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (15)$$

的连续性、逐项积分与求导的性质。

定理 12. (连续性) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则和函数在 $[a, b]$ 上也连续。

这个定理指出: 在一致收敛条件下, 求和运算与极限运算可以交换顺序:

$$\sum \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum u_n(x) \right) \quad (16)$$

例子 13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但是不一致收敛。

定理 13. (逐项求积) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum u_n(x) dx.$$

定理 14. (逐项求导) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上每一项都有连续导数 $x_0 \in [a, b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点, 且 $\sum u'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则:

$$\sum u'_n(x) = \left(\sum u_n(x) \right)'$$

例子 14. 设

$$u_n(x) = \frac{1}{n^3} \ln(1 + n^2 x^2), n = 1, 2, \dots,$$

证明函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 并讨论其和函数在 $[0, 1]$ 上的连续性、可积性和可微性。

例子 15. 证明: 函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上有连续的各阶导函数。

2.1 作业

2.1.1 证明题

证明函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且有连续的导数。

2.1.2 证明题

证明函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续, 但级数在此区间上不一致收敛。