

# 作業

武國寧

## 1 解答題

設  $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $a = 0$ .

(1) 對下列  $\epsilon$  分別求出極限定義中的  $N$  :

$$\epsilon_1 = 0.1, \epsilon_2 = 0.01, \epsilon_3 = 0.001$$

(2) 對  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  , 可找到響應的  $N$  , 這是否說明  $a_n$  趨於 0 ? 應該怎樣做才對 ?

(3) 對於任意給定的  $\epsilon$  是否可以找到一個  $N$  ?

## 2 證明題

按  $\epsilon - N$  定義證明 :

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 (a > 1)$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10} = 1$$

## 3 證明題

證明 : 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  , 則對於任意的  $k$  , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$

## 4 解答題

下面那些數列是有界數列、無界數列以及無窮大量：

(1)  $\{[1 + (-1)^n] \sqrt{n}\}$

(2)  $\{\sin n\}$

(3)  $\left\{\frac{n^2}{n - \sqrt{5}}\right\}$

(4)  $\{2^{(-1)^n n}\}$

## 5 求下列極限

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 1}{4n^3 + 2n + 3}$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n}{n^2}$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$

(7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})$

(8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$

(9)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}}$

(10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

## 6 證明下列極限存在並求其值

(1) 設  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, n = 1, 2, \dots$

(2) 設  $a_1 = \sqrt{c} (c > 0), a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, n = 1, 2, \dots$

(3) 設  $a_n = \frac{c^n}{n!} (c > 0), n = 1, 2, \dots$

(4) 設  $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} (n = 1, 2, \dots)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

## 7 證明題

利用  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$  為單調遞增的結論，證明  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \right\}$  為單調遞增數列。

## 8 應用柯西收斂原理證明以下數列收斂

(1)  $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$

(2)  $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

## 9 證明題

證明：若單調數列  $\{a_n\}$  含有一個收斂子列，則  $\{a_n\}$  收斂。

## 10 證明題

證明：若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$  則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  收斂。

## 11 證明

給定  $0 < a < b$  令  $x_1 = a, y_1 = b$ 。

(1) 若  $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, \dots)$ , 證明  $\{x_n\}, \{y_n\}$  都收斂，且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

- (2) 若  $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ ,  $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 證明  $\{x_n\}, \{y_n\}$  都收斂, 且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

## 12 解答題

利用  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 求下列極限:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

## 13 按照定義證明下列極限

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5}{x} = 6$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 6x + 10 = 2$
3.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$

## 14 討論函數在 $x \rightarrow 0$ 的極限或左右極限

1.  $f(x) = \frac{|x|}{x}$
2.  $f(x) = \lfloor x \rfloor$
3.  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1 + x^2, & x < 0 \end{cases}$

## 15 求下列函數的極限

1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x - \cos x - x^2$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{a}, a > 0$
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x + 6)^{70}(8x - 5)^{20}}{(5x - 1)^{90}}$

## 16 利用夾逼原理求下列函數的極限

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \cos x}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 4}$

## 17 證明題

設  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 證明：

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = AB$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{A}{B}$

## 18 解答題

設

$$f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_0} (a_0b_0 \neq 0, m \leq n)$$

求  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

## 19 證明題

設  $f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  證明： $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}, n \geq 2$

## 20 解答題

1. 敘述函數極限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在的海涅原理（歸結原則），並利用它證明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  不存在。
2. 敘述極限  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  不存在的充分必要條件，並應用它證明極限  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$  不存在。

## 21 計算題，求下列極限

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{(\sin x)^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a}$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$$

## 22 計算題，求下列極限

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}, a \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

## 23 證明題

$$\text{證明：} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right\} = 1$$

## 24 證明下列各式

$$1. 2x - x^2 = O(x)(x \rightarrow 0)$$

$$2. x \sin \sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}})(x \rightarrow 0^+)$$

$$3. \sqrt{1+x} - 1 = o(1)(x \rightarrow 0)$$

$$4. (1+x)^n = 1 + nx + o(x)(x \rightarrow 0, n \in \mathbb{Z})$$

$$5. 2x^3 + x^2 = O(x^3)(x \rightarrow \infty)$$

$$6. o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))(x \rightarrow x_0)$$

$$7. o(g_1(x)) \cdot o(g_2(x)) = o(g_1(x)g_2(x))(x \rightarrow x_0)$$

**25** 是確定 $\alpha$ 的值，使下列函數與 $x^\alpha$ 當 $x \rightarrow 0$ 時為同階無窮小量

1.  $\sin 2x - 2 \sin x$
2.  $\frac{1}{1+x} - (1-x)$
3.  $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$
4.  $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$

**26** 是確定 $\alpha$ 的值，使下列函數與 $x^\alpha$ 當 $x \rightarrow \infty$ 時為同階無窮大量

1.  $\sqrt{x^2+x^5}$
2.  $x+x^2(2+\sin x)$
3.  $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$

**27** 求下列曲線的漸近線

1.  $y = \frac{1}{x}$
2.  $y = \tan^{-1} x$
3.  $y = \frac{3x^3+4}{x^2-2x}$

**28** 確定下列 $a$ 與 $\alpha$ ，使下列各無窮小量或無窮大量等價於 $ax^\alpha$

1.  $u(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 (x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty)$
2.  $u(x) = \frac{x^5 + 2x^2}{3x^4 - x^3} (x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty)$
3.  $u(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2} (x \rightarrow 0+, x \rightarrow +\infty)$



4.  $u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}(x \rightarrow 0+, x \rightarrow +\infty)$
5.  $u(x) = \sqrt{1 + 3x} - \sqrt[3]{1 + 2x}(x \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty)$
6.  $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x(x \rightarrow +\infty)$
7.  $u(x) = \sqrt{x^3 + x} - x^{\frac{3}{2}}(x \rightarrow 0+)$
8.  $u(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{x}} - e^{2x}(x \rightarrow 0+)$
9.  $u(x) = \ln \cos x - \tan^{-1} x^2(x \rightarrow 0)$
10.  $u(x) = \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}(x \rightarrow 0)$