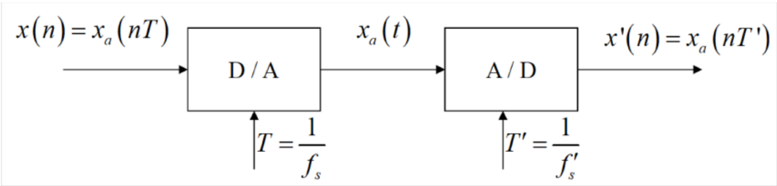
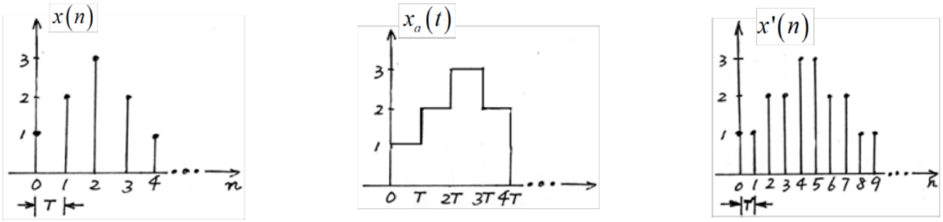
7.1 概述

模拟域方法



例：



抽样率提升2倍

优点：可以实现抽样率的任意转换

缺点：信号重构误差、量化噪声

数字域方法

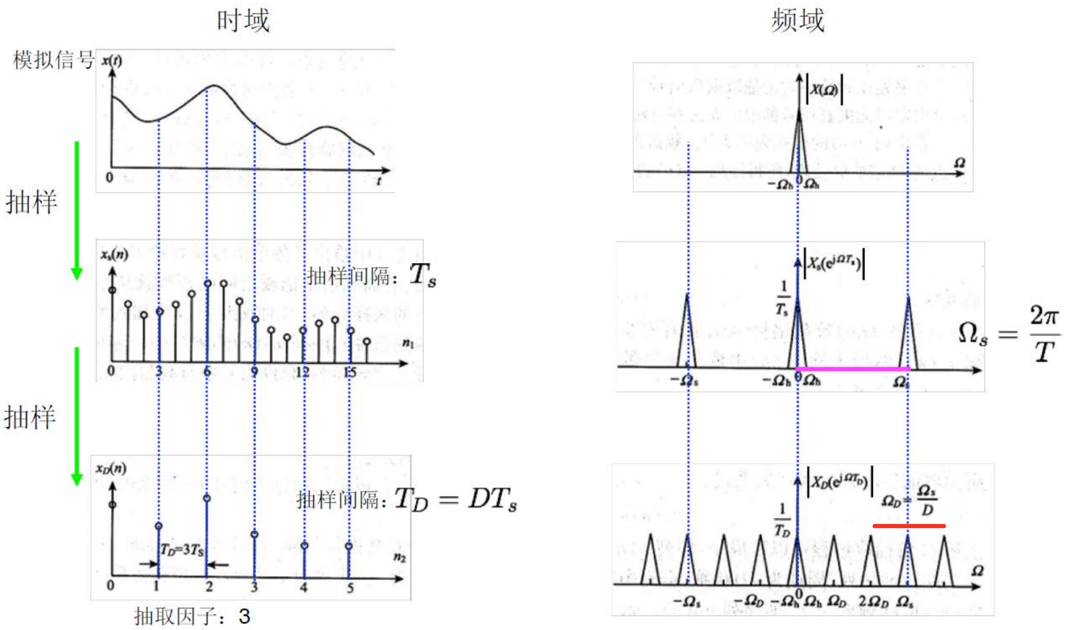
在数字域内改变信号x(n)的抽样率

抽取——抽样率由高变低

内插——抽样率由低变高

7.2 以整数因子 D 抽取

1、不同的抽样率



D 很大可能造成频域混叠

频率轴成比例地缩放

2、抽样率转换

$$x_a(nT_x) \qquad\qquad y_D(nT_y)=x_a(nDT_x)$$

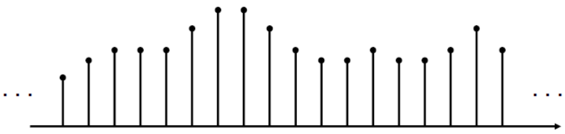
$$x(n) \longrightarrow \boxed{\downarrow D} \longrightarrow y_D(n)=x(nD)$$

抽样间隔	T_x	$T_y=DT_x$	抽样间隔增加到 D 倍
抽样频率	$\dfrac{1}{T_x}$	$\dfrac{1}{T_y}=\dfrac{1}{D\cdot T_x}$	抽样率下降到 $1/D$
数字角频率	$\omega_x=\Omega T_x=2\pi fT_x$	$\omega_y=\Omega T_y=\Omega\cdot DT_x=D\omega_x$	频率轴成比例地缩放

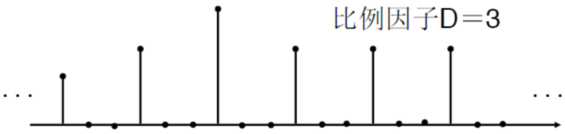
3、抽取过程和数学表达

每D 个抽样，保留第1 个，丢弃后D - 1 个。

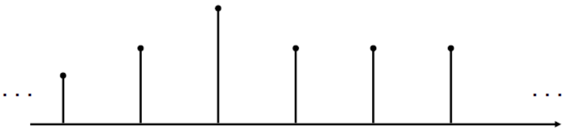
分两步进行： $x(n)$



$$x'(n)=x(n)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mD)$$



$$y_D(n)=x'(Dn)=x(Dn)$$



抽样间隔 $T_y=DT_x$

4、抽取前后的频谱

$$Y_D(e^{j\omega_y})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y_D(m)e^{-j\omega_y m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x'(Dm)e^{-j\omega_y m} \qquad y_D(m)=x'(Dm)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[x(Dm)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(Dm-kD)\right]e^{-j\omega_y m} \qquad x'(Dm)=x(Dm)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(Dm-kD)$$

$$\text{令 } l=Dm\ \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[x(l)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(l-kD)\right]e^{-j\frac{\omega_y}{D}l}$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[x(l)\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}e^{j\frac{2\pi li}{D}}\right]e^{-j\frac{\omega_y}{D}l} \qquad \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(l-kD)=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}e^{j\frac{2\pi li}{D}}}\ \text{(P14)}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)e^{-j(\frac{\omega_y-2\pi i}{D})l}\right]$$

整理，交换求和次序

$$=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X\left(e^{j\frac{\omega_y-2\pi i}{D}}\right)$$

做DTFT，公式2.41 $\boxed{X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}}$

$$=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X\left(e^{j(\omega_x-\frac{2\pi}{D}i)}\right) \qquad \omega_y=D\omega_x$$

注意有幅度减小

幅度缩放 平移量：$\dfrac{2\pi}{D}$

按整数因子D抽取之后的信号频谱是多个原频谱的平移相加

4、抽取前后的频谱

由 $Y_D(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j(\omega_x - \frac{2\pi}{D}i)})$

根据 $z_y = e^{j\omega_y}$ 和 $z_x = e^{j\omega_x}$ 可得

$$Y_D(z_y) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(z_y^{\frac{1}{D}} e^{-j\frac{2\pi}{D}i}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(z_x e^{-j\frac{2\pi}{D}i}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(z_x W_D^i)$$

$W_D = e^{-j\frac{2\pi}{D}}$ 为旋转因子 $z_y = z_x^D$

对 z_x 平面进行旋转

$Y_D(z_y)$ 由 $X(z_x)$ 旋转组合得到。

5、抽取的频域效应

$Y_D(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j(\omega_x - \frac{2\pi}{D}i)})$

频率轴 ω_x 上

重复 D 次

周期为 $\frac{2\pi}{D}$

幅度减少到 $1/D$

频率轴 ω_y 上

$\omega_y = D\omega_x$ （7.4）

频率扩展 D 倍

相邻周期间距减小，

可能混叠

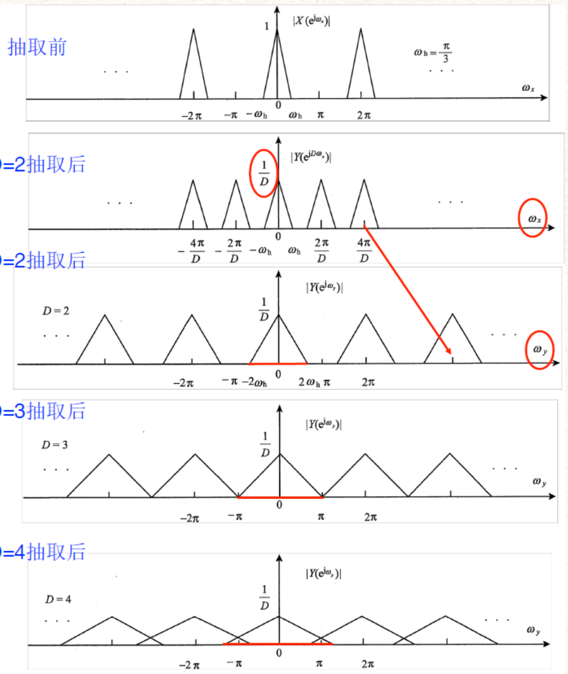
抽取前

D=2抽取后

D=2抽取后

D=3抽取后

D=4抽取后



给定信号带宽 $[-\omega_h, \omega_h]$
保证不引入混叠的
最大抽取因子 $D_{\max} = \lfloor \pi/\omega_h \rfloor$

$x(n) \rightarrow \boxed{h_D(n)} \xrightarrow{x'(n)} \boxed{\downarrow D} \rightarrow y_D(n)$

给定抽取因子D，
为抽取后不产生混叠，
原信号带宽须限制在 $[-\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{D}]$

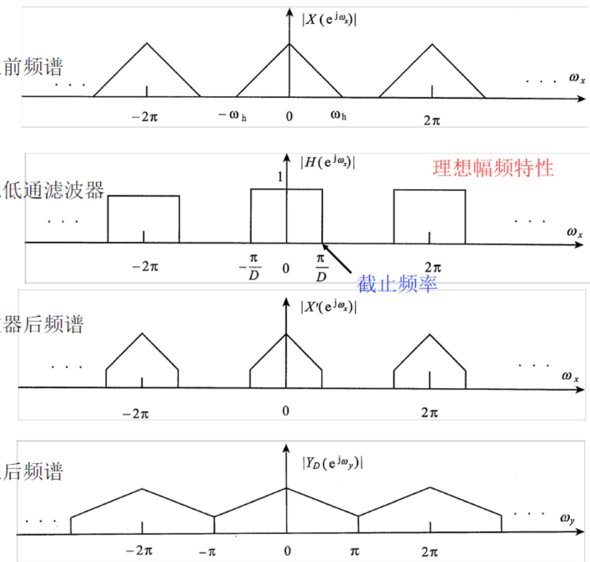
为避免产生混叠，
抽取前应先做
抗混叠滤波。

抽取前频谱

理想低通滤波器

滤波器后频谱

抽取后频谱



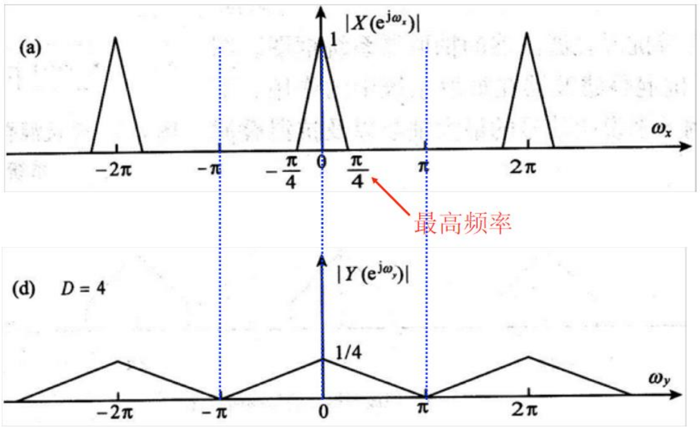
例7.1 信号x(n) 的频谱如图。

（1）求信号的最大抽取因子及抽取后信号的频谱

最大抽取因子：

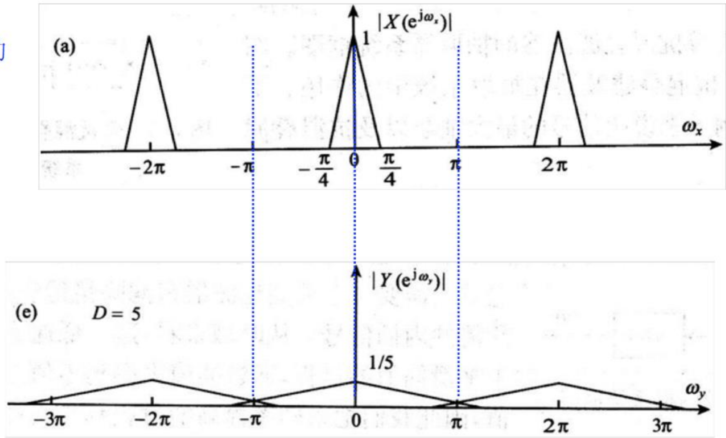
$$D_{\max}=\left\lfloor\frac{\pi}{\omega_h}\right\rfloor=4$$

用最大因子抽取后信号的频谱



例7.1 信号x(n) 的频谱如图。

（2）若对x(n) 进行D = 5 的抽取。求抽取后信号y(n)的频谱。



混叠

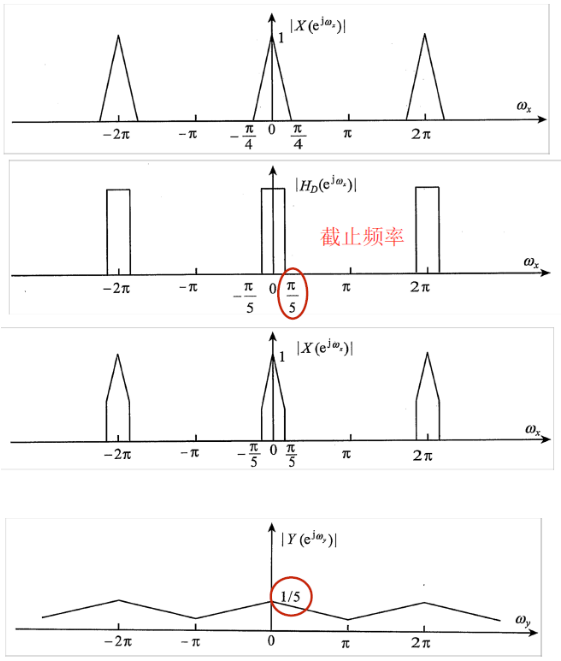
例7.1 信号x(n) 的频谱如图。

要进行D = 5 的抽取。

为使信号y(n) 无混叠，求抗混叠滤波器的截止频率。

先抗混叠滤波

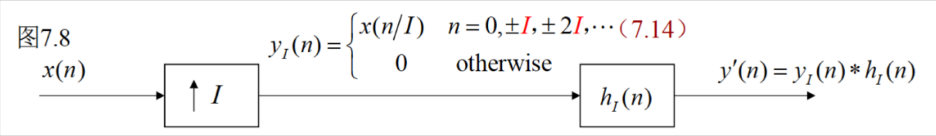
再抽取



7.3 以整数因子 I 内插

内插—— 提高抽样频率（上采样，升采样）

每个样点后插入I -1个零值点，再通过低通滤波来平滑



抽样间隔 T_x

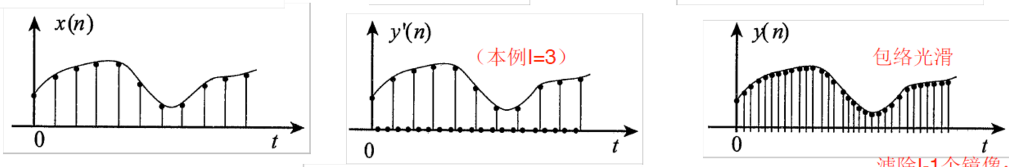
数字角频率 $\omega_x=2\pi f T_x=\Omega T_x$

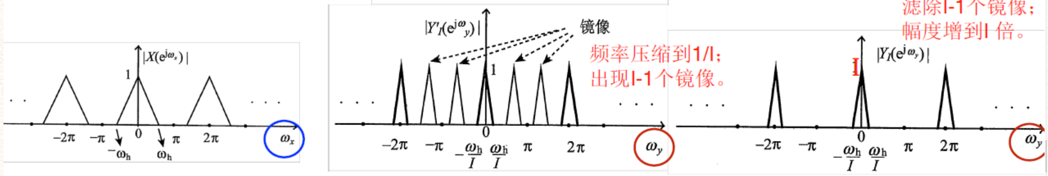
$T_y=T_x/I$

$\omega_y=2\pi f T_y=\omega_x/I$

理想滤波器响应：

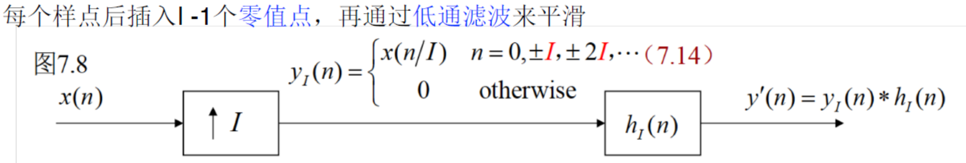
$$|H_I(e^{j\omega})|=\begin{cases}I & |\omega|\leqslant \boxed{\dfrac{\pi}{I}}\\ 0 & 其他\end{cases}$$





内插—— 提高抽样频率（上采样，升采样）

每个样点后插入I -1个零值点，再通过低通滤波来平滑



频域关系：

$$Y_I(e^{j\omega_y})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT_y)e^{-jn\omega_y}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x/I)e^{-jn\omega_y}$$

$$\underline{\underline{(m=n/I)}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_x)e^{-jmI\omega_y}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_x)e^{-jm\omega_x}=X(e^{j\omega_x})=X(e^{j\omega_y I})$$

频带压缩了I 倍，周期变为 $2\pi/I$

原主值区间上，现在有I 个谱瓣

（不同于周期延拓，不会混叠）

$\omega_x=\omega_y I$

复频域关系：

$$Y_I(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_I(n)z^{-n}=\sum_{n=mI} y_I(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=mI} x\left(\frac{n}{I}\right)z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-mI}=X(z^I)$$

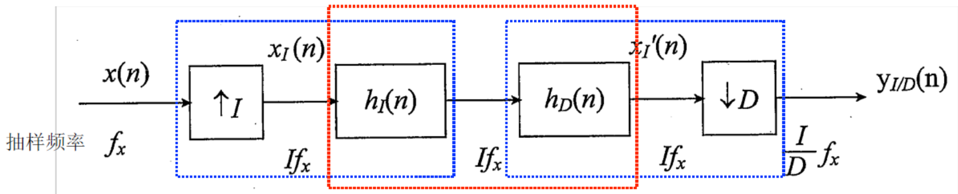
低通滤波

频域：只保留一个谱瓣

时域：包络平滑

7.4 以有理因子 I/D 转换抽样频率

实际应用中，以整数倍进行抽取或内插不一定能满足要求。



将抽样率变为I / D 倍　　　　I 和D 为互质的整数

先插值，再抽取。若先抽取，会丢失数据，产生混叠

注意：一定要先插值、滤波

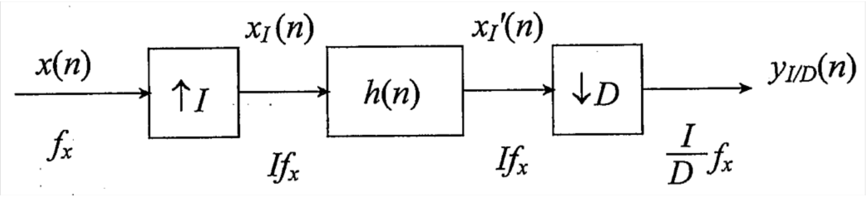
再抽取

两个低通滤波器级联，工作频率相同

合成一个低通滤波器h(n)

应逼近的理想频率响应 $|H(e^{j\omega})|=\begin{cases}I, & |\omega|\le \min\left(\dfrac{\pi}{I},\dfrac{\pi}{D}\right)\\ 0, & 其他\end{cases}$

输入输出的频域关系



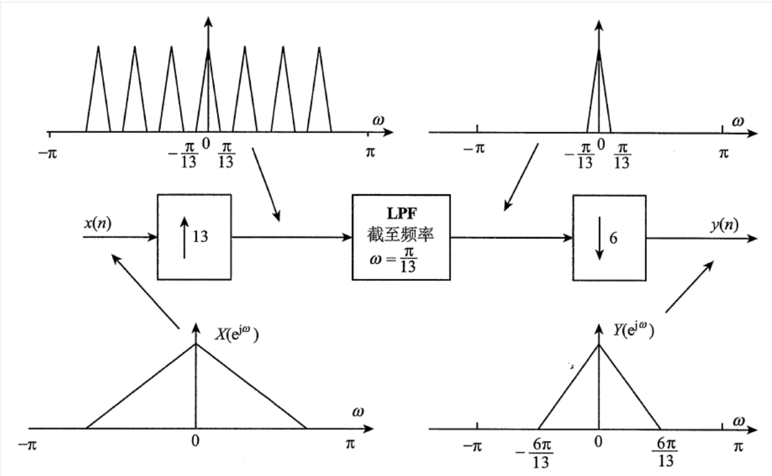
(7.11)

$$
\begin{aligned}
Y_{I/D}\left(e^{j\omega_y}\right) &= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X_I'\left(e^{j\frac{\omega_y-2\pi i}{D}}\right) \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H\left(e^{j\frac{\omega_y-2\pi i}{D}}\right) X_I\left(e^{j\frac{\omega_y-2\pi i}{D}}\right) \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H\left(e^{j\frac{\omega_y-2\pi i}{D}}\right) X\left(e^{j\frac{\omega_y I-2\pi i}{D}}\right)
\end{aligned}
$$

(7.15)

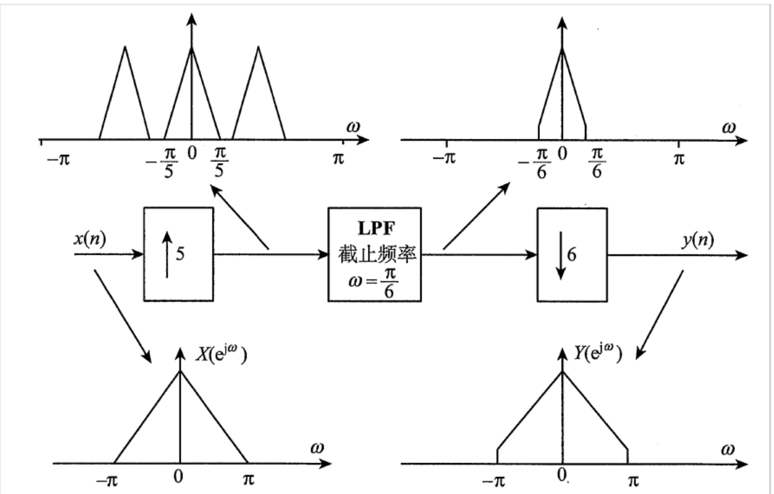
例 7.2 设信号 $x(n)$ 的抽样频率为 $f_x=12\text{kHz}$，分别按如下两种情况对其进行抽样率转换：(1)抽样频率转换为 $f_y=26\text{kHz}$；(2)抽样频率转换为 $f_y=10\text{kHz}$。

解：（1） $\frac{f_y}{f_x}=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}=\frac{I}{D}$ $\min\left(\frac{\pi}{I},\frac{\pi}{D}\right)=\frac{\pi}{I}=\frac{\pi}{13}$

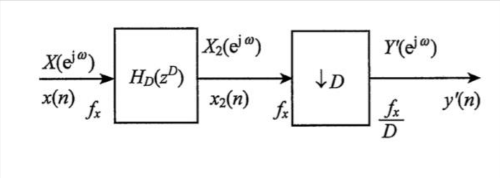


例 7.2 设信号 $x(n)$ 的抽样频率为 $f_x=12\text{kHz}$，分别按如下两种情况对其进行抽样率转换：(1)抽样频率转换为 $f_y=26\text{kHz}$；(2)抽样频率转换为 $f_y=10\text{kHz}$。

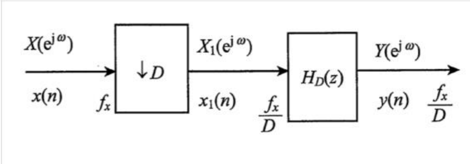
解：（2） $\frac{f_y}{f_x}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=\frac{I}{D}$ $\min\left(\frac{\pi}{I},\frac{\pi}{D}\right)=\frac{\pi}{D}=\frac{\pi}{6}$



7.5 多抽样率系统的高效实现



(a) D倍抽取器系统



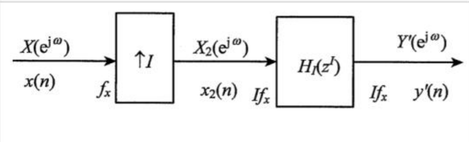
(b) D倍抽取器等效系统

$$X_2(e^{j\omega}) = H_D(e^{j\omega D})X(e^{j\omega})$$

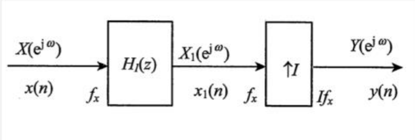
$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}})$$

$$Y(e^{j\omega}) = H_D(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned}
Y'(e^{j\omega}) &= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X_2(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H_D(e^{j(\omega-2\pi i)})X(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}}) \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H_D(e^{j\omega})X(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}}) \\
&= H_D(e^{j\omega})\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}}) \\
&= H_D(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})
\end{aligned}$$



(a) I倍内插器系统



(b) I倍内插器等效系统

$$Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega I}) = X(e^{j\omega I})H_I(e^{j\omega I})$$
$$X_2(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})$$