

Quantum Error Correction Codes and Statistical Physics

Jian-Ming Zheng 2021012870

Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China

目录

1	Introduction	1
2	Preliminaries	2
2.1	Hilbert space of a qubit system on a lattice	2
2.2	Stablizer formalism	2
3	Mapping to a statistical physics model	4
3.1	Statistical physics of error correction in surface coding	4
3.1.1	The error threshold	4
3.1.2	Derivation of the model	5
4	Formal generalization	7
4.1	The generalized stat mech mapping	8
4.2	Example: toric code (revisited)	10
4.3	Example: 3D toric code and RPGM	10
5	Order parameters and phase transition	10
5.1	Maximum probability and maximum likelihood decoding	11
5.2	Minimum free energy and minimum energy decoding	11
5.3	The error correction threshold as a phase transition	12

1 Introduction

量子纠错码 (quantum error correction code, QEC) 是量子信息科学中重要的领域。在 2001 年, Dennis, Kitaev, Landahl, Preskill 四人提出可以将拓扑保护的表面编码映射到随机耦合的 Ising 模型, 其中错误的阈值 (threshold) 可对应于 Ising 模型的相变点 [1]。事实上, 对于量子

纠错码，到统计力学模型的映射是普遍的特性，更仔细地说，任何在 Pauli 算符噪声下的稳定子编码 (stablizer code) 都可以映射到统计力学模型进行研究 [2]。本文对这个方法进行介绍，并意图对其有更清晰、深刻的理解。

2 Preliminaries

本章节用于整理论文的符号约定与基本概念。

2.1 Hilbert space of a qubit system on a lattice

本文中考虑的 Hilbert 空间 \mathcal{H} 由 n 个格点 (site, 或 vertex) 上的 d 维 Hilbert 空间 \mathcal{H}_i 直积而成，每个格点上的 d 维 Hilbert 空间被称为一个 qudit。同时，我们也有作用在这个希尔伯特空间上的 Pauli 算符组成的集合。令作用于一个格点上的 Pauli 算符模去相位后构成的集合为 \mathcal{P} ，则全局希尔伯特空间上的 Pauli 算符集合为：

$$\mathcal{P}^n = \otimes_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}. \quad (1)$$

Pauli 算符在相差一个相位的意义上相互对易。为了描述 Pauli 算符的对易特性，我们定义标量对易子 $[[\cdot, \cdot]]$ ，使得 $AB = [[A, B]]BA$ ，即

$$\begin{aligned} [[\cdot, \cdot]] : \mathcal{P} \times \mathcal{P} &\rightarrow \mathbb{C} \\ [[A, B]] &= \frac{1}{d} \text{Tr}[AB]. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ 。可以看到， $[A, B]$ 在 A, B 分别做 $U(1)$ 变换时不变。标量对易子是 $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ 上定义良好的函数，且有以下性质：

$$[[A, BC]] = [[A, CB]] = [[A, B]] \cdot [[A, C]]. \quad (3)$$

对于一个 n -qudit 的 Pauli 算符，我们还可以定义它的算符权重 (weight, 有时也称为 operator size)。如果在这个算符作用下 $n - w$ 个 qudit 被恒等算符作用， w 个被非平凡的 Pauli 算符作用，则称该算符的权重为 w 。

2.2 Stablizer formalism

在本文我们考虑的纠错码都是稳定子编码 (stablizer code)。一个 stablizer code 由 \mathcal{P}^n 的一个子集 \mathcal{S} 生成，其编码子空间由所有在稳定子作用下不变的态组成，即对于任意 $s \in \mathcal{S}$ 都有 $s|\psi\rangle = |\psi\rangle$ 。稳定子构成的集合一定是一个阿贝尔群，并满足 $\mathcal{S} \cap \{\omega I\} = \{I\}$ ，其中 ω 为 d 次本原单位根。

对于编码子空间，其中的某些态用于编码逻辑信息，而作用于其上的算符 $L \in \mathcal{P}^n$ 被称为逻辑 Pauli 算符，它们必须与所有的稳定子对易，但不属于稳定子，即逻辑 Pauli 算符会不平凡地作用于编码子空间上。

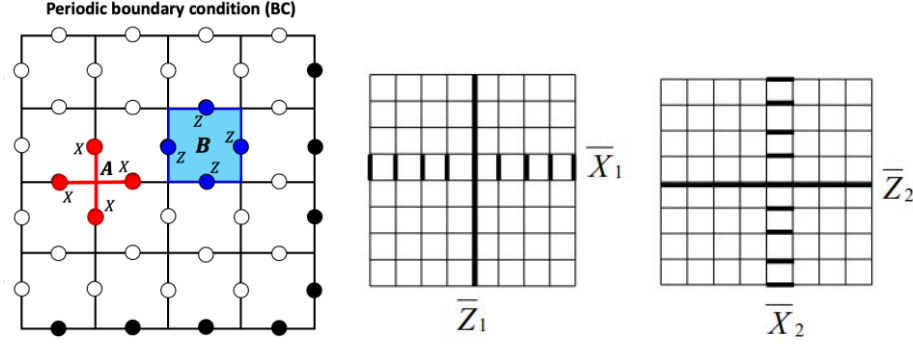


图 1: 左: $L = 5$ 的 Toric code; 右: Toric code 的逻辑 Pauli 算符。 \bar{Z} 算符使所有加粗的 qubit 被作用了一个 Z 算符, 而 \bar{X} 使所有加粗的 qubit 被作用了一个 X 算符。

在错误发生时, 譬如对于编码子空间中的一个态 $|\psi\rangle$, 发生了一个错误 $E \in \mathcal{P}^n$, 使得这个态变成了 $E|\psi\rangle$ 。稳定子机制的纠错第一步为测量所有稳定子生成元, 在某个生成元 S_k 上会输出一个数字 $\llbracket S_k, E \rrbracket$, 并不改变这个态。这个输出只依赖于出现的错误 E , 于是依靠这个输出, 我们可以进行针对性的纠错。我们把这些错误信号的输出称为“症状” (syndrome)。

Example 1 Toric code. 如图1, 考虑一个有长宽为 L 周期性边界条件的格点系统, 在每个格点间的连接线 (*link*) 上都有一个二维希尔伯特空间 (*qubit*), 其编码子空间为以下哈密顿量的基态:

$$H = - \sum_v A_v - \sum_p B_p. \quad (4)$$

其中:

$$A_v = \prod_{l \in v} X_l, \quad B_p = \prod_{l \in p} Z_l. \quad (5)$$

l 为 Pauli 算符所作用的 *link* 上的 *qubit* 的标记, 而 A_v 与 B_p 为这个编码的稳定子生成元。

接下来我们考虑基态 (或编码子空间) 的简并度, 以确定其编码的逻辑比特数。对于 A_v , 在基态时只允许对应顶角有偶数个 *link* 被 Z 作用, 即所有 X 本征值为 -1 的 *link* 构成闭环。取任意一种闭环构型为 $|c\rangle$, 则基态可写成:

$$|GS\rangle = \sum_c a_c |c\rangle. \quad (6)$$

由于这种构型要在稳定子 B_p 作用下不变, 我们得到:

$$B_p |GS\rangle = \sum_c a_c |c + \partial p\rangle = \sum_c a_{c+\partial p} |c\rangle. \quad (7)$$

这意味着, 相互同调的闭环构型有相同的系数, 即 Toric code 的基态同构于 $H_1(T^2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, 为四重简并, 且编码两个逻辑比特。逻辑 Pauli 算符为 $\bar{X}_1, \bar{Z}_1, \bar{X}_2, \bar{Z}_2$, 如图1所示。

对于稳定子, A_v 不改变基态构型, 而 B_p 在格点上形成一个平凡的环, 不改变基态。而 \bar{Z} 算符在格点上形成非平凡的环, 在基态上的作用不平凡, 这使得逻辑算符可以对逻辑比特进行操作。

在纠错时，我们可以按照此前的纠错程序得到 *syndrome*，在这个例子里，如果没有错误，那么所有稳定子生成元都会得到 +1 测量值。而 *syndrome* 即为某个测出 -1 的格点。比如，如果错误为一条 Z 算符开链，那么 *syndrome* 在这条链的端点。由于所有以探测到的 *syndrome* 为端点的链都等价，我们只需要任意作用一条这样的链就可以修复错误。

3 Mapping to a statistical physics model

本节我们讨论如何利用统计力学模型理解稳定子编码对噪声的纠错。我们考虑由一些稳定子生成元 $\{S_k\}$ 生成的纠错码，而噪声为 p_i ，其中 p_i 为在第 i 个格点上发生一个 Pauli 错误的概率。对于一个任意的错误 $E = E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_n \in \mathcal{P}^n$ ，其发生的概率为：

$$\text{Prob}(E) = \prod_{i=1}^n p_i(E_i). \quad (8)$$

在本节中我们首先考虑一个 qubit 系统，使用表面编码（如 toric code）。我们会研究在这种编码下什么样的 *syndrome* 在原则上可以被纠错，进而保证被编码的信息不受错误损害。我们会定义一个序参量来分辨两个相：其中一个可以使得被编码的信息被稳定地存储，另一个相会使得错误不可避免地损害被编码的量子信息。而相变点即对应错误的 threshold。之后，我们会给出一个更通用的到统计力学模型的映射形式，包括更普遍的稳定子编码系统以及对相互关联的噪声的讨论。

3.1 Statistical physics of error correction in surface coding

3.1.1 The error threshold

我们首先考虑表面编码的 qubit 系统，在 $L \times L$ 的格点系统的每个 link 上都存在一个 qubit。每个比特发生错误是独立的，可以分为两类：比特翻转 (X) 以及相移 (Z)，这两种错误也是无关联的，且发生的概率相同，即 $p(X) = p(Z) = p$ 。对于 1 个 qubit 的态 ρ ，这相当于经过一个量子信道 \mathcal{E} ：

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)^2 \rho + p(1-p)Z\rho Z + p(1-p)X\rho X + p^2 Y\rho Y. \quad (9)$$

考虑错误发生于一系列 link 连成的链 E 上，我们定义这条链的特征函数为 $n_E(l)$ ，其中 l 为一条 link，当 $l \in E$ 时， $n_E = 1$ ，否则 $n_E = 0$ 。这样的错误发生的概率为：

$$\text{Prob}(E) = \prod_l (1-p)^{1-n_E(l)} p^{n_E(l)} = \left[\prod_l (1-p) \right] \prod_l \left(\frac{p}{1-p} \right)^{n_E(l)}. \quad (10)$$

首先，我们在表面编码的系统中考虑错误的阈值。为此我们引入时间维度的格点，即在每个整数时间 t 的“等时面”上生活着我们的类空格点系统，这时候我们的 qubit 系统可以看作生活在“类时”表面 tx, ty 上，而 *syndrome* 的检测发生于两个时间 t 和 $t+1$ 之间。对于每一个格点 v

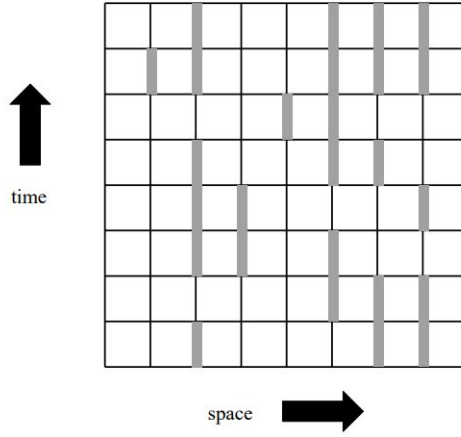


图 2: 引入时间维度后的格点系统。其中阴影的 link 表示这个格点的 syndrome: $\prod_{l \in v} X_l = -1$

或 plaquette, 我们测量它的 syndrome。如图2, 定义 syndrome 链 S , 它由所有连接 syndrome 为-1 格点的时间方向的 link 组成。

对于一条错误链 E , 由于我们随时进行 syndrome 测量, 如果错误产生, 错误链成对端点的 defect 随着 syndrome 检测和纠错的过程在格点上运动最终湮灭。它们的运动轨迹在时空上形成一个环, 这事实上就是 $S + E$ (S 与 E 的不交并, 其中有些环是拓扑平凡的 (能连续地缩成一点), 但有些环不平凡。拓扑不平凡的环的出现会导致无法纠错, 因为它们改变了逻辑比特。等价地说, $\partial(S + E) = 0$, $\partial S = \partial E$ 。即, $E = S + C$, C 为一个时空上的环。但 syndrome 无法分辨两个同调的错误链, 所以如果猜得的错误链为 $E' = S + C'$, 而 $E + E' = C + C'$ 是平凡的, 那么纠错成功; 反之, 纠错失败。所以, 纠错成功与否依赖于我们能不能成功判断 C 的同调类。对于一个 syndrome 链 S , 对于任意一条可能的错误链 $E' = S + C'$, C 属于同调类 h 的概率为:

$$\text{Prob}(h|S) = \frac{\sum_{C' \in h} \text{Prob}(S + C')}{\sum_{C'} \text{Prob}(S + C')}. \quad (11)$$

一言以蔽之, 纠错最优的策略为猜测有最高概率的同调类。

现在我们给出错误阈值的判据。对于出现 qubit 错误的概率, 我们定义它在阈值以下, 当且仅当在 L 趋于无穷时纠错失败的概率趋于零。也就是说, 在阈值以下, 我们猜对同调类的概率在 $L \rightarrow \infty$ 时趋于 1。换句话说, 如果我们猜的错误链为 $E' = E + D$, 定义 $\text{Prob}[(E + D)|E]$ 为 $E + D$ 与 E 同调的概率, 则错误阈值的条件为在 $L \rightarrow \infty$ 时下式成立:

$$\sum_E \text{Prob}(E) \sum_{D \text{ non-trivial}} \text{Prob}[(E + D)|E] = 0. \quad (12)$$

3.1.2 Derivation of the model

现在对于一个确定的 E , 我们计算出现一条同调于它的错误链 E' 的概率, 即 $E' = E + C$, C 是一条没有边界的链。也就是说, 我们计算一个 C 形成的概率分布。 $n_C(l) = 1, n_E(l) = 0$, 即

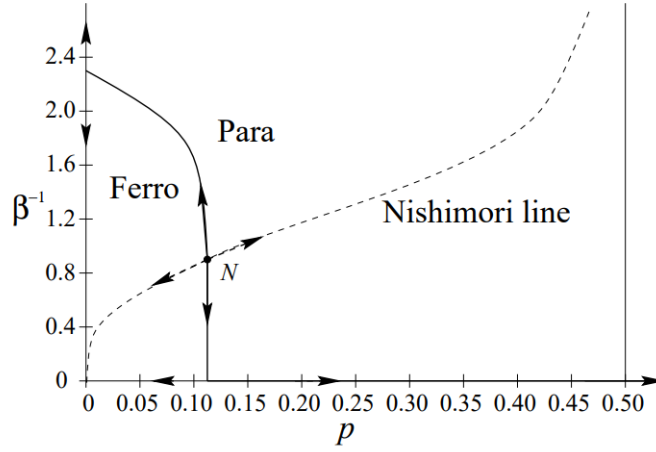


图 3: Random-bond Ising model 的相图。温度 β^{-1} 为纵轴， p 为横轴，虚线即为 Nishimori 曲线 $e^{-2\beta} = p/(1-p)$ 。

$l \in E', l \notin E$ 这个事件的概率为：

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^{n_C(l)}. \quad (13)$$

但 $n_C(l) = 1, n_E(l) = 1$ 发生的概率为：

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_C(l)}. \quad (14)$$

则：

$$\text{Prob}(E'|E) \propto \prod_l \exp J_l u_l, \quad u_l = 1 - 2n_C(l) \in \{-1, 1\}. \quad (15)$$

以及：

$$e^{-2J_l} = \begin{cases} p/(1-p), & l \notin E, \\ (1-p)/p, & l \in E. \end{cases} \quad (16)$$

由于 C 为一个环，我们有约束 $\prod_{l \in v} u_l = 1, \forall v$ 。我们也可以考虑对偶的格点。在二维对于每个 link l 都有一个对偶的 link l^* ，所有对偶的 link 构成对偶网格 (dual lattice)。同样，一个格点 s 也有与其对偶的方格 p^* ，一个方格 p 有对偶的格点 v^* 。则对 u_l 的约束为：

$$\prod_{l^* \in p^*} u_{l^*} = 1. \quad (17)$$

为了对哈密顿量施加这个约束，我们对于每个对偶格点 v_i^* 都引入变量 $\sigma_i \in \{1, -1\}$ ，使得对每个 link (i, j) ，有 $u_{ij} = \sigma_i \sigma_j$ 。利用微分形式的语言，我们的约束即为 $du = 0$ ，其中 u 为一个 1-形式， d 为离散化的外微分算符。引入 σ 相当于假设 u_{ij} 为一个 exact 的 1-形式，即现在 $u = d\sigma$ 。也就是说，环 C 是同调意义上平凡的，使得我们不考虑所有上同调意义上不平凡的 closed form。

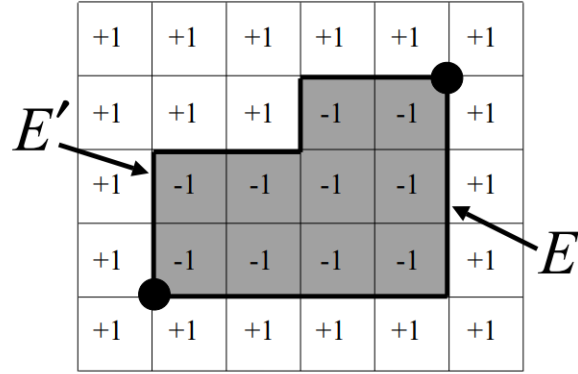


图 4: 错误链 E 和 E' 的图形。 $E + E'$ 构成一个 domain wall。

现在一条与 E 有共同边界的 E' 的统计力学由以下配分函数描述：

$$Z[J, \eta] = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left(J \sum_{\langle ij \rangle} \eta_{ij} \sigma_i \sigma_j \right). \quad (18)$$

其中 $e^{-2J} = p/(1-p)$ 。而 η_l 在对偶的错误链上时取 -1 ，不在时取 1 。如果现在 E 是随机产生的，那么 η_l 为一个随机变量：

$$\eta_l = \begin{cases} 1, & \text{with probability } 1-p, \\ -1, & \text{with probability } p. \end{cases} \quad (19)$$

这即为随机耦合的 Ising 模型的配分函数，其无序参量 η 或 E 是淬火的随机变量 (quenched disorder)。对于这个模型，条件 $e^{-2J} = e^{-2\beta} = p/(1-p)$ 被称为 Nishimori 条件 [3]。对于一般的随机耦合 Ising 模型，其 $\beta - p$ 相图如图3所示。

为了更好地从统计力学角度理解这个模型，我们回到原先的格点，则现在 Ising 模型的自旋生活在方格上，给定的错误链 E 构型作为 Ising 模型的随机参量。如果两个方格间的对偶 link 穿过一条属于 E 的 link，那么它们的耦合为反铁磁的，即两个方格上的自旋倾向于反排列。而此时 E' 的激发对应于在 E 的边界缺陷之间产生，即不在 E 上的 link (i, j) 使得 $\eta_{ij} \sigma_i \sigma_j = -1$ 。这样，被激发的 link 构成的 E' 与原先的 E 构成一个 domain wall，其内部与外部的方格分别自旋方向相同，而内外部方格之间自旋取向相反。

4 Formal generalization

在上一节我们推导出了 toric code 在 bit flip 噪声下的等效 Ising 模型，但我们没有给出其序参量和相变点，及其和错误阈值的对应。在这一节中我们希望推广这个映射，并更仔细地讨论模型的统计物理。

4.1 The generalized stat mech mapping

我们依然建立一个自旋系统模型。对每一个 stablizer, 我们分配一个自旋自由度 c_k , 在 \mathbb{Z}_d 中取值。所以我们自旋模型的 Hilbert 空间为 $\times_k \mathbb{Z}_d$ 。

对于一个错误 E , 我们给出一个哈密顿量的 ansatz:

Definition 1 无关联噪声的等效哈密顿量 对于一个 Pauli 错误 $E \in \mathcal{P}^n$, 以及一系列耦合强度 $\{J_i: \mathcal{P}_i \rightarrow \mathbb{R}\}$, 无关联噪声的等效哈密顿量定义为:

$$\begin{aligned} H_E(\vec{c}) &= - \sum_{i, \sigma \in \mathcal{P}_i} J_i(\sigma) \llbracket \sigma, E \rrbracket \prod_k \llbracket \sigma, S_k \rrbracket^{c_k}. \\ &= - \sum_{i, \sigma \in \mathcal{P}_i} J_i(\sigma) \llbracket \sigma, E \rrbracket \prod_k S_k^{c_k}. \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\vec{c} \in \times_k \mathbb{Z}_d$ 标记自旋系统的态, E 在这个模型中是一个无序参数。其中第二个等号使用了标量对易子的性质。

对于 $d = 2$, 即量子比特的情况, 这对应一个随机耦合的 Ising 模型。具体来说, 自旋自由度为 $s_k = (-1)^{c_k}$, 哈密顿量为:

$$H_E(\vec{s}) = - \sum_{i, \sigma \in \mathcal{P}_i} J_i(\sigma) \llbracket \sigma, E \rrbracket \prod_{\llbracket \sigma, \prod_k S_k \rrbracket = -1} s_k. \quad (21)$$

对于这个哈密顿量, 值得指出的一点是如果我们的 stablizer 是局域的算符, 即, 每个格点都只被有限数目的 stablizer 作用 (如 toric code), 则这个哈密顿量也是局域的: 相互作用只涉及临近的有限个格点。

在这个构造中, 每个相互作用项对应于一个格点以及 $\sigma \in \mathcal{P}_i$ 。这一点与现在我们处理的是不相关联的噪声相关, 在相互关联的噪声的情况下会有长程的自旋相互作用。

对于更一般的映射, 我们依然有 Nishimori 条件

Definition 2 无关联噪声的 Nishimori 条件 对于温度倒数 β 以及耦合强度 $\{J_i\}$, 第 i 个格点上错误 τ 对应的概率为 $p_i(\tau)$, 则 $\{J_i\}$ 满足的 Nishimori 条件为:

$$\beta J_i(\sigma) = \frac{1}{|\mathcal{P}|} \sum_{\tau} \log p_i(\tau) \llbracket \sigma, \tau^{-1} \rrbracket, \quad (22)$$

对于任意 i 和 $\sigma \in \mathcal{P}_i$ 成立。

那么, 为什么这个模型可以反应噪声的统计物理呢? 下面我们证明这个映射的关键性质:

Theorem 1 无关联噪声统计力学的基本定理 对于 (20) 式中的哈密顿量, 若其满足 Nishimori 条件 (22), 那么与 E 处于一个逻辑类的错误发生的概率即为对应的配分函数, 即:

$$Z_E = \text{Prob}(\bar{E}) = \sum_{C \text{ trivial}} \text{Prob}[(E + C) | E]. \quad (23)$$

其中 \bar{E} 为与 E 逻辑等价 (同调等价) 的所有错误。

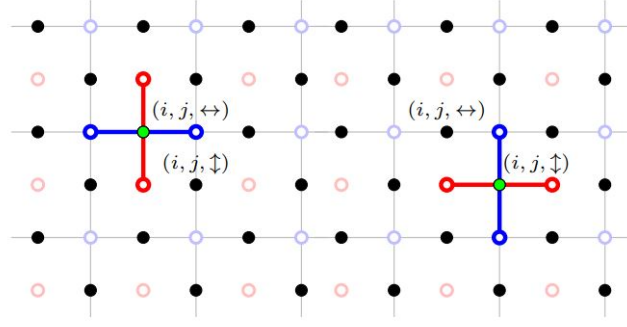


图 5: 2D toric code 中自旋和 qubit 的分布。其中在 link 上的实心圆点为 qubit，格点上的红色空心圆点为 Z 子格，方格中心（或对偶格点上）的蓝色空心圆点为 X 子格。在 Cartesian 坐标下，用 (i, j, \leftrightarrow) 表示在水平的 link 上的 qubit，它们贡献于 X 子格间的水平耦合以及 Z 子格间的竖直耦合；而用 (i, j, \downarrow) 表示在竖直的 link 上的 qubit，它们贡献于 Z 子格间的水平耦合以及 X 子格间的竖直耦合。

Proof 1 首先我们注意到 *Nishimori* 条件是 $\log p_i$ 相对于 *Pauli* 群的 *Fourier* 变换，应用：

$$\sum_{\sigma} \llbracket \sigma, \rho \rrbracket = |\mathcal{P}| \delta_{\rho, I}, \quad (24)$$

可以得到：

$$\sum_{\sigma} \beta J_i(\sigma) \llbracket \sigma, E \rrbracket = \log p_i(E_i). \quad (25)$$

则：

$$\begin{aligned} e^{-\beta H_E(\vec{0})} &= \exp \left(\sum_{i, \sigma \in \mathcal{P}_i} \beta J_i(\sigma) \llbracket \sigma, E \rrbracket \right) \\ &= \exp \left(\sum_i \log p_i \right) = \text{Prob}(E). \end{aligned} \quad (26)$$

由于哈密顿量在 *stablizer* 作用下的变换有如下规律：

$$H_{ES_k}(\vec{c}) = H_E(\vec{c} + \hat{k}). \quad (27)$$

其中 $\hat{k} = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \times_k \mathbb{Z}_d$ 为第 k 个 *stablizer* 对应自旋的单位向量。我们可以得到：

$$Z_E = \sum_{\vec{c}} e^{-\beta H_E(\vec{c})} = \sum_{S \in \mathcal{S}} e^{-\beta H_{E+S}(\vec{0})} = \text{Prob}(\bar{E}). \quad (28)$$

这个对偶建立了发生在某个同调类之内的错误的概率和配分函数之间的关系，这使得我们可以自然地研究这个统计物理模型的性质来判断能否成功纠错。我们会在第5节详细讨论。

4.2 Example: toric code (revisited)

在前面我们讨论了量子噪声的统计物理的一般形式。在本节的最后，我们使用两个模型作为例子：2D 和 3D 的 toric code 模型，其中 2D toric code 我们此前已有讨论，在本节我们将其作为一般性映射的特例来研究。

由于 toric code 有两套 stablizer，如 (5) 式，我们有一套格点，分别标记为： X 子格，自旋标记为 $\{s_k^X\}$ ；和 Z 子格，自旋标记为 $\{s_k^Z\}$ （如图5所示）。

直接带入 (20) 式，得到：

$$\begin{aligned} H_E = - \sum_l (& J(I) + J(X) \llbracket X, E_l \rrbracket \prod_{l \in \partial p} s_p^Z \\ & + J(Z) \llbracket Z, E_l \rrbracket \prod_{v \in \partial l} s_v^X \\ & + J(Y) \llbracket Y, E_l \rrbracket \prod_{l \in \partial p} s_p^Z \prod_{v \in \partial l} s_v^X). \end{aligned} \quad (29)$$

用 Cartesian 坐标表示出来得到：

$$\begin{aligned} H_E = - \sum_{i,j} (& 2J(I) + J(X) \llbracket X, E_{i,j,\leftrightarrow} \rrbracket s_{i,j}^Z s_{i,j+1}^Z + J(X) \llbracket X, E_{i,j,\updownarrow} \rrbracket s_{i,j}^Z s_{i+1,j}^Z \\ & + J(Z) \llbracket Z, E_{i,j,\leftrightarrow} \rrbracket s_{i,j}^X s_{i-1,j}^X + J(Z) \llbracket Z, E_{i,j,\updownarrow} \rrbracket s_{i,j}^X s_{i,j-1}^X \\ & + J(Y) \llbracket Y, E_{i,j,\leftrightarrow} \rrbracket s_{i,j}^Z s_{i,j+1}^Z s_{i,j}^X s_{i-1,j}^X + J(Y) \llbracket Y, E_{i,j,\updownarrow} \rrbracket s_{i,j}^Z s_{i+1,j}^Z s_{i,j}^X s_{i,j-1}^X). \end{aligned} \quad (30)$$

这里 $E_{i,j,\leftrightarrow}$ 和 $E_{i,j,\updownarrow}$ 分别表示错误 E 作用域第 (i, j) 个水平和竖直 link 上。Nishimori 条件给出：

$$\begin{aligned} J(I) &= \frac{1}{4\beta} \log p(I)p(X)p(Y)p(Z), \\ J(X) &= \frac{1}{4\beta} \log \frac{p(I)p(X)}{p(Y)p(Z)}, \\ J(Z) &= \frac{1}{4\beta} \log \frac{p(I)p(Z)}{p(X)p(Y)}, \\ J(Y) &= \frac{1}{4\beta} \log \frac{p(I)p(Y)}{p(X)p(Z)}. \end{aligned} \quad (31)$$

如果 $p(X) = p, p(I) = 1 - p, p(Y) = p(Z) = 0$ ，我们就回到了 [1] 中的结果。

4.3 Example: 3D toric code and RPGM

本小节介绍 3D toric 与随机方格规范模型（random plaquette gauge model, RPGM）的映射。

5 Order parameters and phase transition

本节介绍统计物理模型的序参量和相变点，及其与纠错阈值和 maximum likelihood decoder 之间的关系。

在前面一节我们讨论了统计物理模型的配分函数与发生同一逻辑类错误的概率的联系。为了确定能否成功纠错，我们需要知道一个错误 E' 和 E 在不同的同调类中的概率能否在体系线度趋于无穷，即 $L \rightarrow \infty$ 时趋于零。而两个不同的同调类的差别被相应同调类的配分函数对应的自由能的差值决定。

5.1 Maximum probability and maximum likelihood decoding

正如在3.1.1小节提到的，在纠错时对于测得的 syndrome，我们需要猜测对应 syndrome 条件下最可能的错误。这种纠错的算法被称为 maximum probability(MP) decoding。

一般来说，一个 syndrome 可以对应多个可能的错误，MP 算法并不是最优的，因为我们只需要猜测最可能的逻辑类。猜测错误最可能的逻辑类的算法被称为 maximum likelihood(ML) decoding。

一般来说，一个 decoding 是一个映射，将测得的 syndrome S 映射到 \mathcal{P}^n 。设 C_S 为任意一个 syndrome 为 S 的错误，如果作用任意一个作用于逻辑比特 H 上的逻辑 Pauli 算符 L_H ，则 $C_S L_H$ 为一个在逻辑类 H 中的错误，而与之同属一个逻辑类的所有错误构成这个逻辑类，即 $\{\overline{C_S L_H}\}$ 。一个 decoder 即为映射 $S \mapsto C_S L_{\delta(S)}$ 。其中 δ 将一个 syndrome 映射到一个逻辑类。使用这种 notation，MP decoder 即为：

$$\delta_{MP}(S) = \arg \max_H \max_{E \in \overline{C_S L_H}} \text{Prob}(E). \quad (32)$$

而 ML decoder 为：

$$\delta_{ML}(S) = \arg \max_H \text{Prob}(\overline{C_S L_H}). \quad (33)$$

5.2 Minimum free energy and minimum energy decoding

现在考虑我们的统计力学模型，哈密顿量为 H_E ，温度 β_N 满足 Nishimori 条件。我们定义 β -minimum free energy(β -MFE) decoding：

$$\delta_{\beta-MFE}(S) = \arg \min_H F_{C_S L_H}(\beta). \quad (34)$$

其中 $F_E(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log Z_E(\beta)$ 是由热力学关系得到的自由能。

使用定理1，得到：

$$F_E(\beta_N) = -\frac{1}{\beta_N} \log \text{Prob}(\overline{E}). \quad (35)$$

可以看出，事实上这就是之前说过的 ML decoding，因为自由能是一个随 $\text{Prob}(\overline{E})$ 单调递减的函数。

由热力学关系，当 $T \rightarrow 0$ ，即 $\beta \rightarrow \infty$ 时，自由能和能量最小值相等，即：

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F_E(\beta) = \min S H_E(\vec{s}). \quad (36)$$

再次使用定理1得到：

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F_E(\beta) = \min_{E' \in \overline{E}} \left(-\frac{1}{\beta_N} \log \text{Prob}(E') \right). \quad (37)$$

这说明， ∞ -MFE decoder 即为 minimum energy decoder，也等价于 MP decoder。

5.3 The error correction threshold as a phase transition

现在，我们利用上面所提到的 decoding scheme 来讨论纠错的阈值。由于在热力学极限下纠错成功的概率会有很大的变化，我们猜测是否可以从错误类概率看出这个变化。而由于这些概率事实上是我们统计力学模型中的配分函数，我们期待这对应于一个相变。为了更详细地解释这一点，我们考虑两个不同逻辑类错误， E 和 EL_m ，对应的自由能的变化：

$$\begin{aligned} \Delta_m(E) &= F_{EL_m}(\beta_N) - F_E(\beta_N) \\ &= -\frac{1}{\beta_N} \log Z_{EL_m} + \frac{1}{\beta_N} \log Z_E. \end{aligned} \quad (38)$$

其中 L_m 是一个非平凡的逻辑算符，在 toric code 中，这就是图1所示的 $X, Z, \overline{X}, \overline{Z}$ 算符，而 $\Delta_m(E)$ 事实上就是形成一个 domain wall 需要的自由能。。我们把它当作一个（无）序参量，在 disorder average 下，即 $\Delta_m = \langle \Delta_m(E) \rangle_E$ ，我们期望它在错误参数 θ 低于阈值 θ_t 时趋于无穷，而在 $\theta > \theta_t$ 时趋于 0。我们下面证明这两个命题。

首先我们证明在 $\theta < \theta_t$ ，即可以成功纠错时，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_m = \infty$ 。首先，配分函数与 $\Delta_m(E)$ 只依赖于 E 的逻辑类，我们可以在每个错误的逻辑类中找一个“代表”， $\{D_s L_l\}$ ，其中 s 为 syndrome， l 表示逻辑类， D_s 则代表 MLD 对应的 Pauli 算符。我们将 $\text{Prob}(\overline{D_s L_l})$ 记为 $\text{Prob}(s, l)$ 。则可以看出 Δ_m 事实上就类似于信息论中的 relative entropy：

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \frac{1}{\beta_N} \sum_{s, l} \text{Prob}(s, l) \log \frac{\text{Prob}(s, l)}{\text{Prob}(s, l + m)} \\ &\geq \frac{1}{\beta_N} \sum_l \text{Prob}(l) \log \frac{\text{Prob}(l)}{\text{Prob}(l + m)}. \end{aligned} \quad (39)$$

由于 $\text{Prob}(l = 0)$ 即为 MLD 成功的概率，在 threshold 以下 $\text{Prob}(l=0) \rightarrow 1$ ，故 $\Delta_m \rightarrow \infty$ （这时逻辑类只能为 0，故 $\log(1/\text{Prob}(m \neq 0)) \rightarrow \infty$ ）。

然而，在 threshold 以上时我们不能简单考虑 quenched average。考虑一个编码，其中一个不太可能发生的 syndrome 可以被确定地完美 decode，而所有其他综合症都会导致一个逻辑错误。这显然是高于 threshold 的，但现在 $\Delta_m = \infty$ 。

所以，我们不能只考虑 quenched average。我们下面引入另一种度量来说明 $\Delta_m(E)$ 的收敛性。

假设 $\Delta_m(E)$ 在 $\tilde{\Delta}_m$ 集中，即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(|\Delta_m(E) - \tilde{\Delta}_m| \leq \epsilon \right) = 1 \quad \forall \epsilon > 0. \quad (40)$$

现在，我们定义相变发生处对应于 $\tilde{\Delta}_m$ 这个值的跳跃。此时由于 $\Delta_m(E)$ 是无界的， $\tilde{\Delta}_m$ 不一定需要是均值 Δ_m 。在上面的例子中， $\Delta_m = \infty$ ，而 $\tilde{\Delta}_m = 0$ 。在这种新定义下，我们考察 $\tilde{\Delta}_m$ 在 threshold 上下的行为。

Theorem 2 Divergence/convergence in probability 对于一个纠错码，它在错误阈值以下当且仅当：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(\Delta_m(E) \geq t) = 1 \quad t, m \neq 0. \quad (41)$$

它在错误阈值以上当且仅当：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(|\Delta_m(E)| \leq \epsilon) = 1 \quad \epsilon > 0, m \neq 0. \quad (42)$$

Proof 2 MLD 的成功率为 $\text{Prob}(l = 0)$ 。首先我们发现：

$$\Delta_m(E) \frac{1}{\beta_N} \log \frac{\text{Prob}(l|s)}{\text{Prob}(l+m|s)}. \quad (43)$$

而 MLD 规定 $\text{Prob}(l = 0|s) \geq \text{Prob}(m|s)$ 。如果我们考虑一个 logical subspace 为 K 维的 qudit 系统，则 $\text{Prob}(l = 0|s) \geq 1/d^K$ 。这个编码在 threshold 以下即为 $\text{Prob}(l = 0|s) \rightarrow 1$ ，这等价于：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}[\text{Prob}(l = 0|s) \geq 1 - \gamma] = 1 \quad \forall \gamma > 0. \quad (44)$$

其中，括号里面的概率为确定 syndrome 时的概率，而外部的概率是对于 syndrome 而言的，即，这个概率的含义为，出现对于任意 $\gamma > 0$ 都有 $\text{Prob}(l = 0|s) \geq 1 - \gamma$ 的 syndrome 的概率。这个等式事实上在说，在热力学极限下，这个对于 syndrome 的分布在 $\text{Prob}(l = 0|s) = 1$ 时达到峰值。这等价于：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(\Delta_m(E) \geq t) = 1 \quad \forall t, m \neq 0. \quad (45)$$

这就是系统处于无序相的表述。其中参数之间的关系为：

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\beta_N} \log \frac{1 - \gamma}{\gamma}, \\ \gamma &= 1 - \frac{1}{1 + e^{-\beta_N t}(K - 1)}. \end{aligned} \quad (46)$$

其中表述 44 推出表述 45 使用第一个映射，表述 45 推出 44 使用第二个映射。类似地我们可以得到 threshold 以上时，我们有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}[\text{Prob}(l = 0|s) \leq 1/K + \eta] = 1 \quad \forall \eta > 0. \quad (47)$$

等价于：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(|\Delta_m(E)| \leq \epsilon) = 1 \quad \forall \epsilon > 0. \quad (48)$$

前者推出后者使用条件：

$$\epsilon = \frac{1}{\beta_N} \log \frac{1 + \eta K}{1 - \eta K(K - 1)}, \quad (49)$$

后者推出前者使用条件：

$$\eta = \frac{1}{(K - 1)e^{-\beta_N \epsilon}} - \frac{1}{K}. \quad (50)$$

至此，我们证明了纠错的阈值对应于统计物理模型的相变点。

参考文献

- [1] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl, J. Preskill, [Topological quantum memory](#), Journal of Mathematical Physics 43 (9) (2002) 4452–4505. doi:10.1063/1.1499754.
URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1499754>
- [2] C. T. Chubb, S. T. Flammia, [Statistical mechanical models for quantum codes with correlated noise](#), Annales de l’ Institut Henri Poincaré D, Combinatorics, Physics and their Interactions 8 (2) (2021) 269–321. doi:10.4171/aihpd/105.
URL <http://dx.doi.org/10.4171/AIHPD/105>
- [3] H. Nishimori, [Internal Energy, Specific Heat and Correlation Function of the Bond-Random Ising Model](#), Progress of Theoretical Physics 66 (4) (1981) 1169–1181. arXiv:<https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/66/4/1169/5265369/66-4-1169.pdf>, doi:10.1143/PTP.66.1169.
URL <https://doi.org/10.1143/PTP.66.1169>